HORST STÖCKER

TOUTE LA PHYSIQUE

HORST STÖCKER
FRANCIS JUNDT
GEORGES GUILLAUME

TOUTE LA PHYSIQUE

Partie I Mécanique

1 Cinématique

La **cinématique** est l'étude du mouvement d'un corps en fonction du temps, indépendamment de toute cause pouvant le provoquer ou le modifier. L'objet de la cinématique est la description mathématique du mouvement à partir des notions de position (rayon vecteur) par rapport à un repère, de trajectoire (vecteur déplacement), de temps et des vecteurs vitesse et accélération.

1.1 Description du mouvement

Mouvement : modification de la position d'un corps pendant un intervalle de temps. Pour sa description, on attribue à la **position** d'un corps dans un **référentiel** une ou plusieurs valeurs numériques (**coordonnées**), dont la variation au cours du temps caractérise le mouvement.

Mouvement uniforme : le corps couvre des distances égales pendant des intervalles de temps égaux. Antonyme : **mouvement accéléré** .

Référentiel : pour déterminer si un objet est en mouvement, il est nécessaire de repérer sa position par rapport aux objets qui l'entourent à chaque instant. L'association d'un **repère d'espace** (par ex. [O, $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$]) et d'un repère de **temps** t constitue un référentiel R.

1.1.1 Repères d'espace

1. Dimension des espaces

Dimension d'un espace : le nombre de valeurs numériques nécessaires pour déterminer la position d'un point dans cet espace.

- Une droite est un espace à une dimension, une surface est un espace à deux dimensions et un volume est un espace à trois dimensions.
- À la surface de la terre un lieu peut être défini, par exemple, par sa longitude et sa latitude. La surface de la terre est un espace à deux dimensions. Pour préciser entièrement un lieu, il faut également donner son altitude.
- L'espace, dans lequel nous nous déplaçons, est un espace à trois dimensions. Un mouvement plan est un mouvement à deux dimensions, un mouvement sur un rail est un mouvement à une dimension. Une généralisation ultérieure utilise un espace à quatre dimensions (espace-temps) dont les coordonnées sont les trois coordonnées d'espace, une coordonnée de temps ainsi que le point de dimension nulle.

2. Systèmes de coordonnées

Systèmes de coordonnées : utilisés pour la description mathématique du mouvement, ils attribuent des valeurs numériques à la position d'un corps (plus généralement : position à laquelle **un évènement** se produit). De ce fait, le mouvement d'un mobile peut être décrit par une fonction $x(t)$ qui, à chaque instant t, lui affecte la coordonnée $x(t)$.

Divers systèmes de coordonnées peuvent être utilisés :

a) Système de coordonnées affines : dans l'espace à deux dimensions, les axes de coordonnées sont deux droites concourantes en un point O, faisant un angle quelconque entre elles (Fig. 1.1). Dans l'espace

à trois dimensions, les axes de coordonnées sont trois droites non coplanaires, concourantes en un point O. Les coordonnées ξ, η, ζ d'un point de l'espace sont définies par ses projections, parallèles aux trois plans formés par les axes de coordonnées, sur les axes de coordonnées.

b) Système de coordonnées cartésiennes : c'est un cas particulier du système de coordonnées affines, il est constitué d'axes de coordonnées orthogonaux entre eux. Les coordonnées d'un point sont les projections orthogonales de sa position sur ces axes (Fig. 1.2).

Élément de longueur : $d\vec{\mathbf{r}} = dx\,\vec{\mathbf{e}}_x + dy\,\vec{\mathbf{e}}_y + dz\,\vec{\mathbf{e}}_z$.
Élément de surface dans le plan x, y : $dA = dx\,dy$.
Élément de volume : $dV = dx\,dy\,dz$.

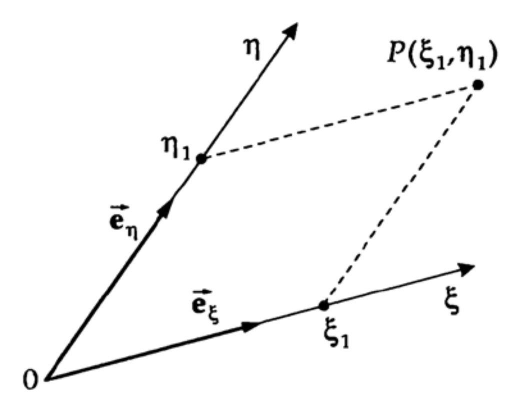


Fig. 1.1 : *Coordonnées affines dans le plan. Coordonnées du point P : ξ, η*

Fig. 1.2 : *Coordonnées cartésiennes dans l'espace. Coordonnées du point P : x, y, z*

Système cartésien droit : dans l'espace à trois dimensions, les axes de coordonnées sont rangés de façon à ce que les les 3 axes du système forment un trièdre orthogonal droit. Par exemple, les axes x, y et z pointent dans l'ordre successif des directions du pouce, de l'index et du médius (majeur) de la main droite.

c) Système de coordonnées polaires : système de coordonnées dans le plan, dont les coordonnées sont la distance r du point à l'origine (pôle) et l'angle ϕ (angle polaire) entre le vecteur position (rayon vecteur) et une direction de référence (axe polaire = sens positif de l'axe x par exemple).

Élément de longueur : $d\vec{\mathbf{r}} = dr\,\vec{\mathbf{e}}_r + r\,d\varphi\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi$.
Élément de surface : $dA = r\,dr\,d\varphi$.

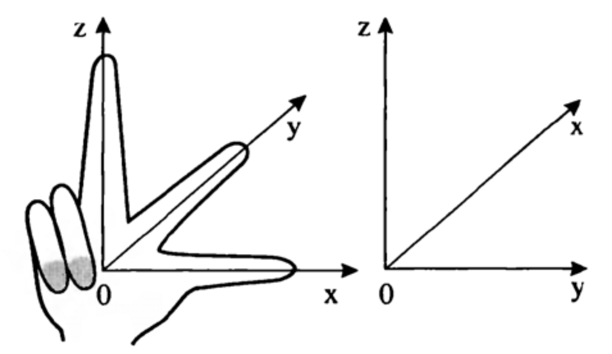


Fig. 1.3 : *Système droit et gauche*

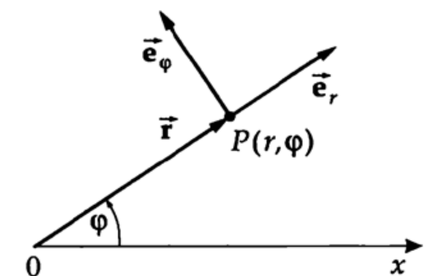


Fig. 1.4 : *Coordonnées polaires planes du point P: r, φ*

d) Système de coordonnées cylindriques : extension du système de coordonnées polaires à l'espace à trois dimensions. Les coordonnées cylindriques d'un point sont obtenues à partir de la projection

orthogonale z du point sur l'axe z et de ses coordonnées polaires (ρ, φ) dans le plan perpendiculaire à l'axe z, c'est à dire la longueur ρ de sa perpendiculaire à l'axe z et l'angle ϕ entre cette perpendiculaire et l'axe polaire x.

Élément de longueur : $d\vec{r} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi + dz\,\vec{e}_z$.
Élément de volume : $dV = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$.

e) Système de coordonnées sphériques : généralisation des coordonnées polaires dans l'espace à trois dimensions. Les coordonnées polaires d'un point sont : sa distance r à l'origine, l'angle azimuthal θ du rayon vecteur par rapport à l'axe z et l'angle polaire φ, formé par la projection du rayon vecteur sur le plan x,y et l'axe x.

Élément de longueur : $d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\,\sin\theta\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$.
Élément de volume : $dV = r^2\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$.
Élément d'angle solide : $d\Omega = \sin\theta\,d\theta\,d\varphi$.

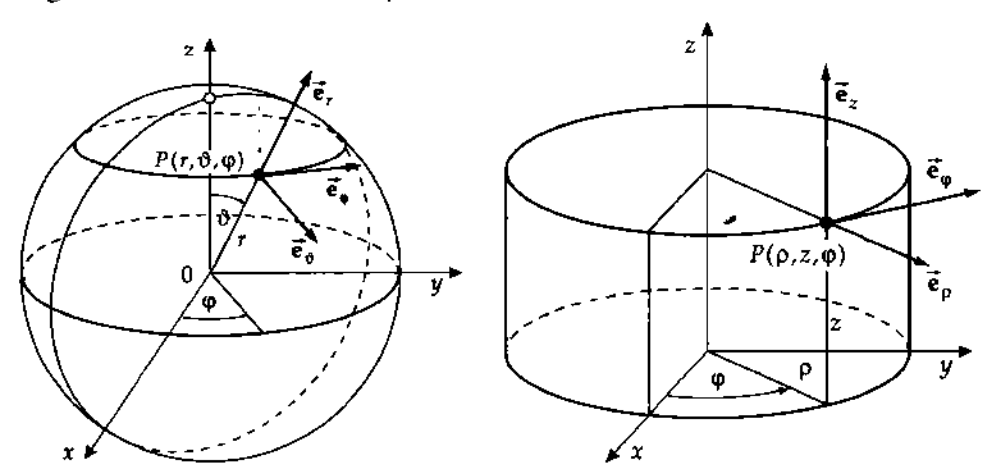


Fig. 1.5 : *Coordonnées sphériques* **Fig. 1.6** : *Coordonnées cylindriques*

3. Référentiel

Un référentiel est constitué d'un sytème de coordonnées (repère) pour déterminer la position d'un corps dans l'espace et d'une horloge pour définir sa position dans le temps (espace-temps).

■ Pour un système de coordonnées cartésiennes de l'espace à deux dimensions, il est nécessaire de définir l'origine et la direction de l'axe x ; dans l'espace à trois dimensions la direction de l'axe y doit également être indiquée. Autrement dit, respectivement deux ou trois points de référence doivent être définis.

● Tout mouvement est un mouvement relatif, c'est à dire que sa description mathématique dépend du repère d'espace choisi. Il est physiquement impossible de définir un mouvement **absolu**. Il est nécessaire de préciser le repère d'espace par rapport auquel un mouvement est décrit.

› Un même mouvement peut être décrit dans différents repères d'espace. Le choix judicieux d'un repère peut souvent faciliter la résolution d'un problème.

4. Vecteur position

Le vecteur position, $\vec{r}$, décrit une position (lieu) dans un système à plusieurs dimensions. Le vecteur position est décrit par un vecteur colonne dont les composantes sont les coordonnées du lieu.

($\rightarrow$ *Calcul vectoriel*) :

$$\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'un mouvement à une dimension le symbole flèche d'un vecteur peut être omis.
L'**équation horaire** (fonction position ou rayon vecteur $\vec{\mathbf{r}}(t)$) donne la position d'un corps à tout instant t.

5. Trajectoire

La trajectoire est l'ensemble de tous les points successivement occupés par le corps lors de son mouvement. Ces points se trouvent généralement sur une courbe.

■ La trajectoire d'un point d'une circonférence tournant autour de son axe fixe est un cercle. Si, en plus, l'axe se déplace avec un vecteur vitesse constant, la trajectoire est une cycloïde (Fig. 1.7).

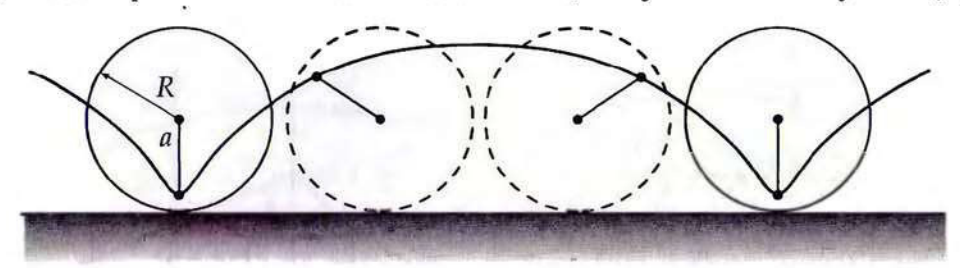


Fig. 1.7 : *Cycloïde, résulte de la superposition d'une rotation et d'une translation.*

6. Paramétrisation d'une trajectoire

Une trajectoire peut être représentée par une fonction ou un système de fonctions $\vec{\mathbf{r}}(p)$ d'un paramètre p, qui peut être le chemin parcouru ou le temps. Lorsque la valeur du paramètre augmente, la trajectoire est parcourue dans le sens positif (Fig. 1.8)

▷ De la trajectoire seule, sans la connaissance de la fonction position dépendante du temps, il est impossible de déduire la vitesse d'un corps.

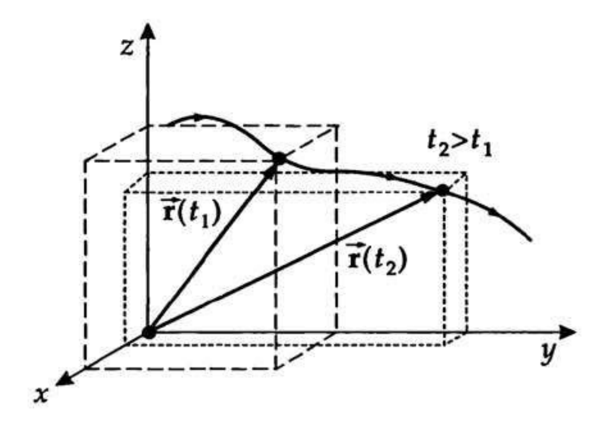


Fig. 1.8 : *Représentation paramétrique d'une trajectoire $\vec{\mathbf{r}}(p)$ en fonction du paramètre t.*

Un mouvement n'est défini que par rapport à un référentiel donné. La relation entre les évènements physiques et le référentiel est établie par des points de référence et/ou des directions de référence.

a) Mouvement circulaire d'un point matériel. Le mouvement d'un point matériel sur la circonférence d'un cercle de rayon R du plan x, y, peut être paramétrisé par l'angle φ en fonction du temps t :

- en coordonnées sphériques : $r = R, \theta = \pi/2, \varphi = \varphi(t)$,
- en coordonnées cylindriques : $x(t) = R \cdot \cos\varphi(t), y(t) = R \cdot \sin\varphi(t), z(t) = 0$ (Fig. 1.9).

b) Mouvement d'un point sur une roue. La trajectoire d'un point qui se trouve à la distance $a < R$ du centre d'une roue de rayon R tournant à vitesse constante, est une hypocycloïde. Sa représentation paramétrique en coordonnées cartésiennes en fonction de l'angle de rotation $\varphi(t)$ sont : (Fig. 1.10)

$$\begin{aligned} x(t) &= vt - a\sin\varphi(t) \\ y(t) &= R - a\cos\varphi(t) \end{aligned}$$

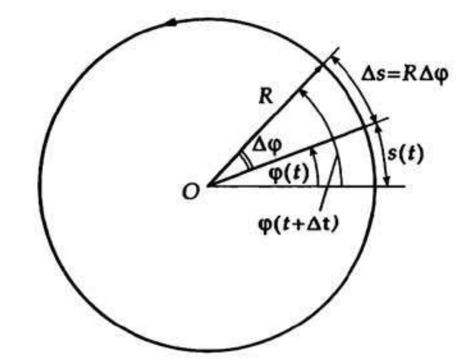


Fig. 1.9 : *Mouvement circulaire. Déplacement élémentaire :* $\Delta s = R \cdot \Delta\varphi$

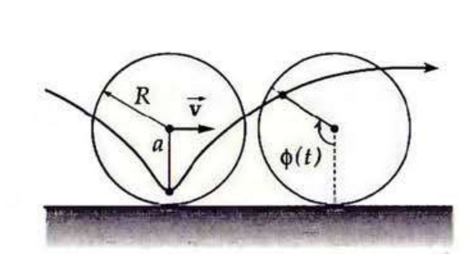


Fig. 1.10 : *Représentation paramétrique d'une cycloïde*

7. Degré de liberté

Degré de liberté d'un système physique : dimension de l'espace de configuration, c'est à dire que le nombre de paramètres scalaires indépendants (valeurs numériques) nécessaires pour déterminer la position ou l'état (de mouvement) d'un corps.

- Dans l'espace à trois dimensions, un point matériel a trois degrés de liberté de mouvement, c'est à dire dans trois directions distinctes (x, y, z) de l'espace. Un système isolé de N points matériels possède $3 \cdot N$ degrés de liberté dans l'espace à 3 dimensions.

Si les coordonnées $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N$, d'un système de N points matériels, dont le mouvement est limité par des contraintes internes ou externes, sont soumises à k conditions :

$$g_\alpha(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N, t) = 0\,, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, k$$

alors le système ne possède plus que $n = 3 \cdot N - k$ degrés de liberté.

- Si un corps est asujéti à se déplacer à la surface d'une sphère, il n'a plus que deux degrés de liberté et le long d'un rail il ne lui reste plus qu'un seul degré de liberté. Un solide rigide, dans l'espace à trois dimensions, peut en plus avoir un mouvement de rotation, par conséquent posséder trois degrés de liberté supplémentaires. Un système constitué de deux points matériels reliés par une tige rigide de longueur l, possède $n = 6 - 5$ degrés de liberté (condition : $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = l^2$, avec $\vec{r}_1, \vec{r}_2$: vecteurs position des points matériels). Un solide rigide en rotation autour d'un axe fixe, ne possède qu'un seul degré de liberté (rotation).

1.1.2 Temps

1. Définition et mesure du temps

Temps t : pour la quantification de phénomènes variables au cours du temps. Certains **phénomènes périodiques** (récurrents) de la nature sont utilisés pour définir l'unité de temps.

Durée ou **intervalle de temps** : la différence en temps Δt de deux évènements.

M La mesure du temps au moyen **d'horloges** est basée sur des phénomènes naturels périodiques (pendule) ou continus (clepshydre, consomption d'une chandelle, etc.) La période T d'un **pendule simple** ne dépend que de sa longueur l (et de la valeur locale de l'accélération de la pesanteur g) : $T = 2\pi\sqrt{(l/g)}$. Les montres mécaniques utilisent le mouvement circulaire périodique entretenu par un ressort spiral. Les procédés modernes de mesure du temps utilisent des circuits oscillants électriques dont la fréquence est stabilisée par la fréquence de résonance d'un cristal de quartz ou celle de phénomènes de physique atomique.

Chronomètre : sert à la mesure précise d'intervalles de temps, souvent utilisé conjointement à des capteurs mécaniques ou électriques (interrupteurs, barrières optiques, etc.). Le nombre de périodes d'oscillations est compté par un dispositif mécanique ou électronique. Typiquement, la précision des horloges se situe dans le domaine de la minute par jour pour des horloges mécaniques ordinaires, de la seconde par jour pour des horloges à quartz et jusqu'à 10^{-14} (une seconde par plusieurs millions d'années) pour une horloge atomique.

2. Unités de temps

Seconde (s) : unité de temps du système d'unités SI, c'est une des unités fondamentales du système SI, définie comme 9 192 631 770 périodes du rayonnement électromagnétique de la transition entre les niveaux de structure hyperfine de l'état fondamental du Césium. Initialement définie comme la 86 400-ème partie d'un jour solaire moyen divisé en 24 heures de 60 minutes, chacune d'une durée de 60 secondes.

$$[t] = \mathrm{s} = \text{Seconde}$$

Autres unités :

1 Minute (min)	=	60 s
1 heure (h)	=	60 min = 3 600 s
1 Jour (j)	=	24 h = 1 440 min = 86 400 s
1 Année (a)	=	365, 2425 j

▷ Le temps standard est disponible par réception d'un émetteur radio (en général par l'émetteur ondes-longues DLF77 situé à Brunswick en Allemagne). Certaines pendules et montres-bracelet reçoivent directement cette information.

▷ Pour la définition de l'année ainsi que du mois → *Système planétaire*. L'année grégorienne comporte 365,2425 jours et ne dévie que de 3/10 000 de jour par an de l'année tropique.

Le temps est encore subdivisé en semaines (de 7 jours) et en mois (de 28 à 31 jours) (Calendrier grégorien).

3. Calendrier

Un calendrier est utilisé pour la subdivision de périodes de temps longues. Les systèmes de calendrier se réfèrent au cycle lunaire d'environ 28 jours et au cycle solaire d'environ $365\frac{1}{4}$ jours. Parce que ces cycles ne sont pas compatibles, on est obligé d'intercaler des jours mobiles de façon à ce que les mêmes mois désignent les mêmes saisons.

En Europe on utilise le **calendrier grégorien** qui, depuis 1582, a remplacé le **calendrier julien**. Ainsi, le printemps débute toujours un 21 mars.

▷ Dans certains pays de l'Europe de l'est, le calendrier julien est resté en usage jusqu'après 1917. Il dévie de deux à trois semaines de notre calendrier grégorien. C'est ainsi que la révolution russe du 17 octobre 1917 a, en réalité, eu lieu en novembre de notre calendrier actuel.

Jour intercalaire : à toutes les années dont le nombre est divisible par 4 (année bissextile), à l'exception des années non divisibles par 400, on ajoute un jour à la fin du mois de février. L'an 2000 sera une année bissextile, l'an 1900 ne l'était pas.

Semaine : subdivision de l'année en 52 ou 53 semaines. Par convention, la première semaine d'une année est la semaine qui comprend le premier jeudi de l'année.

› Le premier jour de la semaine est le lundi. Par contre, d'après la tradition chrétienne, le dimanche est le premier jour de la semaine.

Les années du calendrier grégorien sont numérotées **de façon continue**. Les années antérieures à l'année 1 sont notées av. J.C. (avant Jésus Christ) ou avant l'ère chrétienne soit encore B.C. (before Christ).

› Il n'y a pas d'année zéro, l'année 1 suit directement l'année -1 (av. J.C.). Exception : en astronomie, on numérote les années d'après une extrapolation du calendrier julien.

D'autres **systèmes de calendrier** sont :

- Le calendrier israélite, mélange de calendrier solaire et lunaire, (luni-solaire) avec des années et des mois intercalaires de durées variables. Les années sont comptées à partir du 7 octobre 2761 (av. J.C.) [Création de l'Univers], l'année débute en septembre-octobre, en 1997 commence l'année 5758.
- Le calendrier musulman (calendrier lunaire pur) : les années sont comptées à partir de la fuite de Mahomet de La Mecque le 16 juillet 622, (en 1997 débute l'année 1376).

1.1.3 Longueur, surface, volume

1. Longueur

Longueur l, la **distance** la plus courte entre deux points de l'espace.

Mètre (m), unité de longueur du système SI. C'est une des grandeurs fondamentales du système SI, définie comme le chemin parcouru par la lumière dans le vide pendant 1/299 792 458 seconde. Initialement défini comme la 40 millionième partie de la circonférence terrestre et matérialisé par un **mètre étalon** en platine irridié déposé au *Bureau International des Poids et Mesures* à Paris.

$$[l] = \mathrm{m} = \text{Mètre}$$

Autres unités → *Tab. 34/3* (→ *Tab. 34/4 et Tab. 34/7*).
Unités pratiques non SI :

$$1\ \text{Ångström (Å)} = 10^{-10}\,\mathrm{m}$$
$$1\ \text{mille nautique (mm)} = 1\,852\,\mathrm{m}$$

2. Mesure de longueurs

M À l'origine, les mesures de longueur étaient effectuées par comparaison à des copies de l'unité de mesure (règle, mètre pliant, mètre ruban, pied à coulisse, vis micrométrique, parfois munie d'un vernier pour une lecture plus précise, etc.). Actuellement, les mesures de longueur précises sont effectuées à l'aide **d'interféromètres** optiques (→ *Optique*), utilisant la longueur d'onde d'une lumière monochromatique comme étalon de longueur.
La télémétrie acoustique est réalisée en mesurant le temps de vol d'une onde ultrasonore (**sonar**, utilisé en navigation marine, plus rarement de nos jours pour les appareils photographiques et les caméras). Le **radar** mesure l'éloignement d'un objet par l'intermédiaire du temps de vol d'une onde électromagnétique réfléchie par l'objet.

Les mesures de longueurs sont actuellement possibles avec une précision relative de 10^{-14}. En utilisation courante, des précisions de l'ordre du micromètre sont obtenues à l'aide de vis micrométriques (Palmer).

Triangulation : procédé géométrique pour l'arpentage de terrains mettant à profit le fait que, pour déterminer tous les côtés d'un triangle il suffit de connaître la longueur d'un de ses côtés et deux de ses angles. À partir d'une distance connue, n'importe quelle distance peut être mesurée par une suite de mesures d'angles à l'aide d'un **théodolite**.

Parallaxe : différence angulaire des directions sous lesquelles un objet apparaît quand il est vu de deux points d'observation distincts (Fig.1.11).

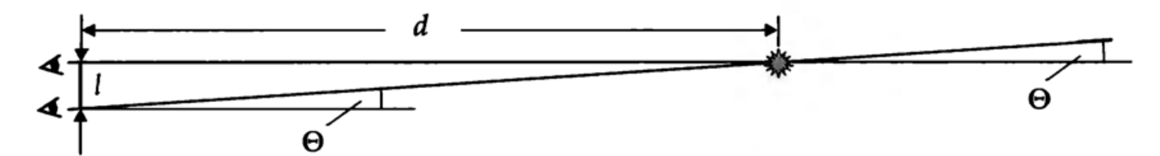


Fig. 1.11 : *Parallaxe* $\Theta = \arctan d/l$ *pour une séparation entre yeux* l *à la distance* $d >> l$

3. Surfaces et volumes

Surface S et **volume** V sont des grandeurs déduites de mesures de longueurs.

Mètre carré (m^2), unité SI de surface, c'est la surface d'un carré de 1 m de côté.

$$[S] = m^2 = \text{mètre carré}$$

Mètre cube (m^3), unité SI de volume, c'est le volume d'un cube dont les arêtes mesurent 1 mètre.

$$[V] = m^3 = \text{mètre cube}$$

Autres unités → *Tab. 34/3* et → *Tab. 34/4*.

Autres unités de surface :

$$\begin{aligned} \text{1 Hectare (ha)} &= 10\,000\,m^2 \\ \text{1 Are (a)} &= 100\,m^2 \\ \text{1 Pouce carré (sq in)} &= 6,452\,cm^2 \\ \text{1 Pied carré (sq ft)} &= 0,929\,m^2 \end{aligned}$$

Autres unités de volume :

$$\begin{aligned} \text{1 Litre} &= 1\,dm^3 = 10^{-3}\,m^3 = 1000\,cm^3 \\ 1000\,l &= 1\,m^3 \\ \text{1 US-Gallon (gal)} &= 3,785\,dm^3 \\ \text{1 brit. Gallon (gal)} &= 4,546\,dm^3 \end{aligned}$$

M Des surfaces quelconques peuvent être mesurées en les divisant en figures géométriques simples (rectangles, triangles) dont on mesure les côtés (par exemple : par triangulation). Une mesure directe d'une surface peut être effectuée en comptant le nombre de carrés d'un réseau à mailles carrées recouvrant la surface à mesurer. De manière analogue, le volume d'un corps creux peut être déterminé en le remplissant de corps géométriques simples (cubes, pyramides, cônes, ...). Le volume de corps solides peut également être déterminé par immersion dans un liquide (→ *balance (densimètre) de Mohr*).

Si la masse volumique d'un corps est connue, son volume peut être déduit de sa masse.

1.1.4 Angle

1. Définition d'un angle

Angle ϕ : **intersection** de deux droites ou de deux surfaces. Dans le plan ou l'espace, différence de direction entre deux droites. Pour déterminer la grandeur d'un angle, on trace un arc de cercle de rayon r quelconque, centré à l'intersection, et on mesure la longueur l de l'arc délimité par les deux droites (cf. Fig. 1.12).

Angle et arc			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$\phi = \frac{l}{r}$	ϕ	rad	angle
	l	m	longueur de l'arc
	r	m	longueur du rayon

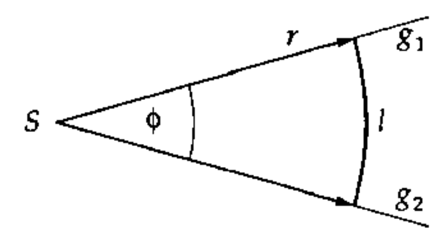


Fig. 1.12 : *Mesure de l'angle ϕ, formé par les demi-droites g_1 et g_2, par celle de l'arc l.*

2. Unités d'angle

a) Radian (rad) : unité d'angle dans le système SI. Un radian est l'angle qui, dans un cercle centré au sommet de l'angle, découpe un arc de même longueur que son rayon. Puisque la circonférence d'un cercle a une longueur $2\pi r$, à un cercle correspond l'angle 2π radians.

▷ Radian, degré et grade sont des unités complémentaires au système SI, ils sont sans dimension.

b) Degré (°) : c'est la 360ème partie d'un cercle :

$$1\,\text{rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57,3°$$
$$1° = \frac{2\pi}{360°} = 0,0175\,\text{rad}$$

ses sous-multiples (division sexagésimale) sont :

$$1\,\text{degré}(°) = 60\,\text{minutes d'arc}(') = 3\;600\,\text{secondes d'arc}('')$$

c) grade : unité d'angle utilisée en géodésie, c'est la 400ème partie d'un cercle :

$$1\,\text{grade} = 0,9° = 0,0157\,\text{rad}$$
$$1° = 1,11\,\text{grade}$$
$$1\,\text{rad} = 63,7\,\text{grades}$$

M Les mesures d'angles peuvent être effectuées directement à l'aide d'un rapporteur, ou déduites par calcul à partir de la mesure de la corde de l'angle au moyen d'un compas. Le **théodolite** sert aux mesures angulaires par → *Triangulation*.

3. Angle solide

Angle solide Ω : angle dans l'espace sous lequel un observateur voit une surface S distante de r. C'est la partie de la surface d'une sphère de rayon unité découpée par le cône d'observation dont le sommet est placé en son centre (Fig. 1.13).

Angle solide			
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Omega = \dfrac{S}{r^2}$	Ω	rad	angle
	S	m^2	aire délimitée par un cône
	r	m	rayon de la sphère

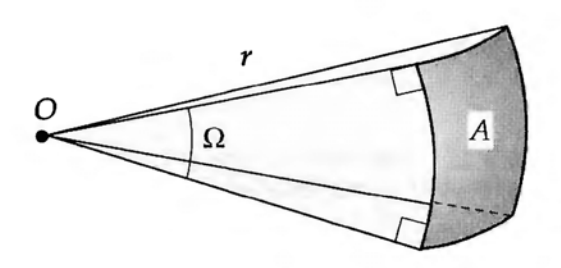


Fig. 1.13 : *Mesure de l'angle solide* Ω *par celle de l'aire* A *et de* $r(\Omega = A/r^2)$.

Steradian (sr) : unité d'angle solide dans le système SI.
Un steradian est l'angle solide formé par un cône qui délimite une surface de 1 m^2 sur la sphère de rayon 1 m centrée en son sommet.

● L'angle solide correspondant à tout l'espace est de 4π sr.

▷ Le stéradian, comme le radian, est sans dimension. Il est utilisé pour désigner un angle solide (dans l'espace à trois dimensions).

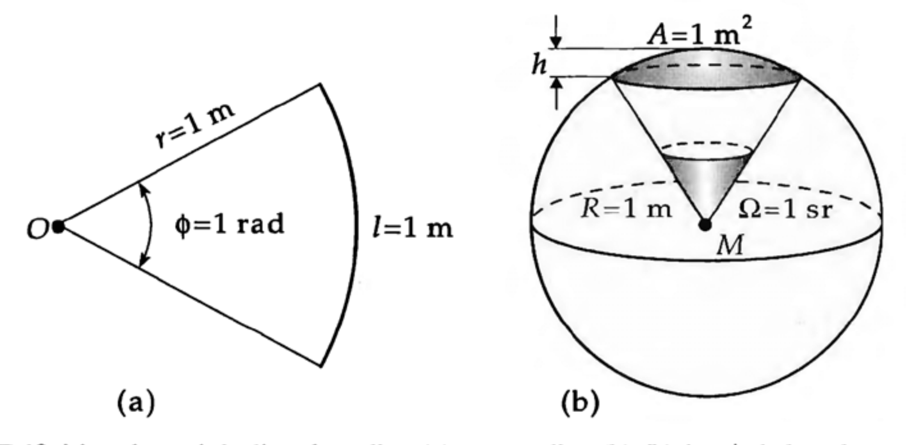


Fig. 1.14 : *Définition des unités d'angle radian (a) et steradian (b). L'aire* A *de la calotte sphérique est* $A = 2\pi R \cdot h$.

1.1.5 Systèmes mécaniques

1. Point matériel

Point matériel (masse ponctuelle) : représentation d'un solide par un point sans dimension mais de masse finie égale à celle du solide.

▷ Dans un mouvement sans rotation, tout solide peut être représenté par un point matériel situé au **centre de gravité** du solide.

■ Pour la description du mouvement des planètes dans le système solaire, il suffit de considérer les planètes comme des points matériels, puisque leurs dimensions sont très petites comparées à leurs distances au soleil.

2. Système de points matériels

Système constitués de N points matériels distincts $1, 2, 3, \cdots, N$, dont le mouvement est décrit par leurs vecteurs position $\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2, \cdots, \vec{\mathbf{r}}_N$,en fonction du temps : $\vec{\mathbf{r}}_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots N$ (Fig. 1.15).

3. Forces dans un système de points matériels

a) Forces internes : forces qu'exercent les points matériels mutuellement entre eux. Ce sont des forces qui (généralement) s'exercent entre points matériels deux à deux (interaction à deux corps), qui dépendent de la distance et éventuellement de la vitesse relatives des deux points matériels considérés.

b) Forces externes : forces qui agissent de l'extérieur sur le système. Elles proviennent de corps qui ne font pas partie du système.

c) Contraintes et réaction : ce sont également des forces externes qui tiennent compte des liaisons imposées au système. Les contraintes limitent le domaine d'évolution du système.

■ Un corps guidé par un rail, une masse sur un plan incliné ou une masse attachée à l'extrémité d'une corde sont des exemples de systèmes contraints.

4. Systèmes isolés

Systèmes isolés : systèmes qui ne sont pas soumis à des forces ou contraintes externes.

5. Solide rigide

Solide rigide : un solide dont les éléments constitutifs conservent les mêmes distances mutuelles, donc liés de façon rigide. Les distances de deux points i, j quelconques d'un solide rigide sont liées par la relation : $|\vec{\mathbf{r}}_i(t) - \vec{\mathbf{r}}_j(t)| = r_{ij} = \text{const.}$(Fig. 1.15).

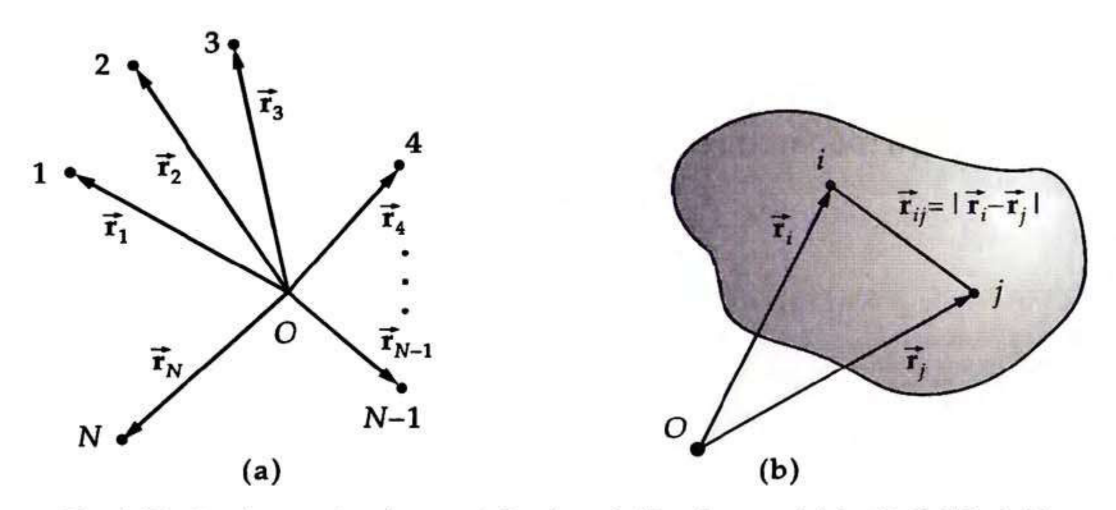


Fig. 1.15 : *Systèmes mécaniques. (a) Système de N points matériels, (b) Solide rigide*

6. Mouvement des solides rigides

Le mouvement d'un solide rigide est décrit par deux types de mouvements (Fig. 1.16) :

a) Translation : chaque élément du solide effectue le même parcours dans la même direction : le solide se déplace parallèlement à lui-même. Il suffit, pour décrire un tel mouvement, de décrire le mouvement d'un seul point du solide.

b) Rotation : les éléments du solide tournent autour d'un même point ou axe. Pendant la rotation, chaque élément du solide maintient sa distance à l'axe de rotation constante et parcourt un arc de cercle.

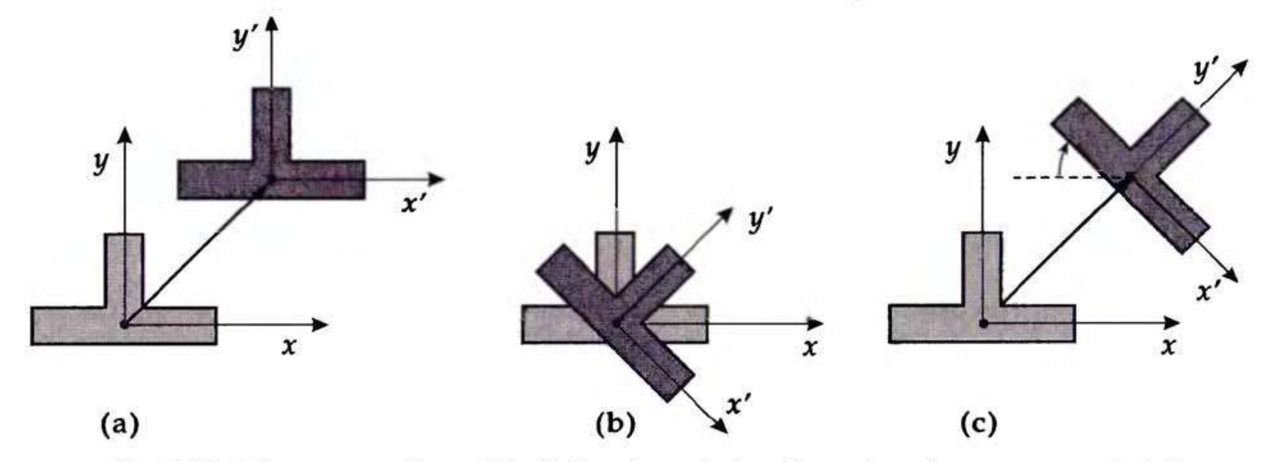


Fig. 1.16 : *Mouvements d'un solide rigide. a) translation, b) rotation, c) mouvement général*

- Tout mouvement général d'un solide peut être décomposé en une translation et une rotation.

1.2 Mouvement à une dimension

Nous considérons le mouvement le long d'une trajectoire rectiligne. La coordonnée x sera la distance du corps à un point de la trajectoire pris comme origine. Le signe de x indiquera le sens du mouvement, par convention on choisit généralement le sens gauche-droite comme sens positif des déplacements.

Graphe du déplacement : représentation bi-paramétrique du mouvement (**fonction position** $x(t)$) d'un corps. Le temps t est reporté sur l'axe des abcisses, sur l'axe vertical on reporte les coordonnées $x(t)$ successives correspondantes. C'est une représentation graphique de la fonction $x(t)$.

1.2.1 Vitesse

Vitesse v : grandeur vectorielle qui, à chaque instant, caractérise le mouvement d'un point matériel. On distingue la vitesse moyenne $\bar{v}_x$ et la vitesse instantanée v_x.

1. Vitesse moyenne

La **vitesse moyenne** $\bar{v}_x$ est le rapport du déplacement Δx (chemin parcouru) à l'intervalle de temps Δt nécessaire pour effectuer ce déplacement.

$$\textbf{Vitesse moyenne} = \frac{\textbf{déplacement}}{\textbf{durée du déplacement}} \qquad \mathrm{LT}^{-1}$$

$$\bar{v}_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{(t_1 + \Delta t) - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Symbole	Unité	Dénomination
$\bar{v}_x$	m/s	vitesse moyenne
x_1, x_2	m	position à t_1 resp. t_2
$x(t)$	m	fonction position
t_1, t_2	s	temps initial et final
Δx	m	chemin parcouru
Δt	s	durée du déplacement

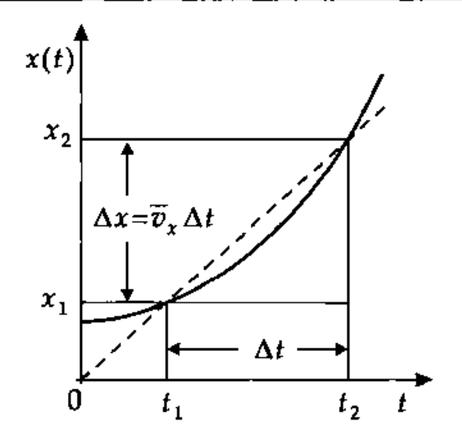


Fig. 1.17 : *Vitesse moyenne v_x d'un mouvement à une dimension*

a) Unités de vitesse

Mètre par seconde (m/s) : unité de vitesse du système SI, c'est la vitesse d'un mobile qui, en 1 seconde, parcourt une distance de 1 mètre.

■ Un mobile, qui en 1 minute parcourt une distance de 100 m, a une vitesse moyenne :

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{100\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{s}} = 1,67\,\mathrm{m/s}$$

Kilomètre par heure (km/h) : unité utilisée dans les transports terrestres.

$$1\,\mathrm{km/h} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{3\,600\,\mathrm{s}} = 0,2778\,\mathrm{m/s}$$

$$1\,\mathrm{m/s} = 3,6\,\mathrm{km/h}$$

$$72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$$

Unités anglo-saxonnes utilisées en navigation :

$$\begin{array}{rcl} \text{1 mile par heure (mph)} & = & 1,609\,\mathrm{km/h} = 0,447\,\mathrm{m/s} \\ \text{1 noeud (millenautique)} & = & 1,852\,\mathrm{km/h} = 0,514\,\mathrm{m/s} \\ \text{1 yard/seconde (yd/s)} & = & 3,294\,\mathrm{km/h} = 0,9144\,\mathrm{m/s} \\ \text{1 foot/seconde (ft/s)} & = & 1,097\,\mathrm{km/h} = 0,3048\,\mathrm{m/s} \end{array}$$

b) Mesures de vitesses

M Les mesures de vitesses peuvent être effectuées par la mesure de la durée Δt du parcours d'une distance Δx connue (barrière optique, ...). Parfois, la mesure de vitesse est réalisée en transformant un mouvement de translation en rotation. Le **tachymètre** est utilisé notamment pour la mesure de la vitesse des véhicules automobiles. Le mouvement de rotation des roues est transmis à l'instrument de mesure dont l'aiguille est mise en mouvement par la force centrifuge (tachymètre centrifuge). Dans certaines applications, le mouvement de rotation est transmis à un générateur de tension électrique dont la mesure est proportionnelle à la vitesse de rotation.

Tachymètre magnétique : le mouvement de rotation des roues est transmis à un aimant permanent qui, par l'intermédiaire des courants de Foucault induits dans un cylindre d'aluminium ou de cuivre placé dans son voisinage, produit un couple d'entraînement équilibré par un ressort spiral. La position d'équilibre de l'aiguille attachée au cylindre indique la vitesse.

Tachymètre électrique, compte-tours : utilise des impulsions délivrées par un système tournant (une ou plusieurs impulsions par tour). Un compteur électronique compte le nombre d'impulsions et, à l'aide d'une horloge, en déduit la vitesse de rotation généralement exprimée en nombre de tours par minute.

Les mesures de vitesse par → **effet Doppler** est possible en utilisant le Radar (aviation, transports terrestres, astronomie, ...).

▷ La vitesse peut être exprimée par une valeur positive ou négative, selon le sens du déplacement par rapport au système de coordonnées choisi.

▷ La vitesse moyenne dépend généralement de la durée Δt de la mesure, sauf si la vitesse du déplacement est constante.

▷ Si la vitesse moyenne est nulle, on ne peut pas en déduire qu'il n'y a pas de mouvement. Le mobile, pendant la durée de la mesure, peut avoir passé par des phases de vitesse positive et négative ou être revenu à son point de départ. Dans ces cas, la vitesse instantanée $v(t)$ n'est généralement nulle qu'à certains instants t.

La **distance Δx parcourue** pendant un intervalle de temps Δt donné à la vitesse moyenne $\bar{v}_x$ est :

$$\Delta x = \bar{v}_x \cdot \Delta t$$

ou la **durée** Δt nécessaire pour effectuer un trajet Δx à la vitesse moyenne $\bar{v}_x$:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\bar{v}_x}$$

2. Vitesse instantanée

a) **La vitesse instantanée** v_x à l'instant t est la limite de la vitesse moyenne $\bar{v}_x$ lorsque l'intervalle de temps Δt tend vers un infiniment petit $\mathrm{d}t$.

Vitesse instantanée			**LT^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$v_x(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \dot{x}(t)$	v_x	m/s	vitesse instantanée
	$x(t)$	m	chemin parcouru
	Δt	s	durée du trajet

On dit que la vitesse instantanée v_x est la dérivée première de la fonction position $x(t)$ par rapport au temps, on écrit :

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t)$$

La fonction $x(t)$ donne, à chaque instant t, la position du mobile. La vitesse instantanée est la pente de la courbe représentative de $x(t)$ à l'instant t. Les cas suivants sont à distinguer :

$v_x > 0$	Dans ce cas, $\Delta x > 0$ donc $x_2 > x_1$, et $x_2 - x_1$ augmente avec le temps. Le mobile se déplace dans le sens positif, la pente de la courbe $x(t)$ est positive, la dérivée $\dot{x}$ est positive.
$v_x = 0$	Dans ce cas, $\Delta x = 0$ donc $x_2 = x_1$, la distance Δx est constante (nulle). Le corps est au repos à cet instant (dans le référentiel considéré), v est représenté par la tangente horizontale, la dérivée $\dot{x}$ est nulle.
$v_x < 0$	Dans ce cas, $\Delta x < 0$ par conséquent $x_2 < x_1$, $x_2 - x_1$ diminue avec le temps. Le mobile se déplace dans le sens négatif, la pente de la courbe $x(t)$ est négative, la dérivée $\dot{x}$ est négative.

b) **Diagramme de vitesse :** représentation graphique de la vitesse instantanée $v_x(t)$ en fonction du temps t. L'équation horaire du mouvement peut être obtenue à partir du diagramme de vitesse en décomposant le mouvement pendant des intervalles de temps Δt. Si l'intervalle de temps t_1 à t_2 est divisé en N intervalles de durée $\Delta t = (t_2 - t_1)/N$ et $\bar{v}_x(t_i)$ la vitesse moyenne à l'instant t_i, alors

$$x(t_2) = x(t_1) + \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N-1} \bar{v}_x(t_i) \cdot \Delta t = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v_x(t)\,\mathrm{d}t$$

Chemin = intégrale de la vitesse par rapport au temps			**L**
	Symbole	Unité	Dénomination
$x(t) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t} v_x(t)\,\mathrm{d}t$	$x(t)$	m	fonction position
	$v(t)$	m/s	fonction vitesse
$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v_x(t)\,\mathrm{d}t$	t_1, t_2	s	instant initial et final

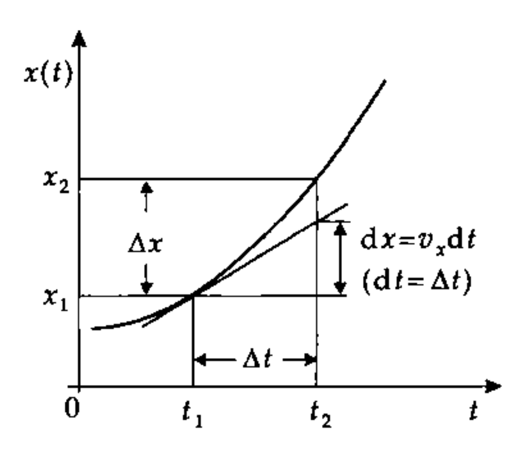


Fig. 1.18 : *Vitesse instantanée v_x d'un mouvement à une dimension*

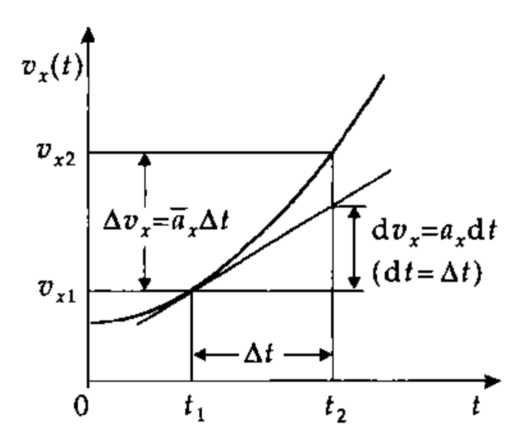


Fig. 1.19 : *Diagramme de vitesse. $\bar{a}_x$: accélération moyenne. a_x : accélération à l'instant t*

1.2.2 Accélération

L'**accélération** $\vec{a}$ décrit la variation de vitesse d'un mobile soumis à un mouvement non uniforme. De même que la vitesse, l'accélération est représentée par un vecteur (**vecteur accélération**).

▷ Une augmentation de vitesse (**accélération**) ainsi qu'une diminution de vitesse (**décélération**) par suite d'un freinage, sont appelées accélération (positive ou négative respectivement).

▷ Le **freinage** indique généralement la présence d'une force s'opposant au mouvement dirigée en sens contraire de la vitesse (frottement). Une accélération négative (décélération) n'a lieu que si la force de frottement est supérieure en valeur absolue à la force motrice.

■ Le mouvement d'un véhicule sans moteur descendant une côte est accéléré même s'il freine si la force de frottement n'est pas plus intense que la composante de la force de gravitation le long de la côte.

1. Accélération moyenne

L'**accélération moyenne** $\vec{\bar{a}}_x$ durant un certain intervalle de temps est la variation de vitesse par unité de temps pendant cet intervalle de temps.

$$\textbf{Accélération moyenne} = \frac{\textbf{variation de vitesse}}{\textbf{intervalle de temps}} \qquad \mathrm{LT}^{-2}$$

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{x2} - v_{x1}}{t_2 - t_1}$$

Symbole	Unité	Dénomination
$\bar{a}_x$	m/s²	accélération moyenne
Δv_x	m/s	variation de vitesse
Δt	s	intervalle de temps
v_{x1}, v_{x2}	m/s	vitesse initiale et finale
t_1, t_2	s	instant initial et final

Mètre par (seconde)^2 (m/s^2) : unité de l'accélération du système SI, c'est l'accélération d'un mobile qui, en 1 seconde, augmente sa vitesse de 1 m/s.

L'accélération moyenne $\bar{a}$ et la vitesse initiale v_1 étant connus, la vitesse finale v_2 au bout de l'intervalle de temps Δt sera :

$$v_2 = v_1 + \bar{a} \cdot \Delta t$$

En partant avec une vitesse initiale v_1 et une accélération moyenne $\bar{a}$, le temps Δt nécessaire pour atteindre une vitesse finale v_2 est :

$$\Delta t = \frac{v_2 - v_1}{\bar{a}}$$

Dans ce cas, on a supposé que vitesse et accélération ont même sens.

2. Accélération instantanée

L'**accélération instantanée**, est la limite vers laquelle tend l'accélération moyenne lorsque l'intervalle de temps Δt devient infiniment petit ($\Delta t \to 0$).

Accélération instantanée			**LT^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{a}_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_x}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}_x}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{v}_x(t)$	$\vec{a}_x(t)$ $\vec{v}_x(t)(t)$	m/s^2 m/s	accélération vitesse

L'accélération instantanée est la dérivée première par rapport au temps du vecteur vitesse $\vec{v}_x(t)$ et par conséquent la dérivée seconde par rapport au temps du rayon vecteur $\vec{x}(t)$:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x(t) = \frac{d}{dt}\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

Graphiquement l'accélération représente la pente de la tangente du diagramme de vitesse v en fonction de t. Les cas suivants sont à distinguer :

$a > 0$	Dans ce cas $\Delta v > 0$ donc $v_2 > v_1$. La vitesse du mobile augmente au cours du temps, dans le diagramme v-t la pente est positive.
$a = 0$	Dans ce cas $\Delta v = 0$ par conséquent $v_2 = v_1$. La vitesse du mobile est constante (éventuellement seulement à cet instant).
$a < 0$	Alors $\Delta v < 0$ donc $v_2 < v_1$. La vitesse du mobile diminue au cours du temps.

▷ Lorsqu'un mobile se déplace avec une accélération positive $a > 0$ à une vitesse $v_1 < 0$, le module de sa vitesse diminue. Le concept "accélération" est relatif à des mouvements dans le sens positif de l'axe x. Pour des mouvements dans le sens négatif de l'axe x, une accélération positive se traduit par un ralentissement, une accélération négative par une augmentation de la vitesse.

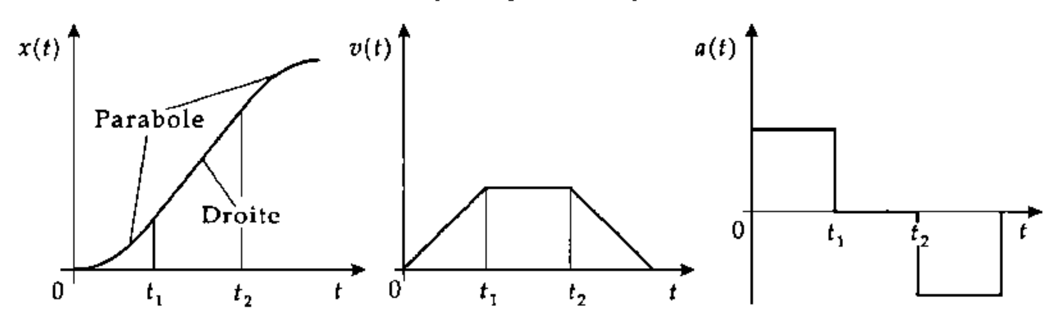


Fig. 1.20 : *Courbes représentatives : parcours x(t), vitesse v(t), accélération a(t) en fonction du temps. Le mouvement est d'abord uniformément accéléré, puis uniforme, enfin uniformément décéléré.*

3. Détermination de la vitesse à partir de l'accélération

Si la fonction accélération $\vec{a}(t)$ est connue, la vitesse peut s'obtenir par intégration :

vitesse = intégrale de l'accélération par rapport au temps			**LT^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$v_x(t) = v_x(t_1) + \int_{t_1}^{t} a_x(t)\,\mathrm{d}t$ $v_x(t_2) = v_x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} a_x(t)\,\mathrm{d}t$	$v(t)$ $a(t)$ t_1, t_2	m/s m/s² s	vitesse accélération instant initial et final

1.2.3 Mouvement rectiligne à une dimension

Dans cette section, nous discuterons des mouvements rectiligne uniforme et rectiligne uniformément accéléré et de leurs descriptions physiques.

▷ Dans le cas d'un mouvement à une dimension, la notation vectorielle peut être omise.

1. Mouvement rectiligne uniforme

Mouvement rectiligne uniforme : mouvement lors duquel le mobile garde une vitesse constante : $\bar{v} = v =$ const.

Lois du mouvement rectiligne uniforme			
	Symbole	Unité	Dénomination
$x(t) = x_0 + v_x t$ $v_x(t) = v = v_0$ $a_x(t) = 0$	$x(t)$ x_0 v_x v_0 t	m m m/s m/s s	chemin parcouru position initiale ($t = 0$) vitesse uniforme vitesse initiale temps écoulé

● Il y a mouvement rectiligne uniforme lorsque la résultante des forces appliquées au mobile est nulle.

▷ L'équation horaire du mouvement peut être obtenue par intégration de la vitesse $v_x(t) =$ const. :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t' = x_0 + v_x \int_0^t \mathrm{d}t' = x_0 + v_x(t - 0) = x_0 + v_x t$$

La représentation graphique de $v_x(t)$ est une droite, l'intégrale est égale à l'aire sous la courbe représentative entre les points 0 et t de l'axe des temps.

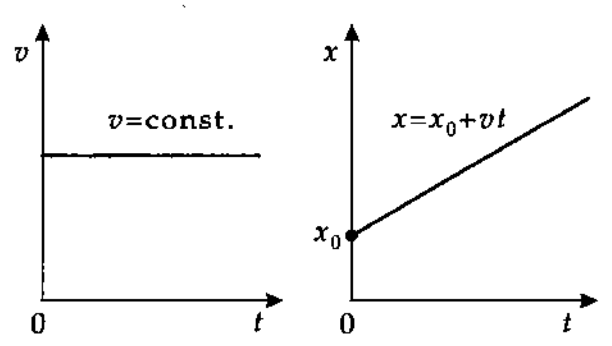


Fig. 1.21 : *Mouvement rectiligne uniforme*

2. Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Mouvement **rectiligne uniformément accéléré** : mouvement lors duquel l'accélération est constante : $a_x = a_x =$ const. , soit :

$$v_x(t) = a_x t + v_0$$

où v_0 est la vitesse initiale (Fig. 1.22).
L'équation horaire du mouvement s'obtient par intégration

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v_x(t')\,\mathrm{d}t' + x_0 = \int_0^t (at' + v_0)\,\mathrm{d}t' + x_0 \\ &= a\int_0^t t'\,\mathrm{d}t' + v_0\int_0^t \mathrm{d}t' + x_0 = \frac{1}{2}at^2 2 + v_0 t + x_0 \end{aligned}$$

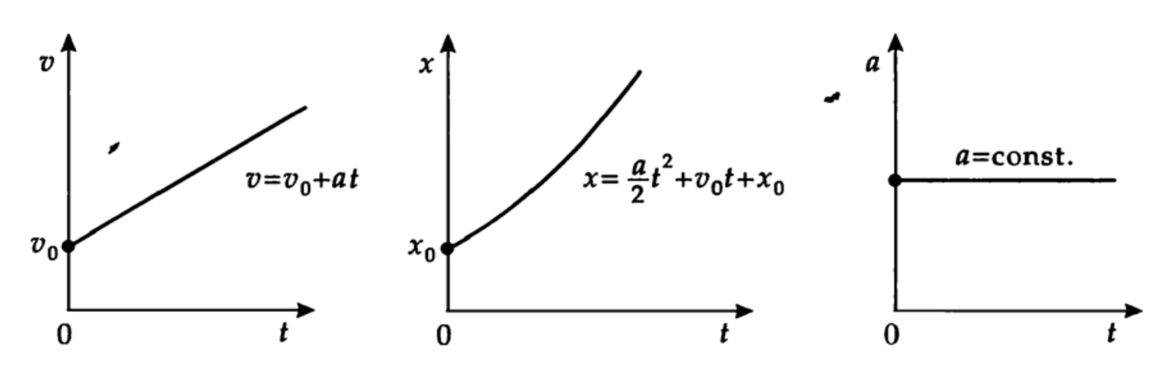


Fig. 1.22 : *Mouvement uniformément accéléré*

Ceci correspond à l'aire composée d'un rectangle $v_0 \cdot t$ et d'un triangle d'aire $at^2/2$ (de hauteur at et de base t) (Fig. 1.23).

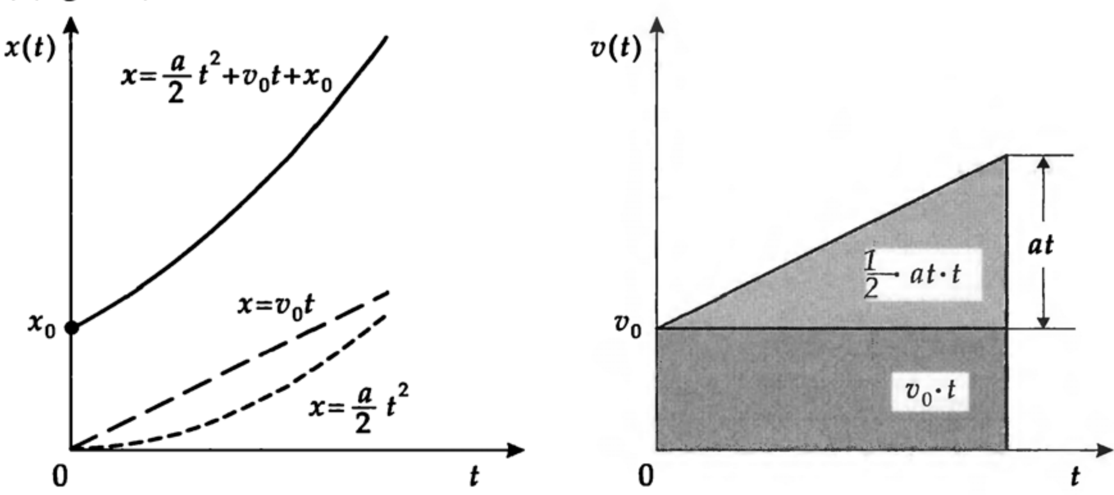


Fig. 1.23 : *Mouvement uniformément accéléré : parcours et vitesse*

Lois du mouvement rectiligne uniformément accéléré	Symbole	Unité	Dénomination
$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ v_x(t) &= at + v_0 \\ a_x(t) &= a = \text{const.} \end{aligned}$$	$x(t)$	m	chemin parcouru
	$v_x(t)$	m/s	vitesse
	t	s	temps
	a_x, a	m/s^2	accélération
	v_0	m/s	vitesse initiale
	x_0	m	position initiale

- Le mouvement rectiligne uniformément accéléré résulte de l'application d'une force constante au mobile.

De ces lois on déduit :

- si les vitesses initiale v_0 et finale $v_x(t)$ sont données :

$$x(t) = \frac{v_0 + v_x(t)}{2}t + x_0$$

- si la vitesse initiale v_0 et l'accélération a_x sont données :

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{v_0^2 + 2a_x x(t)} + v_0 \\ x(t) &= \frac{(v(t) - v_0)\,t}{2} + v_0t + x_0 \\ &= \frac{1}{2}a_x t^2 + v_0t + x_0 \end{aligned}$$

Cas particulier : si le mobile est initialement au repos, ($v_x(0) = 0$, $x(0) = 0$), mais soumis à une force constante qui lui communique l'accélération a_x :

$$\begin{aligned} v(t) &= at = \sqrt{2ax(t)} \\ x(t) &= \tfrac{v(t)t}{2} = \tfrac{at^2}{2} \end{aligned}$$

3. Mouvement retardé

Le mouvement retardé est un cas particulier du mouvement rectiligne uniformément accéléré. La vitesse et l'accélération sont de signe opposé, il s'ensuit une diminution de la vitesse qui peut alors s'annuler. Connaissant le chemin s parcouru jusqu'à l'arrêt du mobile (**distance d'arrêt**) on peut déterminer sa vitesse initiale v_0.

Décélération, distance d'arrêt	Symbole	Unité	Dénomination
$$\begin{aligned} T &= \frac{\lvert v_0\rvert}{\lvert a\rvert} = -\frac{v_0}{a} \\ s &= \frac{v_0^2}{2\lvert a\rvert} \\ v_0 &= \sqrt{2\lvert a\rvert s} \end{aligned}$$	s	m	distance d'arrêt
	T	s	durée du freinage
	$\lvert v_0\rvert$	m/s	vitesse initiale
	$\lvert a\rvert$	m/s^2	décélération

L'intensité de l'accélération $|a|$ est appelée décélération si les signes de l'accélération a et de la vitesse v sont opposés.

▷ $|a|$ (intensité de a) désigne la valeur absolue de a. Lors d'une décélération $a < 0$.

▷ Un mouvement retardé obéit à la même équation horaire que le mouvement rectiligne uniformément accéléré avec $a < 0$.
$v_x(t) = a_x t + v_0 \qquad x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_0 t + x_0$

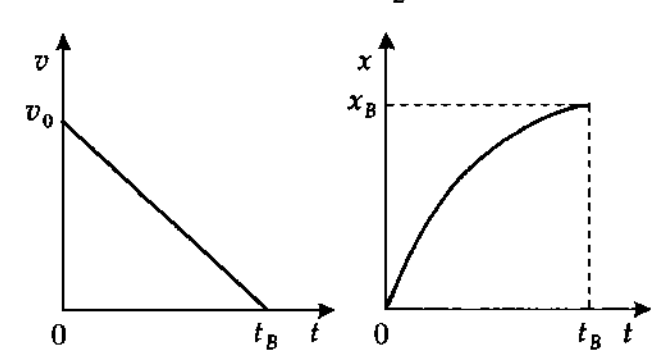


Fig. 1.24 : *Diagramme de vitesse et équation horaire d'un mouvement retardé*

▷ La représentation d'un processus de freinage par un mouvement uniformément accéléré est une simplification. Généralement un freinage se traduit par une accélération non uniforme.

■ Une force de freinage F appliquée à une automobile de masse M correspond à une accélération $|a| = \frac{F}{M}$ = -4 m/s² environ. À la vitesse de 50 km/h = 13,9 m/s, la distance d'arrêt s est alors :

$$s = - - \frac{v_0^2}{2|a|} = - - \frac{(13,9\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 4\,\mathrm{m/s^2}} = 24\,\mathrm{m}$$

▷ Les organismes de sécurité routière utilisent la formule empirique :

$$s \approx \left[\left(\frac{v_0}{10 km/h} \right)^2 + 3 \cdot \frac{v_0}{10 km/h} \right] \mathrm{m}$$

qui tient également compte d'un temps de réaction du conducteur (≈1 s).

1.3 Mouvement à plusieurs dimensions

La position d'un corps dans l'espace à trois dimensions est décrite par trois coordonnées d'espace. Dans un système de coordonnées cartésiennes on écrit le **rayon vecteur** avec ses composantes x, y et z :

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

La fonction vectorielle $\vec{r}(t)$ décrit alors la trajectoire du mobile dans l'espace (Fig. 1.25). Les composantes du rayon vecteur indiquent les coordonnées x, y, z du point courant à l'instant t.

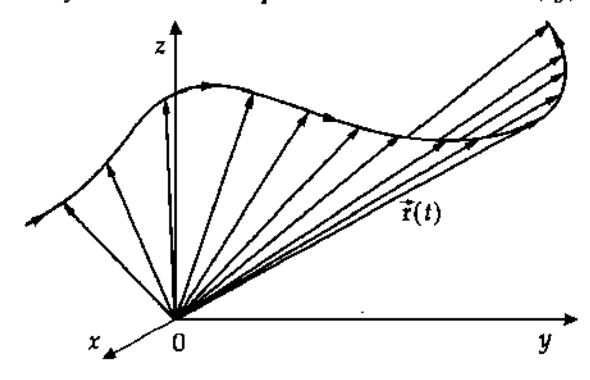


Fig. 1.25 : *Mouvement à trois dimensions*

1. Tangente et normale

La **tangente** à une courbe en un point donné est une droite qui touche la courbe en ce point mais ne la coupe pas. Du point de vue de la géométrie, c'est la limite de la **sécante**, lorsque les points où la sécante coupe la courbe se rejoignent en un point unique. En mécanique, la tangente à la courbe représentative de la trajectoire indique la direction de la vitesse, donc la direction du mouvement à un instant donné (Fig. 1.26).

La **normale** à une courbe en un point donné est une droite, perpendiculaire en ce point à la tangente. Elle est perpendiculaire à la direction instantanée du mouvement.

▷ Dans l'espace à trois dimensions, il y a une seule tangente à une courbe en un point mais une infinité de normales.

■ Dans le plan, la tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon, la normale est par conséquent parallèle au rayon.

▷ Dans l'espace à trois dimensions, en un point d'une courbe, il existe une infinité de normales. Elles forment le **plan normal**. La normale principale se trouve dans le plan tangent à la courbe au point M défini par le point M et deux points voisins de M sur la courbe (**plan osculateur**).

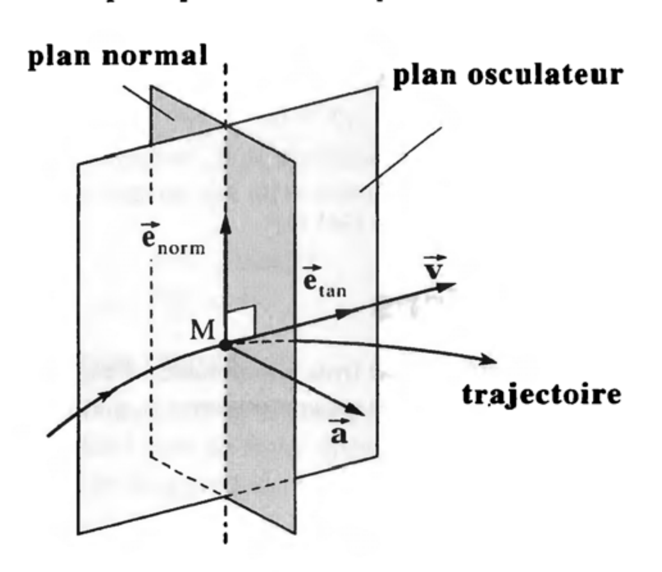


Fig. 1.26 : *Plans tangent et normal à une trajectoire dans l'espace*

1.3.1 Vecteur vitesse

Le **vecteur vitesse** $\vec{v}$: indique la direction, le sens et l'intensité de la vitesse en un point.

1. Vitesse moyenne

La vitesse moyenne $\bar{\vec{v}}$ dans un intervalle de temps Δt est définie par le chemin parcouru par unité de temps (Fig. 1.27) :

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

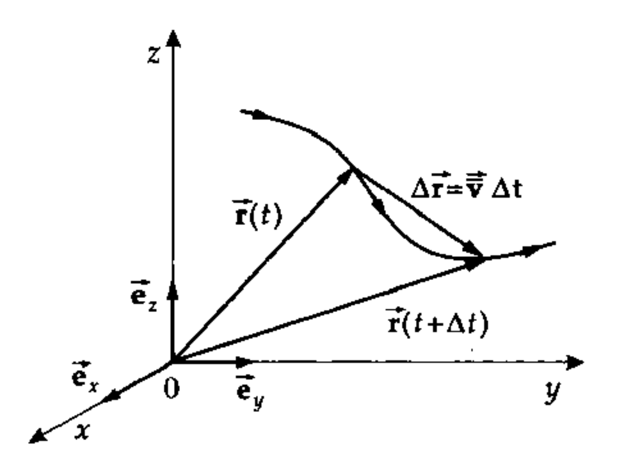


Fig. 1.27 : *Vitesse moyenne* $\bar{\vec{v}}$

2. Vitesse instantanée

La vitesse instantanée s'obtient à nouveau par passage à la limite :

Vitesse instantanée				LT^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$ $$= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$	$\vec{v}(t)$	m/s	vecteur vitesse	
	Δt	s	intervalle de temps	
	t	s	temps	
	$\vec{r}(t)$	m	rayon vecteur	
	$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$	m/s	composantes de la vitesse	

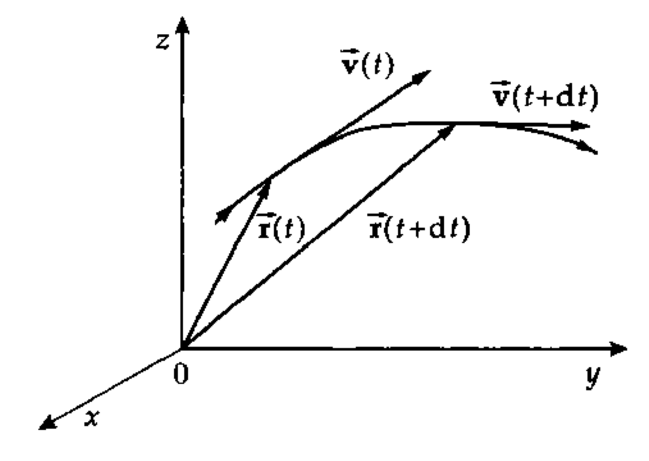


Fig. 1.28 : *Vitesse instantanée* $\vec{v}(t)$

Les composantes du vecteur vitesse sont les dérivées premières par rapport au temps des fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$. Elles représentent les projections de la vitesse sur les axes x, y et z :

$$v_x = \dot{x}$$
$$v_y = \dot{y}$$
$$v_z = \dot{z}$$

3. Propriétés du vecteur vitesse

- Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ indique la direction du mouvement, son intensité est la vitesse v.

▹ Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ décrit la variation du rayon vecteur $\vec{r}(t)$ au cours du temps. Il est possible que la direction du rayon vecteur change, mais que son intensité (distance à l'origine) reste constante. La

variation de la distance à l'origine est :

$$\frac{d|\vec{r}|}{dt} = \frac{d\sqrt{\vec{r}^2}}{dt} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{|\vec{r}|}$$

Cette distance reste constante lorsque $\vec{r}\cdot\vec{v} = 0$, c'est à dire si le vecteur vitesse est orthogonal au rayon vecteur. Un tel mouvement où la distance à un point fixe reste constante est un **mouvement circulaire**.

Le **vecteur unitaire tangentiel** $\vec{e}_{\tan}$ est un vecteur de longueur unité tangent à une courbe. Le vecteur vitesse peut alors s'écrire :

$$\vec{v} = v\vec{e}_{\tan} \qquad soit: \qquad \vec{e}_{\tan} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

4. Exemple : mouvement circulaire

- Un mouvement circulaire dans le plan x, y, de vitesse angulaire constante ω, est représenté par le rayon vecteur (Fig. 1.29) :

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ est alors :

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega\sin\omega t \\ r\omega\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'intensité :

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{r^2\omega^2\sin^2\omega t + r^2\omega^2\cos^2\omega t} = r\omega\sqrt{(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = r\omega$$

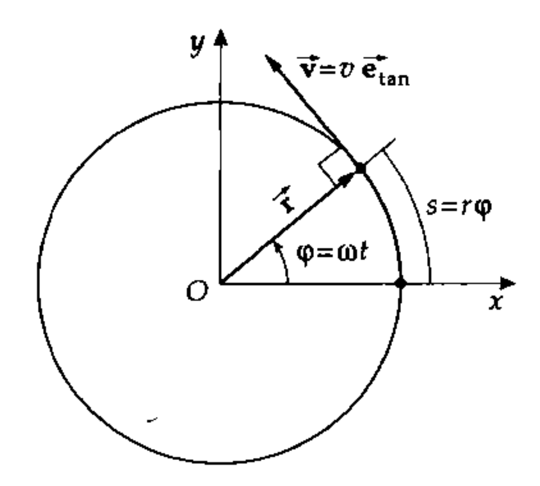


Fig. 1.29 : *Mouvement circulaire*

1.3.2 Vecteur accélération

1. Définition du vecteur accélération

Le **vecteur accélération** $\vec{a}$ est la dérivée première par rapport au temps du vecteur vitesse, il est égal à la variation de la vitesse par unité de temps (Fig. 1.30). On peut également définir un vecteur accélération

moyenne $\bar{\vec{a}}$ pendant l'intervalle de temps Δt.

$$\bar{\vec{a}}(t) = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Le vecteur accélération instantanée s'obtient par passage à la limite lorsque $\Delta t \to 0$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Les composantes de l'accélération sont les dérivées secondes des coordonnées du mobile par rapport au temps :

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \ddot{x}(t) \\ a_y(t) &= \ddot{y}(t) \\ a_z(t) &= \ddot{z}(t) \end{aligned}$$

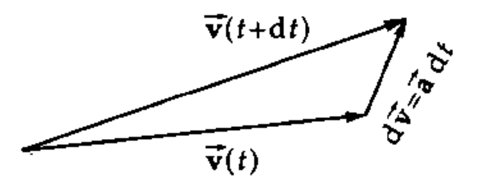


Fig. 1.30 : *Vecteur accélération*

2. Exemple : vecteur accélération dans un mouvement circulaire

■ Lors d'un mouvement circulaire, on a :

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos \omega t \\ -r\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -r\omega^2 \vec{r}(t)$$

Ce vecteur accélération, de signe opposé à $\vec{r}(t)$, pointe vers le centre de la circonférence (accélération centripète).

L'intensité de l'accélération est :

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = r\omega^2$$

La **composante tangentielle** $\vec{a}_{\text{tan}}$ et la **composante normale** $\vec{a}_{\text{norm}}$, sont les projections du vecteur accélération respectivement sur la tangente et la normale à la courbe représentative de la trajectoire, soit :

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{tan}} + \vec{a}_{\text{norm}}$$

ou encore :

$$\vec{a} = \frac{d(v\,\vec{e}_{\text{tan}})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_{\text{tan}} + v\frac{d\vec{e}_{\text{tan}}}{dt}$$

Le premier terme est la composante tangentielle du vecteur accélération.

$$\vec{a}_{\text{tan}} = \frac{dv}{dt}\vec{e}_{\text{tan}} \qquad \vec{a}_{\text{norm}} = v\frac{d\vec{e}_{\text{tan}}}{dt}$$

▷ La norme $|\vec{e}_{\text{tan}}|$ du vecteur unitaire tangentiel est constante, alors :

$$\frac{d}{dt}(\vec{e}_{\text{tan}})^2 = 2\vec{e}_{\text{tan}} \cdot \frac{d\vec{e}_{\text{tan}}}{dt} = 0$$

Par conséquent, le vecteur unitaire tangentiel et sa dérivée par rapport au temps sont constamment orthogonaux. De ce fait, le deuxième terme est bien la composante normale de l'accélération.

- La composante tangentielle de l'accélération est la variation par rapport au temps de la norme du vecteur vitesse.

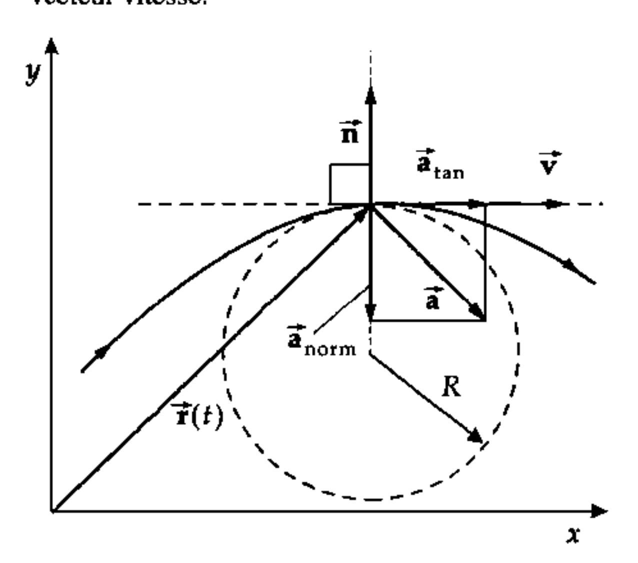


Fig. 1.31 : *Accélérations tangentielle et normale* $\vec{a}_{tan}, \vec{a}_{norm}$

▷ Les vecteurs vitesses et accélération peuvent être projetés sur le rayon vecteur (composante radiale) et la direction perpendiculaire (composante orthoradiale). Dans un mouvement circulaire les composantes radiale et normale sont confondues de même que les composantes orthoradiale et tangentielle.

3. Mouvement circulaire uniforme

■ Dans le cas du mouvement circulaire uniforme (vitesse angulaire constante) décrit ci-dessus, on a :

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos \omega t \\ -r\omega^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

Le vecteur accélération est parallèle au rayon vecteur donc à la normale et pointe vers le centre. La composante tangentielle est nulle.

$\vec{a}_{tan}(t) = 0$

La composante normale est : $a_{norm}(t) = r\omega^2 = \dfrac{v^2}{r}$, en posant $v = r\omega$

La composante normale du vecteur accélération est, par conséquent, fonction de la courbure de la trajectoire.

4. Rayon de courbure et accélération

Le **rayon de courbure** r en un point d'une courbe est le rayon du cercle ayant même courbure en ce point. Ce cercle se confond localement avec la courbe.

- La composante normale du vecteur accélération est :

$$a_{norm} = \frac{v^2}{r}$$

Avec le rayon de courbure r, elle est dirigée du centre vers l'extérieur.

5. Composantes des vecteurs position, vitesse, et accélération

a) Coordonnées cartésiennes

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}(t) &= x(t)\,\vec{\mathbf{e}}_x + y(t)\,\vec{\mathbf{e}}_y + z(t)\,\vec{\mathbf{e}}_z\\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \dot{x}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_x + \dot{y}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_y + \dot{z}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_z\\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= \ddot{x}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_x + \ddot{y}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_y + \ddot{z}(t)\,\vec{\mathbf{e}}_z\end{aligned}$$

b) Coordonnées polaires

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}(t) &= r\,\vec{\mathbf{e}}_r\\ \dot{\vec{\mathbf{e}}}_r &= \dot{\varphi}\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi\,, \qquad \dot{\vec{\mathbf{e}}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{\mathbf{e}}_r\\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \dot{r}\,\vec{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\varphi}\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi\\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= (\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{\mathbf{e}}_r + (r\,\ddot{\varphi} + 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi})\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi\end{aligned}$$

c) Coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}(t) &= r\,\vec{\mathbf{e}}_r\\ \dot{\vec{\mathbf{e}}}_r &= \dot{\theta}\,\vec{\mathbf{e}}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi\,, \quad \dot{\vec{\mathbf{e}}}_\theta = \dot{\varphi}\,\cos\theta\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi - \dot{\theta}\,\vec{\mathbf{e}}_r\,, \quad \dot{\vec{\mathbf{e}}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\cos\theta\,\vec{\mathbf{e}}_\theta - \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{\mathbf{e}}_r\\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \dot{r}\,\vec{\mathbf{e}}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{\mathbf{e}}_\theta + r\,\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi\\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{\mathbf{e}}_r + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} - r\,\sin\theta\,\cos\theta\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{\mathbf{e}}_\theta\\ &\quad + (r\,\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\,\sin\theta\,\dot{r}\,\dot{\varphi} + 2\,r\,\cos\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi})\,\vec{\mathbf{e}}_\varphi\end{aligned}$$

d) Coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{r}}(t) &= \rho\,\vec{\mathbf{e}}_\rho + z\,\vec{\mathbf{e}}_z\\ \dot{\vec{\mathbf{e}}}_\rho &= \dot{\phi}\,\vec{\mathbf{e}}_\phi\,, \quad \dot{\vec{\mathbf{e}}}_\phi = -\dot{\phi}\,\vec{\mathbf{e}}_\rho\,, \quad \dot{\vec{\mathbf{e}}}_z = 0\\ \vec{\mathbf{v}}(t) &= \dot{\rho}\,\vec{\mathbf{e}}_\rho + \rho\,\dot{\phi}\,\vec{\mathbf{e}}_\phi + \dot{z}\,\vec{\mathbf{e}}_z\\ \vec{\mathbf{a}}(t) &= (\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2)\,\vec{\mathbf{e}}_\rho + (\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi})\vec{\mathbf{e}}_\phi + \ddot{z}\,\vec{\mathbf{e}}_z\end{aligned}$$

1.3.3 Chute des corps et mouvement d'un projectile

La chute des corps et le **mouvement d'un projectile** décrivent des mouvements à deux dimensions sous l'action de la pesanteur. De tels mouvements sont décrits par leurs trajectoires dans un plan vertical xOy :

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

et leurs vecteurs vitesse :

$$\dot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$$

La coordonnée x représente la distance horizontale à l'origine, la coordonnée y la hauteur au-dessus du plan de référence. Le vecteur accélération est, dans chaque cas, le vecteur accélération de la pesanteur $\vec{\mathbf{g}}$.

$$\ddot{\vec{\mathbf{r}}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

▷ L'accélération de la pesanteur peut être considérée comme constante si la hauteur de chute est faible comparée à la distance au centre de la terre. On néglige généralement la variation de g avec l'altitude ainsi que les frottements dûs à l'air.

1. Chute libre

Le corps, placé dans le champ de la pesanteur terrestre, est abandonné sans vitesse initiale à partir d'une hauteur h_0. Son mouvement est décrit par la hauteur de chute $h = y(t)$ et la vitesse de chute $v = v_y(t)$ à partir de la hauteur initiale h_0 (chute dans le vide ou en négligeant le frottement du à l'air) :

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \qquad & y(t) &= h_0 - \frac{gt^2}{2} \\ v_x(t) &= 0 \qquad & v_y(t) &= -gt \end{aligned}$$

La **durée de chute** T et la **vitesse à l'arrivée** $v(T)$ sont :

$$T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \qquad v(T) = -\sqrt{2h_0 g}$$

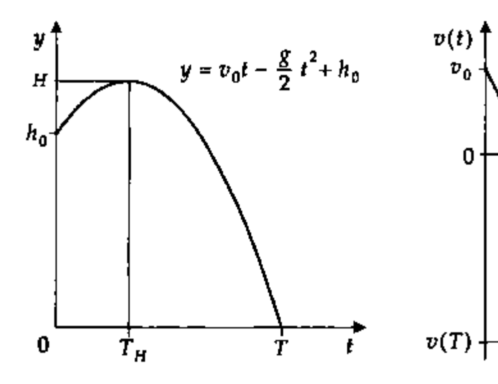
2. Lancer vertical

Le corps a une vitesse initiale v_0 vers le haut :

$$\begin{aligned} x(t) &= 0 \qquad & y(t) &= h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2} \\ v_x(t) &= 0 \qquad & v_y(t) &= v_0 - gt \end{aligned}$$

La hauteur d'ascension maximum $H = y(t)$ est atteinte à l'instant T_{sommet} auquel la vitesse $v_y(t)$ s'annule (Fig. 1.32) :

$$H = h_0 + \frac{v_0^2}{2g} \qquad T_{\text{sommet}} = \frac{v_0}{g}$$



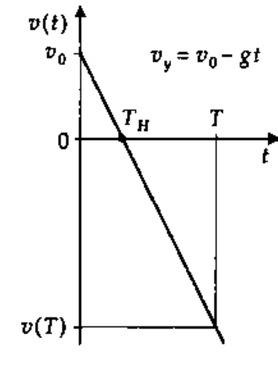


Fig. 1.32 : *Lancer vertical ascendant*

3. Projectile

La vitesse initiale du projectile a des composantes v_y et v_x. Le mouvement dans la direction horizontale x est rectiligne uniforme (absence de composante de la force) :

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{x0} t \qquad & y(t) &= v_{y0} t - \frac{gt^2}{2} \\ v_x(t) &= v_{x0} \qquad & v_y(t) &= v_{y0} - gt \end{aligned}$$

Les composantes de la vitesse initiale sont données par l'angle de tir α que fait la direction du vecteur vitesse initiale avec l'axe horizontal x :

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Le temps mis par le projectile pour atteindre le sommet de la trajectoire T_{sommet} et la durée totale T du mouvement jusqu'à l'impact au sol sont :

$$T_{sommet} = \frac{T}{2} \qquad T = \frac{2v_{y0}}{g} = \frac{2v \sin\alpha}{g}$$

La vitesse du projectile à l'impact au sol est égale à sa vitesse initiale ; la trajectoire est une **parabole**.

$$y(x) = x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos\alpha}x^2$$

L'**apogée** (hauteur maximum du projectile) H et sa **portée** L sont données par :

$$H = h_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g} = h_0 + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} \qquad L = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$$

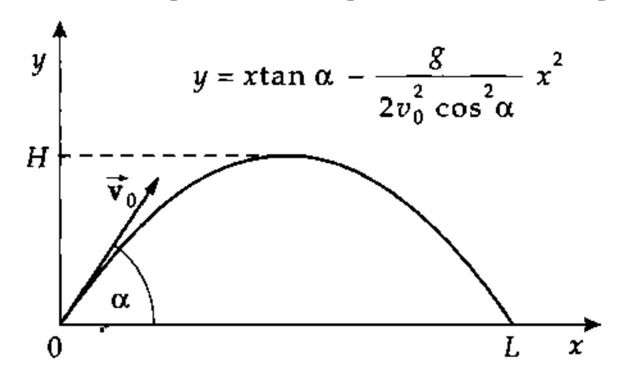


Fig. 1.33 : *Trajectoire d'un projectile*

- La portée maximum L_{max} est obtenue avec un angle de tir de 45° :

  $$L_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

- En réalité les trajectoires sont affectées par le frottement dans l'air, particulièrement si la vitesse initiale est grande. La vitesse du projectile ne peut pas augmenter indéfiniment. La force de frottement fluide étant proportionnelle à la vitesse, la résultante des forces de pesanteur et de frottement va s'annuler. Il en résulte un mouvement uniforme de vitesse limite v_{max} :

  $$v_{max} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho c_R S}}$$

  (m : Masse du corps, ρ : masse volumique de l'air, c_R : coefficient de résistance du au frottement de l'air, S : surface de la section droite du corps). (→ *Tab. 8.3/21*).

1.4 Mouvement curviligne, rotation

La **rotation (mouvement curviligne)** est le mouvement d'un corps au cours duquel la distance de tous les points du corps entre eux et à un axe de rotation fixe reste constante. La rotation est spécifiée par un angle de rotation $\varphi(t)$ qui caractérise la position angulaire du corps à chaque instant.

Le mouvement circulaire est le mouvement d'un point matériel sur une trajectoire avec une distance constante à l'axe de rotation. C'est l'exemple le plus simple d'un mouvement curviligne.

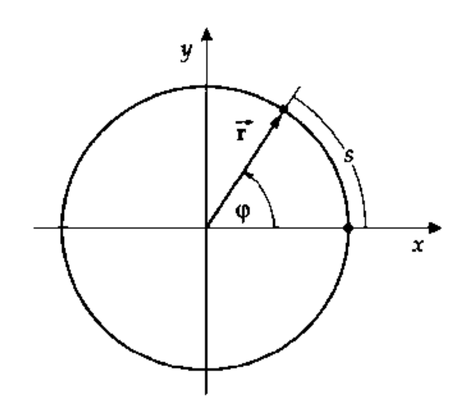


Fig. 1.34 : *Mouvement circulaire d'un point matériel, décrit par l'angle φ où le parcours $s = r\varphi$.*

Les grandeurs angle, vitesse et accélération angulaires, utilisées pour la description d'un mouvement curviligne, correspondent aux grandeurs longueur, vitesse et accélération linéaires du mouvement rectiligne.

■ Quelques une des relations qui suivent ont été discutées dans la section précédente comme exemples du mouvement à plusieurs dimensions.

1.4.1 Vitesse angulaire, vecteur rotation

1. Définition de la vitesse angulaire

Vitesse angulaire $\vec{\omega}$: vecteur dont la grandeur est égale à l'angle de rotation par unité de temps et dont la direction est perpendiculaire au plan du mouvement (porté par l'axe de rotation). De manière analogue à la vitesse du mouvement rectiligne, on définit la vitesse angulaire moyenne pendant un intervalle de temps Δt :

$$|\vec{\omega}| = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

La vitesse angulaire instantanée est la limite de cette expression lorsque $\Delta t \to 0$:

Vitesse angulaire = $\dfrac{\textbf{angle de rotation}}{\textbf{intervalle de temps}}$				**T^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$|\vec{\omega}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \dot{\varphi}$$	$\vec{\omega}$	rad/s	vitesse angulaire	
	$\Delta\varphi$	rad	angle de rotation	
	Δt	s	intervalle de temps	

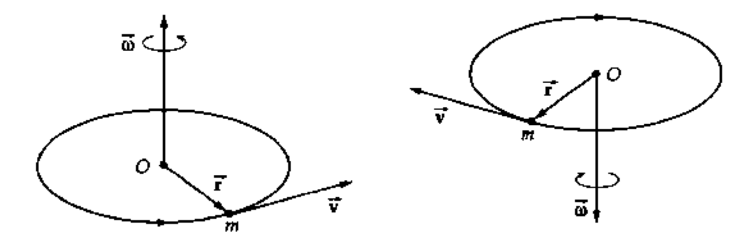


Fig. 1.35 : *Vitesse angulaire d'un mouvement circulaire*

2. Unité de vitesse angulaire

Le **radian par seconde** (rad/s) est l'unité de vitesse angulaire dans le système d'unités SI.

1 rad/s est la vitesse angulaire d'un mobile dont l'angle de rotation varie de 1 radian en 1 seconde.

■ La terre effectue une révolution complète autour de son axe en 24 heures, sa vitesse angulaire est :

$$\omega = \frac{2\pi \,\text{rad}}{24\,\text{h}} = \frac{2\pi \,\text{rad}}{86\,400\,\text{s}} \approx 7,27 \cdot 10^{-5}\,\text{rad/s}$$

3. Fréquence et période de rotation

La **fréquence de rotation** ν : est le nombre ν de révolutions effectuées par unité de temps. Elle peut s'exprimer en fonction de la vitesse angulaire :

$$\omega = 2\pi\nu \qquad \nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

La fréquence de rotation s'exprime en t/s (**tours par seconde**) ou t/min.

Période T : durée d'une révolution complète :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

■ La période de révolution de la terre est $T = 24\,\text{h}$. Sa fréquence de rotation est

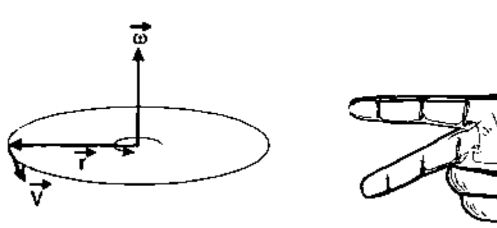
$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{24\,\text{h}} = 1,157 \cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1}$$

4. Règle de la main droite

La **règle de la main droite** : indique le sens du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ en fonction de la rotation (rotation droite ou gauche) :

● Le sens de $\vec{\omega}$ est donné par le pouce de la main droite tenu parallèlement à l'axe de rotation, les doigts indiquant le sens de la rotation.

▷ En regardant dans le sens du vecteur rotation $\vec{\omega}$, le mouvement est dans le sens des aiguilles d'une montre autour de $\vec{\omega}$.



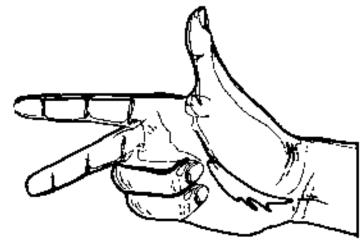


Fig. 1.36 : *Règle de la main droite, définit le sens des vecteurs rotation $\vec{\omega}$, rayon vecteur $\vec{r}$ et vitesse linéaire $\vec{v}$.*

▷ **Règle des trois doigts de la main droite :** le vecteur rotation, le rayon vecteur et la vitesse linéaire sont respectivement dans le sens du pouce, de l'index et du médius (majeur) de la main droite.

▷ Ceci est une convention. En utilisant la main gauche, le sens d'un des vecteurs serait opposé.

5. Vecteur axial et vecteur polaire

▷ Le vecteur représentant la vitesse angulaire est un **vecteur axial** (pseudo-vecteur), c'est à dire que par réflexion par rapport à l'origine (**inversion**), son sens est inversé par opposition à un **vecteur polaire** tel que le rayon vecteur ou le vecteur vitesse linéaire. L'image d'une main droite dans un miroir est une main gauche.

■ La terre tourne dans la direction de l'Est, son vecteur rotation pointe par conséquent vers le pôle nord.

1.4.2 Accélération angulaire

L'**accélération angulaire** $\vec{\alpha}$ est la variation $\Delta\vec{\omega}$ du vecteur vitesse angulaire par unité de temps. C'est un vecteur axial. Si l'axe de rotation est fixe, l'accélération angulaire a même direction que la vitesse angulaire. L'accélération angulaire moyenne durant un intervalle de temps Δt est définie par :

$$< \vec{\alpha} >= \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$$

L'accélération angulaire instantanée est la limite de l'expression quand $\Delta t \to 0$

Accélération angulaire $=$ $\dfrac{\textbf{accroissement de vitesse angulaire}}{\textbf{intervalle de temps}}$				T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}$	$\vec{\alpha}$	rad/s^2	accélération angulaire	
	$\vec{\omega}(t)$	rad/s	vitesse angulaire	
	$\Delta\vec{\omega}$	rad/s	accroissement de la vitesse angulaire	
	Δt	s	intervalle de temps	

Radian par (seconde)^2 (rad/s^2) : unité d'accélération angulaire SI ; c'est l'accélération angulaire lorsque la vitesse angulaire augmente de 1 rad/s en une seconde.

▹ Si l'axe de rotation est fixe pendant le mouvement, les vecteurs vitesse angulaire et accélération ont même direction. Dans le cas contraire, l'accélération angulaire exprime à la fois les variations de l'intensité de la vitesse angulaire et de l'orientation de l'axe de rotation.

1.4.3 Vitesse orbitale

1. Définition de la vitesse orbitale

Un mouvement curviligne peut être interprété comme un mouvement à deux ou plusieurs dimensions le long d'une orbite. Le vecteur vitesse orbitale $\vec{v}$ d'un point matériel est la vitesse linéaire sur cette orbite. Elle est à tout instant tangente à la **trajectoire** et ainsi orthogonale au vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$.(Fig. 1.37).

La **vitesse orbitale** $\vec{v}$ d'un mobile sur une orbite circulaire est :

Vitesse orbitale = vitesse angulaire × rayon vecteur				LT^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$	$\vec{v}$	m/s	vitesse	
	$\vec{r}$	m	distance au centre	
	$\vec{\omega}$	rad/s	vitesse angulaire	

- Dans un mouvement circulaire, le vecteur vitesse orbitale est orthogonal au rayon vecteur et au vecteur rotation.

Un vecteur ($\vec{v}$) orthogonal au plan formé par deux autres vecteurs ($\vec{r}$ et $\vec{\omega}$), peut être considéré comme le **produit vectoriel** de ces deux vecteurs ($\to$ *Produit vectoriel*).

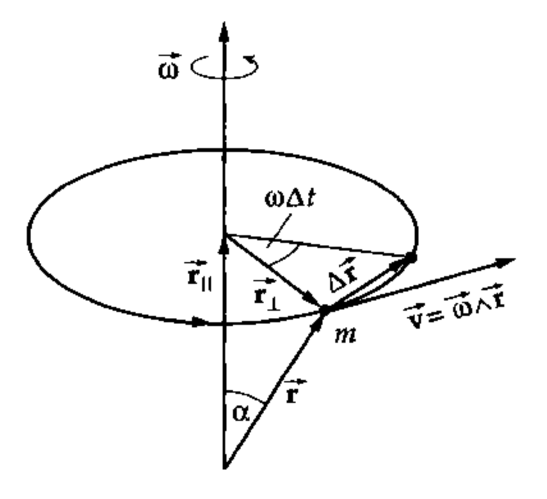


Fig. 1.37 : *Vitesse orbitale $\vec{\mathbf{v}}$ d'un mouvement circulaire*

2. Décomposition du vecteur vitesse orbitale

› Le vecteur $\vec{\mathbf{r}}$ peut être décomposé en deux composantes : $\vec{\mathbf{r}}_{\parallel}$ parallèle à l'axe de rotation $\vec{\omega}$ et $\vec{\mathbf{r}}_{\perp}$ perpendiculaire à cet axe. Alors : $\vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{r}}_{\parallel} = 0$ soit :

$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{r}}_{\perp}$

La vitesse orbitale dépend de la **distance à l'axe** $|\vec{\mathbf{r}}_{\perp}|$. Le produit vectoriel rend compte de ce fait.

La grandeur de la vitesse orbitale est alors :

$$|\vec{\mathbf{v}}| = |\vec{\omega}| \wedge |\vec{\mathbf{r}}_{\perp}| = |\vec{\omega}|\,|\vec{\mathbf{r}}| \sin\alpha$$

où α est l'angle entre l'axe de rotation et le rayon vecteur. La vitesse orbitale d'un point matériel est ainsi proportionnelle à sa vitesse angulaire et à sa distance à l'axe ($|\vec{\mathbf{r}}| \sin\alpha$).

3. Exemple : vitesse orbitale d'un point de la surface de la Terre

■ Le rayon de la terre est de 6 380 km. La vitesse d'un point à l'équateur est

$$v = \omega r = \frac{2\pi \text{ rad}}{24\,\text{h}} \cdot 6\,380\,\text{km} = 464\,\text{m/s} = 1\,670\,\text{km/h}$$

La vitesse orbitale d'un point situé à 45° de latitude nord, dont la distance à l'axe de la terre est $\vec{\mathbf{r}}_{\perp} = r\sin(90° - 45°) = r\cos 45° = r/\sqrt{2}$,

est par contre : $v = \dfrac{1\,670}{\sqrt{2}}\,\text{km/h} = 1\,180\,\text{km/h}$.

(le terme 90° − 45° vient du fait que la latitude est comptée à partir de l'équateur et non pas à partir de l'axe de la terre).

La vitesse à la circonférence d'une roue est :

$$v = r\omega = 2\pi r\nu = \frac{2\pi r}{T}$$

où ν et T sont respectivement la fréquence et la période de rotation de la roue.

2 Dynamique

La dynamique est l'étude des relations entre les forces et les mouvements qu'elles produisent. Elle décrit comment des corps se déplacent sous l'action de forces extérieures. À l'opposé de la cinématique qui décrit **comment** un corps se déplace, la dynamique cherche à expliquer **pourquoi** il se déplace et introduit les concepts de masse et de force.

2.1 Lois fondamentales de la dynamique

Les forces sont les causes du mouvement. Les lois de Newton établissent une relation entre les forces et les grandeurs cinématiques, vitesse et accélération d'un corps.

2.1.1 Masse et quantité de mouvement

2.1.1.1 Masse

1. Masse d'inertie et masse gravitationelle

Masse d'inertie : indique la résistance qu'un corps oppose à une modification de son mouvement sous l'action d'une force.

Masse gravitationnelle : exprime la grandeur de l'attraction gravitationnelle d'un corps sur un autre, (par exemple : attraction entre la masse de la terre et celle d'un objet placé dans son voisinage. Champ de la pesanteur terrestre).

● La masse d'inertie et la masse gravitationnelle sont équivalentes.

▹ Cette équivalence est un fait empirique qui est exploré avec des mesures de grande précision. C'est un postulat fondamental de la → *théorie de la relativité*.

La **masse** m est une propriété physique fondamentale de tout corps.

Un point matériel n'a que ce seul attribut (au point de vue de ses propriétés mécaniques). Un solide (**solide rigide**) est en plus caractérisé par son → *moment d'inertie*.

Point matériel (**masse ponctuelle**) : représentation idéale d'un corps infiniment petit de masse finie. Par opposition à un → *solide rigide*.

2. Unités de masse

Kilogramme (kg) : unité SI de masse. Une des sept grandeurs fondamentales de ce système d'unités.
1 kg est défini comme la masse du kilogramme étalon, un cylindre en Platine-Iridium, conservé au Bureau International des Poids et Mesures (Sèvres).

$$[m] = \text{kg} = \text{Kilogramme}$$

Autres unités de masse → *Tab. 34/3*.

3. Mesure de la masse

M La masse se mesure au moyen d'une **balance** qui compare le poids d'un corps à celui d'un corps de masse connue (**balance de Roberval**). Diverses méthodes de pesée permettent d'atteindre des précisions élevées.
Dans certaines balances, la force de poids est mesurée par l'allongement d'un ressort (dynanomètre).
La masse de particules atomiques et subatomiques chargées peut être déterminée à partir de leur quantité de mouvement en mesurant leur déviation dans des champs électrique et magnétique (**spectrographe de masse**).

- La **masse** est un attribut d'un corps, le **poids** d'un corps dépend de l'attraction gravitationnelle. Un corps de masse 1 kg aura la même masse en tout autre lieu, son poids sur la lune, par contre, ne sera que 1/6 de son poids sur la terre.

4. Masse volumique et densité

Masse volumique ρ : rapport de la masse d'un corps à son volume.

Masse volumique $= \dfrac{\textbf{masse}}{\textbf{volume}}$			**ML^{-3}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\rho = \dfrac{m}{V}$	ρ m V	kg/m^3 kg m^3	masse volumique masse volume

Kilogramme par mètre-cube (kg/m^3) : unité SI de masse volumique, c'est la masse volumique d'une substance dont un volume de 1 m^3 a une masse de 1 kg.

$$[\rho] = kg/m^3$$

- Parfois la masse volumique est exprimée en kilogrammes par décimètre cube (kg/dm^3) ou encore en grammes par centimètre cube (g/cm^3) :
  $1\,kg/dm^3 = 1\,g/cm^3 = 10^{-6}\,kg/m^3$
  L'eau, à la température de 20 °C, a une masse volumique de 1 g/cm^3. Les métaux ont des masses volumiques 2 à 20 fois plus grandes. L'osmium est le métal le plus dense avec une masse volumique $\rho = 22,48\ kg/m^3$ (→ *Tab. 8.1*).

- Le volume d'un corps dépendant de sa température et de sa pression (**coefficient de dilatation**), la masse volumique est fonction de la température et de la pression.

[M] La masse volumique d'un corps solide peut être déterminée par une méthode basée sur l'utilisation de la poussée d'Archimède qui s'exerce sur tout corps plongé dans un liquide : **balance de Mohr** (→ *Hydrostatique*).

La **densité** d'un corps solide ou d'un liquide est le rapport de sa masse volumique à celle de l'eau. La densité d'un gaz est le rapport de sa masse volumique à celle de l'air, dans les mêmes conditions de température et de pression.

5. Masse volumique de corps inhomogènes

Pour un corps inhomogène, la masse volumique ρ varie en fonction de la position dans ce corps $\vec{r}$, $\rho = \rho\vec{r}$. On peut décomposer le volume du solide en volumes élémentaires ΔV de masse Δm pour lesquels la masse volumique peut être considérée comme constante. Si la distribution de masse est continue dans le solide, on obtient la masse volumique à la position $\vec{r}$ par :

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dV}}, \quad \mathrm{dm} = \rho(\vec{r}) \cdot \mathrm{dV}.$$

La masse totale du corps est donnée par l'intégrale sur le volume V :

$$m = \int \mathrm{dm} = \int \rho(\vec{r})\,\mathrm{dV}.$$

Fig. 2.1 : *Masse volumique $\rho(\vec{r})$ d'un corps inhomogène*

2.1.1.2 Quantité de mouvement, moment linéaire, impulsion

1. Définition de la quantité de mouvement

La **quantité de mouvement** est définie comme le produit de la masse et de la vitesse d'un corps. C'est une grandeur vectorielle, sa direction et son sens sont ceux du déplacement ; elle caractérise l'état de mouvement par rapport à un référentiel.

Quantité de mouvement = masse × vitesse			**MLT^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{p}$	$kg \cdot m/s$	impulsion du corps
	m	kg	Masse du corps
	$\vec{v}$	m/s	vitesse du corps

2. Unité de la quantité de mouvement

Kilogrammètre par seconde (kg.m/s) : unité SI de la quantité de mouvement, c'est la quantité de mouvement d'un corps de masse 1 kilogramme qui se déplace à la vitesse de 1 m/s.

$$[p] = \frac{kg \cdot m}{s} = N \cdot s$$

■ Un corps de 10 kg qui se déplace à une vitesse de 3 m/s a une quantité de mouvement :

$p = mv = 10\,kg \cdot 3\,m/s = 30\,Ns$

Un corps de masse double (20 kg) se déplaçant à la même vitesse aura une impulsion double :

$p = mv = 20\,kg \cdot 3\,m/s = 60\,Ns$

2.1.2 Lois de Newton

Les lois de Newton établissent les relations entre les forces qui agissent sur un corps et la variation de leur quantité de mouvement. La première loi de Newton est le principe d'inertie, la deuxième le principe fondamental de la dynamique et la troisième le principe d'action et de réaction.

2.1.2.1 Principe d'inertie

1. Première loi de Newton

La **première loi de Newton (principe d'inertie)**, rend compte de l'**inertie** d'un corps :

Première loi de Newton :
un corps, sur lequel n'agit aucune force, ne modifie pas sa quantité de mouvement.

de $\vec{F} = 0$
on déduit $\vec{p} = \text{const.}$

$m = \text{const.} \implies \vec{v} = \text{const.}$

Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{F}$	N	force appliquée
$\vec{p}$	kg m/s	quantité de mvt.
$\vec{v}$	m/s	vitesse
m	kg	masse

▷ La première loi de Newton reste valable même si la masse m du corps n'est pas constante comme dans le cas du mouvement d'une fusée (propulsion par réaction). Alors la relation v = *constante* n'est plus valable.

La notion de vitesse constante dépend du référentiel choisi.

■ Un passager d'un avion assis sur son siège se déplace avec une vitesse constante $v = 0$ par rapport à l'avion, mais sur une trajectoire circulaire par rapport au centre de la terre. Par rapport à un point de la surface de la terre, il faut tenir compte de la vitesse de rotation de celle-ci. Par rapport au centre du soleil se rajoute la vitesse de la terre par rapport au soleil. Le soleil lui- même a une vitesse par rapport au centre de notre galaxie (voie lactée) qui a une vitesse par rapport à une autre galaxie etc.

2. Référentiel d'inertie

Référentiel dans lequel la première loi de Newton est vérifiée. Un référentiel en mouvement de translation rectiligne uniforme est encore un référentiel d'inertie. Par conséquent, il existe un nombre infini de référentiels d'inertie dans lesquels les lois de la physique sont vérifiées ($\rightarrow$ *Relativité*).

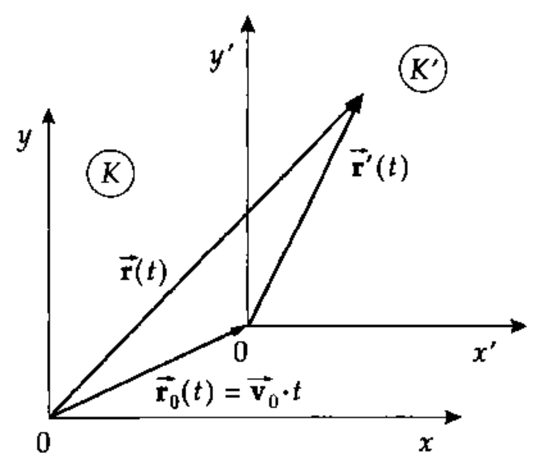


Fig. 2.2 : *Mouvement relatif de deux référentiels d'inertie K et K', avec la vitesse relative $\vec{v}_0$.*

■ Un corps se déplaçant sans frottement sur un rail horizontal (résultante nulle du poids et de la réaction), conserve sa vitesse. S'il est au repos il reste au repos, s'il est en mouvement sa vitesse est constante. Ce cas idéal n'existe pas en pratique car il faut également tenir compte de toutes les forces de frottement.

2.1.2.2 Principe fondamental de la dynamique

1. Deuxième loi de Newton

La **deuxième loi de Newton (principe d'action, principe fondamental de la dynamique)**, décrit comment les forces qui agissent sur un corps modifient sa vitesse (Fig. 2.3) :

Deuxième loi de Newton : la variation de quantité de mouvement d'un corps est proportionelle aux forces qui s'y exercent.			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$$	$\vec{v}$	m/s	vitesse
	$\vec{a}$	m/s^2	accélération
	$\vec{p}$	kg m/s	quantité de mvt.
	$\vec{F}$	N	force
	m	kg	masse

Si la masse du corps est constante : $m\vec{a} = \vec{F}$

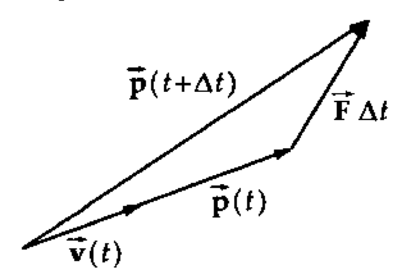


Fig. 2.3 : *Force $\vec{F}(t)$ et variation de quantité de mouvement $\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)$*

- ■ Si une même force s'exerce sur deux corps dont le deuxième a une masse double du premier, il subit une accélération deux fois plus petite.

- ▷ Le principe fondamental de la dynamique reste valable même lorsque la masse du système n'est pas constante (fusée). Il s'applique sous la forme :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

- ▷ Si la longueur, le temps et la masse sont considérés comme les grandeurs fondamentales, le principe fondamental de la dynamique permet de déduire l'unité de force (système SI). Par contre, si la longueur, le temps et la force sont les grandeurs fondamentales, ce principe permet de définir l'unité de masse (ancien système d'unités MKPS).

2.1.2.3 Force

1. Définition d'une force

Dans le système SI, la force est définie à partir du principe fondamental de la dynamique.

Force : produit de la masse d'un corps et de l'accélération qui résulte de son application. La force est une grandeur vectorielle qui a mêmes direction et sens que l'accélération. Elle est définie par :

Force = masse × accélération			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{F} = m\vec{a}$	F	N	force appliquée
	m	kg	masse
	a	m/s^2	accélération qui en résulte

2. Unités de la force

Newton (N) : unité SI de la force, c'est la force qui, appliquée à un corps de masse 1 kg, lui communique une accélération de 1 m/s^2.

$$[F] = \mathrm{N} = \mathrm{Newton} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}$$

Autres unités → *Tab. 34/3.*

1 kilogramme poids (kp)	=	9,806 65 N
1 dyne (dyne)	=	10 μN

La masse peut être interprétée comme un coefficient de proportionnalité entre force et accélération. Plus la masse d'un corps est grande, moins une force donnée lui communique d'accélération.

$$m = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}$$

La quantité de mouvement est modifiée sous l'action d'une force. Si la masse est constante, il en résulte une modification de la vitesse.

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\Delta t = m\vec{a}\Delta t = \vec{F}\Delta t$$

3. Impulsion

L'**impulsion** est le produit $\vec{F} \cdot \Delta t$ de la force $\vec{F}$ par sa durée d'application Δt. Elle est égale à la variation de la quantité de mouvement $\Delta\vec{p}$ (Fig. 2.4). L'intégrale $\vec{P} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt$ est appelée **percussion**.

Impulsion = force × durée d'application			MLT^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$	$\Delta\vec{p}$	kg · m/s	variation de quantité de mouvement
	Δt	s	durée d'application
	$\vec{F}$	N	force appliquée

> Si, pendant la durée d'application Δt, la force n'est pas constante il faut intégrer l'impulsion entre les temps initial t_1 et final t_2 :

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}t$$

Fig. 2.4 : *Impulsion de la force $F(t)$ pendant l'intervalle de temps dt*

2.1.2.4 Principe d'action et de réaction

1. Troisième loi de Newton

La **troisième loi de Newton** rend compte du fait qu'à toute force $\vec{\mathbf{F}}$ qui s'exerce sur un corps correspond une deuxième force $\vec{\mathbf{F}}'$ de même intensité mais de sens opposé s'appliquant à un autre corps (Fig. 2.5).

$$\vec{\mathbf{F}} = -\vec{\mathbf{F}}'$$

Principe d'action et de réaction			**MLT^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -\vec{\mathbf{F}}_{21}$	$\vec{\mathbf{F}}_{12}$	N	force exercée par 2 sur 1
	$\vec{\mathbf{F}}_{21}$	N	force exercée par 1 sur 2

- **Troisième loi de Newton (principe d'action et de réaction) :** Deux corps exercent l'un sur l'autre des forces d'égales intensités et de sens opposés. **action = réaction**

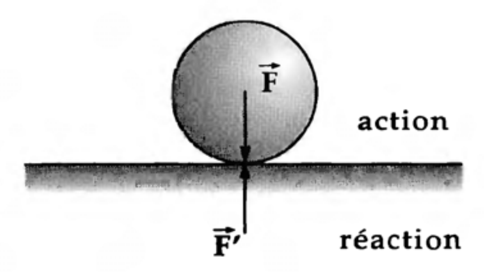


Fig. 2.5 : *Principe d'action et de réaction*

■ Deux personnes, placées sur des chariots pouvant se déplacer sans frottement sur un plan horizontal, tiennent les extrémités d'une même corde. Si une des personnes tire sur la corde pour avancer, le deuxième chariot se déplacera également vers elle.

▷ Bien que les forces soient d'égales intensités, l'accélération des corps dépend de leurs masses respectives. Le corps le plus lourd aura l'accélération la plus faible. L'accélération d'un des deux corps sera négligeable si sa masse est très grande par rapport à celle de l'autre.

2.1.2.5 Forces d'inertie

1. Définition des forces d'inertie

Forces d'inertie : forces ressenties par un observateur lié à un → *référentiel accéléré*. Contrairement aux forces décrites ci-dessus, elles ne sont pas la cause mais la conséquence de l'accélération. Leur sens est

opposé à l'accélération qui les produit.

La **force d'inertie** est opposée en sens à l'accélération qui lui donne naissance. Son intensité est égale à celle de la force qui produit l'accélération de son référentiel.			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{F}_I = -m\vec{a}$	$\vec{F}_I$	N	force d'inertie
	m	kg	masse
	$\vec{a}$	m/s^2	accélération

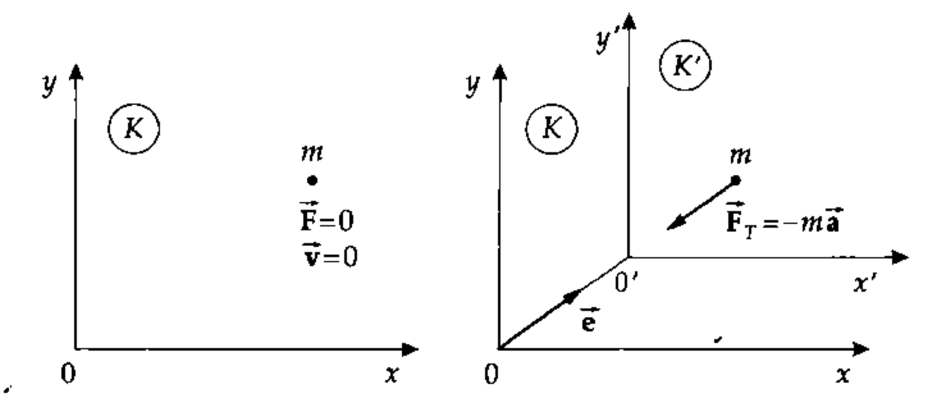


Fig. 2.6 : *Force d'inertie dans un référentiel K' en mouvement uniformément accéléré par rapport à K*

2. Exemples de forces d'inertie

- Pour un observateur placé sur un manège tournant, les objets sont soumis à une accélération dirigée vers l'extérieur. Il invoque une force complémentaire qui ne se manifeste que lors du mouvement de rotation : la **force centrifuge**. En réalité, c'est la **force centripète** qui lie l'observateur au manège, alors que le corps, apparemment accéléré, est animé d'un mouvement uniforme.

- Un corps de masse 1 kg se trouve dans un véhicule soumis à une accélération de 3 m/s^2. Dans le véhicule, le corps est soumis à une force apparente :

  $$F_I = -ma = -1\,\text{kg} \cdot 3\,\text{m/s}^2 = -3\,\text{N}$$

- Dans un véhicule qui accélère, les passagers subissent une force apparente qui les plaque contre le dossier de leur siège. Si le véhicule freine brutalement, ils sont projetés dans le sens de la marche.

2.1.2.6 Principe de d'Alembert

Il y a **équilibre dynamique** lorsque la somme des forces agissantes $\vec{F}_{rés}$ et des forces d'inertie qui leurs sont opposées s'annule (**principe de d'Alembert**). L'équilibre dynamique est l'expression de la troisième loi de Newton.

Un corps est en **équilibre dynamique** lorsque son mouvement est conforme aux lois de Newton.			
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{F}_{rés} + \vec{F}_I = 0$	$\vec{F}_{rés}$	N	somme des forces agissantes
$\vec{F}_{rés} - m\vec{a} = 0$	$\vec{F}_I$	N	somme des forces d'inertie
	$\vec{a}$	m/s^2	accélération

▷ Le principe de d'Alembert, encore appelé principe des travaux virtuels, stipule : la somme des travaux des forces, y compris les forces d'inertie, est nulle pour tout déplacement virtuel δr_i compatible avec les liaisons.

▷ L'équilibre dynamique, contrairement à l'équilibre statique, ne signifie pas que le corps est figé dans son mouvement. En effet, l'apparition de forces d'inertie signifie qu'il y a accélération.

▷ On peut alors établir les équations du mouvement d'un corps à partir de la condition d'équilibre des forces agissantes et des forces d'inertie.

▷ D'autres forces d'inertie apparaissent lors des mouvements de rotation (→ *force centrifuge, force de Coriolis*).

2.1.2.7 Composition de forces

1. Force résultante

La **résultante** $\vec{F}_R$ remplace deux ou plusieurs forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_i$ de même point d'application par une seule force (**parallélogramme des forces**) (Fig. 2.7). Le deuxième vecteur force est déplacé parallèlement à lui-même de façon à faire correspondre son origine avec l'extrémité du premier. Le vecteur joignant l'origine du premier à l'extrémité du deuxième ainsi déplacé représente la force résultante ou **résultante**.

La grandeur de la résultante est :

Résultante = somme vectorielle des forces individuelles			
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$	$\vec{F}_R$	N	résultante
$\lvert\vec{F}_R\rvert = \sqrt{\lvert\vec{F}\rvert_1^2 + \lvert\vec{F}\rvert_2^2 + 2\lvert\vec{F}\rvert_1 \lvert\vec{F}\rvert^2 \cos\alpha}$	$\vec{F}_1, \vec{F}_2$	N	vecteurs force
	α	rad	angle entre $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$

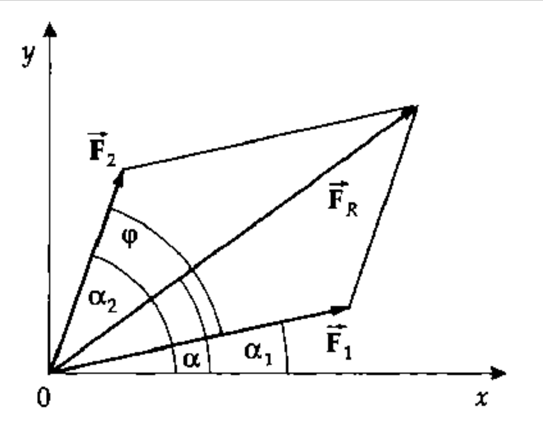


Fig. 2.7 : *Composition de forces*

2. Parallélogramme des forces

- Pour additionner deux forces agissant en deux points différents d'un même solide, on les déplace parallèlement à elles-mêmes de manière à amener leurs origines au point d'intersection de leurs lignes d'action.
  L'addition vectorielle peut s'effectuer au point où on a déplacé les origines des deux forces.

- Lorsque deux forces F_1 et F_2 agissent dans la même direction, leurs lignes d'action ne se coupent pas. Dans ce cas, on peut leur ajouter deux forces opposées, respectivement $F_{\text{comp},1}$ et $F_{\text{comp},2}$. Celles-ci permettent de ramener l'ensemble des forces à un point d'application commun et se compenseront lors de l'addition.

▷ La résultante d'un nombre quelconque de forces peut être construite par la répétition de ce procédé : $\vec{\mathbf{F}}_R = (\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2) + \vec{\mathbf{F}}_3 + \ldots$

- Cette résultante peut être obtenue par une construction graphique en composant les forces deux à deux par une succession de parallélogrammes des forces ($\vec{\mathbf{F}}_1$ avec $\vec{\mathbf{F}}_2$, puis leur résultante avec $\vec{\mathbf{F}}_3$ et ainsi de suite). $\vec{\mathbf{R}}$ peut aussi s'obtenir en joignant l'origine de $\vec{\mathbf{F}}_1$ à l'extrémité d'une ligne polygonale (F_1, F_2, F_3,....) dont les côtés successifs sont équipollents (de même longueur, parallèles et de même sens) aux divers vecteurs force (Fig. 2.8).

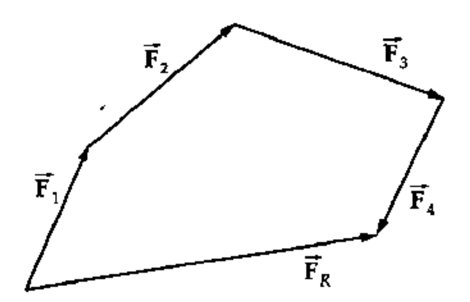


Fig. 2.8 : *Parallélogramme des forces*

3. Addition des composantes

▷ La résultante peut également être obtenue par addition des composantes des forces (→ *calcul vectoriel*) :

$$\vec{\mathbf{F}}_R = \begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} + F_{2x} \\ F_{1y} + F_{2y} \\ F_{1z} + F_{2z} \end{pmatrix}$$

▷ Si deux vecteurs ont mêmes direction et sens ($\alpha = 0$), on a :
$|\vec{\mathbf{F}}_R| = |\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2| = |\vec{\mathbf{F}}_1| + |\vec{\mathbf{F}}_2|$
Si deux vecteurs sont opposés en sens ($\alpha = \pi$), alors :
$|\vec{\mathbf{F}}_R| = |\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2| = |\vec{\mathbf{F}}_1| - |\vec{\mathbf{F}}_2|$
Si deux forces sont perpendiculaires entre elles ($\alpha = \pi/2$), on a :
$|\vec{\mathbf{F}}_R| = |\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2| = \sqrt{|\vec{\mathbf{F}}_1|^2 + |\vec{\mathbf{F}}_2|^2}$

2.1.2.8 Décomposition de forces

1. Décomposition générale de forces

Lors de la décomposition d'une force, on cherche à représenter le vecteur force $\vec{\mathbf{F}}$ comme la résultante de plusieurs autres forces $\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2 \cdots \vec{\mathbf{F}}_i$ pointant dans des directions définies. Pour ce faire, à partir du point

d'application de la force, on dessine des droites dans les directions définies. Les composantes cherchées de la force sont obtenues à partir de ses projections orthogonales sur ces droites.

Plus généralement, la décomposition de forces s'obtient à l'aide du **produit scalaire.**

- La composante F_X dans une direction donnée d'un vecteur force $\vec{\mathbf{F}}$ est obtenue en effectuant le produit scalaire de $\vec{\mathbf{F}}$ et du vecteur unitaire $\vec{\mathbf{e}}_X$ de cette direction :
  $F_X = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_X$

Décomposition d'une force

$$F_1 = F\frac{\sin(\alpha_2 - \alpha)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}$$
$$F_2 = F\frac{\sin(\alpha - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}$$
$$\alpha_1 = \alpha - \arccos\frac{F^2 + F_1^2 - F_2^2}{2FF_1}$$
$$\alpha_2 = \alpha + \arccos\frac{F^2 + F_2^2 - F_1^2}{2FF_2}$$

Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{\mathbf{F}}$	N	Force à décomposer
$\vec{\mathbf{F}}_1, \vec{\mathbf{F}}_2$	N	composantes
α	rad	angle $\vec{\mathbf{F}}, Ox$
α_1	rad	angle $\vec{\mathbf{F}}_1, Ox$
α_2	rad	angle $\vec{\mathbf{F}}_2, Ox$

2. Forces tangentielle et normale

La décomposition d'une force en deux composantes perpendiculaires entre elles est effectuée au moyen du **produit scalaire** (Fig. 2.9) :

La composante F_1 de la force $\vec{\mathbf{F}}$ sur la direction du vecteur unitaire $\vec{\mathbf{e}}_1$ est le produit scalaire de $\vec{\mathbf{F}}$ par le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{e}}_1$:

$$F_x = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 = F\,\cos\alpha\,, \quad \alpha\ :\ \text{angle entre}\ \vec{\mathbf{F}}\ \text{et}\ \vec{\mathbf{e}}_1\,.$$

La composante F_2 de $\vec{\mathbf{F}}$ dans la direction 2 perpendiculairement à 1 ($\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}_2 = 0$), est donnée par :

$$F_2 = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_2 = F\,\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = F\,\sin\alpha\,.$$

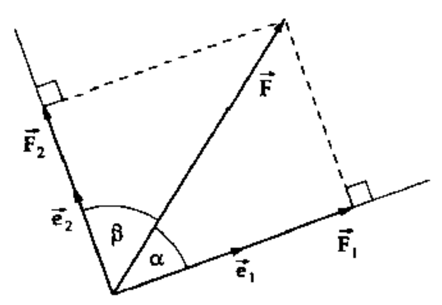


Fig. 2.9 : *Décomposition d'une force $\vec{\mathbf{F}}$ en deux composantes perpendiculaires*

La **force tangentielle** est la composante de la force agissante sur la direction de la tangente à la trajectoire. La force tangentielle produit une accélération dans la direction de la trajectoire, elle modifie la grandeur v de la vitesse orbitale mais pas sa direction :

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{tan}} = m \cdot \dot{v} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\text{tan}}\,.$$

La **force normale** (force radiale) est la composante de la force dans la direction de la normale principale à la trajectoire. Cette force normale produit une accélération normale et modifie la direction du vecteur vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ mais pas sa grandeur :

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{norm}} = m \cdot \frac{v^2}{R} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\text{norm}}\,,$$

où R est le rayon de courbure de la trajectoire et $\vec{e}_{\text{norm}}$ le vecteur unitaire de la normale principale.

3. Force centripète

Lors d'un mouvement circulaire uniforme (rayon R), la force tangentielle est nulle. La force tangentielle est la **force centripète** (radiale) :

$$\vec{\mathbf{F}}_r = -m\,\frac{v^2}{R}\,\vec{\mathbf{e}}_r$$

qui produit l'accélération centripète dirigée vers le centre de la trajectoire et de grandeur constante.

4. Utilisation de la décomposition des forces

La décomposition des forces est utilisée, par exemple, lorsqu'un solide est en contact avec un support. Le support (point d'appui, rail, surface de contact ....) exerce une force de **réaction** d'intensité égale à la composante de la force agisante normale à la surface de contact et de sens opposé.

5. Application au plan incliné

Plan incliné (Fig. 2.10) : un mobile est placé sur un plan incliné. On cherche les composantes des forces de gravitation $\vec{\mathbf{F}}_G$, perpendiculaire (**force normale** $\vec{\mathbf{F}}_N$) et parallèle (**force motrice** $\vec{\mathbf{F}}_M$) au plan incliné. La force normale est compensée par la réaction du plan et la force motrice accélère le mobile.

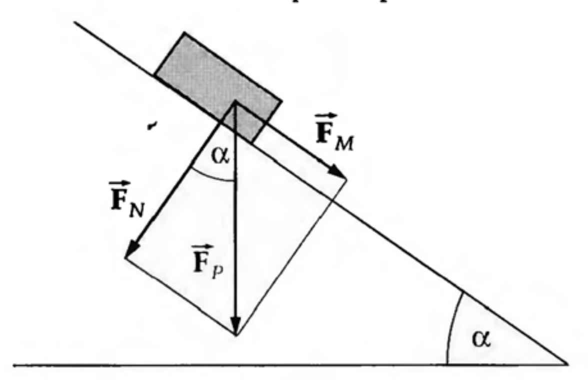


Fig. 2.10 : *Mobile sur un plan incliné*

on obtient :

Force motrice : $F_M = F_G \cos(90° - \alpha) = F_G \sin\alpha$
Composante normale : $F_N = F_G \cos\alpha$

(α : angle du plan incliné avec l'horizontale (inclinaison)).

■ Un solide de masse $m = 2$ kg glisse le long d'un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale. La force motrice est :
$F_M = F\sin\alpha = mg\sin\alpha = 2\,\text{kg}\cdot 9,81\,\text{m/s}^2\cdot 0,5 = 9,81\,\text{N}$
il lui correspond une accélération :

$$a = \frac{F_M}{m} = 4,91\,\text{m/s}^2 = \frac{1}{2}g$$

c'est à dire la moitié de l'accélération de la pesanteur terrestre. Pour un angle $\alpha = 45°$ le facteur est $1/\sqrt{2} \approx 0,707$, pour $\alpha = 60°$ il est de $\sqrt{3}/2 \approx 0,866$. La réaction normale F_N (la force avec laquelle le mobile appuie sur le plan incliné) est respectivement : $\sqrt{3}/2$, $1/\sqrt{2}$ et $1/2$.

› Lorsque l'inclinaison est de 45° les forces normales et motrices sont égales

$$F_M = F_N = \frac{1}{\sqrt{2}}F_G \approx 0,707\,F_G$$

▷ La tangente de l'angle α est le rapport de la différence de hauteur (dénivellation) à la distance horizontale de deux points du plan incliné. Elle correspond à la **pente** du plan incliné.

▷ En terme de circulation routière la **pente** est le rapport de la dénivellation h à la distance parcourue l le long du plan incliné, soit $\sin\alpha$.

■ Un train de masse 1000 t, pour vaincre la pesanteur le long d'une pente de $h/l = 1:150$, nécessite une force motrice de :
$$F_M = F_G \sin\alpha = mg\frac{h}{l} = 10^6\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\cdot\frac{1}{150} = 65{,}4\,\mathrm{kN}$$

2.1.3 Moment cinétique

De façon analogue à la quantité de mouvement (moment linéaire), on définit un **moment cinétique** (moment angulaire) qui rend compte d'un mouvement de rotation. C'est également une grandeur vectorielle (pseudo vecteur) qui pointe dans la direction de l'axe de rotation.

1. Définition du moment cinétique

Le **moment cinétique** $\vec{L}$ (moment orbital) d'un point matériel de rayon vecteur $\vec{r}$, animé d'une quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ (Fig. 2.11), est :

Moment cinétique = rayon vecteur × quantité de mouvement			ML^2T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{L} = \vec{r}\wedge\vec{p} = m\vec{r}\wedge\vec{v}$	$\vec{L}$	kg m²/s	moment cinétique
	$\vec{r}$	m	rayon vecteur
	$\vec{p}$	kg.m/s	quantité de mouvement
	$\vec{v}$	m/s	vitesse orbitale
	m	kg	masse

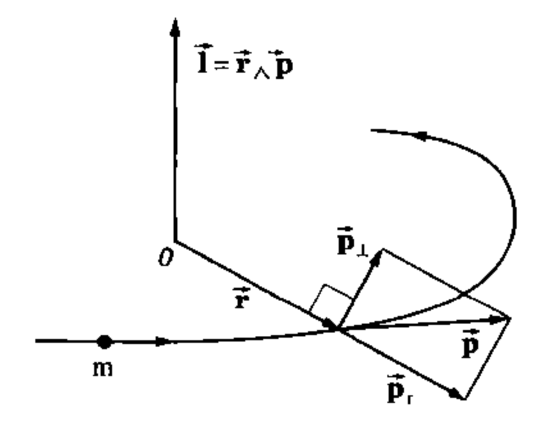


Fig. 2.11 : *Moment cinétique $\vec{L}$ d'un point matériel m*

2. Propriétés du moment cinétique

▷ Le moment cinétique d'un point matériel est un vecteur perpendiculaire à la vitesse et au rayon vecteur. Son module est égal à $L = r\cdot p\cdot\sin\alpha$, où α est l'angle entre le rayon vecteur et le vecteur quantité de mouvement.

▷ Le moment cinétique peut être exprimé en fonction de la vitesse orbitale $\vec{v}$ ou du vecteur rotation $\vec{\omega}$
$\vec{L} = m\vec{r}\wedge\vec{v} = m\vec{r}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r})$

Ce double poduit vectoriel s'écrit encore :
$\vec{\mathbf{L}} = mr^2\vec{\omega} - (\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\omega})\vec{\mathbf{r}}$
Si rayon vecteur et vecteur rotation sont orthogonaux (cas de la rotation d'un disque autour de son axe), on a $\vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\omega} = 0$:
$\vec{\mathbf{L}} = mr^2\vec{\omega} = I \cdot \vec{\omega}$
Le moment cinétique est alors parallèle au vecteur rotation, donc à l'axe de rotation et perpendiculaire au plan de la trajectoire. La quantité $I = mr^2$ est le moment d'inertie du point matériel de masse m.

3. Moment d'inertie d'un point matériel

Dans un mouvement circulaire d'un point matériel de masse m, le moment d'inertie est le produit de la masse par le carré de sa distance r au centre ou à l'axe de rotation.

moment d'inertie = masse × rayon de giration²			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$I = m \cdot r^2$	I	kg m²	moment d'inertie
	m	kg	masse
	r	m	distance à l'axe

2.1.4 Moment d'une force, couple

1. Définition du moment d'une force.

Moment d'une force : produit de la force et de son **bras de levier** par rapport à un point fixe autour duquel le corps peut tourner. Une force peut mettre un corps en mouvement de translation, le moment d'une force peut induire une **rotation** (Fig. 2.12).

Moment = rayon vecteur × force			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{F}}$	$\vec{\mathbf{M}}$	Nm	moment de la force
$M = r \cdot F \cdot \sin\alpha$	M	Nm	grandeur du moment
	$\vec{\mathbf{F}}$	N	force appliquée
	$\vec{\mathbf{r}}$	m	rayon vecteur
	α	rd	angle $\vec{\mathbf{r}}, \vec{\mathbf{F}}$

2. Unité du moment d'une force

Newton mètre (Nm) : unité SI du moment, c'est le moment d'une force de 1 N dont le bras de levier par rapport au centre de rotation est de 1 m.

$1\,\text{Nm} = 1\,\text{N} \cdot 1\,\text{m}$

3. Propriétés du moment d'une force

- Le bras de levier est la longueur de la normale à la ligne d'action de la force menée à partir du point de rotation.

Fig. 2.12 : *Moment* $\vec{M}$ *d'une force* $\vec{F}$

▷ Si le point d'application de la force est donné, le bras de levier est :
$d = r \sin \alpha$, où r est la distance du centre de rotation au point d'application de la force et α l'angle entre la force et le vecteur $\vec{r}$ (vecteur position du point d'application de la force par rapport au centre de rotation).

▷ Le moment d'une force est un vecteur qui pointe dans la direction de l'axe de rotation :

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$
$$|\vec{M}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}| \sin \alpha = |\vec{F}| \cdot d$$

(α : angle entre force et bras de levier d).
Le produit vectoriel exprime la direction et le sens du moment (règle de la main droite) ainsi que la longueur du bras de levier.

▷ En particulier, dans le cas de plusieurs forces dont les moments agissent dans des plans différents (si les axes de rotation ne sont pas parallèles), il faut utiliser la forme vectorielle.

▷ De façon générale, on exprime le **moment** d'une force $\vec{F}$ par le produit vectoriel $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

■ Une force $F = 5$ N appliquée avec un bras de levier $d = 20$ cm, produit un moment d'intensité :
$M = F \cdot d = 5\,\mathrm{N} \cdot 0,20\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{Nm}$

● Si, à force égale, on double le bras de levier, le moment $\vec{M}$ est double.

4. Moment résultant

Si plusieurs forces $\vec{F}_i, i = 1, 2, \cdots$ agissent sur un système, les moments individuels $\vec{M}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$ s'ajoutent vectoriellement.

▷ La résultante de deux forces opposées $F_2 = -F_1$ est nulle, $F_1 + F_2 = 0$. Leur moment résultant n'est pas nul si elles sont appliquées en des points différents (Fig. 2.13) :
$M = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 = F_1(d_1 - d_2)$
Ces deux forces forment un **couple**. Dans le cas général, un couple produit une rotation sans translation.

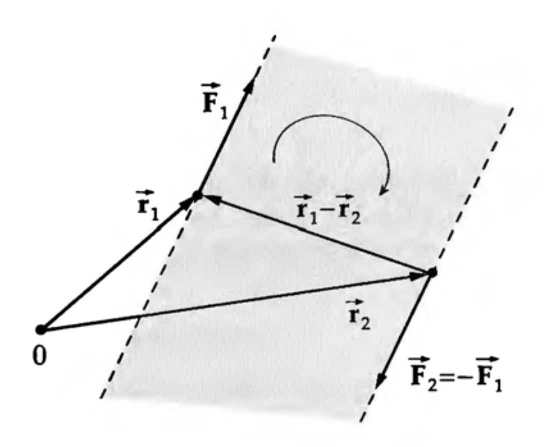


Fig. 2.13 : *Des forces de sens opposés, appliquées en des points différents, produisent un couple*

▸ Si la ligne d'action passe par le centre de rotation, le moment est nul.

Un couple peut produire une rotation **gauche** ou **droite** :

$M > 0$ rotation gauche
$M < 0$ rotation droite

● Les grandeurs de moments relatifs à un même centre de rotation, agissant sur un même corps dans un même plan peuvent être additionnées algébriquement.

Addition de moments			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots$	$\vec{M}_R$	Nm	moment résultant
	$\vec{M}_1, \vec{M}_2, \ldots$	Nm	moments

5. Théorème du moment cinétique

De façon analogue à la deuxième loi de Newton, la variation de moment cinétique est égale au moment des forces externes appliquées :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \wedge \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Le premier terme de droite est nul car $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ et le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul. Le terme $d\vec{p}/dt$ est donné par la force appliquée (Fig. 2.14).

Variation du moment cinétique = moment des forces			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}$	$\vec{L}$	kg m²/s	moment cinétique
	$\vec{r}$	m	rayon vecteur
	$\vec{F}$	N	forces externes
	$\vec{M}$	Nm	moment des forces externes

Le théorème du moment cinétique détermine tous les mouvements de rotation.

Fig. 2.14 : *Variation $\Delta\vec{\mathbf{L}}$ du moment cinétique et moment $\vec{\mathbf{M}}$ des forces externes. La vitesse angulaire et la direction de l'axe de rotation sont modifiées*

- ▷ Si le moment des forces externes est parallèle au moment cinétique, la grandeur du moment cinétique varie et avec elle la vitesse angulaire. S'il n'est pas parallèle, l'orientation du vecteur moment cinétique et de l'axe de rotation varient aussi.
- ▷ Si le point matériel est soumis à une **force centrale** de même direction que le rayon vecteur $\vec{\mathbf{r}}$, alors le **moment** de cette force est nul et le **moment cinétique** se conserve en module et direction.
- ▷ L'attraction gravitationnelle est une force centrale ; la deuxième loi de Kepler (loi des aires) pour le mouvement des planètes autour du Soleil se déduit de la conservation du moment cinétique.

6. Translation et rotation

Translation		Rotation	
Position	$\vec{\mathbf{r}}$	Angle	φ
Déplacement élémentaire	$\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}$	Angle élémentaire	$\mathrm{d}\varphi$
Vitesse	$\vec{\mathbf{v}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{dt}}$	Vitesse angulaire	$\vec{\omega} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{dt}}$
Accélération	$\vec{\mathbf{a}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{dt}} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{dt}^2}$	Accélération angulaire	$\vec{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{dt}} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}}{\mathrm{dt}^2}$
Masse	m	Moment d'inertie	$I = m\,r^2$
Quantité de mouvement	$\vec{\mathbf{p}} = m\,\vec{\mathbf{v}}$	Moment cinétique	$\vec{\mathbf{L}} = I\,\vec{\omega}$
Force	$\vec{\mathbf{F}} = m\,\vec{\mathbf{a}} = \dot{\vec{\mathbf{p}}}$	Moment, couple	$\vec{\mathbf{M}} = I\,\alpha = \dot{\vec{\mathbf{L}}}$
Énergie cinétique	$E_{\mathrm{cin}} = \dfrac{1}{2}mv^2$	Énergie cinétique	$E_{\mathrm{cin}} = \dfrac{1}{2}I\omega^2$
Travail	$\mathrm{d}W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}$	Travail	$\mathrm{d}W = \vec{\mathbf{M}} \cdot \mathrm{d}\vec{\varphi}$
Puissance	$P = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$	Puissance	$P = \vec{\mathbf{M}} \cdot \vec{\omega}$
Mouvement uniforme			
$a = 0$ $v = v_0 = \mathrm{const.}$ $x = v_0 t + x_0$		$\dot{\omega} = 0$ $\omega = \omega_0 = \mathrm{const.}$ $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$	
Mouvement uniformément accéléré			
$a = a_0 = \mathrm{const.}$ $v = a_0 t + v_0$ $x = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$		$\dot{\omega} = \dot{\omega}_0 = \mathrm{const.}$ $\omega = \dot{\omega}_0 t + \omega_0$ $\varphi = \frac{1}{2}\dot{\omega}_0 t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$	

2.2 Forces

Dans cette section nous décrivons quelques forces usuelles.

2.2.1 Force de poids

1. Définition du poids

Force de poids (ou **poids**) : force d'attraction qu'exerce la masse de la terre sur un corps (gravitation). Elle est proportionnelle à la masse du corps.

Force de poids = masse × accélération de la pesanteur			**MLT^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$P = mg$	P	N	force de poids
	m	kg	masse du corps
	g	m/s^2	accélération de la pesanteur

L'accélération à laquelle un corps de masse m est soumis dans le champ de gravitation est d'après le principe fondamental de la dynamique :

$$a = \frac{P}{m} = g$$

Le coefficient de proportionalité est par conséquent l'**accélération de la pesanteur** g, qui est la même pour tous les corps indépendamment de leur masse.

2. Accélération de la pesanteur terrestre

■ Un corps de masse 1 kg subit à la surface de la terre la force $P = 1\,\text{kg} \cdot 9,81\,\text{m/s}^2 = 9,81\,\text{N}$. Son accélération est :

$$a = \frac{P}{m} = \frac{9,81\,\text{N}}{1\,\text{kg}} = 9,81\,\text{m/s}^2$$

Un corps de masse double (2 kg) subit une force double (19,62 N), mais son accélération est encore de $19,62\,\text{N}/2\,\text{kg} = 9,81\,\text{m/s}^2$.

► L'accélération de la pesanteur dépend de la distance du lieu au centre de la terre et de la latitude (à cause de la force centrifuge due à la rotation de la terre autour de son axe) et, dans une certaine mesure, de variations de densité de la croûte terrestre.
L'**accélération normale de la pesanteur** est 9,806 65 m/s^2.
Sur les autres planètes les forces de poids sont différentes. Dans l'espace la force de poids est très faible voire nulle (**apesanteur**).

► Le poids étant proportionnel à la masse, tous les corps subissent la même accélération, sauf si d'autres forces agissent (frottement de l'air etc...).

■ Une bille d'acier et une plume d'oiseau, dans un tube vide d'air, tombent à la même vitesse. Dans l'air, la différence de vitesse observée est uniquement due à des forces de frottements de l'air sur la plume plus grandes par rapport à son poids que pour la bille d'acier.

► La masse intervenant ici est la **masse gravitationnelle**. Elle est toujours égale à la masse d'inertie (→ *Relativité générale*).

2.2.2 Force élastique et de torsion

1. Loi de Hooke

Un ressort étiré, de par son **élasticité**, exerce une force de rappel proportionnelle à l'allongement du ressort (**loi de Hooke**) ; la constante de proportionnalité est appelée **constante de rappel** ou **dureté** du ressort (Fig. 2.15).

Loi de Hooke : force $\propto$ élongation				**MLT^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$F = k(x - x_0) = kd$	F k d	N N/m m	force de rappel constante de rappel allongement par rapport à la longueur au repos (élongation)	

■ Une masse $m = 1$ kg est suspendue au bout d'un ressort de constante de rappel $k = 100$ N/m. L'allongement d du ressort est :
$d = \frac{F}{k} = \frac{mg}{h} = \frac{1\,\text{kg}\cdot 9,81\,\text{m/s}^2}{100\,\text{N/m}} = 0,0981\,\text{m} = 9,81\,\text{cm}$

▷ La loi de Hooke n'est valable que pour de petites élongations autour de la longueur au repos du ressort. Pour des élongations plus importantes la relation entre élongation et force n'est plus linéaire ; si la force appliquée devient trop grande, il peut y avoir déformation permanente, voire rupture du ressort.

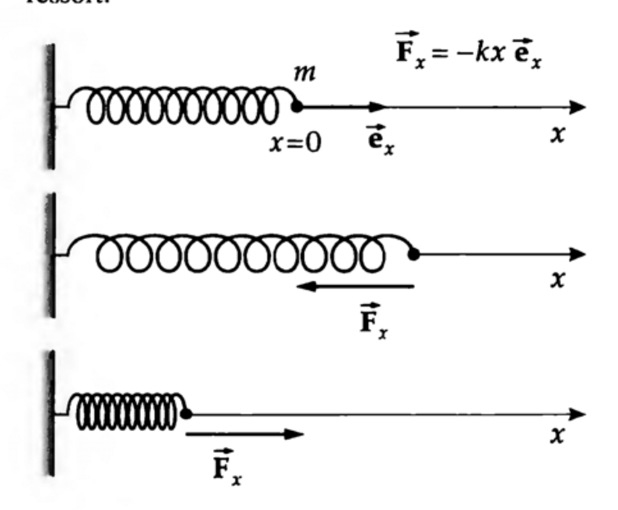


Fig. 2.15 : *Force élastique : loi de Hooke*

2. Propriétés des ressorts

▷ Les ressorts existent sous plusieurs formes :

- **Ressort hélicoïdal**, ou ressort à boudin : peut être utilisé en compression ou en extension. Une force de rappel résulte de l'élongation. Fait intervenir le cisaillement.
- **Ressort à lames** : composé d'une ou plusieurs lames cintrées, est utilisé en flexion.
- **Ressort spiral** : constitué par une lame (d'acier) enroulé en spirale autour d'un axe où est immobilisée une de ses extrémités, comparable à un ressort à lame, utilisé en flexion.

- **Barre de torsion** : fil, tige cylindrique ou lame utilisée en torsion autour de son axe longitudinal, fait intervenir le cisaillement. Un couple de rappel, proportionnel à l'angle de rotation résulte de la torsion.

M Un ressort, dans le domaine linéaire de la loi de Hooke, permet de mesurer des forces (dynamomètre). La force à mesurer est appliquée à une extrémité d'un ressort dont l'autre extrémité est fixe ; l'allongement du ressort est une mesure de la force. L'étalonage est réalisé à l'aide de poids ou de forces de grandeurs connues.

Plusieurs ressorts reliés ensemble, en série et/ou en parallèle, peuvent être remplacés par un ressort unique **de constante de rappel résultante** $k_{\text{rés}}$. Réciproquement, tout réseau constitué de mailles de ressorts peut être décomposé en une combinaison de ressorts reliés en parallèle et en série.

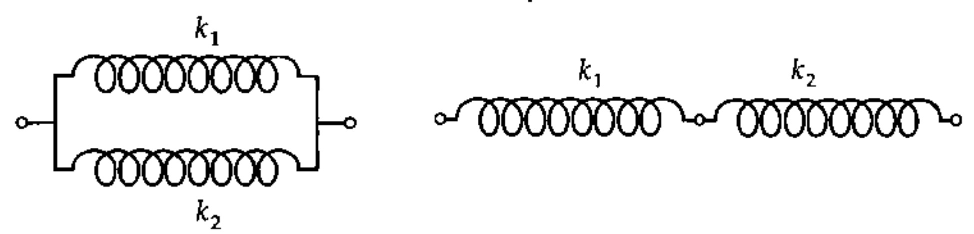


Fig. 2.16 : *Liaison parallèle* **Fig. 2.17 :** *Liaison série*

Liaison parallèle de ressorts : les constantes de rappel individuelles s'additionnent (Fig. 2.16),

$$k_{\text{rés}} = k_1 + k_2 + \cdots$$

Liaison série de ressorts : les inverse des constantes de rappel s'additionnent pour obtenir l'inverse de la constante de rappel équivalente (Fig. 2.17),

$$\frac{1}{k_{\text{rés}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots$$

2.2.3 Forces de frottement

Frottement solide F_f **(frottement sec, frottement de glissement)** : force qui apparaît à la surface de contact de deux corps solides et qui s'oppose à leur mouvement relatif. Cette force agit parallèlement à la surface de contact et est proportionnelle à la réaction normale de la surface de contact. Le coefficient de proportionalité est appelé **coefficient de frottement**.

▷ Cette force de frottement ne dépend pas de la grandeur de la surface de contact.

D'autres forces de frottement qui s'exercent dans les fluides (liquides, gaz) dépendent de la vitesse relative des surfaces en contact.

1. Frottement cinétique (glissement)

Frottement cinétique : agit sur un corps en mouvement qui glisse le long de la surface de contact. Cette force de frottement F_c est égale au produit de la réaction normale R_N à la surface de contact par le **coefficient de frottement cinétique** μ_c (→ *Tab. 8.3/2*).

Force de frottement (loi de Coulomb)			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$F_c = \mu R_N$	F_c	N	Force de frottement cinétique
	μ	1	Coefficient de frottement
	R_N	N	Réaction normale

2. Frottement statique

Frottement statique : lorsqu'un corps repose sur une surface de contact, le glissement ne se produit que si l'on applique une force extérieure, tangentielle à la surface de contact, d'intensité supérieure à une certaine valeur F_s, appelée frottement statique.

La valeur maximum de cette force de frottement ne dépend pas de la grandeur des surfaces en contact, elle est proportionnelle à la composante normale R_N de la force appliquant le corps sur son support et au **coefficient de frottement statique** μ_s :

$$F_s \leq F_{s.\max} = \mu_s R_N$$

Pour un système donné, le frottement statique est plus grand que le frottement cinétique. (→ *Tab. 8.3/3*).

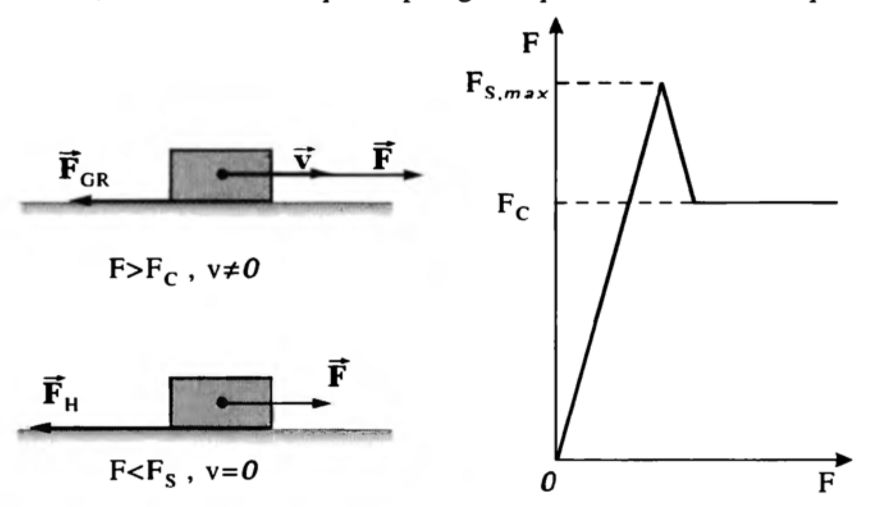


Fig. 2.18 : *Frottement sec : frottement statique et frottement cinétique. Le frottement statique compense la force externe $\vec{F}$ jusqu'à ce que le seuil $\vec{F}s$, max du frottement statique soit atteint. Une fois en mouvement, la force de frottement $\vec{F}_c$ est plus faible*

■ Un bloc de métal de masse 10 kg glisse sur une surface en bois. Le coefficient de frottement statique métal/bois est $\mu_s \approx 0,5$, le coefficient de frottement cinétique est $\mu_c \approx 0,4$. Pour mettre en mouvement le bloc de métal, il faut lui appliquer une force supérieure au frottement statique :
$F_s = \mu_s R_N = \mu_s mg = 0,5 \cdot 10\,\text{kg} \cdot 9,81\,\text{m/s}^2 = 49\,\text{N}$
Dès que le bloc est en mouvement, il subit la force de frottement cinétique :
$F_R = \mu F_N = \mu mg = 0,4 \cdot 10\,\text{kg} \cdot 9,81\,\text{m/s}^2 = 39\,\text{N}$

M Le coefficient de frottement statique peut être déterminé en posant le corps sur un plan incliné d'un angle ϕ par rapport à l'horizontale. Lorsqu'on fait varier l'angle ϕ et que la composante F_t tangente au plan incliné de la force de poids P :
$F_t = P \sin\phi$
est supérieure à l'intensité de la force de frottement statique :
$F_s = \mu_s R_N = \mu_s P \cos\phi$
le corps se met à glisser.
La valeur $\phi_{\max}$ de l'angle du plan incliné pour laquelle on a :
$P \sin \phi_m ax = \mu_s P \cos \phi_m ax$

est appelée **angle de frottement**. De cette égalité des forces $F_t = F_s$, on déduit la valeur du coefficient de frottement statique :

$$\mu_s = \frac{\sin \phi_{\max}}{\cos \phi_{\max}} = \tan \phi_{\max}$$

- Le coefficient de frottement statique est égal à la tangente de l'angle de frottement.

Ainsi, pour un corps au repos, de la résultante des forces appliquées F_N et de la force de frottement F_s, on détermine l'angle de frottement ϕ par la relation :

$$\tan \phi = \frac{F_s}{F_N} = \mu < \tan \phi_{\max} = \mu_s$$

La résultante des forces appliquées est située à l'intérieur d'un cône de demi-angle au sommet $\phi_{\max}$ (cône de frottement).

▷ Quelle que soit l'intensité de la force qu'on applique à un corps reposant sur un support, le glissement ne se produit que si cette force fait avec la normale au support un angle au moins égal à $\phi_{\max}$. Cet effet d'*arc-boutement* explique, par exemple, qu'une vis ne se déserre pas spontanément. L'angle α des filets de la vis avec la normale à son axe est, par construction, inférieur à l'angle de frottement de ces filets sur ceux de son écrou.

2.2.3.1 Frottement de roulement et de pivotement

1. Définition du frottement de roulement

Les frottements ne s'opposent pas uniquement aux mouvements de translation relative (glissement) de deux corps en contact, mais aussi aux **pivotements** autour d'une normale commune et aux **roulements** autour d'une droite du plan tangent commun.

Frottement de roulement : apparaît lorsqu'un corps roule (sans glisser) sur une surface de contact. Le corps ne commence à rouler que si l'on exerce sur lui des forces dont l'intensité du moment résultant M^t par rapport à son axe de rotation est supérieur à une valeur minimum M_R. Si $M^t > M_R$, la rotation est celle que produirait, sur le corps sans liaison, un couple $M^t - M_R$. Le couple de frottement de roulement M_R est proportionnel à la réaction normale R_N, le quotient :

$$\frac{M_R}{R_N} = \rho$$

qui a les dimensions d'une longueur, est appelé paramètre de résistance au roulement.

La force de frottement de roulement F_R dépend du rayon r du corps et peut s'exprimer par la relation :

$$F_R = \frac{f}{r} R_N$$

où f est le **coefficient de frottement de roulement** qui a les dimensions d'une longueur (→ *Tab. 8.3/1*).

Le **coefficient de frottement de roulement** f, décrit la proportionalité entre la réaction normale R_N et le moment M_R de la force F_R produite par le frottement de roulement : $M_R = r \cdot F_R = f R_N$

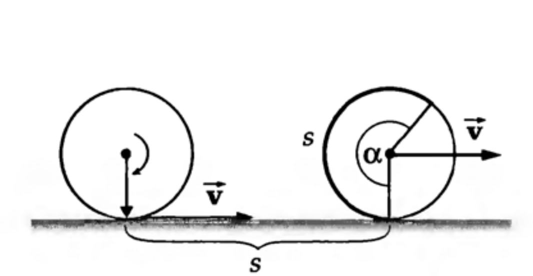


Fig. 2.19 : *Roulement : la distance parcourue par l'axe est égale au développement de la circonférence :* $s = r\alpha$

Fig. 2.20 : *Frottement de roulement* $\vec{\mathbf{F}}_R$

- ▷ Le **roulement** est, par exemple, le mouvement d'une roue lors duquel chaque point de la circonférence de la roue se déplace à la même vitesse linéaire que le centre de la roue :
  $r\omega = v$
  Puisque la vitesse $r\omega$ d'un point de la circonférence de la roue de rayon r est égale à la vitesse v de déplacement du centre de la roue, la vitesse de la circonférence de la roue par rapport au sol est nulle. Le frottement est alors dû à l'adhésion entre roue et surface de roulement. Si la roue "patine", il y a glissement.
- ▷ Le coefficient de frottement de roulement dépend de la vitesse relative des deux corps. Dans le cas de l'acier roulant sur de l'acier, il est de 0,01 cm à 4 m/s et 0,05 cm à 30 m/s.

2.2.3.2 Frottement d'un lien sur une poulie

1. Définition du frottement lien-poulie

Soit une courroie passant sur une poulie, la force F_2 compense la charge F_1 et la force résistante F_R due au frottement entre courroie et poulie, soit : $F_R = F_2 - F_1$. Cette force de frottement dépend de la charge F_1, du coefficient de frottement μ et de l'angle α sous-tendu par la courroie sur la poulie :

Frottement courroie-poulie

	Symbole	Unité	Dénomination
$F_R = F_1\,(e^{\mu\alpha} - 1)$	F_R	N	force de frottement
$\quad = F_2\,(1 - e^{-\mu\alpha})$	F_1	N	charge
	F_2	N	force d'entraînement
	ee	1	nombre d'Euler = 2,7183...
	μ	1	coefficient de frottement
	α	rad	angle sous-tendu

- ▷ Pendant le levage, F_1 est la charge et F_2 la force de levage. Lorsque la charge descend, F_2 est la charge et F_1 la force de retenue :

$$F_{\text{levage}} = e^{\mu\alpha} F_{\text{charge}}$$

$$F_{\text{descente}} = e^{-\mu\alpha} F_{\text{charge}}$$

- ▷ Ces relations s'appliquent soit lorsque la courroie glisse sur la poulie immobile, soit lorsque la courroie est immobile et que la poulie tourne avec une vitesse angulaire constante.

- Le coefficient de frottement, dans ce cas, dépend de la vitesse relative de la courroie et du rayon de la poulie.

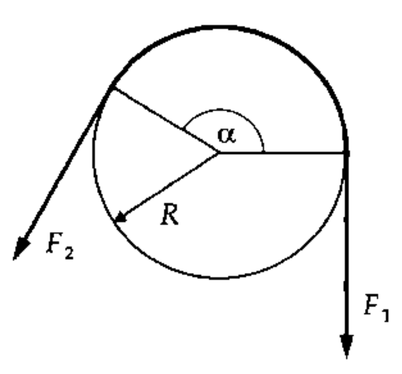


Fig. 2.21 : *Le frottement lien-poulie dépend de l'angle sous-tendu α.*

- Une corde enveloppant un angle α sur un cylindre fixe, ne glisse que si la force de traction F est trop faible ou trop forte par rapport à la charge à lever :
  $F_{\text{charge}}\, e^{-\mu\alpha} < F < F_{\text{charge}} e^{\mu\alpha}$
- Pour les coefficients de frottement voir Tab. 8.3/2 à Tab. 8.3/3.

2.3 Forces d'inertie dans un repère tournant

Le principe fondamental de la dynamique, valable dans tout référentiel galiléen (en translation rectiligne uniforme), n'est plus valable dans tout autre référentiel notamment dans un référentiel en rotation. Cependant, le principe fondamental de la dynamique reste valable dans tout référentiel, à condition d'ajouter aux forces qui agissent sur le point considéré deux forces fictives : la **force d'inertie d'entraînement** et la **force d'inertie complémentaire**.

Un mouvement circulaire n'est pas un mouvement rectiligne uniforme, mais un mouvement accéléré conséquence d'une force. Cependant, cette force ne produit pas un accroissement de vitesse mais un changement de direction du vecteur vitesse. L'**équation du mouvement** d'un point matériel dans un **référentiel non inertiel** en rotation avec la vitesse angulaire ω et dont l'origine se déplace avec une accélération $\vec{\mathbf{a}}_0$ s'écrit :

$$m\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \vec{\mathbf{F}} - m\,\vec{\mathbf{a}}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}\,.$$

Force centrifuge : $\vec{\mathbf{F}}_Z = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}})\,.$
Force de Coriolis : $\vec{\mathbf{F}}_C = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{\mathbf{r}}}\,.$

2.3.1 Force centripète et force centrifuge

L'accélération $\vec{\mathbf{a}}$, que subit un corps animé de la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ à la position $\vec{\mathbf{r}}$, est

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{r}})$$

par dérivation du produit vectoriel on obtient :

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{\mathbf{r}} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$$

avec

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{\mathbf{r}}$$

d'où :

Accélération d'un mouvement circulaire			**LT^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{a} = \vec{\alpha} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$	$\vec{a}$	m/s^2	accélération
	$\vec{\alpha}$	rad/s^2	accélération angulaire
	$\vec{r}$	m	rayon vecteur
	$\vec{\omega}$	rad/s	vitesse angulaire

Le premier terme représente l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$. Le deuxième terme représente l'**accélération centripète** $\vec{a}_r$ dirigée vers le centre, qui provient de la force qui maintient le mobile sur sa trajectoire circulaire.

1. Force centripète

Elle est dirigée vers le centre de la trajectoire et vaut :

$$a_r = |\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})| = \omega^2 \cdot r \cdot \sin\theta$$

où θ est l'angle entre le rayon vecteur et l'axe de rotation. Si on choisit $\vec{r}$ perpendiculaire à l'axe, on a :

$$a_r = \omega^2 \cdot r$$

D'après le principe fondamental de la dynamique, l'accélération centrale est la conséquence d'une force :

La **force centripète** F_c est la force produite par l'accélération centripète et qui maintient le mobile sur son orbite circulaire :

Force centripète			**MLT^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$F_c = m \cdot a_r = m \cdot \omega^2 \cdot r$	F_c	N	force centripète
$= m \cdot \frac{v^2}{r}$	m	kg	masse du mobile
	a_r	m/s^2	accélération centrale
	ω	rad/s	vitesse angulaire
	r	m	distance à l'axe
	v	m/s	vitesse orbitale

La force centripète, sous sa forme vectorielle, s'écrit :

$$\vec{F}_c = m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

La force centripète est dirigée vers le centre de la trajectoire. Un observateur lié au mobile en rotation ressent alors une force dirigée vers l'extérieur, égale en intensité et directement opposée en sens, conséquence de son inertie et appelée force centrifuge.

2. Force centrifuge

La **force centrifuge** est ressentie par un observateur lié à un point matériel qui décrit une trajectoire circulaire ; pour lui, ce point matériel reste au repos, mais il est soumis à une force radiale $\vec{F}_e$, égale et opposée à la force centripète $\vec{F}_c$ (Fig. 2.22).

▷ La force centrifuge est une force d'inertie, c'est à dire qu'elle n'apparaît que dans un référentiel en mouvement accéléré et n'est ressentie que par un observateur dans un tel référentiel, elle équilibre à chaque instant la force centripète (→ *principe de d'Alembert*).

Une voiture de masse $m = 800\,\text{kg}$, qui roule à la vitesse $v = 30\,\text{km/h}$ dans un virage de rayon de courbure $r = 10\,\text{m}$, subit la force centrifuge

$$F_e = \frac{mv^2}{r} \approx 5,5\,\text{kN}$$

On peut compenser cette force en relevant le virage d'un angle α sur l'horizontale

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_g} = \frac{v^2/r}{g} \approx 0,7 \Longrightarrow \alpha \approx 35°$$

(F_g : poids de la voiture, g : accélération de la pesanteur).

M **Régulateur centrifuge** : mesure et régule la vitesse angulaire d'un système tournant, généralement, deux masses montées à l'extrémité de deux bras mobile autour d'un point de l'axe de rotation. Suivant la vitesse angulaire, la force centrifuge écarte plus ou moins les deux masses de l'axe. Ceci peut être utilisé pour réguler la vitesse angulaire ω.

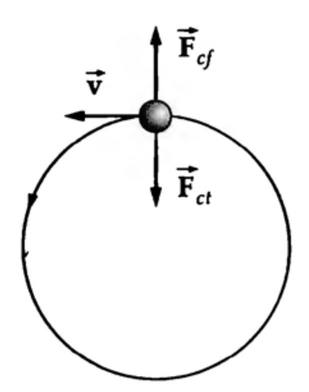


Fig. 2.22 : *Dans un mouvement circulaire, la force centrifuge $\vec{F}_e$ équilibre la force centripète $\vec{F}_c$ qui maintient le mobile sur sa trajectoire*

2.3.2 Force de Coriolis

1. Définition de la force de Coriolis

La force d'inertie complémentaire est encore appelée force de Coriolis :

La **force de Coriolis** $\vec{F}_C$ est la force produite par l'accélération complémentaire qui s'exerce sur tout corps placé dans un référentiel en rotation et animé d'un mouvement de translation perpendiculaire à l'axe de rotation. Cette force est perpendiculaire à l'axe de rotation et à la direction de la vitesse de translation. (Fig. 2.23). Elle est notamment responsable du mouvement tourbillonnaire des vents et des courants marins.

Un observateur se déplaçant du centre d'une plateforme tournante vers l'extérieur, subit une force latérale le déviant vers la direction opposée au sens de rotation de la plateforme (Fig. 2.24).

Plus un point matériel s'écarte du centre de rotation, plus son moment d'inertie $I = mr^2$ augmente. Cet accroissement provoque un couple $\vec{M}$ même si la vitesse angulaire ω reste constante :

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \omega \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \\ &= \omega \cdot m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = 2m \cdot \omega \cdot r \cdot v_r \end{aligned}$$

Pour que la vitesse angulaire reste constante, il faut que le moteur d'entraînement fournisse un couple supplémentaire. Le corps de masse m subit alors une force :

$$F_C = -2m \cdot \omega \cdot v_r$$

Le signe moins indique que la force de Coriolis agit dans le sens opposé à la rotation.

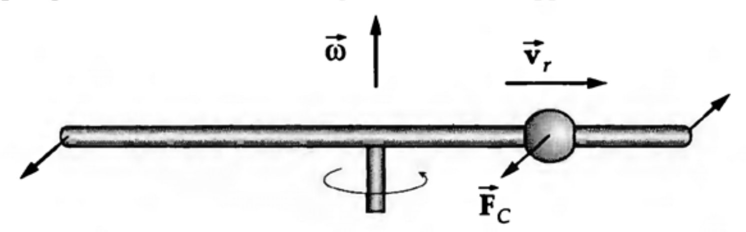


Fig. 2.23 : *Force de Coriolis sur un mobile se déplaçant vers l'extérieur d'une tige en rotation*

Force de Coriolis			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$	$\vec{F}_C$	N	force de Coriolis
	m	kg	masse
	$\vec{\omega}$	rad/s	vitesse angulaire
	$\vec{v}$	m/s	vitesse de translation de la masse sur la tige

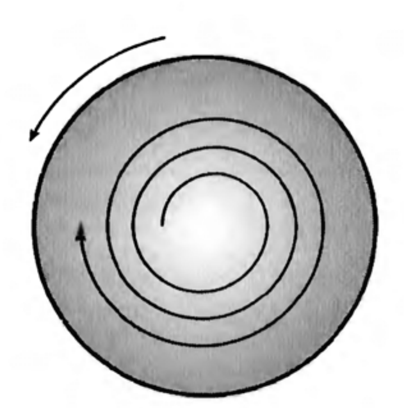


Fig. 2.24 : *La trajectoire d'un corps se déplaçant vers l'extérieur d'une plateforme en rotation paraît déformée*

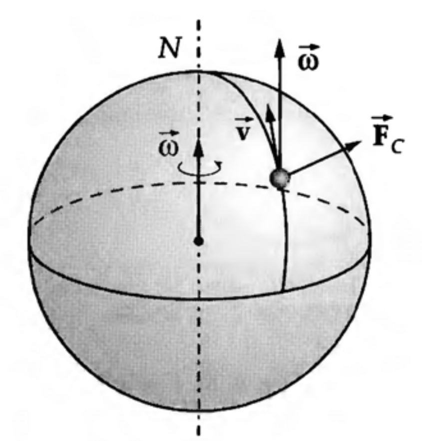


Fig. 2.25 : *Force de Coriolis $\vec{F}_c$ à la surface de la Terre. Un mobile se déplaçant vers le Nord (dans l'hémisphère nord) est dévié vers l'Est*

- Un corps qui se déplace à la surface terrestre en direction du Nord, subit, à cause de la rotation $\vec{\omega}$ de la terre, une force de Coriolis dirigée vers l'est s'il est dans l'hémisphère Nord et vers l'ouest s'il est dans l'hémisphère Sud. Cette différence est due au sens de la composante perpendiculaire à l'axe de rotation de la vitesse $\vec{v}$ de l'observateur. S'il se déplace vers le Nord, cette composante pointe vers l'extérieur dans l'hémisphère Sud et vers l'intérieur dans l'hémisphère Nord.

2.4 Travail et énergie

Travail et énergie sont des grandeurs essentielles dans la description des processus physiques. L'énergie se manifeste sous des formes diverses (calorifique, chimique, électromagnétique, électrique, nucléaire, mécanique, ...). L'énergie totale est conservée. Par un travail, elle peut être échangée entre corps. Les diverses formes d'énergie peuvent se transformer l'une en l'autre. Les échanges d'énergie sont généralement irréversibles : l'énergie mécanique peut se transformer totalement en énergie calorifique,

la réciproque n'est pas vrai car elle s'accompagne d'une perte de chaleur (second principe de la thermodynamique).

2.4.1 Travail

1. Définition du travail

Le travail élémentaire dW effectué par une force $\vec{F}$ pendant un déplacement $d\vec{s}$ est défini par le produit scalaire $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$

Si la grandeur et la direction de la force par rapport à un déplacement fini sont constantes, alors :

Travail = force × déplacement				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \lvert\vec{F}\rvert \lvert\vec{s}\rvert \cos\alpha$	W	J = Nm	travail	
	$\vec{F}$	N	force	
	$\vec{s}$	m	déplacement	
	α	rad	angle entre force et déplacement	

2. Unité du travail

Joule : unité SI du travail : 1 Joule est le travail fourni lorsqu'un corps de 1 kg est déplacé de 1 m par une force de 1 N.

$$[W] = \text{Joule} = \text{J} = \text{N} \cdot \text{m} = \frac{\text{kg}\,\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Autres unités → *Tab. 34/3 et 34/5.*

Unités non légales :

$$\begin{aligned} 1\,\text{kilogrammepoids-mètre (kpm)} &= 9{,}806\,65\,\text{J} \\ 1\,\text{erg} &= 10^{-7}\,\text{J} \\ 1\,\text{électron Volt (eV)} &= 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{J} \end{aligned}$$

■ Le travail fourni lorsqu'un corps est déplacé de $s = 20$ cm par une force de 10 N est
$W = Fs = 10\,\text{N} \cdot 0{,}2\,\text{m} = 2\,\text{J}$
Lors d'un déplacement double de 40 cm, le travail fourni est double :
$W = Fs = 10\,\text{N} \cdot 0{,}4\,\text{m} = 4\,\text{J}$
De même, si la force est doublée, le travail, sur le même chemin, est double.

3. Propriétés du travail

- Le travail est compté de la façon suivante :
  $dW > 0$ déplacement et force ont des composantes de même sens ($\cos\alpha > 0$).
  $dW < 0$ déplacement et force ont des composantes de sens opposés ($\cos\alpha < 0$).
- Si la force n'agit pas parallèlement au déplacement, seule la composante de la force parallèle au déplacement (projection de la force sur le déplacement) intervient dans le calcul du travail.

■ Un corps se déplace le long d'un rail sous l'action d'une force faisant un angle de 45° avec le rail. La composante de la force intervenant dans le calcul du travail est :
$F \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} F$

Si la grandeur et la direction de la force par rapport au déplacement sont constantes, on a :

Travail = composante de la force sur le chemin × chemin				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$W = \lvert\vec{F}\rvert\,\lvert\vec{s}\rvert\,\cos\alpha$	W	J = N m	travail	
	F	N	force	
	s	m	déplacement	
	α	rad	angle entre la force et le déplacement	

4. Travail le long d'une trajectoire quelconque

Si la force est une fonction du temps et de l'espace, on décompose le chemin en éléments infiniment petits ds le long desquels la force peut être considérée comme constante. Le travail lors du déplacement élémentaire $d\vec{s}$ du point $\vec{s}$ au point $\vec{s} + d\vec{s}$ est :

$$dW = \lvert\vec{F}(\vec{s})\rvert \cos\alpha\, \lvert d\vec{s}\rvert = \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

Le travail total est alors l'intégrale curviligne le long du chemin fini :

Travail = circulation de la force				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$W = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$	W	J = N m	travail	
	$\vec{F}(\vec{s})$	N	vecteur force en $\vec{s}$	
	$\vec{s}$	m	vecteur position	

$\vec{s}$ parcourt tous les points du chemin entre s_1 et s_2.

▷ Dans le cas d'un mouvement à une seule dimension, le travail est représenté par l'aire sous la courbe représentative de la force $F(x)$ en fonction de x (Fig. 2.26).

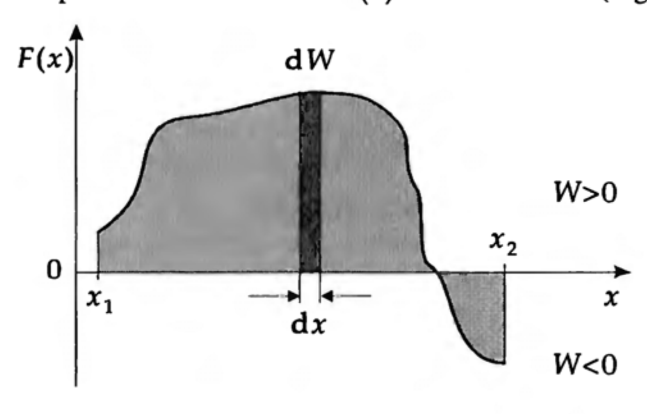


Fig. 2.26 : *Le travail est égal à l'aire sous la courbe représentative de la force $F(x)$*

2.4.2 Énergie

1. Définition de l'énergie

Énergie : grandeur caractéristique de l'état d'un corps (état de mouvement, température, déformation, charge électrique). L'énergie d'un corps peut être modifiée par le travail qu'il effectue ou qu'on lui fournit. Ce travail modifie alors son état (position, vitesse, accélération, température, déformation).

- **L'énergie** est une mesure du travail fourni à ou par un corps.

L'unité d'énergie dans le système SI est la même que l'unité de travail.

▷ L'énergie est une grandeur relative à un référentiel, elle est définie par rapport à un système de référence donné.

■ Lorsqu'une locomotive tire un train vers le sommet d'une côte, l'énergie (potentielle) du train augmente. Lorsque le train descend la côte il restitue cette énergie soit sous forme d'énergie de mouvement (cinétique), soit sous forme de chaleur dégagée par le système de freinage (énergie dégradée).

■ L'énergie électrique, dans un train électrique, peut être convertie en énergie cinétique, en énergie potentielle ou encore en chaleur.

2. Conservation de l'énergie

Dans des processus physiques l'énergie ne peut pas être anéantie, seule une conversion d'une forme d'énergie en une autre forme intervient. La théorie de la relativité montre que la masse est une forme d'énergie ($E=mc^2$) qui peut être convertie en énergie pure (onde, $E=h\nu$).

Conservation de l'énergie : L'énergie totale d'un système se conserve : la somme de toutes les formes d'énergie d'un système reste constante dans tout processus physique.			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\sum E_i = E_{pot} + E_{cin} + \ldots = \text{const.}$	E_i	J	énergie sous la forme i
	E_{pot}	J	énergie potentielle
	E_{cin}	J	énergie cinétique
	...	J	autres formes d'énergie

3. Énergie et état d'un système

L'énergie est une propriété d'un système dans état donné (par exemple : position, vitesse d'un corps dans le champ de la pesanteur). La **variation d'énergie** d'un système entre deux états est donnée par le travail effectué lorsque le système passe de l'état initial à l'état final.

▷ En mécanique classique, le zéro de l'énergie peut être choisi arbitrairement, car dans les processus physiques on ne s'intéresse généralement qu'aux échanges (variations) d'énergie. Une constante additive peut être ajoutée à l'énergie.

L'énergie peut être emmagasinée sous diverses formes, par exemple dans un champ électromagnétique. La **chaleur** est également une forme d'énergie ; l'énergie mécanique peut se transformer en chaleur soit par frottement, soit dans des pompes à chaleur. Certaines machines peuvent transformer l'énergie thermique en énergie mécanique (**machine à vapeur, moteurs à explosion** ou **combustion**).

2.4.3 Énergie cinétique

1. Définition de l'énergie cinétique

L'**énergie cinétique** d'un corps mesure le travail que ce corps peut effectuer de par son mouvement.

Théorème des forces vives : la variation d'énergie cinétique d'un corps pendant un temps quelconque est égale au travail fourni à ce corps pendant ce temps.

Le travail fourni W ne dépend que de la vitesse initiale v_0 et finale v du corps. W est le travail à effectuer pour augmenter la vitesse d'un corps de sa valeur initiale v_0 à sa vitesse finale v. Si la force appliquée $\vec{F} = m\vec{a}$ est constante pendant un intervalle de temps Δt, alors $v - v_0 = a\,\Delta t$, et le chemin parcouru :
$x = \frac{1}{2}a\,\Delta t^2 + v_0\,\Delta t$, soit : $x = (v - v_0)^2/2a + v_0(v - v_0)/a$
d'où :

Énergie cinétique			**ML²T⁻²**
	Symbole	Unité	Dénomination
$W = m\vec{a} \cdot \vec{x}$	W	J	travail
$= \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$	m	kg	masse du corps
$= E_{cf} - E_{ci}$	$\vec{a}$	m/s²	accélération
	$\vec{x}$	m	parcours
	v	m/s	vitesse finale
	v_0	m/s	vitesse initiale

▷ Le travail W ne dépendant que des énergies cinétiques initiale E_{ci} et finale E_{cf}, la relation $W = \frac{1}{2}\,m\,(v^2 - v_0^2)$ reste valable même si la force appliquée n'est pas constante.

On peut aussi écrire que le travail élémentaire $\mathrm{dW_B}$ de la force $\vec{F}$ lors d'un déplacement $\mathrm{d}\vec{r}$ est :

$$\mathrm{dW_B} = -\mathrm{dW'_B} = -\vec{F}_T \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{m}\,\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}}\,\vec{v}\,\mathrm{dt} = \mathrm{m\,v\,dv} = \mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{m}}{2}\mathrm{v}^2\right).$$

L'**énergie cinétique** d'un corps dont la vitesse par rapport à un référentiel donné est v :

$$E_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Elle mesure le travail nécessaire pour amener un corps au repos ($v_0 = 0$) à la vitesse finale v.

▷ Le terme **force vive** désigne parfois la quantité mv^2, double de l'énergie cinétique d'une masse m animée d'une vitesse de translation v.

2. Énergie cinétique et référentiel

▷ L'énergie cinétique est fonction de la vitesse et, par conséquent, dépend du référentiel par rapport auquel elle est exprimée. Si dans un référentiel S l'énergie cinétique d'un corps est :

$$E_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

dans un référentiel S', en mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse v_0 par rapport au premier, l'énergie cinétique est :

$$E'_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2}m(v')^2 = \frac{1}{2}m\left(v^2 + 2vv_0 + v_0^2\right)$$

■ Un corps de masse 5 kg, situé à une hauteur de 2 m au-dessus du sol, a une énergie potentielle de 98,1 J. Lors de sa chute, son énergie potentielle sera convertie en énergie cinétique. À son impact au sol, toute son énergie potentielle aura été convertie en énergie cinétique. Sa vitesse à l'arrivée est :

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\mathrm{cin}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 98,1\,\mathrm{J}}{5\,\mathrm{kg}}} = 6,26\,\mathrm{m/s}$$

2.4.4 Énergie potentielle

En général, une énergie qui ne dépend que de la position d'un corps dans l'espace et ne dépend pas de sa vitesse est appelée énergie potentielle.

2.4.4.1 Énergie potentielle dans le champ de gravitation

1. Énergie potentielle et travail de la force de poids

L'**énergie potentielle** est une fonction des coordonnées d'espace telle que la différence entre ses valeurs initiale et finale soit égale au travail fourni au corps pour se déplacer de sa position initiale A à sa position finale B. Si la force appliquée $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}})$ dérive d'un potentiel :

$$E_p = W = \int_A^B \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} - E_{p,A} - E_{p,B}$$

Énergie potentielle de gravitation			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$E_p = P\Delta h = mg\Delta h$	E_p	J	énergie potentielle
	P	N	poids = mg
	m	kg	masse
	g	m/s^2	pesanteur (9,81 m/s^2)
	Δh	m	différence de hauteur

▸ Cette relation n'est valable que si la force de gravitation peut être considérée constante. En réalité, l'accélération de la pesanteur terrestre varie avec l'altitude :

$$\frac{g - g_0}{g_0} = -2\,z$$

où z est l'altitude et g_0 l'accélération de la pesanteur au niveau de la surface de la Terre.

2. Propriétés de l'énergie potentielle

L'**énergie potentielle** d'un corps de masse m situé dans le champ de la pesanteur terrestre à une hauteur h (par rapport à un niveau de référence) est :

$$E_p = mgh$$

▸ L'énergie potentielle dépend de la hauteur h_0 du niveau de référence, elle n'est définie qu'à une constante additive près. La différence d'énergie potentielle entre deux points et par conséquent le travail pour aller d'un point à l'autre sont parfaitement définis.

■ Pour soulever une masse de 5 kg d'une hauteur de 2 m, dans le champ de la pesanteur terrestre, il faut fournir un travail de
$W_H = mgh = 5\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2\,\mathrm{m} = 98{,}1\,\mathrm{J}$
Pour la soulever d'une hauteur double ou si la masse est double, il faudra fournir un travail double.

▸ Un travail similaire est à fournir lorsqu'on déplace une charge électrique q dans un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ (→ *Potentiel électrique*).

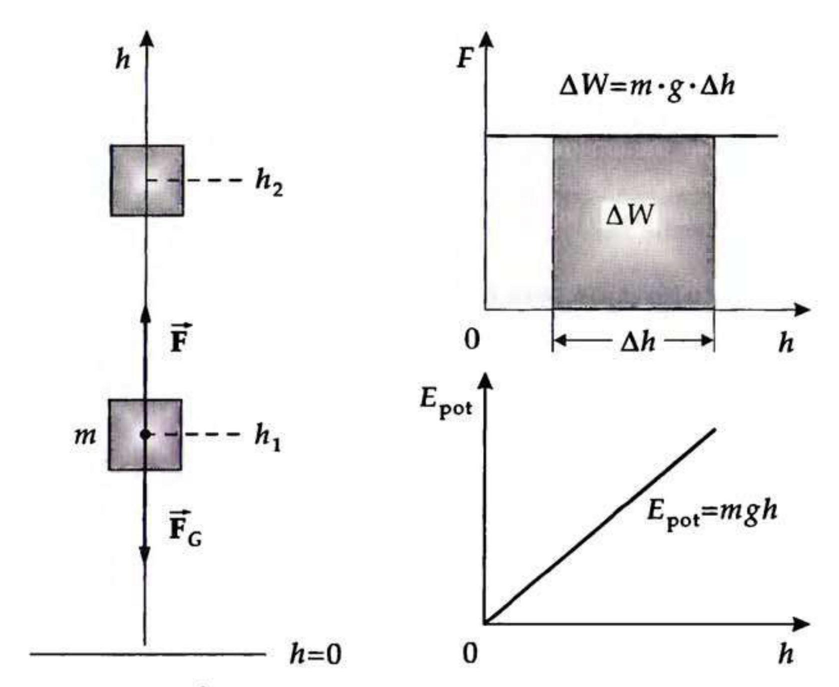


Fig. 2.27 : *Énergie potentielle dans le champ de la pesanteur* $\vec{g}$

2.4.4.2 Énergie potentielle de déformation élastique

1. Travail de déformation

Travail de déformation : travail effectué pour déformer un solide ; par exemple, lors de l'allongement d'un ressort, le travail de la force de rappel.

Un ressort tendu constitue, comme un poids soulevé, une réserve d'énergie. Toute déformation élastique d'un solide (flexion, torsion, traction) ou d'un fluide (compression) permet d'accumuler une énergie potentielle qui est restituée lors de l'opération inverse.

La force de rappel d'un ressort est proportionnelle à son allongement x par rapport à sa longueur initiale, le coefficient de proportionalité est la constante k du ressort : $F = -kx$. Le travail fourni, quand l'allongement du ressort passe de sa valeur initiale x_i à la valeur finale x_f, est :

$$W = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} F\,\mathrm{d}x = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} kx\,\mathrm{d}x$$

soit :

Travail de déformation			$\mathrm{ML^2T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$W = \dfrac{1}{2}k(x_\mathrm{f}^2 - x_\mathrm{i}^2)$	W_F	J	travail de déformation
	k	N/m	constante du ressort
	x_i	m	élongation initiale
	x_f	m	élongation finale

Énergie potentielle d'un ressort :

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2$$

Elle est égale au travail qu'il a fallu fournir pour amener le ressort de sa position de repos à son élongation finale x.

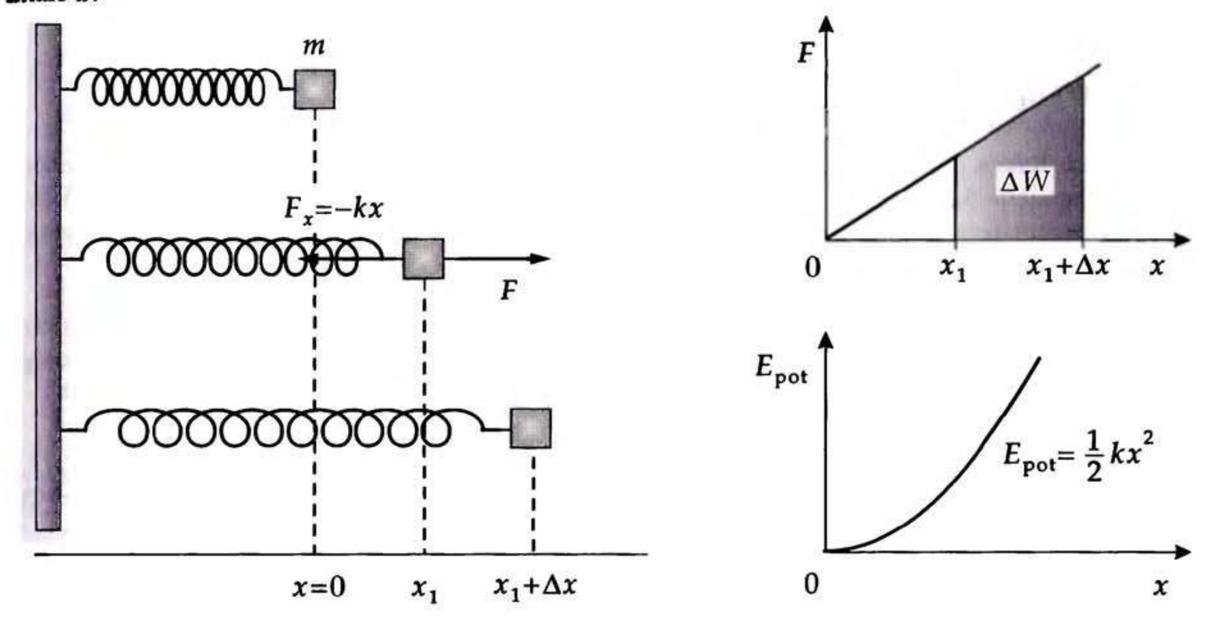


Fig. 2.28 : *Travail de déformation et énergie potentielle d'un ressort*

2. Exemple : oscillations d'un ressort

■ Pendant le mouvement oscillatoire d'un ressort, l'énergie mécanique E passe continuellement de sa forme cinétique à sa forme potentielle :

$$E = E_{cin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{const.}$$

d'où la vitesse correspondant à une élongation x :

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2}$$

L'élongation maximale x_{max} est atteinte lorsque $v = 0$:

$$x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

À cette position toute l'énergie est sous sa forme potentielle. À $x = 0$, par contre, toute l'énergie est sous sa forme cinétique, alors :

$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2$$

où v_{max} est la vitesse à $x = 0$.

▸ Une partie du travail de déformation du ressort est généralement convertie en chaleur par les frottements internes au corps. De ce fait, la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique n'est qu'approximativement conservée, les oscillations s'amortissent (pas de mouvement perpétuel).

▷ Le **formalisme lagrangien** et le **formalisme hamiltonien** de la mécanique analytique utilisent les échanges entre énergie potentielle et cinétique d'un système et permettent la description complète de tout système mécanique.

2.4.5 Travail des forces de frottement

Le travail des forces conservatives peut facilement être pris en compte par l'introduction du concept d'énergie potentielle. Les forces de frottement (forces dissipatives) ne sont pas conservatives et le travail qu'elles effectuent dépend du chemin parcouru. De plus, le frottement s'opposant toujours au déplacement, le travail qui y est associé est négatif. Ce travail est généralement dissipé sous forme de chaleur.

▷ L'énergie dissipée par des forces de frottement ne peut pas être retransformée directement en énergie mécanique. Cette énergie, dissipée sous forme de chaleur, pourrait être retransformée en énergie mécanique à l'aide d'une machine thermique.

Dans le cas du **frottement solide** :

Travail des forces de frottement			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$W = F_f x$	W	J	travail
$= \mu F_N x$	F_f	N	force de frottement
	x	m	parcours
	μ	1	coeff. de frottement
	F_N	N	réaction normale

▷ Cette relation est une approximation dans l'hypothèse que la force de frottement reste constante pendant le déplacement (*frottement statique et cinétique*) et ne dépend pas de la vitesse.

Pour les **gaz** et les **liquides**, la force de frottement dépend de la vitesse (**frottement visqueux**).

2.5 Puissance

1. Définition de la puissance

La **puissance** P, désigne le travail effectué par unité de temps. Elle est souvent utilisée pour la caractérisation de machines travaillant de façon continue.

Puissance $= \frac{\textbf{travail}}{\textbf{temps}}$			ML^2T^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination
$P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$	P	W	puissance
	ΔW	J	travail effectué
	Δt	s	temps nécessaire

2. Unités de puissance

Watt (W), unité SI de la puissance : 1 Watt est la puissance d'une machine effectuant un travail de 1 Joule par seconde.

$$[P] = \text{Watt} = \text{W} = \frac{\text{J}}{\text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$$

Autres unités → *Tab. 34/3.*
Unité pratique (non SI) :

1 Cheval vapeur (CV) = 735,4988 W

▷ Lorsque le travail effectué varie avec le temps, on utilise la notion de puissance instantannée :

$$P = \frac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

■ Un moteur fournit un travail de 600 kJ par minute, sa puissance est :

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{600\,\text{kJ}}{60\,\text{s}} = 10\,kW$$

▷ En physique, le vocable **puissance** désigne exclusivement le travail effectué par unité de temps. Par abus de langage, on appelle parfois puissance le travail effectué.

2.5.1 Rendement

Rendement (η) : rapport du travail fourni à l'énergie absorbée lors d'une conversion d'énergie (**puissance effective**). Comme la plupart des machines fonctionnent en continu, on définit parfois le rendement comme le rapport de la puissance fournie (sortie) à la puissance absorbée (entrée) par la machine :

$$\textbf{Rendement} = \frac{\textbf{travail utile}}{\textbf{travail total}} = \frac{\textbf{puissance fournie}}{\textbf{puissance absorbée}}$$				1
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\eta = \frac{P_{sor}}{P_{ent}} = \frac{P_{ent} - P_{perte}}{P_{ent}} = 1 - \frac{P_{perte}}{P_{ent}}$	η P_{sor} P_{ent} P_{perte}	1 W W W	rendement puissance fournie puissance absorbée puissance dissipée	

Le rendement est sans dimension, il s'exprime en pourcent.

■ Pour fournir une puissance de 40 kW à sa sortie, une machine absorbe une puissance de 50 kW. Son rendement est :
$$\eta = \frac{40\,\text{kW}}{50\,\text{kW}} = 0,8 = 80\%$$
20% de l'énergie mise en jeu sont dépensés par les frottements sous forme de chaleur.

● Un rendement $\eta = 1$ correspond à une machine parfaite (sans perte).

● Compte tenu de la loi de conservation de l'énergie et des pertes inévitables, le rendement est toujours inférieur à 1.
$\eta < 1$

Rendement global : le rendement global de plusieurs machines travaillant en série est égal au produit des rendements individuels :

$$\eta_{ges} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \cdots$$

Le rendement total reste ainsi inférieur au rendement d'une des machines mises en série.

2.6 Chocs

Lorsque deux corps s'approchent l'un de l'autre, leur interaction mutuelle modifie leur mouvement et produit un échange de quantité de mouvement et d'énergie. Ce sont des interactions de courte durée entre deux ou plusieurs corps. Au point de vue microscopique, les deux corps n'entrent pas nécessairement en contact, il suffit qu'une interaction ait lieu lorsque les corps sont proches l'un de l'autre. Pour décrire un choc, la connaissance des forces d'interaction n'est pas nécessaire, il suffit de calculer les échanges de quantité de mouvement et d'énergie.

▷ Le mouvement des participants au choc est un mouvement dans un plan défini par leurs vecteurs vitesse ou, si l'un des partenaires est immobile, par la droite joignant leurs centres de gravité et le vecteur vitesse du mobile. Après le choc, les participants se déplacent encore dans ce plan (plan de réaction), mais leurs directions peuvent avoir changé.
Lors de chocs entre solides rigides, un moment (couple), dépendant du **paramètre d'impact** peut intervenir.

Choc (collision) : interaction de courte durée de deux corps se rapprochant l'un de l'autre. Pendant le choc il y a transfert de quantité de mouvement et d'énergie, les vitesses et la direction des partenaires du choc sont modifiées.

1. Considérations cinématique lors du choc de deux corps

Participants au choc :	A, B
Masse des participants :	m_A, m_B
Vitesses avant le choc :	$\vec{\mathbf{v}}_A$, $\vec{\mathbf{v}}_B$
Vitesses après le choc:	$\vec{\mathbf{u}}_A$, $\vec{\mathbf{u}}_B$
Quantités de mvt. avant :	$\vec{\mathbf{p}}_A = m_A\,\vec{\mathbf{v}}_A$, $\quad \vec{\mathbf{p}}_B = m_B\,\vec{\mathbf{v}}_B$
Quantité de mvt. après :	$\vec{\mathbf{p}}_A{}' = m_A\,\vec{\mathbf{u}}_A$, $\quad \vec{\mathbf{p}}_B{}' = m_B\,\vec{\mathbf{u}}_B$
Énergie cinétique avant :	$E_{\text{cin}} = \frac{m_A}{2}v_A^2 + \frac{m_B}{2}v_B^2$
Énergie cinétique après :	$E'_{\text{cin}} = \frac{m_A}{2}u_A^2 + \frac{m_B}{2}u_B^2$
Variation de l'énergie interne des participants :	ΔW

2. Conservation de la quantité de mouvement

$$m_A\,\vec{\mathbf{v}}_A + m_B\,\vec{\mathbf{v}}_B = m_A\,\vec{\mathbf{u}}_A + m_B\,\vec{\mathbf{u}}_B$$

3. Conservation de l'énergie

$$E_{\text{cin}} = E'_{\text{cin}} + \Delta W$$

$\Delta W > 0\,(E'_{\text{cin}} < E_{\text{cin}})$: **Choc endothermique**. L'énergie cinétique est transformée en énergie interne des participants (excitation des participants).

$\Delta W < 0\,(E'_{\text{cin}} > E_{\text{cin}})$: **Choc exothermique**. Une partie ou toute l'énergie interne des participants est transformée en énergie cinétique (désexcitation).

Suivant la nature élastique ou inélastique du choc l'énergie est conservée ou non conservée : (→ *Déformation*) :

4. Choc élastique

Lors de **chocs élastiques**, la quantité de mouvement totale et l'énergie mécanique sont conservées.

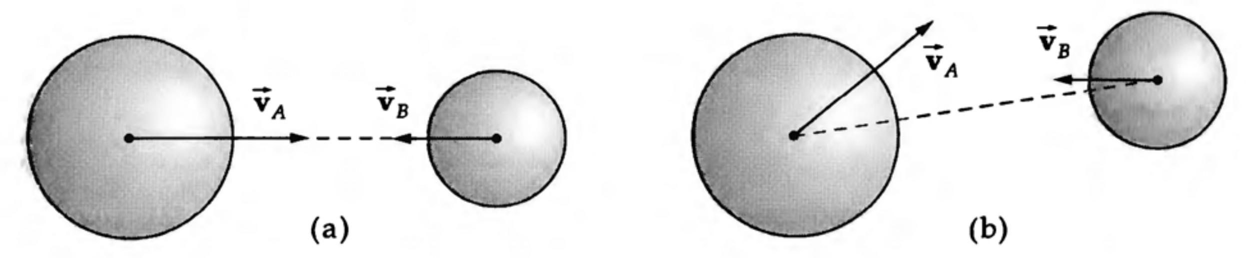


Fig. 2.29 : *Chocs élastiques, (a) collision centrale, (b) collisions périphérique*

- Le choc entre deux boules de billard est une bonne approximation d'un choc élastique (pas de déformation permanente des partenaires du choc).
- Quand deux électrons s'approchent l'un de l'autre, le choc est basé sur l'interaction coulombienne répulsive de leur charge (c.f. électricité). Ce choc peut être considéré comme élastique si on néglige le rayonnement électromagnétique qui l'accompagne.

5. Choc inélastique

Lors de **ch6cs inélastiques**, il y a dissipation d'énergie pendant le choc (par exemple : déformation permanente, non réversible, des partenaires ou encore, modification de l'énergie interne de l'un ou des deux partenaires). L'énergie mécanique n'est pas conservée, en revanche, la quantité de mouvement est toujours conservée. Si, en plus de l'énergie cinétique, on tient compte de l'énergie interne des partenaires, l'énergie mécanique totale est conservée (Fig. 2.30).

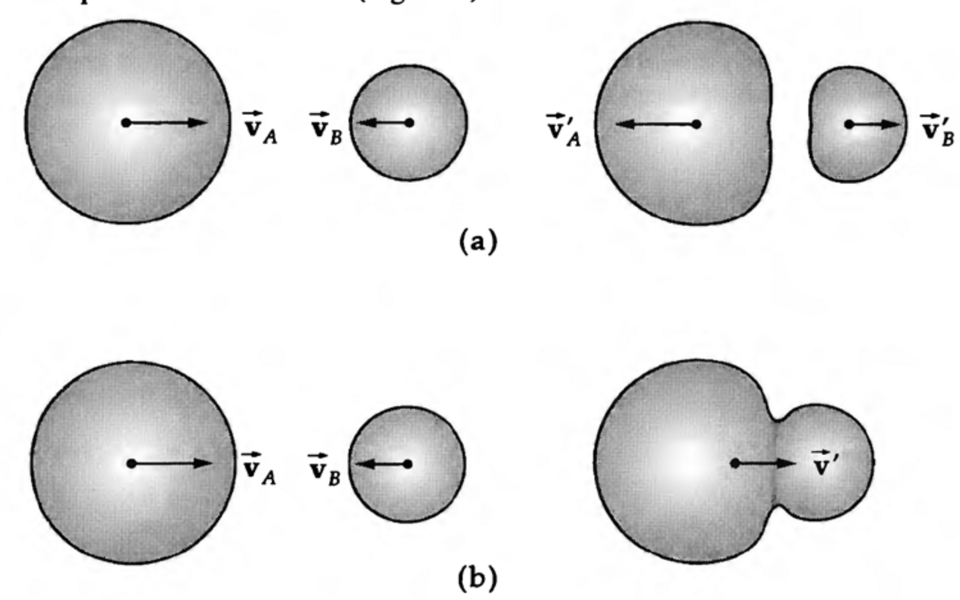


Fig. 2.30 : *Chocs inélastiques, (a) choc partiellement inélastique, (b) choc totalement inélastique (mou)*

- Dans le cas du choc d'une balle de tennis avec le sol (impact), il y a dissipation d'énergie (frottement avec le sol, compression et échauffement du gaz contenu dans la balle ...). Un tel choc est inélastique.

Chocs complètement inélastiques, chocs mous : les partenaires de la collisions ont même vitesse après le choc, ils forment un seul corps après le choc (ils sont collés l'un à l'autre).

■ Le choc de deux boules de pâte à modeler qui restent collées ensemble après le choc est complètement inélastique. On dit que c'est un choc mou. L'énergie dissipée a servi à la déformation des deux boules.

6. Conditions des chocs

Suivant la direction des participants au choc on distingue :

Choc direct : le mouvement des participants au choc est un mouvement à une dimension, les centres de gravité des participants se déplacent sur la même droite avant et après le choc. Une seule coordonnée (positions des corps sur l'axe) est nécessaire. Les vitesses des centres de gravité des corps, avant le choc, sont parallèles à la ligne de choc.

Choc oblique : les centres de gravité des partenaires se déplacent dans des directions différentes. Les vecteurs vitesses des centres de gravité ne sont pas parallèles à la ligne de choc.

Ligne de choc, normale du choc : normale commune aux surfaces des corps en leur point de contact. C'est la direction suivant laquelle les forces (forces de percussion) sont transmises.
Plan de choc : plan défini par la surface commune de contact des partenaires.
Choc central : les vecteurs vitesse des participants au choc sont parallèle à la droite joignant leurs centres de gravité. La normale au choc, au moment du choc, est parallèle à la droite joignant les centres de gravité des partenaires. Le système n'est soumis à aucun couple (Fig. 2.31(a)).

Choc périphérique : les vecteurs vitesse des centres de gravité des participants avant le choc ne sont pas dirigés suivant la droite joignant leurs centres de gravité. La normale au choc n'est pas parallèle à la droite joignant les centres de gravité des participants au choc. Au moment du contact un couple est appliqué et entraîne la rotation des participants (Fig. 2.31(b)).

▷ Les points matériels, puisque sans dimension, ne peuvent subir que des chocs centraux. Seuls les solides de dimensions finies peuvent subir un choc périphérique et avoir un mouvement de rotation.

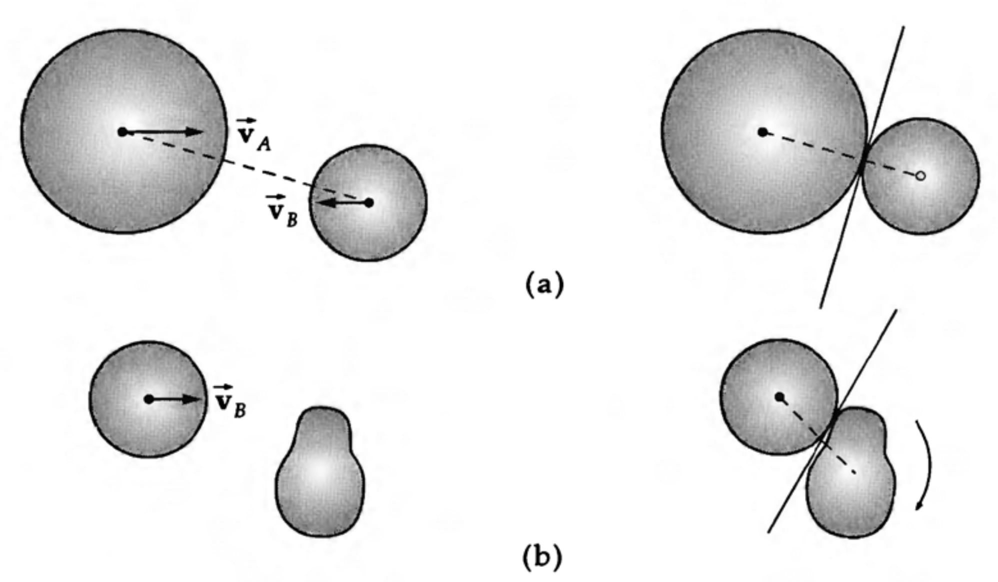
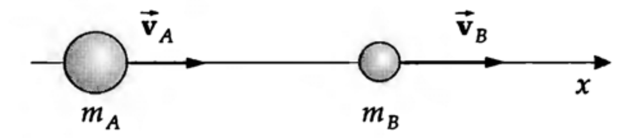


Fig. 2.31 : *Collision centrale (a) et périphérique (b) de solides*

2.6.1 Choc élastique, direct, central

Deux points matériels de masses m_A et m_B, astreints à se déplacer sur une même droite, entrent en collision élastique. Leurs vitesses avant et après le choc sont respectivement v_A, v_B et v'_A, v'_B. La quantité de mouvement totale et l'énergie mécanique sont conservées (Fig. 2.32).



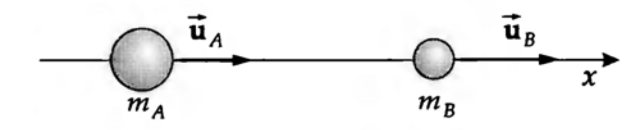


Fig. 2.32 : *Choc élastique central*

De ce fait, on a :

$$\frac{1}{2}m_A{v_A}^2 + \frac{1}{2}m_B{v_B}^2 = \frac{1}{2}m_A{v'_A}^2 + \frac{1}{2}m_B{v'_B}^2$$

$$m_Av_A + m_Bv_B = m_Av'_A + m_Bv'_B$$

En regroupant les termes relatifs à A et B :

$$m_A(v_A^2 - {v'_A}^2) = m_B({v'_B}^2 - v_B^2)$$

$$m_A(v_A + v'_A)(v_A - v'_A) = m_B(v'_B + v_B)(v'_B - v_B) \quad , \quad \text{de même que}$$

$$m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B)$$

Par division des deux égalités :

$$v_A + v'_A = v'_B + v_B$$

soit :

$$v'_B = v_A + v'_A - v_B$$

Par substitution dans la relation de conservation de la quantité de mouvement, on trouve :

$$v'_A = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}v_A + \frac{2m_B}{m_A + m_B}v_B \qquad v'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B}v_A + \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}v_B$$

1. Choc élastique de deux corps de même masse

Si les deux corps ont même masse, on a :

$$v'_A = v_B \qquad v'_B = v_A$$

Les deux corps échangent leurs vitesses (carreau au jeu de pétanque).

2. Choc élastique d'un corps lourd avec un corps léger

Si le corps A est beaucoup plus lourd que B : $m_A \gg m_B$, alors :

$$v'_A \approx v_A \qquad v'_B \approx 2v_A - v_B$$

Le mouvement du corps le plus lourd A n'est pratiquement pas modifié par le choc. La vitesse relative de l'autre corps a changé de signe après le choc :

$$v'_B - v'_A \approx -(v_B - v_A)$$

Le participant le plus léger rebondit sur le plus lourd.

2.6.2 Choc élastique, oblique, central

Si les participants ne se déplacent pas sur une même droite et que leurs vecteurs vitesse ont des directions différentes, il faut utiliser une représentation vectorielle de la conservation de la quantité de mouvement. La quantité de mouvement n'est échangée que dans la direction de la normale au choc (axe Oy ici), les composantes perpendiculaires à la normale au choc des quantités de mouvement avant et après le choc ne sont pas modifiées (Fig. 2.33) :

$$\begin{aligned} m_A v_{Ax} &= m_A u_{Ax} \\ m_B v_{Bx} &= m_B u_{Bx} \end{aligned}$$

La conservation de la quantité de mouvement dans la direction Oy (normale au choc), donne :

$$m_A v_{Ay} + m_B v_{By} = m_A u_{Ay} + m_B u_{By}$$

et la conservation de l'énergie :

$$\frac{m_A}{2}\left(v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2\right) + \frac{m_B}{2}\left(v_{Bx}^2 + v_{By}^2\right) = \frac{m_A}{2}\left(u_{Ax}^2 + u_{Ay}^2\right) + \frac{m_B}{2}\left(u_{Bx}^2 + u_{By}^2\right)$$

En regroupant les termes relatifs à A et B et en opérant de même que dans la section précédente, on obtient pour les composantes des vitesses :

$$u_{Ax} = v_{Ax}\,, \quad u_{Bx} = v_{Bx}$$

$$u_{Ay} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{Ay} + \frac{2m_B}{m_A + m_B} v_{By}$$

$$u_{By} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{Ay} + \frac{m_B - m_A}{m_A + m_B} v_{By}$$

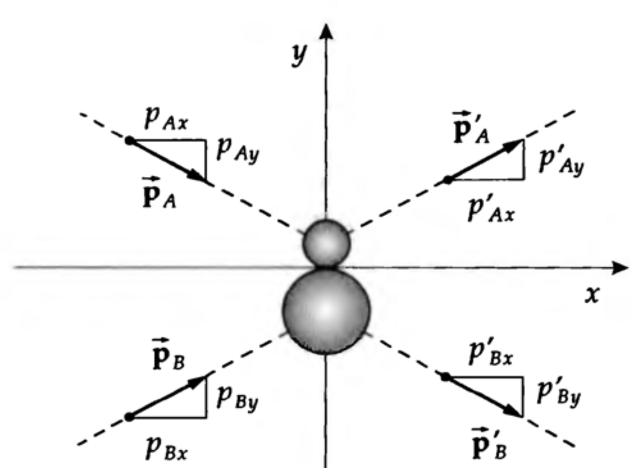


Fig. 2.33 : *Collision élastique, centrale dans le plan*

2.6.3 Choc élastique, oblique avec un corps immobile

Le corps A de quantité de mouvement $\vec{p}_A = m_A\vec{v}_A$ entre en collision élastique avec le corps B ($\vec{p}_B = 0$). Après le choc, les quantités de mouvement sont : $\vec{p'}_A = m_A\vec{u}_A$ et $\vec{p'}_B = m_B\vec{u}_B$. Le choc n'est pas

entièrement déterminé par la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. En effet, nous ne disposons que de 4 équations pour déterminer les 6 composantes x, y, z des quantités de mouvement après le choc. L'extrémité du vecteur $\vec{p}'_A$ est situé sur la **sphère des quantités de mouvement** de rayon $p_A \cdot \dfrac{m_B}{m_A + m_B}$ et dont la position du centre partage $\vec{p}_A$ dans le rapport des masses (Fig. 2.35) :

$$\left(\vec{p}_A{}' - \frac{m_A}{m_A + m_B}\vec{p}_A\right)^2 = \left(\frac{m_B}{m_A + m_B}\vec{p}_A\right)^2$$

Il y a symétrie par rotation autour de l'axe $\vec{p}_A$, le choc n'est défini que par l'**angle de diffusion** θ.

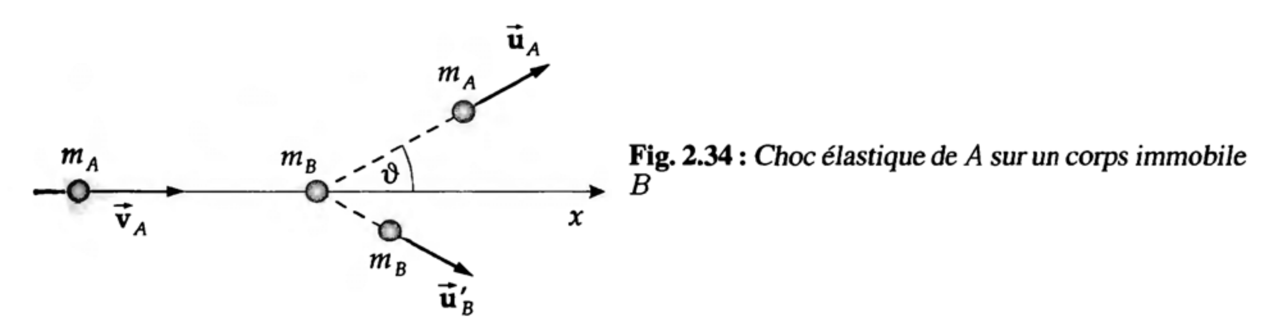


Fig. 2.34 : *Choc élastique de A sur un corps immobile B*

Plusieurs cas peuvent se présenter suivant le rapport des masses des partenaires :

$m_A > m_B$ L'angle de diffusion limite est $\theta_{\max}$, $\sin\theta_{\max} = m_B/m_A$, les angles possibles se situent dans l'intervalle $0 \le \theta \le \theta_{\max}$.

$m_A = m_B$ L'angle de diffusion est dans l'intervalle $0 \le \theta \le \pi$. Les quantités de mouvement après le choc forment toujours un angle de $\pi/2$ (théorème de Thalès).

$m_A < m_B$ Tous les angles entre 0 et π sont possibles : $0 \le \theta \le \pi$.

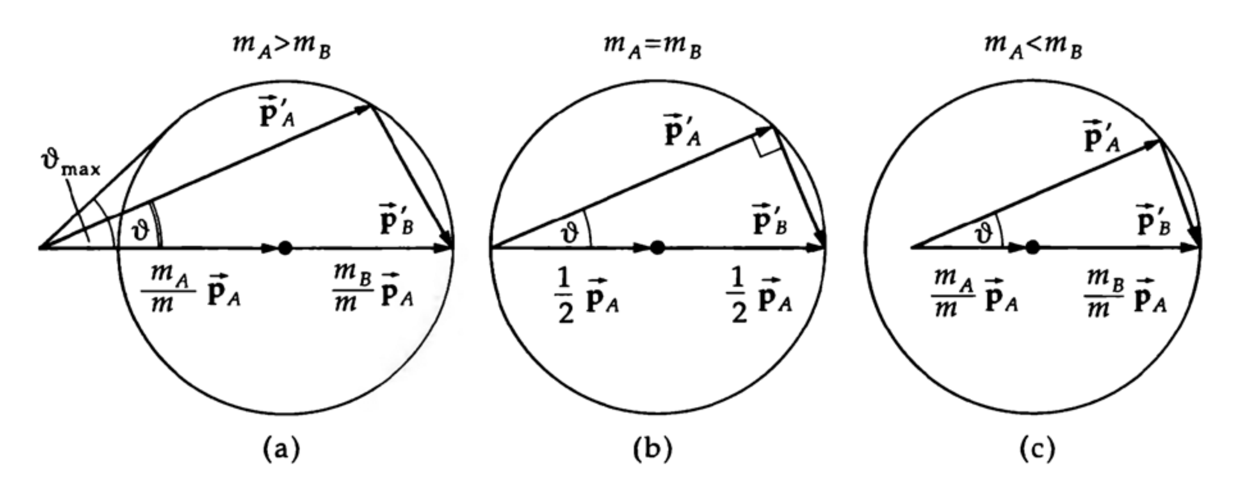


Fig. 2.35 : *Sphère des quantités de mouvement ($m = m_A + m_B$)*

▷ Dans le cas d'un choc inélastique le rayon de la sphère des quantités de mouvement est modifié, la position de son centre reste inchangée. Le rayon augmente (diminue) pour $\Delta W < 0$ ($\Delta W > 0$).

▷ Lors d'un choc totalement inélastique (choc mou), le rayon de la sphère est nul.

■ Une particule entre en collision élastique avec une paroi fixe perpendiculaire à l'axe x. Seule la composante p_x de sa quantité de mouvement est modifiée. Ce choc est analogue à un choc avec un corps infiniment lourd, par conséquent : $p'_x = -p_x$

De cet exemple, nous pouvons déduire une **loi de réflexion** dans les chocs élastiques :

- Dans le cas d'un choc élastique avec une paroi fixe, la composante de la quantité de mouvement suivant la normale à la paroi change de signe. Il s'ensuit que l'angle de réflexion (angle de rebond) est opposé à l'angle d'incidence par rapport à la normale à la paroi, la grandeur de la quantité de mouvement est inchangée. Les directions des quantités de mouvement avant et après le choc sont dans un même plan(Fig. 2.36).

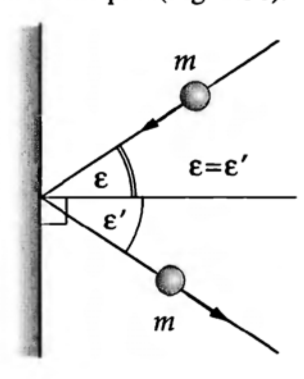


Fig. 2.36 : *Loi de la réflexion lors d'un choc élastique avec une paroi fixe*

- Lors du choc d'un corps avec un mur (équivalent à une masse infinie), ce corps rebondit sur le mur.

En utilisant les composantes des quantités de mouvement des participants avant et après le choc, la conservation de la quantité de mouvement totale s'écrit :

$$\begin{aligned} p_{1x} + p_{2x} &= p'_{1x} + p'_{2x} \\ p_{1y} + p_{2y} &= p'_{1y} + p'_{2y} \end{aligned}$$

où p_{1x} et p'_{1x} sont les composantes de la quantité de mouvement du premier corps sur l'axe x respectivement avant et après le choc.

La conservation de l'énergie mécanique, pour un choc dans un plan horizontal, (pas de variation d'énergie potentielle) donne :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$$

Les inconnues p'_{1x}, p'_{1y}, p'_{2x}, p'_{2y}, sont à déterminer à partir de trois équations. La solution est indéterminée. Généralement on l'exprime en fonction de l'angle entre les directions d'un des participants avant et après le choc.

2.6.4 Chocs inélastiques

Lors de chocs inélastiques, une partie de l'énergie cinétique est dissipée. Elle participe à la déformation permanente d'un ou des partenaires du choc ($\rightarrow$ *Déformation plastique*).

2.6.4.1 Choc complètement inélastique

Après le choc on a $v'_A = v'_B = u$. D'après la conservation de la quantité de mouvement on déduit :

$$m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B = (m_A + m_B)u$$

par conséquent

$$u = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B}$$

Les **énergies cinétiques** avant et après le choc sont repectivement :

$$E_{\text{cin}}(t_0) = \tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2$$

$$E_{\text{cin}}(t_1) = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B)u^2 = \frac{1}{2}\frac{(m_A v_A + m_B v_B)^2}{m_A + m_B}$$

La **perte d'énergie** ΔE dans un choc complètement inélastique est :

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_{\text{cin}}(t_0) - E_{\text{cin}}(t_1)\\ &= \frac{m_A \cdot m_B}{2(m_A + m_B)}(v_A - v_B)^2\end{aligned}$$

Si un corps entre en collision avec un autre corps au repos ($v_B = 0$), le partage de l'énergie cinétique ne dépend que des masses :

$$\frac{E_{\text{cin}}(t_1)}{E_{\text{cin}}(t_0)} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \leq 1$$

Le rapport de la perte d'énergie à l'énergie cinétique initiale $E_{\text{cin}}(t_0)$ dans ce cas ($v_B = 0$) est :

$$\frac{\Delta E}{E_{\text{cin}}(t_0)} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \leq 1$$

Masses égales $m_A = m_B$: la moitié de l'énergie cinétique $E_{\text{cin}}(t_0)$ est perdue. Cette énergie perdue est convertie en chaleur ou sert à la déformation permanente.

2.6.4.2 Chocs partiellement inélastiques

La valeur de la **perte d'énergie** ΔE dépend de la déformabilité des partenaires de la collision et se situe entre 0 et la valeur maximale donnée par la relation :

$$0 \leq \Delta E \leq \frac{m_A m_B}{2(m_A + m_B)}(v_A - v_B)^2$$

2.7 Fusées

Le **principe de réaction** résulte de la conservation de la quantité de mouvement. Il est mis à profit pour la propulsion des **fusées**. Contrairement à d'autres modes de propulsion de machines volantes (moteurs à hélice ou turbopropulseur) qui ne peuvent être utilisés que dans l'atmosphère, une fusée peut être utilisée même dans un espace vide d'air.

▷ Les fusées sont utilisées pour le transport dans l'espace vide d'air et servent, entre autres, à la mise sur orbite de satellites (télécommunications, météorologie, recherche spatiale, etc.). Les véhicules terrestres ou les avions à réaction ne sont pas considérés comme des fusées étant donné qu'ils ne transportent pas la masse servant à la réaction ; ils aspirent de l'air qu'ils rejettent à grande vitesse vers l'arrière pour avancer.

2.7.1 Poussée

Une **fusée**, éjecte continuement des gaz provenant de la combustion du combustible et du comburant embarqués à bord. Du fait du **recul** à grande vitesse des gaz (Fig. 2.37), la fusée avance. La fusée au lancement possède une certaine quantité de combustible qu'elle utilise progressivement et par conséquent sa masse diminue.

m $\vec{v}$

t

Δm_A

$t+\Delta t$ $\vec{v}_A$ $\vec{v}+\Delta\vec{v}$

Fig. 2.37 : *Fusée*

1. Accélération d'une fusée

Pour calculer l'accélération de la fusée, nous considérons un intervalle de temps Δt, pendant lequel la fusée éjecte une masse Δm_A de gaz à la vitesse $\vec{v}_A$, la vitesse de la fusée s'accroît alors de $\vec{v}$ à $\vec{v} + \Delta\vec{v}$. Dans le bilan de la quantité de mouvement, il faut tenir compte de celle des gaz éjectés $\Delta m_A \vec{v}_A$. La variation de quantité de mouvement du système, pendant cet intervalle de temps, est :

$$\begin{aligned}\Delta\vec{p} &= [(m - \Delta m_A)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m_A \vec{v}_A] - m\vec{v} \\ &= m\Delta\vec{v} + \Delta m_A[\vec{v}_A - (\vec{v} + \Delta\vec{v})]\end{aligned}$$

En introduisant la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée :

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_A - \vec{v}$$

En l'absence de forces externes et en négligeant les termes du deuxième ordre $\Delta m_A \cdot \Delta\vec{v} \approx 0$, il vient :

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} - \Delta m_A \vec{v}_0 = 0$$

2. Recul

Cette différence de quantité de mouvement est appelée **recul**. Le recul intervient chaque fois qu'un corps éjecte une partie de sa masse vers l'extérieur. C'est la conséquence du principe d'action et de réaction.

En divisant par Δt et par passage à la limite $\Delta t \to 0$ on a :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}_0 = 0$$

Si une force extérieure F_a (l'attraction terrestre, par exemple) agit sur la fusée, elle sera ajoutée au membre de droite de l'équation, soit :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{v}_0 + F_a$$

3. Équation de la poussée

Le premier terme du membre de droite de l'équation est la force de **poussée** $\vec{F}_{\text{poussée}}$:

Poussée de la fusée			**MLT^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{F}_{\text{poussée}} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t)\vec{v}_0$	$\vec{F}_{\text{poussée}}$	N	poussée
	t	s	temps
	$m(t)$	kg	masse à l'instant t
	$\mathrm{d}m(t)/\mathrm{d}t = \dot{m}$	kg/s	perte de masse
	$\vec{v}_0$	m/s	vitesse d'échappement des gaz

L'accélération $\vec{a}$ de la fusée, compte tenu des forces extérieures $\vec{F}_a$ (gravitation, frottement de l'air), est :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m(t)}(\vec{F}_{\text{poussée}} + \vec{F}_a)$$

■ Une fusée Saturne-V a une masse au départ $m_0 = 2,95 \cdot 10^6$ kg, le premier étage de la fusée a une durée de combustion $t = 130$ s et une masse à vide $m_{\text{vide}} = 1,0 \cdot 10^6$ kg. Le flux des gaz d'échappement est :

$$\dot{m} = \frac{m_0 - m_{\text{vide}}}{t} = \frac{2,95 \cdot 10^6\,\text{kg} - 1,0 \cdot 10^6\,\text{kg}}{130\,\text{s}} = 1,50 \cdot 10^4\,\text{kg/s}$$

Avec une vitesse d'échappement $v_0 = 2\,220$ m/s, la poussée est :

$$F_{\text{poussée}} = \dot{m} v_0 = 1,50 \cdot 10^4\,\text{kg/s} \cdot 2\,220\,\text{m/s} = 3,3 \cdot 10^7\,\text{N}$$

2.7.2 Équation des fusées

1. Détermination de la vitesse finale d'une fusée et de son altitude

Pour calculer la vitesse finale d'une fusée, il faut intégrer son accélération sur la durée de la poussée. Ceci est possible si la vitesse et le flux des gaz d'échappement sont constants pendant le temps de la combustion. Alors, la masse à l'instant t est :

$$m(t) = m_0 - \dot{m}t$$

Si m_0 est la masse au départ de la fusée et en tenant compte de la force de gravitation $F_a = m(t)g$, en négligeant la variation de g avec l'altitude et les frottements, l'accélération de la fusée est :

$$a(t) = \frac{\dot{m}}{m_0 - \dot{m}t} v_0 - g$$

En intégrant cette équation par rapport au temps, on obtient la vitesse à l'instant t :

$$v(t) = v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t}\right) - gt$$

d'où, après une nouvelle intégration, on déduit l'altitude à l'instant t :

$$h(t) = \frac{v_0(m_0 - \dot{m}t)}{\dot{m}}\left[\frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t} - 1 - \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t}\right)\right] - \frac{1}{2}gt^2$$

À la fin de la combustion, la vitesse et l'altitude sont :

Équation des fusées

$$v_B = v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_{\text{vide}}}\right) - gt_B$$

$$h_B = \frac{v_0\, m_{\text{vide}}}{\dot{m}}\left[\frac{m_0}{m_{\text{vide}}} - 1 - \ln\left(\frac{m_0}{m_{\text{vide}}}\right)\right] - \frac{1}{2}gt_B^2$$

Symbole	Unité	Dénomination
v_B	m/s	vitesse en fin de combustion
h_B	m	altitude à cet instant
v_0	m/s	vitesse d'éjection
m_0	kg	masse au départ
m_{vide}	kg	masse en fin de combustion ($m_0 - \dot{m}t_B$)
$\dot{m}$	kg/s	flux de masse
g	m/s^2	pesanteur
t_B	s	durée de combustion

2. Propriétés de l'équation des fusées

- Cette équation n'est valable que si on peut négliger la variation de g avec l'altitude, c'est à dire si l'altitude atteinte reste faible. Les frottements dus à l'air ont aussi été négligés.

▷ La vitesse finale et l'altitude atteintes ne dépendent que de la vitesse d'échappement des gaz et du logarithme du rapport m_0/m_{vide} de la masse au départ m_0 à la masse à vide m_{vide}.
C'est à cause de ceci que la masse utile ne représente généralement que 10 % de la masse au départ.

■ La vitesse finale d'une fusée Saturne-V décrite ci-dessus, est :

$$\begin{aligned} v_B &= v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_{\text{vide}}}\right) - g t_B \\ &= 2,22 \cdot 10^3\,\text{m/s} \ln\left(\frac{2,95 \cdot 10^6\,\text{kg}}{1,0 \cdot 10^6\,\text{kg}}\right) - 9,81\,\text{m/s}^2 \cdot 130\,\text{s} \\ &= 1\,126\,\text{m/s} \end{aligned}$$

À la fin de la combustion du premier étage, l'altitude est $h_B = 45,6\,\text{km}$.

2.8 Systèmes de points matériels

Systèmes de points matériels : problème à plusieurs corps situations physiques dans lesquelles N points matériels $1, 2, \cdots, N$, dont le mouvement est décrits par les fonctions $\vec{\mathbf{r}}_1, \vec{\mathbf{r}}_2, \cdots, \vec{\mathbf{r}}_N$, exercent des forces entre eux (interactions) et/ou sont liés par des liaisons.

Les **corps composés**, sont décrits de façon approchée par des systèmes de points matériels liés par des forces de cohésion. Dans ce cas, la quantité de mouvement est une grandeur additive.

1. Centre de gravité d'un système de points matériels

La position du centre de gravité G d'un ensemble de points matériels m_i de rayons vecteur $\vec{\mathbf{r}}_i$ est donnée par son rayon vecteur $\overrightarrow{OG} = \vec{\mathbf{R}}$.

Coordonnées du centre de gravité			**L**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{\mathbf{R}} = \dfrac{\sum_i \vec{\mathbf{r}}_i m_i}{\sum_i m_i}$	$\vec{\mathbf{R}}$	m	coordonnée du centre de gravité
	$\vec{\mathbf{r}}_i$	m	coordonnée du i-ème élément
	m_i	kg	masse du i-ème élément
	$m = \sum_i m_i$	kg	masse totale du système

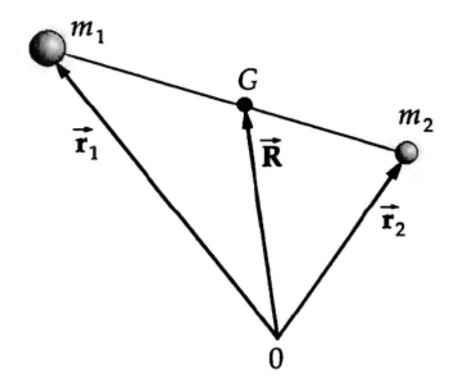


Fig. 2.38 : *Centre de gravité G d'un système de points matériels m_1, m_2*

Le centre de gravité d'un système de points matériels coïncide avec son **barycentre**.

2.8.1 Équations du mouvement

1. Forces dans un système de points matériels

Les points matériels exercent des **forces internes** les unes sur les autres. Ces forces internes sont généralement des interactions à deux corps $\vec{\mathbf{F}}_{ij}$ qui dépendent de la position (éventuellement de la vitesse) de chaque paire de particules (i, j). D'après le principe d'action et de réaction, la force $\vec{\mathbf{F}}_{ij}$ exercée par la particule i sur la particule j est égale en grandeur et opposée en sens à la force $\vec{\mathbf{F}}_{ji}$ exercée sur le point matériel i (Fig. 2.39).

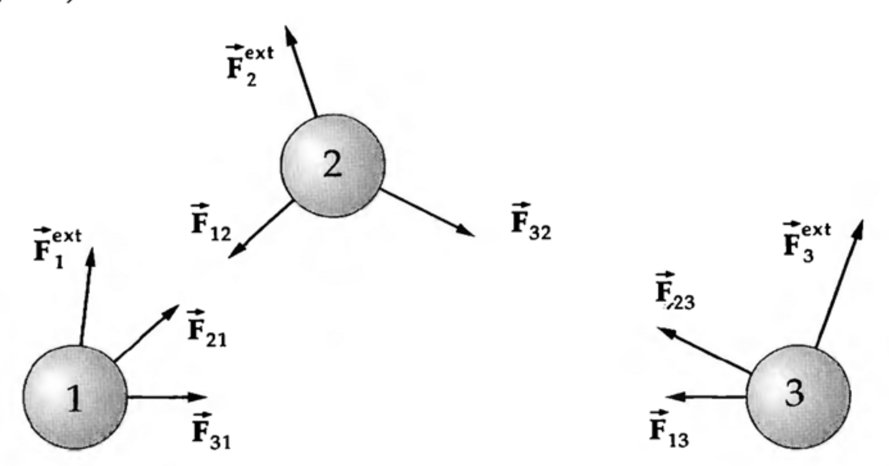


Fig. 2.39 : *Forces internes et forces externes sur un système de points matériels. Les forces $\vec{\mathbf{F}}_{ij}$ et $\vec{\mathbf{F}}_{ji}$ s'annulent deux à deux*

Les forces de **contrainte** et de **réaction** proviennent des conditions de contact avec d'autres systèmes et limitent les degrés de liberté du mouvement. Un **système isolé** (libre) est un système exempt de contraintes extérieures. Les constituants du système sont soumis aux seules forces internes à l'exclusion de toute force externe.

2. Dynamique d'un système de points matériels

Dynamique d'un système de points matériels

$$m_i\ddot{\vec{\mathbf{r}}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i, \qquad i = 1, \cdots, N$$
$$\vec{\mathbf{F}}_i = \sum_{j\neq i=1}^{N} \vec{\mathbf{F}}_{ji} + \vec{\mathbf{F}}_i^{\mathrm{ext}}$$
$$\vec{\mathbf{F}}_i^{\mathrm{ext}} = \sum_{i=1} \vec{\mathbf{F}}_i^{\mathrm{ext}}$$

Symbole	Unité	Dénomination
m_i	kg	masse du point i
$\vec{\mathbf{r}}_i$	m	rayon vecteur du point i
$\vec{\mathbf{F}}_i$	N	force sur i
$\vec{\mathbf{F}}_{ji}$	N	force de j sur i
$\vec{\mathbf{F}}_i^{\mathrm{ext}}$	N	force externe sur i
$\vec{\mathbf{F}}^{\mathrm{ext}}$	N	force externe totale

Les équations du mouvement d'un système de points matériels sont un système d'équations différentielles couplées du deuxième ordre du rayon vecteur. Le couplage des équations provient de la dépendance en position des forces. La solution générale de ces équations dépend de $6N$ paramètres libres, déterminés à

partir des conditions initiales de position et de vitesse des points matériels.

3. Quantité de mouvement, moment cinétique et énergie

Quantité de mouvement totale (quantité de mouvement du centre de masse) : somme des quantités de mouvement de chaque point matériel composant le système. Elle est désignée par $\vec{\mathbf{P}}$:

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 + \ldots = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i$$

si p_i désigne la quantité de mouvement du i-ème point matériel de masse m_i du système.
Moment cinétique total : somme des moments cinétiques $\vec{\mathbf{l}}_i$ de chaque point matériel constituant le système. Il est désigné par $\vec{\mathbf{L}}$:

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{l}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{\mathbf{r}}_i \wedge \vec{\mathbf{p}}_i)$$

Énergie mécanique totale d'un système : somme des énergies cinétiques et potentielles des constituants du système :

$$\begin{aligned} E &= E_{cin} + E_{pot} = T + V \,, \\ E_{cin} &= T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i^2 \,, \\ E_{pot} &= V = \sum_{i<j=1}^{N} V_{ij}(|\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j|) + \sum_{i=1}^{N} V_i^{\mathrm{ext}}(\vec{\mathbf{r}}_i) \end{aligned}$$

▷ L'énergie potentielle du système est la somme des énergies potentielles des forces internes et externes. En vertu du principe d'action et de réaction le potentiel V_{ij} des forces internes ne dépend que de la position relative $r_{ij} = |\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_j|$ des particules i, j. Le potentiel V_i^{ext} des forces extérieures ne dépend que de la position $\vec{\mathbf{r}}_i$ de la particule i.

2.8.2 Conservation de la quantité de mouvement totale

La variation de la quantité de mouvement totale $\vec{\mathbf{P}}$ du système par unité de temps est, d'après le principe fondamentale de la dynamique, égale aux forces agissantes. D'après le principe d'action et de réaction, les forces internes (liaison, forces de cohésion) se compensent deux à deux, de ce fait seules les forces externes participent à la variation de la quantité de mouvement totale.

1. Conservation de la quantité de mouvement

$\dfrac{\textbf{Variation de quantité de mouvement totale}}{\textbf{temps}} = \textbf{forces externes}$				MLT^{-2}
$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{P}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}}$$	Symbole	Unité	Dénomination	
	$\vec{\mathbf{P}}$	N	quantité de mouvement totale	
	$\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}}$	N	force externe	

Si les forces externes ou leur résultante sont nulles, la quantité de mouvement totale du système est conservée :

Conservation de la quantité de mouvement totale : la quantité de mouvement totale (somme des quantités de mouvement individuelles) d'un système sur lequel n'agit aucune force externe se conserve.	$\mathrm{MLT^{-1}}$
$\vec{\mathbf{P}} = \sum_i \vec{\mathbf{p}}_i = constante$	

De ce fait, la quantité de mouvement totale représente la somme des impulsions qu'a reçues un corps pour parvenir à son état de mouvement actuel. Il ne peut restituer les impulsions emmagasinées que s'il est soumis à des forces.

▷ Tout solide rigide est le siège de forces internes qui maintiennent constantes les distances entre les points matériels qui le constituent. Néanmoins, ces forces ne peuvent pas modifier sa quantité de mouvement.

2. Mouvement du centre de gravité

Le centre de gravité d'un système de points matériels se déplace comme si la masse totale y était concentrée et que la résultante des forces extérieures lui était appliquée.
$M\ddot{\vec{\mathbf{R}}} = \vec{\mathbf{F}}^{\mathrm{ext}}$ $\vec{\mathbf{R}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\mathbf{r}}_i \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

2.8.3 Conservation du moment cinétique

Le **moment cinétique total** d'un système est égal à la somme vectorielle des moments cinétiques individuels des éléments qui le constituent.

Moment cinétique d'un système de points matériels			$\mathrm{ML^2T^{-1}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i = \text{const.}$	$\vec{\mathbf{L}}$	kg m²/s	Moment cinétique total
	$\vec{\mathbf{L}}_i$	kg m²/s	Moment cinétique du i-ème élément

De façon analogue à la deuxième loi de Newton, la variation de moment cinétique est égale au moment des forces externes appliquées :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{\mathrm{d}(\vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{p}})}{dt} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{dt} \wedge m\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{r}} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}}{dt}$$

Le premier terme de droite est nul car $\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}/\mathrm{d}t = \vec{\mathbf{v}}$ et le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul. Le terme $\mathrm{d}\vec{\mathbf{p}}/\mathrm{d}t$ est donné par la force appliquée.

Fig. 2.40 : *Le moment des forces internes s'annule.*

1. Théorème du moment cinétique

Variation du moment cinétique = moment des forces				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}$	$\vec{L}$	kg m²/s	moment cinétique	
	$\vec{r}$	m	rayon vecteur	
	$\vec{F}$	N	forces externes	
	$\vec{M}$	Nm	moment des forces externes	

La variation du moment cinétique total est égale à la somme des moments des forces externes. Si le moment résultant des forces externes est nul, le moment cinétique total $\vec{L}$ est conservé :

2.8.4 Conservation de l'énergie

Forces conservatives : forces qui dérivent d'un potentiel$V(r)$.

$$\vec{F}(r) = \vec{\text{grad}}V(r)$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel est : $\text{rot}\,\vec{F} = 0$.

Le travail effectué par une force conservative le long d'un parcours fermé est nul ; le travail d'une force conservative ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée et ne dépend pas du chemin parcouru.

$$\oint \vec{F}\,d\vec{r} = 0$$

Forces dissipatives : forces qui ne dérivent pas d'un potentiel. Ces forces dissipent de l'énergie (par ex: frottement).

Dans le cas général, la force $\vec{F}_i$ appliquée à la particule i peut être décomposée en une partie conservative et une partie dissipative :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,\text{cons}} + \vec{F}_{i,\text{diss}}$$

La variation de l'énergie totale en fonction du temps d'un système de points matériels est égale à la puissance (dissipée) des forces dissipatives :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,\text{diss}} \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

▷ Pour les forces dissipatives, le travail effectué lors du déplacement du point $\vec{r}_1$ au point $\vec{r}_2$ dépend du chemin parcouru entre ces deux points.

■ Les forces de frottement visqueux, proportionelles à la vitesse, dissipent de l'énergie. L'énergie ainsi dissipée dépend de la longueur du chemin parcouru.

■ Les oscillations amorties d'un point matériel de masse m sont régies par l'équation :
$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0$
l'énergie est : $E = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}}, \quad E_{\text{cin}} = \frac{m}{2}\dot{x}^2, \quad E_{\text{pot}} = \frac{c}{2}x^2$.
La variation de l'énergie : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{c}{2}x^2\right) = -\mu\dot{x}^2 < 0$
La somme des énergies cinétique et potentielle de l'oscillateur diminue continuellement à cause du terme de frottement ($\mu > 0$).

L'énergie mécanique totale d'un système de points matériels se conserve en l'absence de forces dissipatives.

Conservation de l'énergie : L'énergie mécanique d'un système de points matériels est conservée s'il n'est pas soumis à des forces dissipatives.			$\mathrm{ML^2T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$E = E_{cin} + E_{pot} = constante$	E	J	énergie mécanique totale
	E_{cin}	J	énergie cinétique totale
	E_{pot}	J	énergie potentielle totale

2.9 Équations de Lagrange et de Hamilton

2.9.1 Équations de Lagrange et principe de Hamilton

1. Grandeur mécaniques généralisées

Coordonnées généralisées, q_k : coordonnées adaptées au système mécanique étudié. Elles peuvent désigner des grandeurs physiques diverses (longueur, angle, etc.). Le nombre de coordonnées généralisées est égal au nombre de degrés de liberté du système.

$q_k(t), \quad k = 1, \ldots, f, \quad f$: nombre de degrés de liberté

■ Coordonnées généralisées d'un pendule : élongation angulaire.
Coordonnées généralisées d'un point matériel sur une sphère : coordonnées sphériques θ, φ.

Vitesse généralisée, $\dot{q}_k$: dérivée première par rapport au temps de la coordonnée généralisée q_k.

$\dot{q}_k(t), \quad k = 1, \ldots, f, \quad f$: nombre de degrés de liberté

Force généralisée, Q_k : définie par les relations :

$$Q_k = \sum_{i=1}^{3N} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_k}, \quad k = 1, \ldots, f.$$

x_i, $i = 1, \ldots, 3N$ sont les coordonnées cartésiennes d'un système de N points matériels.

2. Fonction de Lagrange, Lagrangien

Le Lagrangien représente la différence de l'énergie cinétique $E_{\text{cin}} = T$ et de l'énergie potentielle $E_{\text{pot}} = V$ en fonction des coordonnées généralisées q_k et des vitesses généralisées $\dot{q}_k$:

$L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k) - V(q_k, t)$

▸ Le Lagrangien a les dimensions d'une énergie.

■ Lagrangien de systèmes mécaniques simples :

Point matériel isolé : $L = T = \frac{m}{2}\dot{\vec{\mathbf{r}}}^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

Point matériel dans un potentiel $V(\vec{\mathbf{r}})$: $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{\mathbf{r}}}^2 - V(\vec{\mathbf{r}})$

Oscillateur harmonique, constante de rappel k : $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$

Pendule simple de longueur l : $L = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl\,\cos\varphi$

Pendule composé : $L = \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl\,\cos\varphi$

où : l = distance du centre de gravité à l'axe de rotation
I = moment d'inertie du pendule.

3. Équations de Lagrange

Système de f équations différentielles du deuxième ordre par rapport au temps. Elles permettent de déterminer les coordonnées généralisées q_k en fonction du temps :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0\,, \qquad k = 1, \ldots, f\,.$$

Les contraintes et les conditions initiales n'interviennent plus. Les solutions contiennent $2f$ constantes d'intégration.

▷ Les équations de Lagrange sont équivalentes au principe fondamental de la dynamique.

4. Exemples du formalisme de Lagrange

■ Mouvement à une dimension d'un point matériel dans un potentiel $V(x)$:
Coordonnée cartésienne : x
Coordonnée généralisée : $q = x$
Vitesse généralisée : $\dot{q} = \dot{x}$
Lagrangien : $L = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)$
Équation de Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\,\dot{x}\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\,\ddot{x}\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial x}\,, \quad m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0\,.$$

Puisque $-\partial V/\partial x = F_x$, de l'équation de Lagrange on déduit l'équation du mouvement d'un point matériel sous l'action de la force F_x : $m\,\ddot{x} = F_x$

■ Mouvement dans un potentiel central $V(r)$:
Coordonnées généralisées : r, θ
Vitesse généralisée : $\dot{r}, \dot{\theta}$
Lagrangien : $L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2) - V(r)$
Équation de Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\,\dot{r}\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\,\ddot{r}\,, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = m\,r\,\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m\,r^2\,\dot{\theta}, \quad \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

Équations du mouvement :

$m\,\ddot{r} = m\,r\,\dot{\theta}^2 - \dfrac{\partial V}{\partial r} = m\,r\,\dot{\theta}^2 + F(r)\,, \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,r^2\,\dot{\theta}) = 0$

$F(r)$ est la grandeur de la force centrale agissante. La dernière équation implique qu'il y a conservation du moment cinétique : $l = m\,r^2\,\dot{\theta}$.

5. Déplacement virtuel

C'est un déplacement infiniment petit $\delta\vec{\mathbf{r}}$ d'un point matériel compatible avec les liaisons imposées, sans changement de la variable temps :

$$\vec{\mathbf{r}} \longrightarrow \vec{\mathbf{r}} + \delta\vec{\mathbf{r}} \quad \text{pour } \delta t = 0$$

Un déplacement virtuel ne correspond pas obligatoirement avec la trajectoire réelle suivie par le point matériel ou le système.

▷ En utilisant les coordonnées généralisées, les déplacements virtuels quelconques peuvent être envisagés sans respect des conditions initiales.

▷ Le déplacement virtuel d'un système de N points matériels se compose à partir des déplacements virtuels de chacun des points matériels : $\delta\vec{\mathbf{r}}_i$, $i = 1, \ldots, N$.

Trajectoire virtuelle : trajectoire $\hat{q}_k(t)$ entre deux points fixes $q_k(t_1), q_k(t_2)$, qui diffère de la trajectoire réelle $q_k(t)$ par des déplacements virtuels δq_k à un instant donné t ($\delta t = 0$) :

$\hat{q}_k(t) = q_k(t) + \delta q_k(t)$

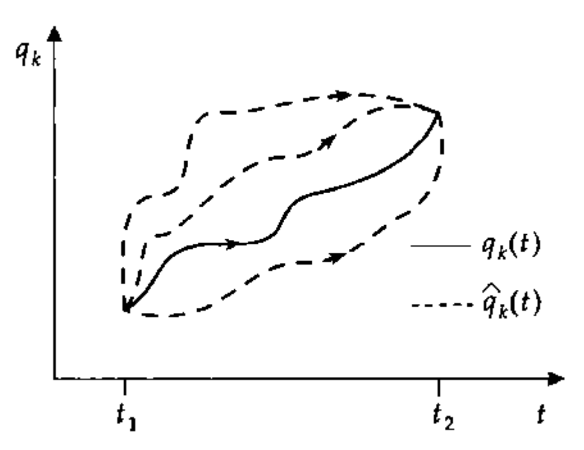


Fig. 2.41 : *Déplacements virtuels* $\hat{q}_k(t)$. $q_k(t)$ *: parcours réel*

6. Action hamiltonienne et principe de Hamilton

Intégrale d'action A : intégrale sur le temps de la fonction lagrangienne $L(q_k, \dot{q}_k, t)$:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t)\,\mathrm{d}t\,.$$

▷ L'action hamiltonienne a les dimensions d'une énergie multipliée par le temps.

Principe de moindre action, principe de Hamilton : entre deux instants t_1 et t_2, le mouvement d'une particule est tel que l'intégrale d'action A est extrémale (le plus souvent minimale) :

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k(t), \dot{q}_k(t), t)\,\mathrm{d}t \;=\; \text{extremum}$$

▷ Le principe de moindre action est indépendant du choix des coordonnées.

▷ Le principe de moindre action (Maupertuis), le principe du "meilleur" (Leibniz) ou le principe général d'extrema (principe variationnel) ont leurs équivalents dans d'autres domaines de la physique : principe de Fermat du moindre chemin en optique, principe de Ritz pour l'approximation des valeurs d'énergie en mécanique quantique.

2.9.2 Équations de Hamilton

1. Impulsion généralisée, moment conjugué

L'impulsion généralisée p_k est définie comme la dérivée du lagrangien $L = T - V$ par rapport à la vitesse généralisée $\dot{q}_k$:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \qquad k = 1, \ldots, f, \qquad f: \text{ nombre de degrés de liberté.}$$

▷ Ces grandeurs q_k et p_k sont dites **conjuguées canoniques**. En particulier p_k est appelé le **moment conjugué**.

■ Dans un mouvement circulaire, l'angle de rotation φ est la coordonnée généralisée. Le moment conjugué canonique est le moment cinétique l.

2. Hamiltonien

L'hamiltonien H s'obtient en introduisant, dans la description théorique, les moments conjugués p_k à la place des vitesses généralisées $\dot{q}_k$:

$$H(q_k, p_k, t) = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - L(q_k, \dot{q}_k, t)$$

▷ Le hamiltonien est une fonction des coordonnées généralisées, des moments conjugués et éventuellement du temps. S'il est indépendant du temps, il représente l'énergie mécanique (somme des énergies cinétique et potentielle). L'énergie mécanique est une constante du mouvement :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{dt}} = 0, \qquad H = T + V = E = \text{const.}$$

3. Transformation de Legendre

Le passage du lagrangien $L(q_k, \dot{q}_k)$ à l'hamiltonien $H(q_k, p_k)$ est effectué par une **transformation de Legendre**.

Une fonction $f(x, y)$ des deux variables x, y peut être transformée en la fonction équivalente h, qui dépend des variables x et $p = \partial f / \partial y$, par

$$h(x, p) = f(x, y) - y\,p$$

Parce que

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - p = 0$$

La fonction h dépend de x et p, mais ne dépend plus de y.

La transformation de Legendre est beaucoup utilisée en thermodynamique pour transformer des grandeurs en d'autres variables d'état. Par exemple, on obtient l'énergie libre F en fonction de la température T en remplaçant dans l'énergie interne $E(S, \ldots)$ la variable entropie S par la variable température $T = \partial U / \partial S$:

$$F(T, \ldots) = U(S, \ldots) - T\,S\,.$$

4. Équations de Hamilton, équations canoniques

Ce sont les dérivées par rapport au temps des coordonnées généralisées et des moments conjugués :

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, \ldots, f, \quad f: \text{nombre des degrés de liberté}.$$

Les équations de Hamilton constituent un système de $2f$ équations différentielles du premier ordre en fonction du temps. Les solutions contiennent $2f$ constantes d'intégration, qui peuvent être choisies librement (par ex. : les valeurs initiales des coordonnées et des moments). Les équations de Hamilton sont équivalentes aux équations de Lagrange.

■ Oscillateur harmonique à une dimension :

Lagrangien : $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$

Moment généralisé : $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\,\dot{x}$

Hamiltonien : $H = p\,\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 = T(t) + V(t) = E = \text{const.}$

Équations de Hamilton : $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$

Ces équations conduisent aux équations newtoniennes du mouvement $m\ddot{x} = -kx$.

5. Espace de phase

Coordonnées cycliques : coordonnées dont le lagrangien ne dépend pas :

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

● le moment conjugué canonique à une coordonnée cyclique est un invariant.

Espace de configuration : espace à f dimensions des coordonnées généralisées q_k. Trajectoire dans l'espace de configuration : $q_k(t)$, $k = 1, \ldots, f$.

Espace de phase : espace abstrait à $2f$ dimensions, dont les coordonnées sont les coordonnées généralisées q_k et les moments conjugués canoniques p_k **coordonnées canoniques**. Trajectoire du système dans l'espace de phase : $(q_k(t), p_k(t))$, $k = 1, \ldots, f$.

▷ Pour des systèmes conservatifs, chaque trajectoire dans l'espace de phase est caractérisée par une valeur de l'hamiltonien (énergie mécanique totale). À des mouvements périodiques de l'espace correspondent des trajectoires fermées dans l'espace de phase.

■ Dans l'espace de phase, la représentation du mouvement d'un oscillateur harmonique à une dimension en fonction du temps est une ellipse caractérisée par l'énergie $E = \frac{m}{2}A^2\omega^2$ (A : amplitude, ω : pulsation).

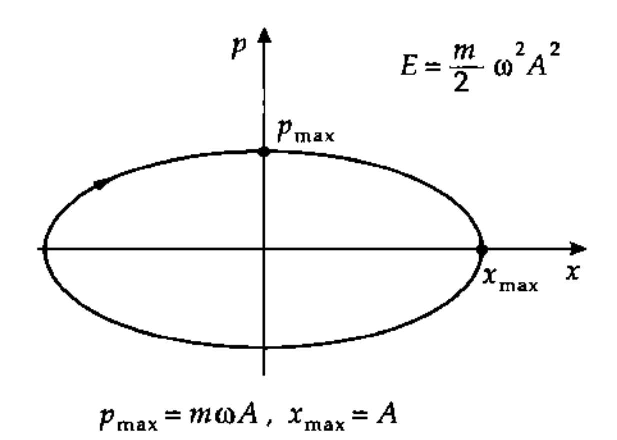


Fig. 2.42 : *Trajectoire dans l'espace de phase d'un oscillateur harmonique*

3 Solide rigide

Solide rigide : corps indéformable dans lequel les distances entre les particules qui le composent restent fixes lorsqu'on lui applique une force ou un moment (Fig. 3.1). Un solide rigide conserve sa forme durant son mouvement. Un solide pouvant être considéré comme composé de particules matérielles, les grandeurs additives telles que le moment d'inertie et le moment cinétique du solide peuvent être calculées à partir de grandeurs correspondantes de chaque particule matérielle le composant.

3.1 Cinématique

3.1.1 Masse volumique

Masse volumique ρ d'un solide **homogène**, rapport de sa masse m à son volume V :

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Pour un solide **inhomogène** dont la masse est répartie uniformément, la masse volumique est une fonction de la position $\vec{\mathbf{r}}$ dans le solide (Fig. 3.2). On décompose le solide en une infinité de volumes élémentaires ΔV, dans chacun desquels la masse volumique peut être considérée constante. La masse de l'élément de volume ΔV situé au point $\vec{\mathbf{r}}$ est Δm. La masse volumique de cet élément de volume vaut : $\rho = \Delta m/\Delta V$. Dans le cas d'une distribution continue de la masse, la masse volumique au point $\vec{\mathbf{r}}$ est :

$$\rho(\vec{\mathbf{r}}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{dV}}, \quad \mathrm{dm} = \rho(\vec{\mathbf{r}}) \cdot \mathrm{dV}$$

La masse totale m du corps est donnée par l'intégrale de volume :

$$m = \int \mathrm{dm} = \int \rho(\vec{\mathbf{r}})\, \mathrm{dV}$$

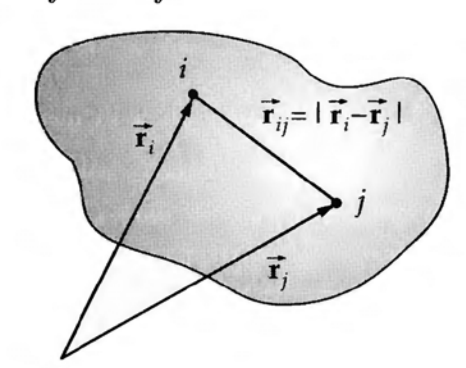


Fig. 3.1 : *Solide rigide : les distances* $|\vec{\mathbf{r}}_1|$,$|\vec{\mathbf{r}}_2|$ *et* $|\vec{\mathbf{r}}_3|$ *sont constantes*

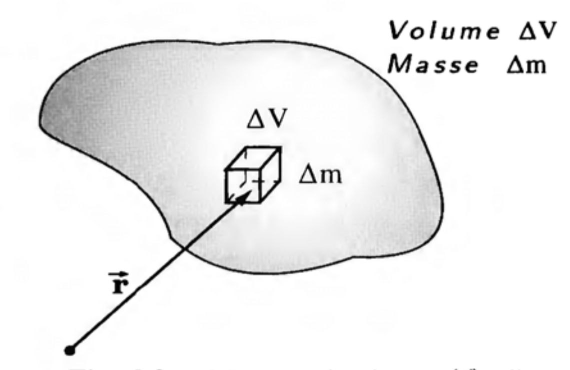


Fig. 3.2 : *Masse volumique* $\rho(\vec{\mathbf{r}})$ *d'un solide inhomogène*

3.1.2 Centre de gravité

1. Définition du centre de gravité

Centre de gravité, barycentre : point d'application de la résultante des forces de poids d'un ensemble de points matériels constituants un solide. Le **poids** d'un corps de masse totale m peut être représenté par une seule force $\vec{\mathbf{F}}_G$ appliquée au centre de gravité G. Si m est la masse totale du solide, l'intensité de cette force est :

$$\vec{\mathbf{F}}_G = m\vec{\mathbf{g}}$$

● Le centre de gravité d'un solide homogène, admettant un axe de symétrie, est situé sur cet axe de symétrie.

Pour maintenir un corps en équilibre, on peut :

- soutenir le corps en son centre de gravité
- supporter le corps en plusieurs points, de manière à ce que la résultante des forces de soutien soit appliquée en son centre de gravité

● Un solide soumis à son seul poids, lorsqu'il est soutenu en son centre de gravité, est en équilibre.

▷ Le moment de la force de poids d'un solide par rapport à son centre de gravité est nul.

La position du centre de gravité G d'un solide constitué d'un ensemble de points matériels m_i est donnée par son rayon vecteur $\overline{OG} = \vec{\mathbf{R}}$

Coordonnées du centre de gravité				**L**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\vec{\mathbf{R}} = \dfrac{\sum_i \vec{\mathbf{r}}_i m_i}{\sum_i m_i}$	$\vec{\mathbf{R}}$	m	coordonnée du centre de gravité	
	$\vec{\mathbf{r}}_i$	m	coordonnée du i-ème élément	
	m_i	kg	masse du i-ème élément	
	$m = \sum_i m_i$	kg	masse totale du solide	

Le centre de gravité d'un solide coïncide avec son **barycentre**.

Forme intégrale :

$$\vec{\mathbf{R}} = \frac{\int \vec{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_V \vec{\mathbf{r}}\,\rho(\vec{\mathbf{r}})\,\mathrm{dV}}{\int_V \rho(\vec{\mathbf{r}})\,\mathrm{dV}}$$

où $\rho(\vec{\mathbf{r}})$ est la masse volumique au point $\vec{\mathbf{r}}$ et $\mathrm{d}V$ un élément de volume. Pour un solide homogène ($\rho =$ const.) on a :

$$\vec{\mathbf{R}} = \frac{1}{V}\int_V \vec{\mathbf{r}}\,\mathrm{dV}$$

2. Détermination du centre de gravité

M **Détermination expérimentale du centre de gravité** : si un solide est suspendu à un fil par un de ses points, son centre de gravité est, à l'équilibre, sur la droite en prolongement du fil (Fig. 3.3). En le suspendant successivement par deux de ses points, on trouve le centre de gravité à l'intersection des deux droites.

Le centre de gravité d'une plaque triangulaire homogène se situe au point de concours de ses médianes. Une telle plaque, suspendue par un quelconque de ses points, s'oriente toujours de façon à ce que la verticale du point de suspension passe par le point de concours des médianes.

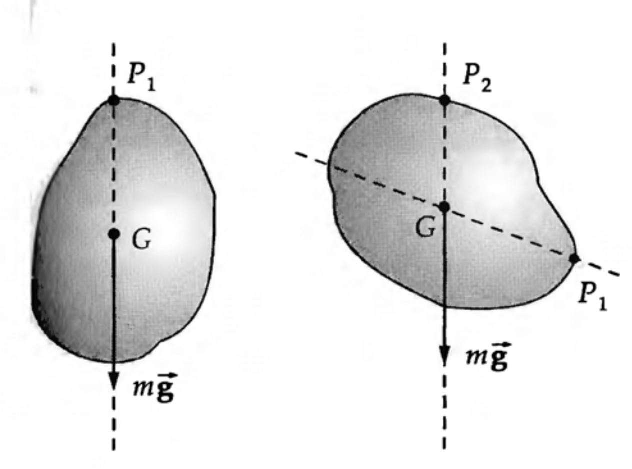


Fig. 3.3 : *Détermination du centre de gravité d'une surface plane*

▷ Le centre de gravité d'un corps peut être situé à l'extérieur de ce corps.

3. Théorème du centre de gravité

● Le mouvement du centre de gravité est celui d'un point matériel de masse égale à la masse totale du corps auquel est appliquée la résultante des forces externes. Les forces internes du corps n'agissent pas sur son mouvement.

■ Deux corps de masses respectives $m_1 = 1\,\text{kg}$ et $m_2 = 3\,\text{kg}$, reliés par une tige rigide de longueur $l = 2\ m$ et de masse négligeable, constituent un haltère. Dans le système de coordonnées ayant la position de m_1 comme origine et la direction de la tige comme axe des x, les coordonnées des masses sont :

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du centre de gravité seront alors :

$$\vec{\mathbf{R}} = \frac{m_1\vec{\mathbf{r}}_1 + m_2\vec{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = \begin{pmatrix} 1,5\,\text{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit à une distance de 1,5 m de la masse m_1 et par conséquent à 0,5 m de m_2.

3.1.3 Grandeurs cinématiques fondamentales

1. Systèmes de coordonnées

Système de coordonnées fixe, K' : système dont l'origine O et les axes de coordonnées (x, y, z) sont fixes dans l'espace. Les vecteurs unitaires des axes sont : $\vec{\mathbf{e}}_x{}', \vec{\mathbf{e}}_y{}', \vec{\mathbf{e}}_z{}'$.

Système de coordonnées du solide, K : un point quelconque S du corps est pris comme origine du système de coordonnées local. Les axes de coordonnées sont choisis liés et fixés au solide. Vu du système fixe K', les vecteurs unitaires de K, liés au solide $\vec{\mathbf{e}}_x(t), \vec{\mathbf{e}}_y(t), \vec{\mathbf{e}}_z(t)$, se déplacent au cours du temps (Fig. 3.4).

▷ L'origine du système de coordonnées local S lié au solide peut être choisi en son centre de gravité G. Pour un solide en rotation autour d'un point P (toupie, gyroscope), on choisi généralement ce point comme origine.

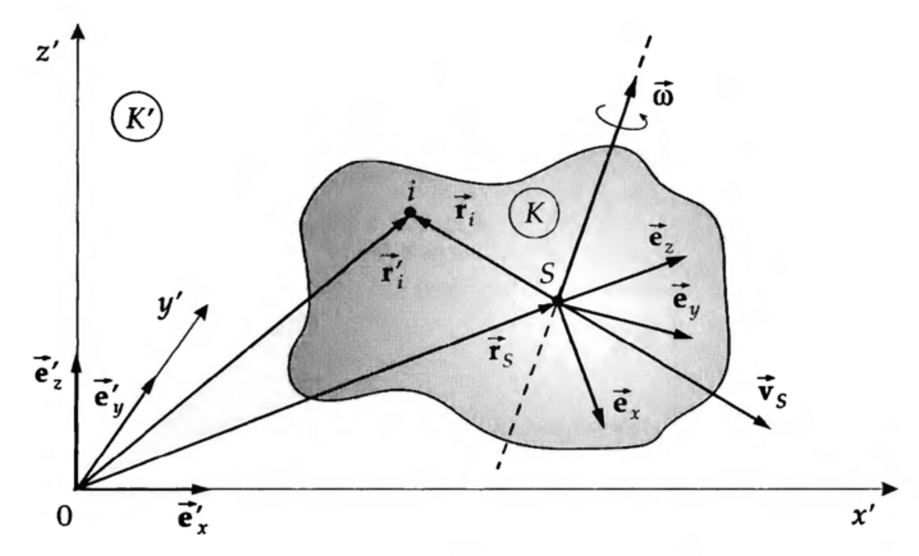


Fig. 3.4 : *Systèmes de coordonnées fixe (K') et lié au solide (K)*

Les quantités désignées sur la Figure 3.4 sont :

$\vec{r}_i{}'$: rayon vecteur du point i dans le repère fixe K'.
$\vec{r}_i$: rayon vecteur du point i dans le repère K lié au solide.
$\vec{r}_S$: position de l'origine S du système lié au solide par rapport à O.
$\vec{v}_S$: vitesse de translation de S par rapport à K'.
$\vec{v}_i{}'$: vitesse du point i dans le repère fixe K'.
$\vec{v}_i$: vitesse du point i dans le repère K lié au solide.
$\vec{\omega}$: vecteur rotation autour d'un axe passant par l'origine S de K.

2. Relations entre les grandeurs cinématiques

On établit les relations suivantes entre les grandeurs des systèmes K et K' :
Vecteur position : $\vec{r}_i{}'(t) = \vec{r}_S(t) + \vec{r}_i(t)$
Vitesse : $\vec{v}_i{}'(t) = \vec{v}_S(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}_i(t)$
Accélération : $\vec{a}_i{}'(t) = \vec{a}_S(t) - \dot{\omega} \times \vec{r}_i(t) - 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_i(t) - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$

▷ La vitesse de translation $\vec{v}_S$ dépend du choix de l'origine S du repère lié au solide. La vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est indépendante du choix de l'origine S du repère lié au solide, c'est à dire que tout système lié au solide tourne avec la même vitesse angulaire autour d'axes parallèles.

3. Mouvement général d'un solide rigide

Tout mouvement général d'un solide résulte de la superposition d'une **translation** de l'origine S du repère lié au solide avec la vitesse $\vec{v}_S(t)$ et une **rotation** de vitesse angulaire $\vec{\omega}(t)$ autour d'un axe passant par S. La direction de l'axe de rotation et la vitesse angulaire (vecteur rotation $\vec{\omega}$) peuvent se modifier au cours du temps.

Axe fixe : axe lié au solide, fixé par des liaisons extérieures (appuis, paliers).

Axe libre : axe lié au solide, dont la position n'est pas modifiée s'il n'est pas soumis à un couple. Un axe libre n'est pas contraint par des liaisons extérieures.

▷ Un solide rigide admet trois axes libres priviligiés, perpendicualires entre eux : les deux axes de moment d'inertie respectivement maximum et minimum et le troisième axe libre qui leur est perpendiculaire.

▶ Les axes principaux d'inertie d'un solide rigide sont des axes libres.

4. Exemple : mouvement d'un haltère

Le mouvement d'un haltère peut être décomposé en un mouvement de rotation des deux masses autour du centre de gravité et une translation du centre de gravité. Si la vitesse angulaire de rotation est ω et la vitesse de translation $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{R}}$ décrit la translation du centre de gravité :

$$\vec{\mathbf{R}}(t) = \vec{\mathbf{R}}_0 + \vec{\mathbf{v}}t$$

($\vec{\mathbf{R}}_0$ position du centre de gravité à l'instant initial $t = 0$).

Les coordonnées relatives $\Delta\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{R}}$ décrivent la rotation :

$$\Delta\vec{\mathbf{r}}_1(t) = l_1 \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} \qquad \Delta\vec{\mathbf{r}}_2(t) = -l_2 \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix}$$

où l_1 et l_2 sont les distances (constantes) des deux masses par rapport à leur centre de gravité. Le mouvement de l'ensemble est alors décrit par les équations :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}_1(t) &= \vec{\mathbf{R}}(t) + \Delta\vec{\mathbf{r}}_1(t) = \vec{\mathbf{R}}_0 + \vec{\mathbf{v}}t + l_1 \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} \\ \vec{\mathbf{r}}_2(t) &= \vec{\mathbf{R}}(t) + \Delta\vec{\mathbf{r}}_2(t) = \vec{\mathbf{R}}_0 + \vec{\mathbf{v}}t + l_2 \begin{pmatrix} \cos\omega t \\ \sin\omega t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.2 Statique

Statique : étude de l'équilibre de forces. Elle cherche à dire à quelles conditions elles doivent satisfaire pour que les corps considérés restent au repos. En particulier, la statique permet de calculer les forces qui se produisent dans les poutres, charpentes et paliers.

Solide rigide : un corps que des forces externes ne peuvent déformer. Les forces peuvent être appliquées en divers points du solide rigide.

Forces internes : forces entre points matériels constituant un solide rigide. Elles permettent au solide rigide de maintenir sa forme même sous l'action de forces externes. D'après le principe d'action et de réaction, à chaque force interne correspond une force d'égale intensité mais opposée en sens.

● La résultante des forces internes est nulle.

3.2.1 Vecteurs force

1. Vecteur force et point d'application

Les forces sont représentées par des **vecteurs force** ; ceux-ci se distinguent d'autres vecteurs par le fait que leur origine est liée à un point correspondant au point d'application de la force. Un **vecteur force** est caractérisé par son intensité (longueur), sa direction (**ligne d'action**) et son **point d'application**. Un vecteur force est représenté par une flèche dont l'origine est au point d'application de la force, dont la direction correspond à celle de la ligne d'action et de longueur proportionnelle à son intensité.(Fig. 3.5).

● Le point d'application d'une force s'exerçant sur un solide rigide peut être déplacé le long de la ligne d'action de cette force. Un vecteur force d'un solide est un **vecteur glissant** (Fig. 3.6).

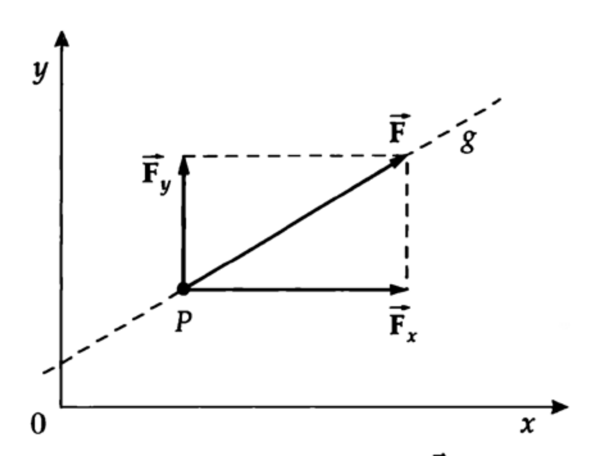


Fig. 3.5 : *Vecteur force $\vec{F}$, de point d'application P, de ligne d'action g, de composantes $\vec{F}_x$ et $\vec{F}_y$ et de grandeur :* $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

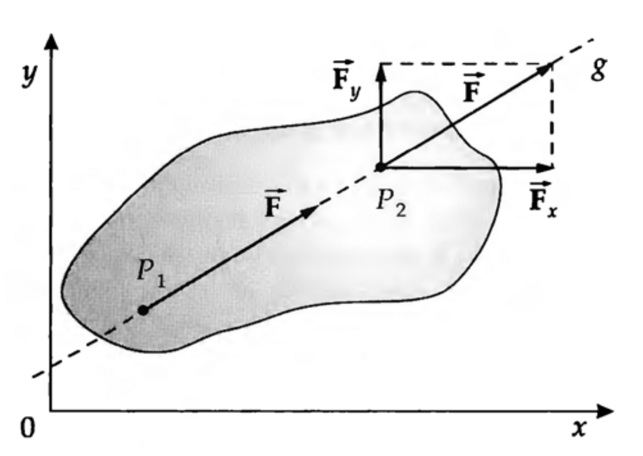


Fig. 3.6 : *Glissement d'une force le long de sa ligne d'action g*

3.2.2 Moment d'une force, couple

1. Moment d'une force appliquée

Moment d'une force : produit de la force et de son **bras de levier** d par rapport à un point fixe autour duquel le corps peut tourner. De même qu'une force peut mettre un corps en mouvement de translation, le moment d'une force peut induire une **rotation** du solide autour de son centre de gravité(Fig. 3.7).

Moment(*grandeur*) = **rayon vecteur** × **force**				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$M = F \cdot d$	M	Nm	grandeur du moment	
	F	N	intensité de la force appliquée	
	d	m	bras de levier	

Newton mètre (Nm) : unité SI du moment, c'est le moment d'une force de 1 N dont le bras de levier par rapport au centre de rotation est de 1 m.

$1\,\text{Nm} = 1\,\text{N} \cdot 1\,\text{m}$

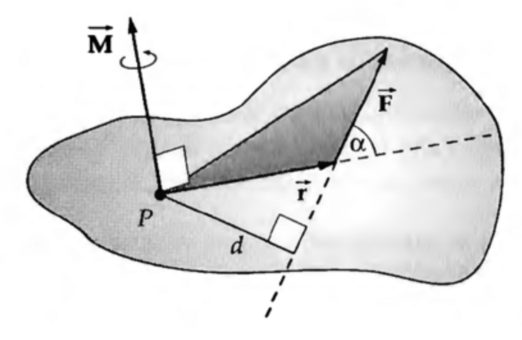


Fig. 3.7 : *Moment $\vec{M}$ de la force $\vec{F}$par rapport au point P*

▷ Le bras de levier est la longueur de la normale à la ligne d'action de la force menée à partir du point de rotation.

▷ Si le point d'application de la force est donné, le bras de levier est :
$d = r \sin\alpha$, où r est la distance du centre de rotation au point d'application de la force et α l'angle

entre la force et le vecteur $\vec{r}$ (vecteur position du point d'application de la force par rapport au centre de rotation).

2. Propriétés du moment d'une force

▷ Le moment d'une force est un vecteur qui pointe dans la direction de l'axe de rotation :

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$
$$|\vec{M}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}| \sin\alpha = |\vec{F}| \cdot d$$

▷ De façon générale, on exprime le **moment** d'une force $\vec{F}$ par le produit vectoriel $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$
Le produit vectoriel exprime la direction et le sens du moment (règle de la main droite) ainsi que la longueur du bras de levier.

■ Une force $F = 5$ N appliquée avec un bras de levier $d = 20$ cm, produit un moment d'intensité :
$M = F \cdot d = 5\,\mathrm{N} \cdot 0{,}20\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{Nm}$

● Si, à force égale, on double le bras de levier, le moment $\vec{M}$ est double.

3. Moment résultant

Si plusieurs forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n$, agissent sur un solide, les moments individuels peuvent être additionnés pour former le **moment résultant** $\vec{M}_R$ (Fig. 3.8)

$$\vec{M}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

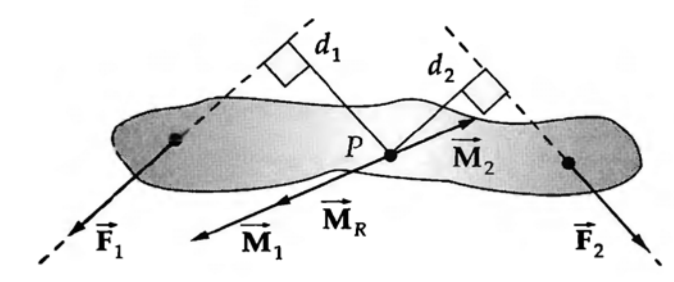


Fig. 3.8 : *Moment résultant, les forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ forment un plan, les moments $\vec{M}_1, \vec{M}_2$ sont perpendiculaires à ce plan*

Composition de moments			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots$	$\vec{M}_R$	Nm	moment résultant
	$\vec{M}_1, \vec{M}_2, \ldots$	Nm	moments

3.2.3 Couple de forces

1. Couple de force et moment du couple

Couple de forces : deux forces d'intensités égales, parallèles, mais de sens opposés $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ et qui s'appliquent en deux points différents du solide. Leurs lignes d'action ne sont alors pas communes. Un couple de forces ne peut pas être composé en une seule force résultante. La résultante d'un couple de forces est nulle : $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. De ce fait, un couple de forces ne peut pas induire de translation. En revanche, le moment d'un couple (de forces) est différent de zéro et, par conséquent, entraîne une rotation.

▹ La résultante de deux forces opposées $F_2 = -F_1$ est nulle $F_1 + F_2 = 0$. Leur moment résultant n'est pas nul si elles sont appliquées en des points différents (Fig. 3.9) :

$$M = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 = F_1(d_1 - d_2)$$

Ces deux forces forment un **couple**. Dans le cas général, un couple produit une rotation sans translation.

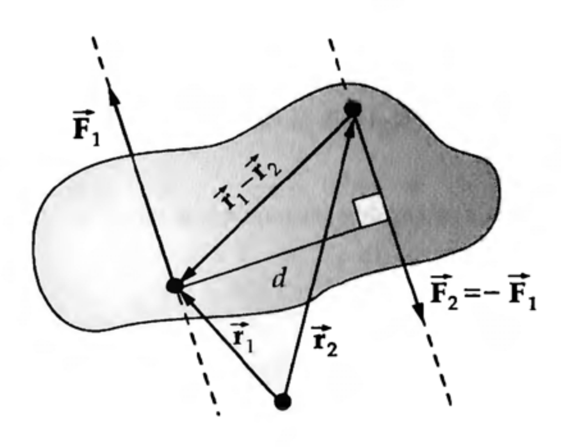


Fig. 3.9 : *Des forces de sens opposés, appliquées en des points différents, produisent un couple. d=distance entre les lignes d'action des forces*

▹ Si la ligne d'action passe par le centre de rotation, le moment est nul.

2. Réduction d'un système de forces

Tout système de forces coplanaires peut se réduire à une force et un couple de forces. Le point d'application de la résultante peut alors être choisi arbitrairement (Fig. 3.11).

Glissement d'une force : une force $\vec{F}$ peut être déplacée parallèlement à sa ligne d'action du point d'application P au point P', si on lui adjoint un couple de forces $\vec{F}, -\vec{F}$ (Fig. 3.10).

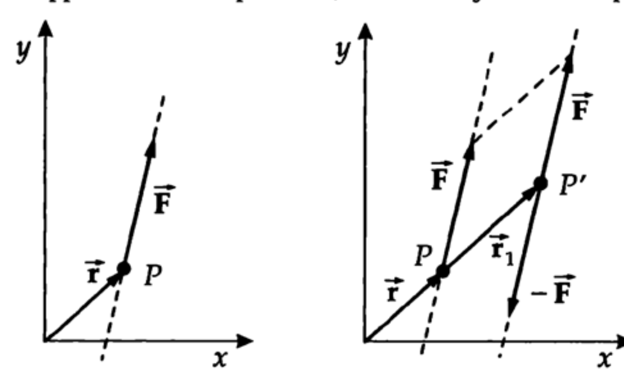


Fig. 3.10 : *Glissement d'une force $\vec{F}$ par introduction du moment de déplacement $\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}$*

Moment de déplacement $\vec{M}_1$: compense le changement du moment de la force $\vec{F}$ à la suite de son déplacement, $\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F}$.

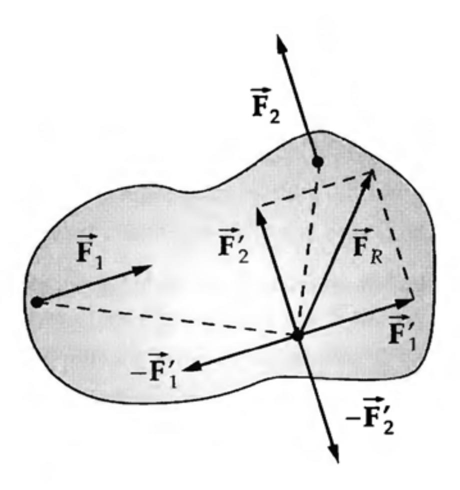


Fig. 3.11 : *Réduction d'un système de forces coplanaires $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ à une résultante $\vec{F}_R$ et deux couples de forces $\vec{F}_1, -\vec{F}'_1$ et $\vec{F}_2, -\vec{F}'_2$,*

dont les moments peuvent être composés en un moment résultant

3.2.4 Équilibre statique

Un corps est en équilibre statique si les conditions suivantes sont remplies (Fig. 3.12) :

- la force résultante appliquée est nulle (pas de translation).
- La somme des moments appliqués est nulle (pas de rotation).

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots = 0$$
$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots = 0$$

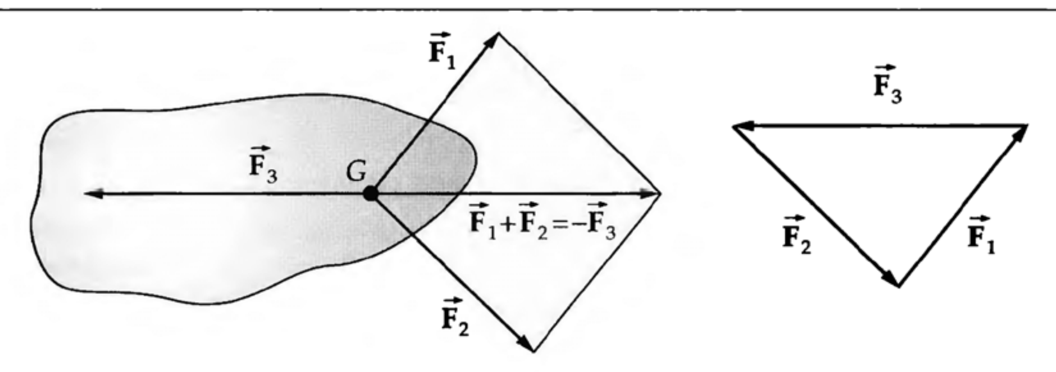


Fig. 3.12 : *Équilibre d'un solide rigide de centre de gravité S*

▹ À ces relations vectorielles correspondent six relations sur les composantes :

$F_{1x} + F_{2x} + \cdots = \sum_i F_{ix} = 0$	$M_{1x} + M_{2x} + \cdots = \sum_i M_{ix} = 0$
$F_{1y} + F_{2y} + \cdots = \sum_i F_{iy} = 0$	$M_{1y} + M_{2y} + \cdots = \sum_i M_{iy} = 0$
$F_{1z} + F_{2z} + \cdots = \sum_i F_{iz} = 0$	$M_{1z} + M_{2z} \cdots = \sum_i M_{iz} = 0$

▹ Si toutes les forces sont appliquées en un même point, la condition d'équilibre se réduit à :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots = 0$$

(Le moment résultant sera également nul dans ce cas).

▹ Il faut utiliser la forme vectorielle si les moments agissent dans des plans différents (les axes de rotation ne sont pas parallèles).

De la deuxième règle on déduit encore la loi des leviers : soit les forces F_1 et F_2 agissant sur un solide rigide à des distances respectives d_1 et d_2 de son centre de rotation , à l'équilibre on a :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

1. Équilibre d'un solide posé sur un plan horizontal

Un corps posé sur un plan subit de la part de celui-ci une **réaction** qui équilibre la force de poids. La réaction est la résultante des forces de contact entre tous les points d'appui du corps et la surface sur laquelle il repose. Le plus petit contour convexe entourant tous ces points définit la base de sustentation ou **polygone de sustentation**.

● Un corps est en équilibre si la projection verticale de son centre de gravité est à l'intérieur de son polygone de sustentation (Fig. 3.13).

▷ Le polygone de sustentation d'un corps peut être agrandi par l'adjonction de supports (pieds ou béquilles).

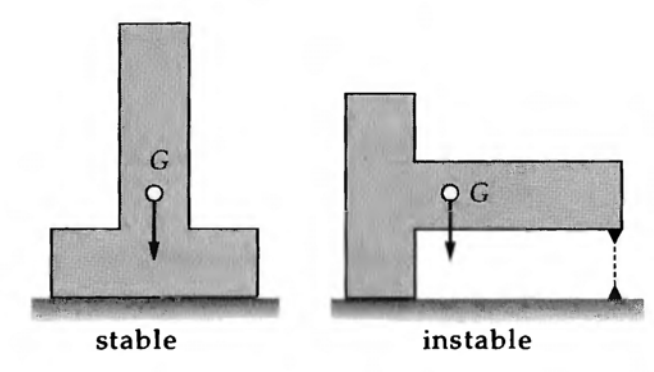


Fig. 3.13 : *Renversement d'un solide : le solide est en équilibre tant que la verticale de son centre de gravité G passe à l'intérieur de son polygone de sustentation. L'équilibre peut être rétabli par l'adjonction d'un support (en pointillé)*

L'équilibre d'un corps est d'autant plus stable que :

- la distance horizontale de son centre de gravité à son bord est grande
- son centre de gravité est plus bas
- son poids est plus grand

Moment de renversement : moment des forces nécessaire pour rompre l'équilibre.

Moment de renversement			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$M = d \cdot mg$	M	Nm	moment de renversement
	d	m	distance horizontale de G à l'arête
	mg	N	poids

3.2.5 Technologie mécanique

3.2.5.1 Forces de contact, réaction

Appui : point de contact d'un corps avec un support fixe qui permet d'équilibrer les forces agissant sur le corps.

Les poutres d'un pont reposent sur des **appuis** supportées par des **culées** ; un organe de machine est en contact avec des pièces voisines qui constituent autant d'appuis qu'il faut étudier au point de vue de la

résistance des matériaux. Il est nécessaire de déterminer les forces qui agissent sur la poutre ou l'organe de machine :

- poids propre
- charges suspendues ou supportées
- forces d'inertie, si l'organe est en mouvement rectiligne non uniforme ou non rectiligne

Ces forces, actions des appuis, sont définies par un point d'application (**point d'appui**), une direction, un sens et une intensité.

Réaction : les forces extérieures qui agissent sur un solide en contact avec un autre, comprennent des forces résultant des actions de contact qui limitent son mouvement : ce sont les forces de liaison ou les réactions des appuis, tandis que toutes les autres forces qui agissent sur le solide sont appelées forces appliquées.

1. Nature des appuis

On distingue :

- **appui simple** : l'action de l'appui est portée par la normale commune aux surfaces en contact (exemple : **poutre** reposant sur un mur).
- **articulation cylindrique** : le contact entre poutre et axe d'appui se fait sur une portion du cylindre axe d'appui Autorise la rotation.
- **encastrement** : ne permet ni translation ni rotation (par exemple : serrage dans un **étau**).

2. Liaisons entre solides

Les **liaisons** transmettent les forces d'un solide à un autre.

▹ Les forces subies par un solide en contact avec la terre sont transmises à la terre. La masse de celle-ci étant très grande, le mouvement qui en résulte peut être négligé.

On distingue(Fig. 3.14) :

- **bielle** : ne transmet que les forces parallèles à la direction de la tige de liaison.
- **articulation** : transmet les forces dans les directions parallèles et perpendiculaires à la tige de liaison, autorise la rotation.
- **cardan** : transmet les forces et les moments de forces parallèles à l'axe.
- **liaison rigide** : transmet les forces et les couples.

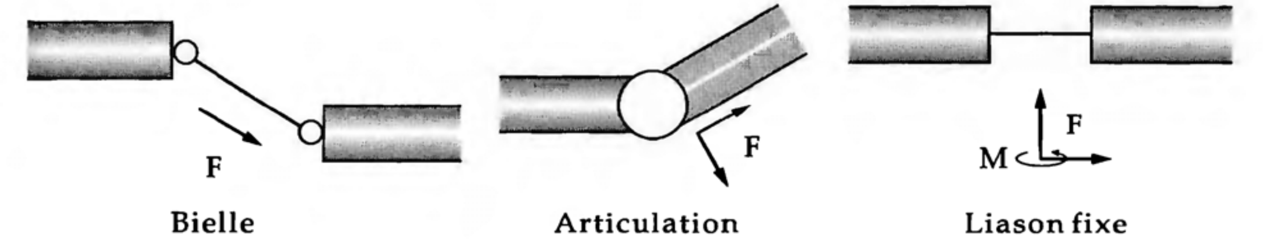


Fig. 3.14 : *Liaisons mécaniques*

3.2.5.2 Charpentes

Charpente : assemblage de pièces de bois, métal ou autre matériau destiné à soutenir une construction. Elle est généralement constituée de **poutres** et poutrelles qui répartissent les forces (efforts) et sont assemblées à leurs extrémités (**nœuds**, articulations). Les forces externes appliquées aux nœuds sont transmises suivant

la longueur des poutres.
Généralement, les forces et les poutres sont situées dans un même plan (**charpente plane** Fig. 3.15), des assemblages tri-dimensionnels constituent des charpentes en **nappes**.

Lorsque les appuis et les forces externes sont définis, il faut déterminer les forces s'exerçant sur les poutres. Le système est déterminé par :

Charpente plane			
	Symbole	Unité	Dénomination
$2N = P + 3$	N	1	nombre de noeuds
	P	1	nombre de poutres

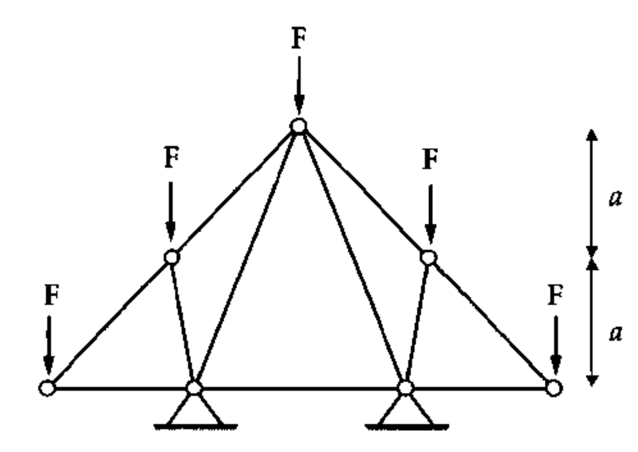


Fig. 3.15 : *Exemple de charpente plane complexe*

▹ Pour les forces s'exerçant sur les **poutres** → *Élasticité*.

3.2.6 Machines simples

- **Règle d'or de la mécanique** : ce que l'on gagne en force on le perd en déplacement (règle d'égalité entre travail moteur et travail résistant).

3.2.6.1 Levier

1. Genres de leviers

Levier : solide rigide pouvant pivoter en un point (pivot) autour d'un axe fixe. Si deux forces $\vec{F}_1$ (effort) et $\vec{F}_2$ (charge), agissent à des distances respectives d_1 et d_2 de part et d'autre du point de suspension O d'un levier, elles produisent un moment résultant $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$. Pour que le levier soit à l'équilibre il faut que $\vec{M} = \vec{0}$:

$$\vec{d_1} \cdot \vec{F_1} + \vec{d_2} \cdot \vec{F_2} = \vec{0}$$

Si les forces agissent de part et d'autre de O et sont perpendiculaires au levier :

Loi des leviers : Les distances respectives des forces au point d'appui sont dans le rapport inverse des forces.				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\vec{M}_1 = -\vec{M}_2$	F_1	N	force (effort) nécessaire à l'équilibre	
$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$	F_2	N	poids de la charge	
$\frac{d_2}{d_1} = \frac{F_1}{F_2}$	$\vec{M}$	Nm	moment des forces	
	d_1	m	bras de force, distance de la force à O	
	d_2	m	bras de charge, distance de la charge à O	

Bras de levier : distance du point d'application de la force au point d'appui du levier.

Avantage mécanique : rapport de la force F_2 (charge) à la force à appliquer F_1 (effort) pour établir l'équilibre :

$$Av = \frac{F_2}{F_1} = \frac{d_1}{d_2}$$

▹ Le bras de force et le bras de charge sont les distances horizontales (longueur des projections sur l'horizontale).

▹ La loi des leviers reste valable lorsqu'ils font entre eux un angle différent de 180°, seules les projections horizontales sont considérées (**levier oblique** Fig. 3.16).

On distingue :

- les leviers du **premier genre** pour lesquels le point d'appui O se situe entre les points d'application des deux forces de même sens (fléau de balance, tenailles, pinces ...).
- les leviers du **deuxième genre** pour lesquels les forces de sens opposés se trouvent de même côté de O (brouette, pincettes ....).

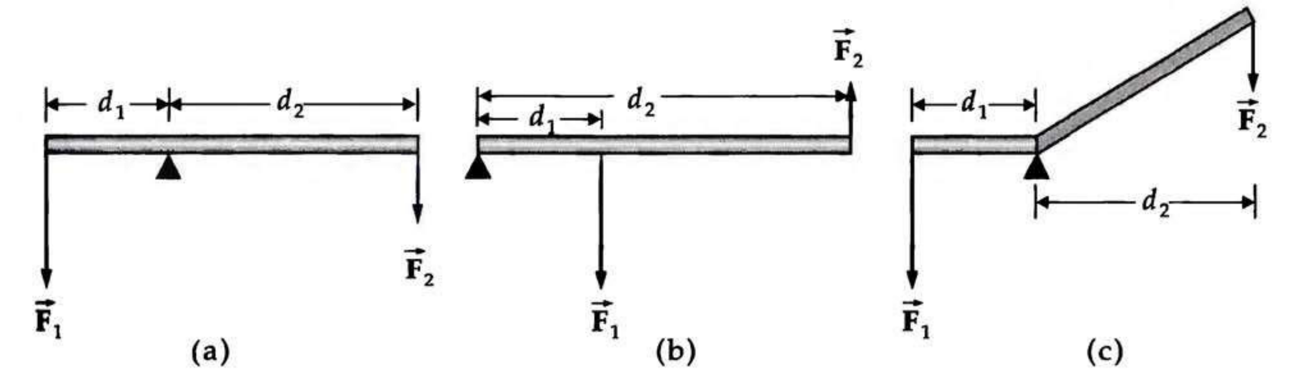


Fig. 3.16 : *(a) levier du premier genre, (b) levier du deuxième genre, (c) levier oblique*

■ **Balance** : utilisée pour la mesure de forces de poids. Elle peut être à fléaux de longueurs égales, l'équilibre des moments est réalisé en modifiant la grandeur du contrepoids. La balance romaine est une balance à fléaux inégaux, l'équilibre des moments est réalisé en modifiant la longueur du bras de levier, par déplacement du contrepoids le long du fléau.

Brouette : utilisée pour transporter des charges lourdes constituée d'un levier du deuxième genre dont le bras de force est plus long que le bras de charge (avantage mécanique > 1).

Catapulte : machine de guerre qui servait à lancer des projectiles, elle constitue un levier du premier genre dont le bras de charge est plus long que le bras de force. La force est alors appliquée à la charge sur un parcours long.
Casse noix : constitué de deux leviers du deuxième genre, les bras de force plus long que les bras de charge permettent d'obtenir un avantage mécanique important.

3.2.6.2 Coins et vis

1. Coin

Coin (Fig. 3.17) : transmet la force $\vec{\mathbf{F}}$ appliquée à l'arrière du coin suivant les normales à ses flancs ($\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{N}}$), leur intensité est :

$$F_N = \frac{F}{2\sin\alpha}$$

où α est le demi angle au sommet du coin.

2. Vis

Vis (Fig. 3.18) : hélice, enroulée autour d'un cylindre, qui effectue une translation dans la direction de son axe en tournant. Une vis est définie par son pas h et son diamètre ($2R$). Une force F_1, appliquée tangentiellement à la distance R de l'axe de la vis, parcourt le chemin $b = 2\pi R$ par tour, tandis que la vis se déplace de la longueur h le long de son axe. La conservation de l'énergie, en négligeant tout frottement, implique alors que la force F_2 exercée le long de l'axe de la vis est :

$$F_2 = F_1 \frac{2\pi R}{h}$$

Les **frottements**, entre vis et écrou ou vis et bois sont souvent importants. La force de pénétration F_2 suivant l'axe est alors à considérer comme la réaction du support. Pour une tension F_2 de la vis et un coefficient de frottement sec μ, la force de frottement F_f à la distance R de l'axe de la vis est alors :

$$F_f = F_2 \frac{\mu h}{2\pi R}$$

Fig. 3.17 : *Coin*

Fig. 3.18 : *Vis*

3.2.6.3 Poulies

1. Poulie

Poulie : roue tournant autour d'un axe destinée à transmettre un mouvement ou un effort et dont la jante est amenagée pour recevoir un lien flexible (fil, câble, cordage, courroie, chaîne ...). La poulie sert de

renvoi pour faciliter le levage d'un fardeau, ou pour rendre plus aisé un effort de traction. Des machines simples peuvent être constituées de une ou plusieurs poulies (moufles). Elles produisent des effets qui sont déterminés en appliquant les règles de la composition des forces et vérifient la conservation du travail. La force F_1 exerce une traction sur le lien et la charge de poids F_2 est suspendue à l'autre extrémité du lien ou à l'axe d'autres poulies.

2. Genres de poulies

Poulie fixe (Fig. 3.19) : les brins du lien supportent les forces F_1 et F_2 qui se font équilibre, leurs directions peuvent être modifiées, mais leurs intensités restent égales.

$$F_1 = F_2$$

Poulie libre (Fig. 3.20) : le lien est fixé en un point, la charge F_2 est supportée par l'axe de la poulie. Lorsque la force F_1 se déplace de d, la charge F_2 effectue le chemin $d/2$. De la conservation de l'énergie on déduit :

$$F_1 = \frac{F_2}{2}$$

Moufle (Fig. 3.21) : constituée de manière analogue à la poulie libre, mais comporte $2n$ poulies. À l'équilibre statique on a :

$$F_1 = \frac{F_2}{2n}$$

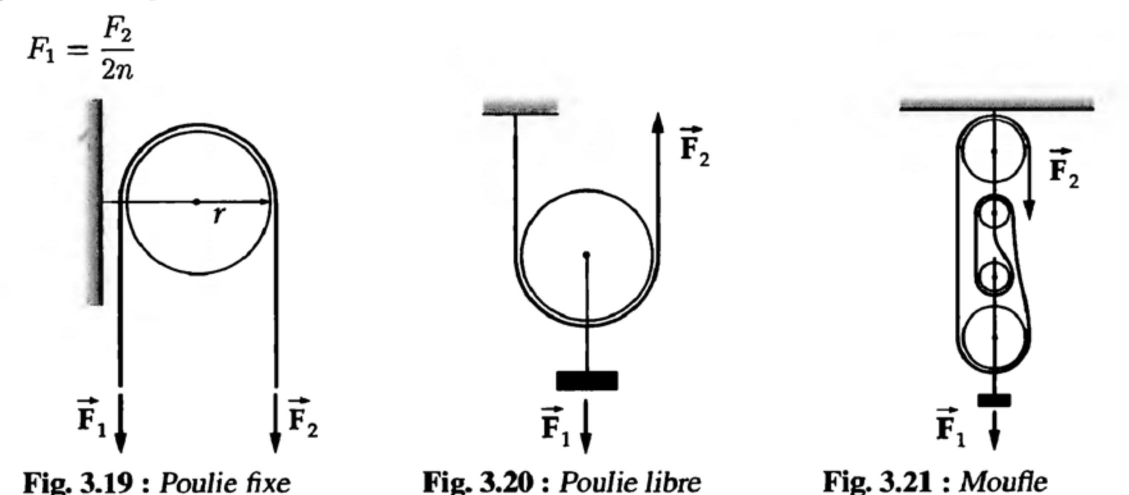


Fig. 3.19 : *Poulie fixe* **Fig. 3.20 :** *Poulie libre* **Fig. 3.21 :** *Moufle*

3. Transmissions

Transmission : ensemble d'organes servant à transmettre le mouvement et plus particulièrement les couples au moyen de poulies, courroies, engrenages et chaînes. L'ensemble bielle-manivelle permet de transformer un mouvement alternatif en mouvement de rotation. Si on applique un couple M_1 à l'arbre primaire de la transmission tournant à la vitesse angulaire ω_1, l'**arbre secondaire** sera soumis au couple M_2 et tournera à la vitesse ω_2. En négligeant les frottements, la conservation de l'énergie conduit à :

$$P_1 = P_2 \quad \Longleftrightarrow \quad M_1\omega_1 = M_2\omega_2$$

(P_1, P_2 : puissance primaire et secondaire, M_1, M_2 : couples, ω_1, ω_2 : vitesses angulaires). En pratique une partie de l'énergie est dissipée sous forme de chaleur par les frottements qui peuvent être réduits par unc lubrification adéquate.

4. Genres de transmission

a) Transmission à courroie : deux poulies de rayon r_1 et r_2, respectivement solidaires de l'axe primaire et secondaire, sont reliées par une courroie. Puisque la courroie exerce la même force F sur les deux

poulies, les couples M_1 et M_2 appliqués à chaque arbre sont :

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{Fr_1}{Fr_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Compte tenu de la vitesse linéaire v de la courroie, le rapport des vitesses angulaires des arbres est :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v/r_1}{v/r_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

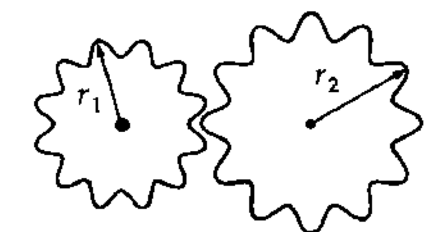


Fig. 3.22 : *Transmission à engrenages*

Fig. 3.23 : *Transmission par courroie*

● Les couples sont dans le rapport des rayons des poulies, les vitesses dans le rapport inverse des rayons.

■ Les moteurs électriques de faible puissance mais tournant à grande vitesse sont souvent utilisés avec des transmissions à poulies. Les transmissions à engrenages avec ou sans chaînes sont utilisées dans l'industrie des cycles, motocycles et automobiles (distribution, arbre à cames ...).

b) **Transmission par roues** : les forces sont transmises par contact direct des jantes des roues sans utilisation de courroie ou chaîne. L'entraînement peut se faire par frottement (roues caoutchoutées) ou par engrenage (roues dentées). Des assemblages compacts peuvent être réalisés (motoréducteurs), les matériaux utilisés pour leur construction doivent résister aux contraintes élevées.

■ Organes de transmission des véhicules automobiles, machines outils, horloges et changement de vitesse des cycles.

c) **Transmissions à rapport variable** : elles sont constituées d'un assemblage de plusieurs poulies ou roues dentées. Notamment, dans les **boîtes de vitesses** d'automobiles, des combinaisons de roues dentées de diamètres différents permettent d'obtenir divers rapports de démultiplication du couple moteur (généralement ces rapports forment entre eux une progression géométrique de raison $2/3$). La plage de vitesse de rotation d'un moteur à combustion interne dans laquelle le couple moteur est maximal étant limitée, la boîte de vitesse permet d'obtenir le meilleur rendement. Dans les boîtes de vitesses modernes, des synchrons amènent à même vitesse de rotation les deux engrenages qui doivent venir en prise lors du changement de vitesse. Des engrenages à taille hélicoïdale, toujours en prise, assurent un fonctionnement silencieux.

d) **Transmissions automatiques** : elles adaptent automatiquement les rapports de transmission en fonction de la vitesse de rotation du moteur, soit à l'aide de régulateurs centrifuges, soit par un **train planétaire**.

e) **Variateur continu** : les transmissions à variateur continu peuvent être constituées d'un ensemble hydraulique fonctionnant en **convertisseur de couple**. Ils sont constitués d'une roue à aubes entraînée par l'arbre moteur et d'une autre, réceptrice, reliée à l'arbre de transmission. Entre les deux se trouve une troisième roue à aubes pouvant touner librement. L'ensemble est placé dans un bain d'huile. Le flux visqueux produit par la première roue à aubes est devié vers la roue réceptrice par la roue centrale en fonction de la vitesse de rotation et y induit un couple variable.

Les **transmissions mécaniques à variation continue** utilisent des poulies coniques, par déplacement de la courroie d'entraînement. Une variation continue du rapport de démultiplication peut être obtenue en fonction du couple moteur. Cette technique (Variomatic) est utilisée dans certaines voitures légères.

f) Différentiel : sert à la répartition du couple moteur sur les roues motrices suivant les couples résistant présents aux deux roues (liaison non univoque). Le couple moteur est transmis par le pignon d'attaque à la grande couronne qui entraîne les deux planétaires, donc les arbres des roues. Le mouvement des satellites compense les éventuelles différences de vitesse de rotation des deux roues. Sur certains véhicules le mouvement des satellites peut être bloqué volontairement ou, sous des conditions extrêmes, automatiquement (différentiel autobloquant).

▷ Au sens plus large, les transmissions comprennent également les **transmissions à vis sans fin** qui permettent de transformer un mouvement de rotation en un mouvement de translation. Un couple peut ainsi agir sous la forme d'une force de pression (→ *presse hydraulique*).

g) Système bielle et manivelle : destiné à transformer un mouvement alternatif de va et vient (translation) en mouvement circulaire (rotation) (par exemple : entraînement d'un arbre de transmission par un piston) ou réciproquement. Une **bielle** de longueur l est articulée par une de ses extrémités à la manivelle de longueur r, l'autre extrémité peut glisser sur un rail entre les **points morts** haut et bas (Fig. 3.24). La relation entre l'angle de rotation α et le déplacement s sur le rail comptés à partir de la position du point mort haut est : $s = r\left(\frac{\lambda}{2}\sin^2\alpha - \cos\alpha\right)$, où $\lambda = \frac{r}{l}$

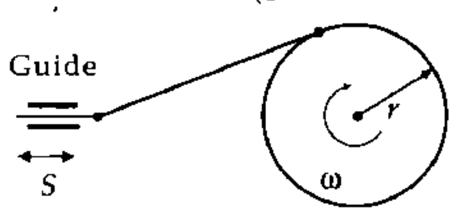


Fig. 3.24 : *Système bielle et manivelle*

3.3 Dynamique

La **dynamique du solide rigide** décrit le mouvement d'un solide sous l'action de forces. Son comportement dynamique se déduit de six équations différentielles qui rendent compte de la translation de son centre de gravité R sous l'action d'une force $\vec{\mathbf{F}}$ et de la variation temporelle de son moment cinétique $\vec{\mathbf{L}}$ sous l'action d'un couple de moment $\vec{\mathbf{M}}$:

$$m\ddot{\vec{\mathbf{R}}} = \vec{\mathbf{F}}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{L}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{M}}$$

3.4 Moment d'inertie, moment cinétique

Un mouvement de **translation** est défini par une force, une quantité de mouvement et une masse d'inertie, une **rotation** est définie par le moment d'une force, un moment cinétique et un moment d'inertie. Ces grandeurs sont liées par le principe fondamental de la dynamique.

■ Le mouvement circulaire d'un point matériel autour d'un axe fixe est la forme la plus simple d'un mouvement de rotation (Fig. 3.25).

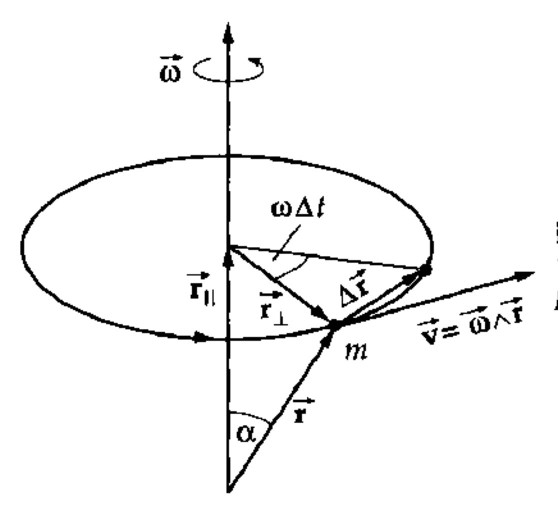


Fig. 3.25 : *Mouvement circulaire d'un point matériel m de vitesse orbitale* $\vec{v}$ *et de vitesse angulaire* ω*. L'axe de rotation porte le vecteur rotation* $\vec{\omega}$

Le mouvement de rotation d'un solide rigide peut être décrit par analogie avec le mouvement rectiligne. L'angle φ qui définit la position angulaire du solide à un instant donné (plus exactement le produit $r \times \varphi$) intervient à la place de la coordonnée x.

Dans la suite, nous considérons une **rotation autour d'un axe fixe**. La **théorie du gyroscope** est utilisée pour la description de mouvements de rotation autour d'axes mobiles quelconques.

3.4.1 Moment d'inertie

Le moment d'inertie d'un solide rend compte de l'accélération angulaire qui résulte de l'application d'un couple. Il dépend de la forme et de la distribution de la masse du solide ainsi que de son axe de rotation. Le moment d'inertie, lors d'une rotation, joue un rôle analogue à la masse d'inertie lors d'une translation. Il rend compte de la résistance d'un solide à modifier son état de mouvement (ici sa vitesse angulaire).

1. Moment d'inertie par rapport à un axe

Le **moment d'inertie** I_Δ par rapport à un axe Δ représente le coefficient de proportionalité entre le moment moteur M_Δ le long de cet axe et l'accélération angulaire α qui en résulte le long du même axe :

Couple = moment d'inertie × accélération angulaire			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$M_\Delta = I_\Delta \cdot \alpha$	M_Δ	Nm	moment (couple)
	I_Δ	kg m²	moment d'inertie
	α	rad/s²	accélération angulaire

Kilogramme × **mètre**², unité SI moment d'inertie : 1 kilogramme × (mètre)² est le moment d'inertie d'un solide qui, sous l'action d'un couple de 1 Nm acquière une accélération angulaire de 1 rad/s².

▷ Cette relation est analogue à l'introduction d'une force comme le produit "Masse × accélération".

▷ Toutes les grandeurs se réfèrent à l'axe de rotation Δ. En particulier, à différents axes de rotation d'un même solide correspondent des moments d'inertie différents.

Pour calculer le moment d'inertie d'un solide, on le décompose en points matériels se déplaçant à une distance fixe de l'axe de rotation et caractérisés par leur masse élémentaire dm.

2. Moment d'inertie d'un point matériel

Le moment d'inertie d'un point matériel, en mouvement circulaire de rayon r autour de l'axe de rotation, s'obtient à partir du principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \wedge m\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} \qquad |\vec{\mathbf{M}}| = |\vec{\mathbf{r}}|\,|\vec{\mathbf{F}}|\,\sin\varphi$$

(où φ est l'angle formé par le rayon vecteur et la force). Si le point matériel se déplace autour de l'axe Δ sur un cercle de rayon r et que la force agit perpendiculairement au rayon vecteur $\vec{\mathbf{r}}$, alors $\sin\phi = 1$ et

$$|\vec{\mathbf{M}}| = r \cdot mr\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = mr^2\alpha$$

où $|\vec{\mathbf{v}}| = r\omega$ et α est l'accélération angulaire. On obtient par conséquent :

Moment d'inertie d'un point matériel				**ML²**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$I_\Delta = m \cdot r^2$	I_Δ	kg m²	moment d'inertie par rapport à l'axe Δ	
	m	kg	masse du point matériel	
	r	m	distance à l'axe de rotation Δ	

- Le moment d'inertie d'un point matériel est le produit de sa masse m par le carré de sa distance r à l'axe de rotation.

3. Moment d'inertie d'un solide rigide

Le moment d'inertie d'un solide rigide s'obtient en sommant les moments d'inertie des masses élémentaires Δm constituant le solide :

Moment d'inertie d'un solide rigide				**ML²**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$I_\Delta = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i\, r_i^2 = \iiint r^2\,\mathrm{d}m$	I_Δ	kg m²	moment d'inertie par rapport à l'axe Δ	
	Δm_i	kg	i-ème élément de masse	
	r_i	m	distance à l'axe Δ du i-ème élément	

▷ Le moment d'inertie est une grandeur **tensorielle** (→ *Tenseur d'inertie*).

4. Moment d'inertie de section droite

Moment d'inertie de section droite : désigne l'expression :

$$I = \sum_i \Delta A_i\, r_i^2 = \iint r^2\,\mathrm{d}A$$

où la sommation porte sur l'élément de surface ΔA_i de la section droite du solide.

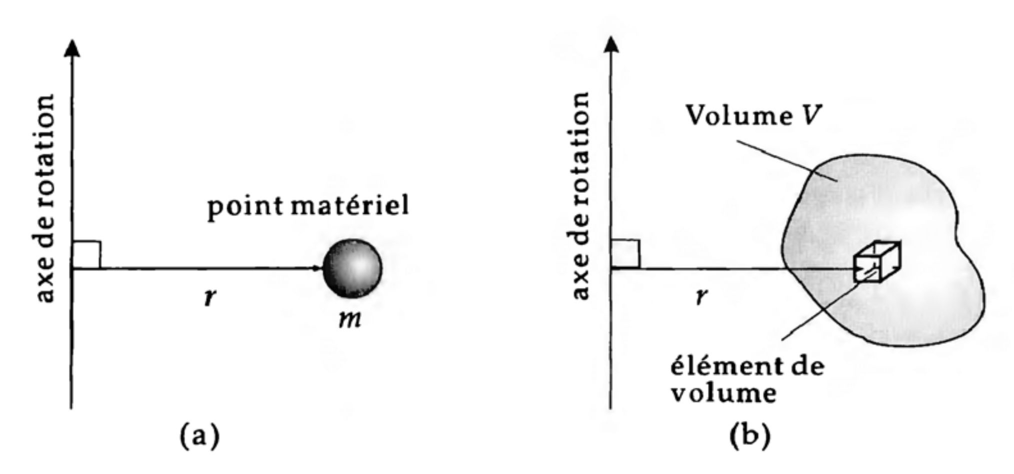


Fig. 3.26 : *Moment d'inertie (a) d'un point matériel, (b) d'un solide*

- Le moment d'inertie d'un solide dépend de l'axe de rotation choisi.

3.4.1.1 Règle de Steiner

La règle de Steiner établit une relation entre le moment d'inertie par rapport à un axe Δ passant par le centre de gravité d'un solide et tout axe Δ' parallèle à Δ (Fig. 3.27) :

- **Règle de Steiner** : le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque dont la distance au centre de masse est r_G s'écrit :

Règle de Steiner			**ML²**
	Symbole	Unité	Dénomination
$I'_\Delta = mr_G^2 + I_\Delta$	I'_Δ	kg m²	moment d'inertie
	m	kg	masse du solide
	r_G	m	distance de l'axe au centre de gravité
	I_Δ	kg m²	moment d'inertie par rapport à un axe parallèle à Δ passant par le centre de gravité

▷ La rotation d'un solide, autour d'un axe quelconque Δ', peut être interprétée comme la rotation autour d'un axe Δ parallèle à Δ', passant par son centre de gravité (moment d'inertie I_Δ) et une rotation du centre de masse autour de l'axe Δ' (moment d'inertie mr_G^2), la masse totale du solide étant considérée comme concentrée au centre de gravité. ($\rightarrow$ *Théorème de Koenig*)

Pour le **moment d'inertie de section droite,** on a de manière analogue :

$$I = I_G + Ad^2$$

(I_G est le moment de section droite par rapport à l'axe G passant par le centre de gravité de la surface A, I est le moment de section droite par rapport à un axe parallèle à G et d la distance séparant ces deux axes).

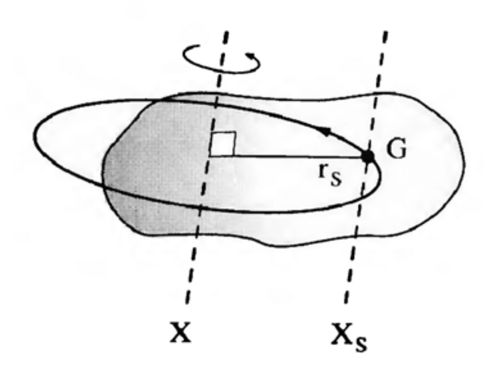


Fig. 3.27 : *Règle de Steiner :*
$mr_i^2 = mr_G^2 + m\Delta r_i^2$,
$I'_\Delta = mr_G^2 + I_G$

3.4.1.2 Moments d'inertie de quelques solides

Solide	Axe	Moment d'inertie
Tige fine (longueur l)	S S, l	$\frac{1}{12}Ml^2$ $\frac{1}{3}Ml^2$
Plaque (côtés a, b)	b, S, c, a b, S, c, a	$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$ $\frac{1}{12}Ma^2$
Disque (rayon r)	S S	$\frac{1}{2}Mr^2$ $\frac{1}{4}Mr^2$
Circonférence (rayon r)	S S	Mr^2 $\frac{1}{2}Mr^2$

Solide	Axe	Moment d'inertie
Parallélépipède (côtés a, b, c)		$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$ $\frac{1}{12}M(4a^2+b^2)$
Cylindre (rayon r, hauteur h)		$\frac{1}{2}Mr^2$ $\frac{1}{12}M(3r^2+h^2)$
Cône (rayon r, hauteur h)		$\frac{3}{10}Mr^2$ $\frac{3}{80}M(4r^2+h^2)$
Sphère pleine (rayon r)		$\frac{2}{5}Mr^2$ $\frac{7}{5}Mr^2$
Sphère creuse (rayon intérieur r_i, extérieur r_e)		$\frac{2}{5}M\frac{(r_e^5-r_i^5)}{(r_e^3-r_i^3)}$ $M\frac{(7r_e^5+5r_e^2r_i^3-2r_i^5)}{5(r_e^3-r_i^3)}$
Ellipsoïde (demi-axes a, b, c)		$\frac{1}{5}M(a^2+b^2)$

3.4.2 Couple

Un **couple** modifie l'état de rotation d'un corps, une force modifie son état de translation. Une force $\vec{F}_O$ appliquée à une distance $\vec{r}$ d'un point fixe O exerce un **couple**.
Couple $\vec{M}$: produit vectoriel de la distance du point d'application de la force au centre de rotation (**bras de levier**) par la force. Les couples n'exercent aucune force résultante sur un corps. Par contre, ils exercent un moment résultant non nul.

Couple = rayon vecteur ∧ force				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ $\lvert\vec{M}\rvert = \lvert\vec{r}\rvert\,\lvert\vec{F}\rvert \sin\alpha$	$\vec{M}$	Nm	couple	
	$\vec{r}$	m	distance au centre de rotation	
	$\vec{F}$	N	force appliquée	
	α	rad	angle entre force et rayon vecteur	

Newton mètre : unité SI de couple : 1 Newton mètre est le couple exercé par une force de 1 N appliquée à une distance de 1 m.

$$[\vec{M}] = \text{Newton mètre} = \text{Nm} = \text{N} \cdot \text{m}$$

- La valeur du couple est le produit du bras de levier et de la composante de la force perpendiculaire au bras de levier. Le vecteur couple est perpendiculaire au plan formé par le bras de levier et la force.

▷ Seule la composante de la force perpendiculaire au bras de levier $\vec{r}$ participe au couple $\vec{M}$.

Rotation autour d'un axe fixe : le couple est parallèle à l'axe de rotation. La force agissante est alors perpendiculaire à l'axe et au bras de levier. Si ceci n'est pas le cas, les réactions sur l'axe équilibrent le système.

- Lors de la rotation autour d'un axe fixe Δ, le couple M_Δ est le produit de la distance r_Δ à l'axe par la force agissante F.

$$M_\Delta = r_\Delta \cdot F$$

3.4.3 Moment cinétique

De façon analogue à la quantité de mouvement (moment linéaire), on définit un **moment cinétique** (moment angulaire) qui rend compte d'un mouvement de rotation. C'est également une grandeur vectorielle (pseudo vecteur) qui pointe dans la direction de l'axe de rotation.

1. Définition du moment cinétique

Moment cinétique ou **moment angulaire** $\vec{L}$: produit vectoriel entre le moment cinétique I_Δ par rapport à l'axe de rotation Δ et le vecteur rotation $\vec{\omega}$.

Moment cinétique = moment d'inertie × vecteur rotation				ML^2T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\vec{L} = I_\Delta \vec{\omega}$	$\vec{L}$	kg m²/s	moment cinétique	
	I_Δ	kg m²	moment d'inertie	
	$\vec{\omega}$	rad/s	vecteur rotation	

Kilogramme×(mètres)^2 par seconde (kg.m^2/s) : unité-SI de moment cinétique.
1 kg.m^2/s est le moment cinétique d'un solide de moment d'inertie 1 kg.m^2, qui est en rotation avec une vitesse angulaire de 1 rad/s.

▷ Cette définition est l'analogue de celle du moment linéaire : $\vec{P}=m\vec{v}$

▷ Cette définition n'est valable que si la rotation a lieu autour d'un axe principal (→ *Axe principal*) (Axe de symétrie) → *Tenseur d'inertie*. Dans les autre cas, le moment cinétique et l'axe de rotation ne sont pas confondus et des forces extérieures sont nécessaires pour maintenir la direction de l'axe de rotation. → *Couple*

● Si la rotation a lieu suivant un axe principal, le moment cinétique pointe dans la direction de l'axe de rotation.

▷ En toute rigueur, le moment d'inertie est un tenseur. Sous cette forme, la relation n'est valable que si l'axe de rotation est fixe. Si l'orientation de l'axe de rotation change au cours du mouvement (→ *toupie, gyroscope*), alors I_Δ change également et le moment cinétique $\vec{L}$ n'est plus parallèle au vecteur rotation $\vec{\omega}$.

2. Théorème du moment cinétique

De façon analogue à la deuxième loi de Newton, la variation de moment cinétique est égale au moment des forces externes appliquées :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \wedge \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge m\vec{v} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Le premier terme de droite est nul car $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ et le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul. Le terme $d\vec{p}/dt$ est donné par la force appliquée.

Variation du moment cinétique = moment des forces				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}$	$\vec{L}$	kg m²/s	moment cinétique	
	$\vec{r}$	m	rayon vecteur	
	$\vec{F}$	N	forces externes	
	$\vec{M}$	Nm	moment des forces externes	

Le théorème du moment cinétique détermine tous les mouvements de rotation ; c'est le principe fondamental pour la dynamique des rotations.

▷ Si le moment des forces externes est parallèle au moment cinétique, seule la grandeur du moment cinétique varie et avec elle la vitesse angulaire. S'il n'est pas parallèle, l'orientation du vecteur moment cinétique et de l'axe de rotation varient aussi.

3. Conservation du moment cinétique

Le **moment cinétique total** est une constante du mouvement si le moment résultant des forces extérieures est nul :

Conservation du moment cinétique				**ML^2T^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$si \sum_i \vec{\mathbf{M}}_i = \vec{\mathbf{M}} = 0,$	$\vec{\mathbf{M}}$	Nm	moment résultant des forces ext.	
$\vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i = \text{const.}$	$\vec{\mathbf{L}}$	kg m²/s	moment cinétique total	
	$\vec{\mathbf{L}}_i$	kg m²/s	moment cinétique du i-ème élément	

■ Un haltère, constitué de deux masses de 1 kg considérées comme ponctuelles, reliées par une tige rigide, de masse négligeable et de longueur 1 m, tourne autour de son centre de gravité avec une vitesse de 2 tours/s. Son moment d'inertie est :

$$I = I_1 + I_2 = 2 \cdot mr^2 = 2 \cdot 1\,\text{kg} \cdot (50\,\text{cm})^2 = 0,5\,\text{kgm}^2$$

Le moment cinétique du système est alors :

$$L = I\omega = 0,5\,\text{kgm}^2\,4\pi\,\text{rad/s} = 6,28\,\text{kgm}^2/\text{s}$$

Si, en faisant glisser les masses sur leur tige, leur distance se réduit à 50 cm, le moment d'inertie du système par rapport à son centre de gravité devient :

$$I = I_1 + I_2 = 2 \cdot 1\,\text{kg} \cdot (25\,\text{cm})^2 = 0,125\,\text{kgm}^2$$

Pour que le moment cinétique soit conservé, la vitesse angulaire doit alors être :

$$\omega = \frac{L}{I} = \frac{6,28\,\text{kgm}^2/\text{s}}{0,125\,\text{kgm}^2} = 50,27\,\text{rad/s}$$

soit 8 tours/s.

C'est la **force de Coriolis** qui provoque ce changement de vitesse angulaire.



Fig. 3.28 : *Conservation du moment cinétique : l'expérimentateur et la plateforme pouvant tourner autour d'un axe vertical constituent un système isolé. Dans le cas de la figure de gauche, le moment cinétique de la roue n'a pas de composante sur l'axe de rotation : si le système est au repos, il reste au repos. Si le moment cinétique de la roue est amené à être parallèle à l'axe de rotation, le système se met à tourner en sens inverse de la roue de façon à conserver le moment cinétique total.*

Le **moment cinétique d'un solide rigide $\vec{\mathbf{L}}_{\text{rés}}$** s'obtient par sommation des moments cinétiques individuels $\vec{\mathbf{L}}_i$ des points matériels Δm_i qui le constituent :

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{rés}} = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i = \sum_i (\vec{\mathbf{r}}_i \wedge \Delta\vec{\mathbf{p}}_i)$$

($\vec{\mathbf{r}}_i$: rayon vecteur, $\Delta\vec{\mathbf{p}}_i$: quantité de mouvement du i-ème point matériel).

Les moments des forces s'additionnent de façon similaire, le théorème du moment cinétique s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{L}}_{\text{rés}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{M}}_{\text{rés}} = \sum_i \vec{\mathbf{M}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \wedge \vec{\mathbf{F}}_i$$

($\vec{\mathbf{F}}_i$: résultante des forces externes, $\vec{\mathbf{M}}_i$: moment résultant appliqué au i-ème point matériel).

3.4.3.1 Équilibre dans les rotations

De façon analogue à la condition d'équilibre d'une translation, $\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = 0$, il existe une condition d'équilibre pour les rotations :

- Un corps est en rotation uniforme si le moment résultant des forces externes est nul (en particulier : s'il est au repos il reste au repos).

Équilibre d'un solide en rotation	$\mathrm{ML^2T^{-2}}$
$\sum_i \vec{\mathbf{M}}_i = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \wedge \vec{\mathbf{F}}_i = 0$	

▷ Dans un système quelconque, nous pouvons écrire le rayon vecteur du point d'application de chaque force externe $\vec{\mathbf{r}}_i$ comme la somme du rayon vecteur du centre de gravité $\vec{\mathbf{R}}$ et du vecteur position $\Delta\vec{\mathbf{r}}_i$ du point d'application de la force par rapport au centre de gravité.
$\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{R}} + \Delta\vec{\mathbf{r}}_i$
Soit la condition d'équilibre :
$\sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \wedge \vec{\mathbf{F}}_i = \vec{\mathbf{R}} \wedge \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i + \sum_i \Delta\vec{\mathbf{r}}_i \wedge \vec{\mathbf{F}}_i$
Si la résultante des forces externes est nulle ($\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = 0$), la condition d'équilibre devient :
$\sum_i \Delta\vec{\mathbf{r}}_i \wedge \vec{\mathbf{F}}_i$
Il est par conséquent suffisant que le moment résultant par rapport au centre de gravité soit nul.

3.5 Travail, énergie et puissance

Une force $\vec{\mathbf{F}}$, appliquée à un point matériel en rotation avec la vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe Δ distant de r, effectue le travail élémentaire :

$$\Delta W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{s}} = F_t\, r\, \Delta\phi$$

où $\Delta s = r\Delta\phi$ est le parcours élémentaire de la particule et F_t la composante de la force le long de ce parcours (composante tangentielle). Le moment de cette force (couple) par rapport à l'axe étant $M_\Delta = F_t\, r$, on a :

Travail = moment × angle décrit			$\mathrm{ML^2T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Delta W = M_\Delta \cdot \Delta\phi$	ΔW	J	travail
	M_Δ	Nm	moment par rapport à l'axe
	$\Delta\phi$	rad	angle décrit lors du déplacement

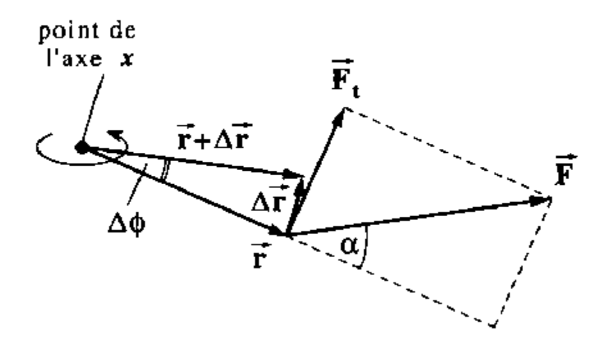


Fig. 3.29 : *Travail lors d'une rotation*

La puissance moyenne développée par le moment de la force pendant l'intervalle de temps Δt est :

$$\bar{P} = M_\Delta \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = M_\Delta \bar{\omega}$$

où $\bar{\omega}$ est la vitesse angulaire moyenne.

▶ Seule la composante du couple parallèle à l'axe de rotation participe au travail ; les autres composantes produisent une rotation de l'axe et n'effectuent aucun travail.

M_Δ représente la composante du couple dans la direction de l'axe de rotation Δ donc aussi dans la direction du vecteur rotation $\vec{\omega}$ de ce fait on a :

Puissance = couple × vitesse angulaire			**ML^2T^{-3}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$P = \vec{\mathbf{M}} \cdot \vec{\omega}$	P	W	puissance instantanée
	$\vec{\mathbf{M}}$	Nm	couple
	$\vec{\omega}$	rad/s	vitesse angulaire

3.5.1 Énergie cinétique de rotation

1. Énergie cinétique d'un solide rigide

Si l'origine du système de coordonnées lié au solide coïncide avec son centre de gravité G, l'énergie cinétique du solide est la somme des énergies cinétiques de translation du centre de gravité de vitesse $\vec{v}$ et de rotation de vitesse angulaire $\vec{\omega}$ autour d'un axe passant par G :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} m\, v^2 + \sum_{i,k=1}^{3} J_{ik}\, \omega_i\, \omega_k \qquad i, k = x, y, z$$

m : masse totale, $J_{i,k}$: composantes du tenseur d'inertie $\hat{J}$, ω_i : composantes du vecteur rotation $\vec{\omega}$.

En notation matricielle :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^{\mathrm{T}} \hat{J} \vec{\omega}$$

$\vec{\omega}^{\mathrm{T}}$ est le vecteur ligne transposé du vecteur colonne $\vec{\omega}$.

Dans le système des axes principaux on a :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2}(J_x^2 \omega_x^2 + J_y^2 \omega_y^2 + J_z^2 \omega_z^2)$$

2. Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Énergie de rotation				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$E_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$	E_{rot}	J	énergie de rotation	
	I	kg m^2	moment d'inertie	
	ω	rad/s	vitesse angulaire	

De façon analogue à l'énergie cinétique de translation, l'énergie cinétique de rotation est proportionnelle au carré de la vitesse (ici : à la vitesse angulaire).

Énergie cinétique d'un point matériel, animé d'un mouvement circulaire de rayon r :

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2}(m \cdot r^2)\omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

où I est le → *moment d'inertie du point matériel.* L'énergie cinétique de rotation d'un solide s'obtient par sommation des énergies de toutes les masses élémentaires Δm qui constituent le solide :

$$E_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} I_i \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

où $I_i = \Delta m r_i^2$ est le moment d'inertie de la i-ème masse élémentaire et $I = \sum_i I_i$ le moment d'inertie de tout le solide.

▷ D'après le théorème de Steiner, le moment d'inertie du solide par rapport à un axe quelconque distant de r de son centre de gravité est :
$I = m \cdot r_s^2 + I_G$
où I_G est le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de gravité du solide ; l'énergie cinétique de rotation est alors :

$$E_{\text{rot.}} = \frac{1}{2} I_G \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m r_s^2 \cdot \omega^2$$

Le premier terme $\frac{1}{2} \cdot I_G \cdot \omega^2$ représente l'énergie cinétique de la rotation autour de l'axe passant par le centre de gravité ; le deuxième terme $\frac{1}{2} \cdot m \cdot (r_s \cdot \omega)^2 = \frac{1}{2} m v^2$ correspond à l'énergie cinétique du mouvement du centre de gravité autour de l'axe du système (→ *Théorème de Koenig*).

La régle de Steiner permet la décomposition du mouvement d'un solide autour d'un axe quelconque en un mouvement du centre de gravité autour de cet axe et une rotation autour d'un axe passant par le centre de gravité. Pour un solide rigide, ces deux mouvements se font avec la même vitesse angulaire ω.

Théorème de Koenig : le mouvement général d'un solide est une **translation** du centre de gravité accompagnée d'une **rotation** autour d'un axe passant par son centre de gravité. L'énergie cinétique peut de ce fait être décomposée en énergie cinétique du centre de gravité $\frac{1}{2} m v_G^2$ et en énergie cinétique de rotation autour du centre de gravité $\frac{1}{2} I_G \cdot \omega^2$:

$$E = E_{\text{cm}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

En l'absence de tout frottement, l'énergie mécanique est conservée : la somme de l'énergie cinétique de translation, de l'énergie cinétique de rotation et de l'énergie potentielle est constante.

- **Conservation de l'énergie** :
  $E_{\rm cm} + E_{\rm rot} + E_{\rm pot} = \text{const.}$

3.5.2 Énergie potentielle de Torsion

Un **ressort spiral** peut emmagasiner de l'énergie potentielle. Le moment du couple de rappel M qui tend à ramener le ressort à sa position de repos est proportionnel à son élongation angulaire φ.

Loi de Hooke pour un ressort spiral			$\mathrm{ML^2T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$M = -C\varphi$	M	Nm	moment
	C	Nm/rad	couple de rappel
	φ	rad	élongation angulaire

Le couple de rappel C a les dimensions d'un moment par unité d'angle, il a un rôle analogue à la constante k d'un ressort à boudin.

L'**énergie potentielle d'un ressort spiral** est ainsi :

$$V_{\rm pot} = \frac{1}{2} D_m \cdot \varphi^2$$

Elle est proportionnelle au carré de l'élongation angulaire φ, de façon analogue à l'énergie potentielle d'un ressort à boudin proportionnelle au carré de l'élongation linéaire.

3.6 Théorie du gyroscope

Une **toupie** est un solide tournant autour d'un axe qui n'est pas fixe dans l'espace, ou dont un point seuelement est fixe. Nous ne considérerons que des toupies symétriques, c'est à dire des toupies dont le centre de gravité se trouve sur l'axe de rotation. Un **gyroscope** est une toupie symétrique tournant à grande vitesse, dont l'axe de rotation et par conséquent la direction du vecteur rotation $\vec{\omega}$ peuvent s'orienter librement (Fig. 3.30).

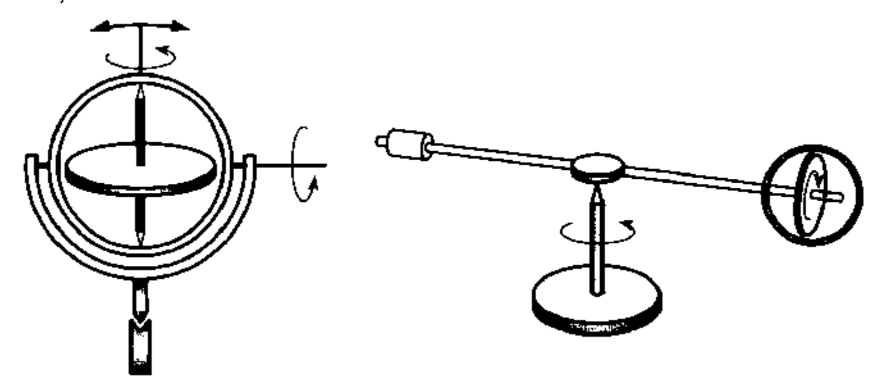


Fig. 3.30 : *L'axe du gyroscope peut s'orienter librement grâce à une* **suspension à la Cardan**

Le mouvement d'une toupie est régi par le théorème du moment cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{L}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{M}} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}$$

Si le moment d'inertie I de la toupie et sa vitesse angulaire $\vec{\omega}$ sont assez grands, le vecteur moment cinétique $I\vec{\omega}$ ne peut subir une modification sensible qu'en appliquant un couple extérieur important : sans un effort appréciable, il ne peut y avoir changement dans la direction de l'axe ou de la valeur de la vitesse angulaire. C'est l'effet gyroscopique mis à profit dans certains organes de navigation.

3.6.1 Tenseur d'inertie

1. Définition du tenseur d'inertie

Le **tenseur d'inertie** $\hat{J}$: décrit la relation entre le vecteur rotation $\vec{\omega}$ d'un solide et son moment cinétique $\vec{\mathbf{L}}$. Un **tenseur** multiplié par un vecteur est encore un vecteur :

Tenseur d'inertie			$\mathbf{ML^2T^{-1}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{\mathbf{L}} = \hat{J} \cdot \vec{\omega}$	$\vec{\mathbf{L}}$	kg m²/s	moment cinétique
	$\hat{J}$	kg m²	tenseur d'inertie
	$\vec{\omega}$	rad/s	vitesse angulaire

Le tenseur d'inertie a les mêmes dimensions que le moment d'inertie, il s'en distingue par le fait qu'il n'est pas relatif à un axe donné.

2. Représentation matricielle du tenseur d'inertie

Le tenseur d'inertie est représenté par une matrice symétrique :

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

$$J_{xy} = J_{yx} \qquad J_{xz} = J_{zx} \qquad J_{yz} = J_{zy}$$

Les relations entre composantes du moment cinétique et vitesse angulaire sont :

$$L_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z$$
$$L_y = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z$$
$$L_z = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z$$

qu'on peut écrire :

$$L_i = J_{ij}\omega_j \qquad i, j = 1, 2, 3$$

où $i, j = 1, 2, 3$ désignent respectivement les axes x, y, z, la sommation devant être faite sur l'indice apparaissant deux fois j (convention d'Einstein).

3. Calcul du tenseur d'inertie

Le calcul du tenseur d'inertie d'un solide de dimensions finies s'effectue en partant de celui d'un point matériel Δm de forme :

$$\hat{J} = \Delta m \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & xy & xz \\ yx & x^2 + z^2 & yz \\ zx & zy & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

où x, y et z sont les coordonnées cartésiennes du point matériel. Les éléments diagonaux représentent les distances au carré du point à chaque axe (**moment d'inertie axial**) par exemple :

$$J_{xx} = \Delta m \cdot r_x^2 = \Delta m(y^2 + z^2)$$

(r_x : distance à l'axe x). Les éléments non diagonaux s'appellent **moments centrifuges**. Par sommation sur tous le volume du solide :

$$\hat{J} = \sum_i \hat{J}_i = \sum_i \Delta m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & x_i y_i & x_i z_i \\ y_i x_i & x_i^2 + z_i^2 & y_i z_i \\ z_i x_i & z_i y_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}$$

où x_i, y_i et z_i sont les coordonnées du i-ème élément.

Soit :

$$J_{kl} = \sum_i \Delta m_i \left(r_i^2 \, \delta_{kl} - x_{ik} x_{il} \right)$$

(Symbole de Kronecker : $\delta_{kl} = 1$ si $k = l$, $\delta_{kl} = 0$ si $k \neq l$).

▷ La sommation sur les éléments Δm_i peut être représentée par une intégrale :

$$J_{kl} = \iiint \left(r^2 \, \delta_{kl} - r_k r_l \right) \mathrm{d}m$$

4. Exemple : tenseur d'inertie d'un cube

Soit un cube de côtés a, de masse volumique homogène ρ_0, soit de masse $m = \rho_0 V$.
Dans un système de coordonnées cartésiennes nous avons :
$\mathrm{d}m = \rho_0 \, \mathrm{d}V = \rho_0 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$. En choisissant le sommet gauche de la base comme origine du système de coordonnées, l'intégration pourra se faire avec les limites $0, a$ dans toutes les directions :

$$\begin{aligned} J_{11} &= \rho_0 \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \frac{2}{3} m a^2 \, , \\ J_{12} &= -\rho_0 \int_0^a \int_0^a \int_0^a xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = -\frac{1}{4} m a^2 \, . \end{aligned}$$

d'où :

$$\hat{J} = m a^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix}$$

5. Système des axes principaux d'inertie

La structure du tenseur d'inertie dépend du système d'axes choisi. Il est toujours possible de trouver un système d'**axes principaux d'inertie** dans lequel le tenseur d'inertie est diagonal :

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

J_x, J_y et J_z sont les moments d'inertie par rapport aux axes principaux d'inertie, on les appelle les **moments d'inertie principaux**.

▷ Les axes de symétrie d'un solide coïncident avec ses axes principaux d'inertie.

6. Genres de toupies

Toupie asymétrique : $J_x \neq J_y \neq J_z$

Toupie symétrique : $J_x = J_y \neq J_z$ ou
$J_y = J_z \neq J_x$ ou
$J_x = J_z \neq J_y$

Toupie sphérique : $J_x = J_y = J_z$

■ Pour tout solide de révolution, homogène, l'axe de révolution est confondu avec l'un des axes principaux d'inertie. Les axes de symétrie d'un corps coïncident avec ses axes principaux.
Tout diamètre d'une sphère est un axe principal d'inertie.
Dans un cube, les axes principaux d'inertie sont perpendiculaires aux faces.
L'axe d'un cylindre coïncide avec l'un des axes principaux d'inertie (plus petit moment d'inertie), les deux autres axes principaux lui sont perpendiculaires, orthogonaux entre eux, passent par le centre du cylindre et correspondent au plus grand moment d'inertie.

Dans le système des axes principaux, on a :

$$L_x = J_x\omega_x$$
$$L_y = J_y\omega_y$$
$$L_z = J_z\omega_z$$

Ainsi moment cinétique et vecteur rotation sont parallèles entre eux, s'ils sont aussi parallèles à un axe principal. Dans le cas contraire, ils pointent dans des directions différentes, les déviations dépendant des différences entre les moments principaux J_x, J_y et J_z.

● Des objets mis en rotation s'orientent de façon à tourner autour de l'axe de maximum d'inertie.

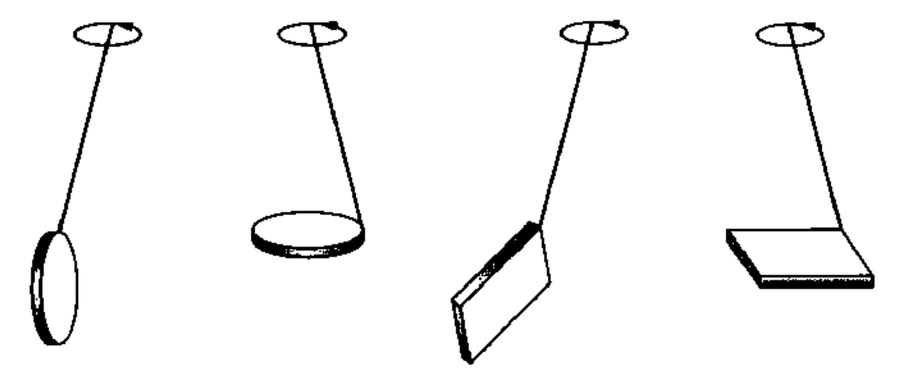


Fig. 3.31 : *Le disque et le rectangle, mis en rotation, s'orientent suivant l'axe de maximum d'inertie*

3.6.2 Précession et nutation

3.6.2.1 Précession

1. Précession

Précession : mouvement d'une toupie sous l'action du moment des forces extérieures ayant une composante perpendiculaire à son moment cinétique (une composante parallèle ne modifierait que la grandeur de $\vec{L}$).

Soit une toupie dont le centre de gravité G ne coïncide pas avec la pointe O autour de laquelle elle tourne. Le moment $\vec{\mathbf{M}}$ dû à son poids $\vec{\mathbf{F}} = m \cdot \vec{\mathbf{g}}$ appliqué en G est différent de 0 :

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \wedge \vec{\mathbf{F}}$$

D'après le théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{M}}$

La toupie subit une variation de son moment cinétique $\Delta\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{M}}\Delta t$ à chaque instant perpendiculaire au plan défini par $\overrightarrow{OG}$ et $\vec{\mathbf{F}}$. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{OG}$ (parallèle à $\vec{\mathbf{L}}$) effectue une rotation (précesse) autour de la verticale passant par O (Fig. 3.32).

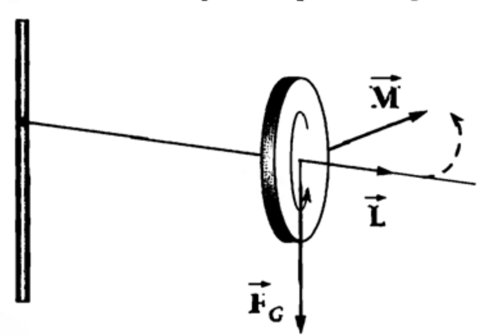


Fig. 3.32 : *Précession d'un gyroscope d'axe horizontal : sous l'action de la pesanteur $\vec{\mathbf{F}}_G$, l'axe du gyroscope tourne dans le plan horizontal*

2. Vitesse de précession

La vitesse angulaire ω_p de cette précession peut être calculée en exprimant la variation $\Delta\varphi$ de l'angle entre le moment cinétique $\vec{\mathbf{L}}$ et sa variation $\Delta\vec{\mathbf{L}}$:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta L}{L} = \frac{M}{L}\Delta t$$

soit la vitesse angulaire ω_p de rotation du moment cinétique autour de la verticale (n'exprime pas la vitesse angulaire de la toupie) :

Vitesse de précession				T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\omega_p = \frac{M}{L} = \frac{M}{I\omega}$	ω_p	rad/s	vitesse de précession	
	M	Nm	moment des forces ext.	
	L	kg m²/s	moment cinétique	
	I	kg m²	moment d'inertie	
	ω	rad/s	vitesse angul. de la toupie	

3. Fréquence de précession

La **fréquence de précession** ν_p est souvent utilisée au lieu de la vitesse de précession. Elle indique le nombre de rotations de précession complètes de l'axe de la toupie par unité de temps :

$$\nu_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{M}{2\pi I\omega}$$

Elle est d'autant plus faible que la vitesse angulaire de la toupie et son moment d'inertie son grands. Elle augmente avec le moment agissant.

3.6.2.2 Nutation

1. Nutation

Nutation : petit mouvement d'oscillation qu'effectue l'axe de rotation d'une toupie ou d'un gyroscope autour de la position moyenne de cet axe, lui-même entraîné par un mouvement de précession. La nutation apparaît lorsque la rotation ne s'effectue pas autour d'un axe principal d'inertie et que les axes principaux d'inertie sont de grandeurs différentes.

2. Toupie symétrique libre

Soit une toupie (gyroscope, rotateur) symétrique ($J_x = J_y \neq J_z$), libre de toute force : puisqu'aucune force et par conséquent aucun moment, n'agit sur elle, son moment cinétique total $\vec{\mathbf{L}}$ est fixe dans l'espace. Son mouvement se compose d'une **rotation propre** autour de l'axe J_z avec une vitesse angulaire constante $\omega = L\cos\theta / J_z$, θ étant l'angle constant de $\vec{\mathbf{L}}$ et de $\vec{\omega}$, et d'une rotation de $\vec{\omega}$ autour de $\vec{\mathbf{L}}$ avec une vitesse angulaire constante $\omega_p = L/J_x$ (précession) (Fig. 3.33).

3. Toupie symétrique soumise à un moment non nul

Soit une toupie pesante dont le centre de gravité ne coïncide pas avec le point fixe de rotation O. Lors de la précession, l'angle θ formé par la direction du moment cinétique $\vec{\mathbf{L}}$ et la verticale ne reste pas constant, mais oscille entre deux valeurs fixes, de sorte que l'extrémité de $\vec{\mathbf{L}}$, tout en décrivant un mouvement de précession autour de la verticale, oscille entre deux cercles ; l'angle $\theta = (\vec{\omega}, \vec{\mathbf{L}})$ varie entre deux valeurs θ_1 et θ_2.
Le mouvement général d'une toupie (précession et nutation) peut être représenté par deux cônes roulant l'un dans l'autre (cf. Fig. 3.33(a)). La nutation, comme la précession, contribue au moment cinétique total, mais sa contribution est encore plus petite que celle de la précession.

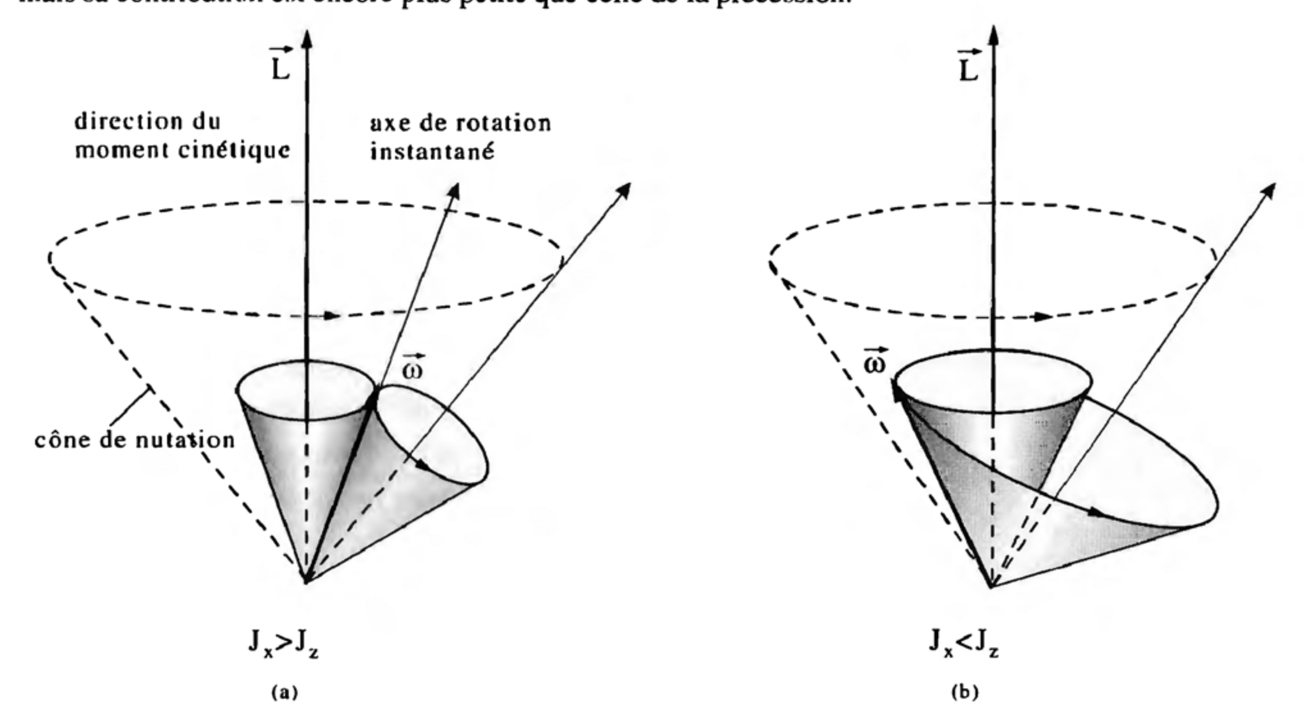


Fig. 3.33 : *Précession et nutation de l'axe d'un gyroscope.*

- À cause des effets du frottement, une toupie tourne autour d'un axe principal d'inertie. De ce fait, on n'observe une nutation que si on donne un choc à la toupie qui dévie momentanément le vecteur moment cinétique de la direction de l'axe principal d'inertie.

3.6.2.3 Moments gyroscopiques

Bicyclette : les roues en rotation agissent comme des gyroscopes et stabilisent son mouvement. Pour renverser la bicyclette il faut appliquer un couple de façon à modifier la direction du moment cinétique des roues ; ce couple doit être d'autant plus grand que la vitesse de rotation des roues est grande.
Dans un virage, la roue avant s'incline et est soumise à un mouvement de précession. Le couple qui en résulte dirige la roue dans la direction du virage.

Un moment gyroscopique : apparaît lorsque l'on force un déplacement (rotation) de l'axe de rotation équivalant à imposer une vitesse de précession ω_f.

Moment gyroscopique			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{M} = \vec{L} \wedge \vec{\omega}_f$	$\vec{M}$	Nm	moment gyroscopique
	$\vec{L}$	kg m^2/s	moment cinétique
	$\vec{\omega}_f$	rad/s	vitesse de précession forcée

- Soit un cylindre tournant autour de son axe maintenu horizontalement ($\vec{L}$ horizontal). Si, en appliquant une force dans le plan horizontal, on essaye de tourner le cylindre autour de la verticale, la précession $\vec{\omega}_f$ est dirigée suivant la verticale ; le moment $\vec{M}$ qui en résulte correspond à une force verticale. On peut réaliser cette expérience en tenant un moteur électrique dont l'axe est maintenu horizontalement. En tournant le moteur autour de la verticale, on ressent une force de direction verticale dont le sens dépend du sens de rotation du moteur et du sens du mouvement autour de la verticale.

3.6.3 Applications des effets gyroscopiques

1. Compas gyroscopique

Le compas gyroscopique remplace le compas magnétique dans les sous-marins et dans les bateaux modernes. Le gyroscope repose sur une cuve à mercure qui permet à son axe de rotation de se déplacer librement dans le plan horizontal. Entraîné par la rotation de la Terre ω_T, le gyroscope tend à aligner son moment cinétique avec $\vec{\omega}_T$, donc avec l'axe de rotation de la Terre soit la direction Nord-Sud.

- Afin de pouvoir mesurer de faibles effets, à cause de la vitesse de rotation relativement faible de la Terre, on donne une vitesse de rotation élevée aux gyroscopes ; ils sont généralement suspendus par des systèmes qui minimisent les frottements.

- Lorsqu'un vaisseau se déplace le long d'un méridien, une rotation supplémentaire se produit et induit une déviation du compas gyroscopique proportionnelle à la vitesse du vaisseau. Un avion pouvant avoir une vitesse supérieure à celle de la rotation de la Terre, le compas gyroscopique n'est pas utilisable dans ces conditions.

- Au voisinage des pôles, le compas gyroscopique n'est plus utilisable car la composante horizontale du vecteur rotation de la Terre devient très faible.

2. Horizon artificiel

Instrument de pilotage d'un avion, destiné à matérialiser une référence de verticale terrestre. Son principe repose sur la conservation du moment cinétique. La direction du moment cinétique d'un gyroscope muni d'une suspension de Cardan est constante quelque soit les mouvements de l'avion. Un perfectionement de l'horizon artificiel consiste à communiquer au gyroscope un lent mouvement de précession ; on exploite le fait que cette précession s'effectue autour de la verticale du lieu. La faible fréquence de précession n'est pas affectée par les accélérations de faible durée lors de virages rapides.

4 Micromécanique

Micromécanique : ensemble de techniques pour la conception et la réalisation de systèmes mécaniques de très petites dimensions. Elle utilise, entre autres, les techniques des semi-conducteurs (photolithographie, attaque chimique) pour la construction de capteurs et d'activateurs (moteurs, relais).

4.1 Technique des couches minces

1. Technologie planar :

Technique de base pour la fabrication de structures mécaniques et électroniques dans le domaine micrométrique : des couches minces de matériaux de propriétés diverses (isolant, conducteur, semiconducteur) sont superposées sur un substrat de Silicium monocristallin (**Wafer**) et travaillées par lithographie et attaque chimique (décapage, *etching*).

2. Technique des couches minces :

Procédé d'élaboration de couches très minces (0.1 nm à 10 μm) constituées d'atomes et de molécules (par opposition à la fabrication de films minces par étirement ou déformation). Par ses méthodes particulières, ces techniques permettent d'obtenir des couches de matériaux très purs, d'épaisseurs bien définies et de propriétés physiques et chimiques variées, directement aux endroits de leur utilisation.

Les principaux matériaux utilisés pour ces couches minces sont : le Silicium, son oxyde (SiO_2), les métaux légers (Al, Cr, Ni pour constituer des résistances électriques), des métaux précieux (Au, Pt), des oxydes métalliques (pour constituer des condensateurs ou des couches sensibles aux gaz), des alliages (NiFe, CoFeB, couches sensibles aux champs magnétiques), polyamide (couches de protection, passivation), Phtalocyanine (couches organiques sensibles aux gaz).

Les principaux processus d'élaboration de couches minces sont :

a) **Évaporation, déposition par évaporation** , (**Physical Vapor Deposition**, PVD) : réalisation de couches par condensation sur un substrat des vapeurs métalliques obtenues par chauffage sous vide poussé.

b) **Pulvérisation ionique, sputtering :** des atomes du matériau à déposer sur un substrat sont arrachés à la cathode d'un tube à décharge, sous l'action du choc des ions positifs formés dans le gaz à basse pression (10^{-6} Torr).

c) **Épitaxie :** dépôt de cristaux d'une espèce chimique sur un substrat cristallin d'une autre espèce. Les paramètres des mailles cristallines des deux espèces doivent être suffisamment voisins pour qu'une orientation relative constante soit obtenue. On peut utiliser un jet moléculaire (épitaxie à jet moléculaire) obtenu dans un ultra-vide à l'aide de l'évaporation dans un canon à électrons. Le jet moléculaire ainsi obtenu se différencie des vapeurs obtenues par évaporation par le fait qu'il ne constitue pas un gaz en équilibre thermodynamique ; les molécules se déplacent à des vitesses pratiquement égales.

d) **Agrégats ioniques :** variante de l'épitaxie à jets moléculaire : l'expansion adiabatique des jets donne lieu à la formation d'agrégats ioniques ($\approx$1000 ions) qui sont alors accélérés dans un champ électrique.

e) **Déposition chimique :** les matériaux évaporés se déposent sur le substrat par réaction chimique sélective et non par condensation. Le dépôt obtenu peut être très pur, car les espèces chimiques non désirées ne réagissent pas et sont évacuées par pompage.

f) **Galvanisation** (déposition par électrolyse) : le matériau est déposé par électrolyse (réduction ionique) d'une solution saline. Le courant électrique nécessaire peut être fourni de l'extérieur ou par l'introduction

d'un réducteur directement dans la solution saline.

g) Implantation ionique : les ions souhaités sont accélérés dans un accélérateur d'ions à des énergies de 10 à 200 keV et envoyés sur le substrat. La profondeur de pénétration des ions dans le réseau cristallin du substrat dépend de l'énergie incidente et de la nature des ions et du substrat. Cette méthode est surtout employée pour doper le substrat en accepteurs ou donneurs de porteurs de charges.

h) Procédé Spin-on : pour la formation de couches minces de polymères sur le substrat. Le polymère en solution est déposé uniformément par rotation continue du substrat, le solvant s'évapore.

i) Méthode de Langmuir-Blodgett, basée sur la possibilité de former une couche monomoléculaire d'une substance sur une surface d'eau, puis de transférer ce film sur le substrat.

3. Dopage

Le dopage consiste en l'addition de petites quantités connues d'impuretés à un corps très pur, afin de modifier ses caractéristiques. Le dopage est obtenu par diffusion thermique contrôlée, implantation ionique ou épitaxie dans le réseau cristallin du substrat.

4.2 Insolation et décapage chimique

1. Lithographie

La lithographie consiste à transférer sur un substrat le dessin d'un circuit ou d'un système mécanique par l'application d'un vernis ou d'une résine (masque). Les parties du substrat non protégées par ce vernis sont éliminées par décapage chimique (Fig. 4.1).

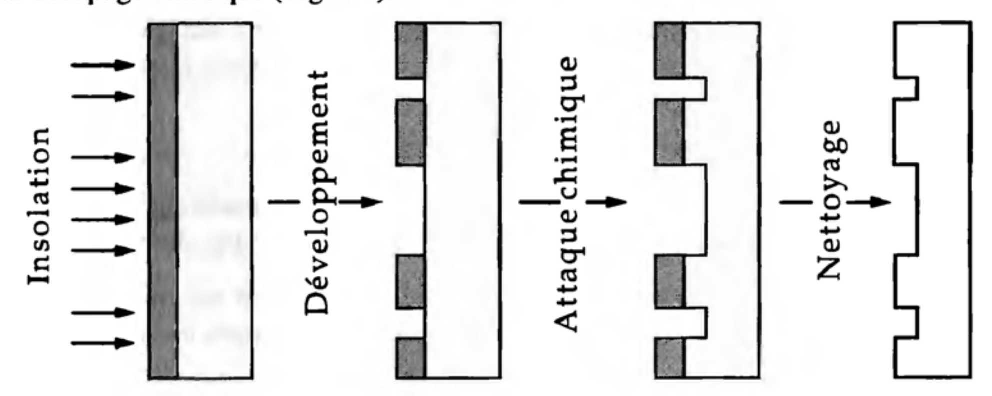


Fig. 4.1 : *Étapes de la réalisation de microstructures par lithographie*

Les divers procédés de lithographie sont caractérisés par la résolution spatiale (plus petite distance de séparation entre deux points) qu'ils permettent d'atteindre.

2. Photolithographie

Procédé de lithographie lors duquel le dessin du masque est transféré à l'aide de rayons UV (longueur d'onde comprise entre 200 et 400 nm). Pour ce faire, on dépose sur le substrat un vernis photosensible **Photoresist** dont la solubilité est modifiée par la lumière UV. Après développement, les parties non protégées par le vernis sont éliminées par attaque chimique. La source de lumière UV est généralement une lampe à vapeur de mercure ($\lambda \approx 350$ nm) ou un laser à excimère ($\lambda <300$nm).

Suivant la méthode d'insolation, on distingue :

a) Insolation par contact : le masque est posé directement sur le substrat préalablement recouvert de vernis photosensible. L'avantage de cette méthode réside dans la résolution élevée qu'elle permet,

l'inconvenient est que le substrat et le masque peuvent être endommagés lors du contact et ne seront par conséquent plus utilisables par la suite.

b) Insolation par contact : le masque est disposé au-dessus du substrat à une distance de 10 à 30 μm. La résolution est limitée (env. 3 μm) à cause de la diffraction par les bords du dessin du masque.

c) Insolation par projection : l'image du masque est projetée sur la surface du substrat par un dispositif optique. La résolution est limitée (env. 0.5 μm) par les problèmes liés à la focalisation de l'image sur la surface du substrat (imparfaitement plane) et aux imperfections du système optique.

Les masques sont réalisés électroniquement et transférés sur une couche de vernis sensible aux électrons à l'aide d'un traceur à faisceau d'électrons. On utilise également un générateur de motifs dont le déplacement est piloté par ordinateur, un diaphragme rectangulaire délimite les dimensions de la zone à impressionner sur la couche de vernis sensible.

3. Lithographie à Rayons X

La longueur d'onde plus faible des Rayons X, permet d'atteindre des résolutions spatiales plus faibles (les circuits modernes sont réalisés avec des largeurs de pistes de l'ordre de $0,3\mu m$). Les masques utilisés doivent avoir un coefficient d'absorption élevé pour les Rayons X (par exemple : l'or, qui peut être facilement déposé par électrolyse). Le rayonnement synchrotron issu d'un anneau de stockage à électrons est aussi utilisé pour réaliser des structures extrêmement fines.

4. Lithographie par faisceau d'électrons

Un faisceau d'électrons est utilisé à la place des faisceaux d'ondes électromagnétiques. Leur longueur d'onde associée de de Broglie peut être très petite (env. 0,01 μm), cependant la diffraction et la diffusion des électrons limitent un peu la résolution. Le dessin d'un circuit peut être réalisé directement sur le substrat à l'aide d'un faisceau d'électrons sans utilisation de masque, néanmoins le processus est lent et n'est pas applicable de façon rentable à l'échelle industrielle.

5. Décapage chimique

Après développement de la résine photosensible déposée sur le substrat, l'attaque chimique permet d'éliminer les parties indésirables du substrat. Ce décapage chimique est effectué à l'aide d'acides fluorhydrique, phosphorique ou acétique à une température de 80 °C à 180 °C. Le procédé est basé sur l'attaque chimique sélective des différentes couches : vernis, matériaux déposés et substrat. La vitesse de l'attaque chimique peut dépendre de l'orientation des axes du réseau cristallin (anisotropie).

6. Attaque par plasma

Les ions et radicaux produits dans un plasma (torche à plasma) agissent comme décapant. Dans le procédé **Barrel Etching** les radicaux libérés par décharge électrique dans O_2, permettent d'enlever le vernis photosensible non insolé.
Le procédé **Ion Beam Etching** utilise un faisceau d'ions (500 eV) de gaz rares pour décaper les parties indésirables.

7. Décapage par ions lourds

Les surfaces à éliminer sont bombardées avec un faisceau d'ions lourds d'énergie élevée (100 MeV). Lors de leur pénétration dans la partie supérieure de la couche mince, des collisions atomiques en cascade produisent de canaux de environ 10 nm de diamètre. Des procédés de chimie humides permettent alors

d'éliminer les parties du substrat ainsi modifiées.

8. Décapage induit par faisceau laser

Un faisceau laser étroit est utilisé conjointement à un gaz corrosif. L'attaque chimique par les radicaux de gaz corrosif libérés par photoionisation est limitée aux parties du substrat touchées par le faisceau laser. Cette technique, grâce à la finesse du faisceau laser, peut être utilisée directement sur le substrat, sans transfert d'un masque.
La **photoablation** de couches organiques est une variante de cette technique. Un faisceau laser UV permet de briser les liaisons chimiques de la couche superficielle sans atmosphère corrosive.

4.3 Applications

Avec ces techniques toutes sortes de microstructures peuvent être réalisées à l'échelle du micromètre.

4.3.1 Capteurs

Les **capteurs** (transducteurs) transmettent les valeurs de grandeurs physiques sous forme de variation de tension, de fréquence, de résistance ou de capacité électriques. Ces valeurs analogiques sont alors transmises sous forme numérique à l'aide de **convertisseurs Analogique-Numérique**.

Les principaux avantages des microcapteurs sont : leur grande vitesse et précision de mesure, l'absence de parties mécaniques en mouvement (peu d'usure et d'entretien) et leur faclité d'intégration dans des circuits microélectroniques.

1. Capteurs de pression

La pression à mesurer applique une force sur une lame ou membrane constituée de Silicium. Les déformations de cette couche mince produisent des variations de sa résistance électrique **(capteur de pression piézo-résistif)**.
Dans le cas des **capteurs de pression piézo-capacitifs**, la membrane de Silicium forme avec un couche métallique en regard, un condensateur dont la variation de capacité peut être mesurée par la mesure de la variation de la fréquence d'un circuit oscillant (utilisable pour des pressions de 10 à 10^7 Pa).

- Le **Microphone capacitif** : utilise un capteur de pression capacitif avec une membrane très mince (env. 0,15 μm). La surface de la membrane est de l'ordre de 1 mm^2, sa distance à sa contre-électrode est d'environ 2 μm (Fig. 4.2).

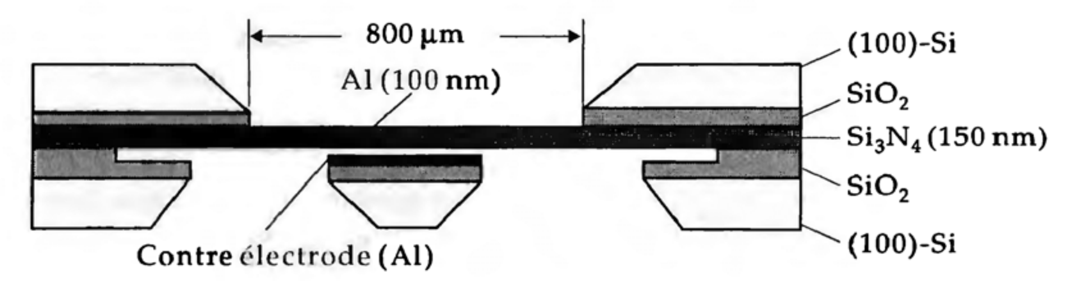


Fig. 4.2 : *Coupe d'un microphone micromécanique. La membrane de nitrure de Silicium est métallisée sur ces deux faces par une couche d'aluminium et constitue un condensateur avec la contre-électrode. Les variations de pression accoustique produisent la variation de la capacité du condensateur*

2. Capteurs tactiles

Association de plusieurs capteurs qui servent à détecter de faibles variations de pression sur une surface (analogue au sens du toucher de notre peau). Ils sont utilisés en réseau pour construire, par exemple, des

écrans tactiles de saisie de données.

3. Capteurs d'accélération

Il sont constitués de fines languettes de quelques micromètres d'épaisseur, libres à une de leurs extrémités. Lorsque ces languettes sont soumises à une accélération, elle se plient légèrement ; cette déformation peut être mesurée par effet piézo-résistif ou piézo-capacitif.

4. Capteurs de débit

Ils mesurent la vitesse d'écoulement d'un liquide ou d'un gaz par la méthode du fil chaud (le refroidissement du fil chaud est d'autant plus grand que le fluide environnant s'écoule rapidement). On utilise une languette de Silicium dont la résistance augmente lorsque la température baisse. Des précisions de l'ordre de 3% sont obtenues pour des vitesses d'écoulement de 2 à 30 m/s.

5. Capteurs de rayonnement

Ils sont utilisés, notamment, pour la détection du rayonnement infra-rouge. Ils sont constitués de lames de Silicium, revêtues d'un matériau absorbant, qui s'échauffent sous l'action du rayonnement. Il en résulte une variation de résistance.

6. Capteurs de gaz

Ils mesurent la conductivité thermique des gaz. Une membrane de faibles dimensions est échauffée par un réseau intégré de microrésistances, la conductivité thermique du gaz est mesurée par l'abaissement de la température (capteurs intégrés) due à la présence du gaz. Ils sont utilisés pour la mesure de pression dans un vide primaire et pour la détermination des concentrations dans les mélanges gazeux (analyseurs de gaz d'échappement).

7. Capteurs à quartz

Ils mesurent la variation de la fréquence de résonance d'un cristal de quartz. Cette fréquence de résonance est fonction de plusieurs paramètres : température, forces extérieures (pression, accélération) et masse superficielle. Ils sont notamment utilisés dans les évaporateurs pour contrôler l'épaisseur des couches minces en cours de fabrication ; les substances évaporées se condensent également sur les parois du quartz, son augmentation de masse superficielle entraîne la variation de sa fréquence de résonance.

4.3.2 Actionneurs

Actionneur : mécanisme ou organe servant à modifier le comportement ou l'état d'un système. Ils agissent en exerçant une force :

- force électrostatique entre deux électrodes
- force piézoélectrique, une différence de potentiel entre deux faces d'une substance piézoélectrique, produit une dilatation ou une contraction de cette substance (quartz piézoélectrique, sel de Seignette)
- force thermomécanique, due à la dilatation ou contraction d'un corps suite à des variations de température
- *shape memory alloys* (SMA) alliage ayant des propriétés de mémoire de forme. Par échauffement ils prennent une forme définie et par là exercent des forces dans des directions prédéfinies.

1. Microinterrupteur, microswitches

Le mouvement d'une languette coupe ou ferme un circuit électrique. Des courants jusqu'à 1 A peuvent être commutés.

2. Micro obturateurs

Ils constituent des **modulateurs de lumière**, leur réponse est très rapide. Les **miroirs tournants** en Silicium opérent de façon analogue et permettent de dévier ou positionner des faisceaux de lumière.

3. Vannes micromécaniques

Elles sont constituées d'une membrane de Silicium portant sur un joint ; elles peuvent être actionnées par un champ électrostatique. Suivant le même principe, on peut réaliser des pompes micromécaniques en actionnant la membrane par un potentiel alternatif (débit de quelques microlitres par minute).

4. Micro-positionneurs

Ils utilisent la piézoélectricité pour déplacer des objets dans le domaine du micromètre. En associant plusieurs éléments, on peut obtenir des courses de déplacement de l'ordre de quelques millimètres. Ils sont couramment utilisés pour le déplacement des préparations sous les microscopes électroniques à balayage ou encore en micro-optique.

5. Micromoteurs

Moteurs électriques dont le rotor a un diamètre de l'ordre de 100 μm et dont la structure et le stator sont usinés dans un substrat de Silicium par attaque chimique. Il est basé sur l'utilisation des forces électrostatiques qui prédominent aux petites distances. (Fig. 4.3)

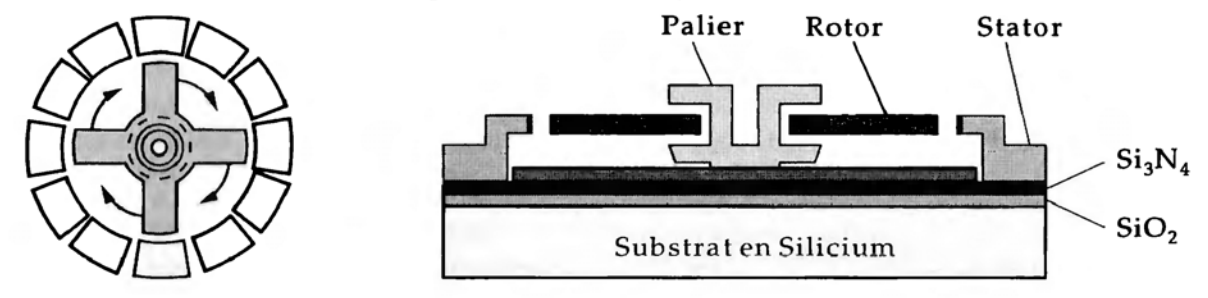


Fig. 4.3 : *Vue de dessus et coupe d'un micromoteur*

4.3.3 Applications pratiques

1. Réseaux optiques

Ils sont réalisés à l'aide des techniques de haute précision de la micromécanique par attaque chimique sur des substrats de Silicium. Les réseaux ainsi fabriqués présentent une très grande stabilité.

2. Buses des imprimantes à jet d'encre

Les imprimantes à jet d'encre utilisent des actionneurs piézoélectriques qui permettent d'expulser une fine gouttelette d'encre.

3. Chromatographe en phase gazeuse

Le premier chromatographe en phase gazeuse, entièrement intégré sur un substrat de Silicium a été réalisé à Stanford en 1983. Il mesure, pour chaque composant du gaz, la vitesse de transfert à travers un capillaire

enduit d'huile de silicone (sur la base des taux différents d'absorption et de désorption dans l'huile de silicone). Les capillaires, de section rectangulaire de 200 μm × 40 μm et d'une longueur de 1,5 m, sont terminés par un capteur à gaz qui détermine les différents composants du gaz.

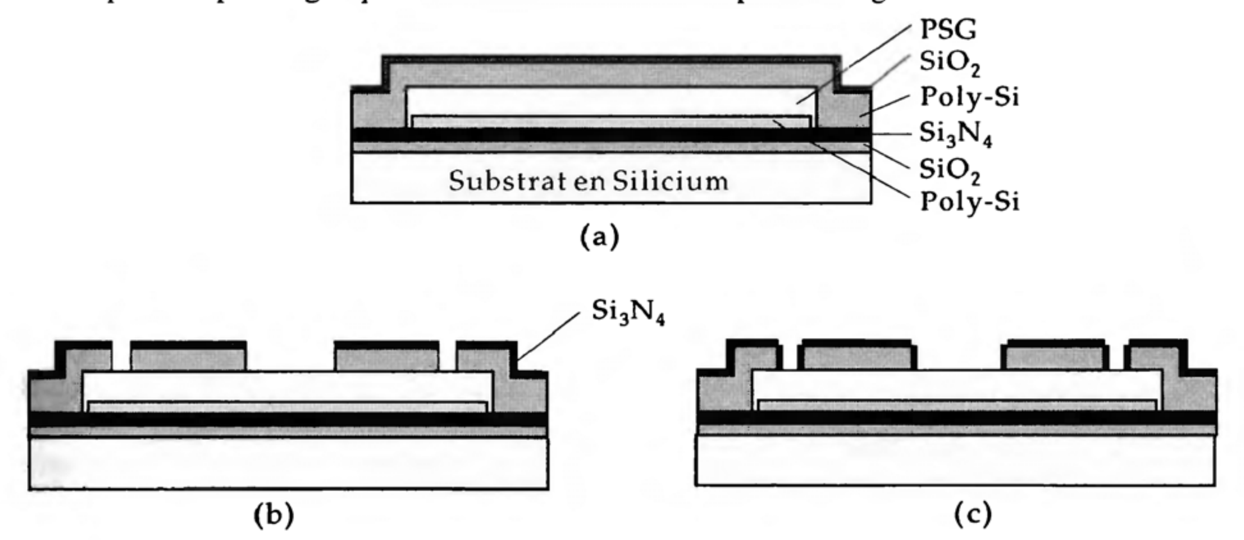


Fig. 4.4 : *Étapes de la fabrication d'un micromoteur :*
(a) mise en place des couches minces : oxyde de Silicium (SiO_2) et nitrure de Silicium (Si_3N_4) (isolants), Silicium polycristallin (Poly-Si) (Stator et Rotor), verre au phosphoresilicate (PSG)
(b) Rotor et Stator sont obtenus par attaque chimique. Le Rotor repose sur le verre isolant (PSG) ; une couche supplémentaire de nitrure est déposée
(c) Des paliers sont usinés dans la dernière couche de nitrure pour réduire les frottements

5 Gravitation et théorie de la relativité

5.1 Champ de gravitation

5.1.1 Loi de la gravitation

1. Gravitation

La force d'attracion due à l'action réciproque de la masse de deux corps est appelée **gravitation**. La force de gravitation, toujours attractive, ne dépend que de la masse et de la distance des corps :

Force de gravitation				MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$F_g = G\,\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$	F_g	N	force de gravitation	
	G	N m²/kg²	constante de la gravitation	
	m_1, m_2	kg	masses des corps	
	r	m	distance des corps	

2. Propriétés de la force de gravitation

La force de gravitation sur un corps s'exerce toujours dans la direction du corps qui la produit (Fig. 5.1) ; vectoriellement, la force exercée sur le corps 2 s'écrit :

$$\vec{\mathbf{F}}_{g,2} = -\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{\mathbf{r}}_{12}}{|\vec{\mathbf{r}}_{12}|} = \vec{\mathbf{F}}_N$$

où $\vec{\mathbf{r}}_{12}$ est le vecteur dirigé du centre de gravité du corps 1 vers celui du corps 2. D'après le théorème de Gauss de la théorie des potentiels, on considère que la masse totale du corps est concentrée en son centre de gravité.

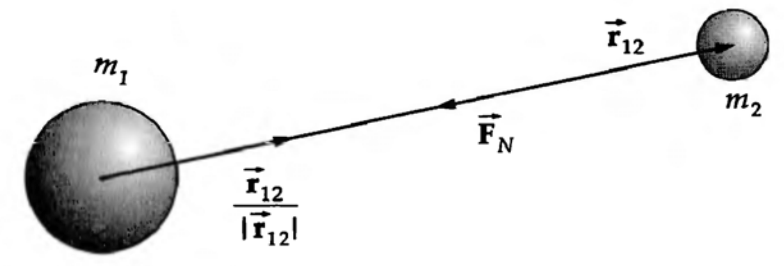


Fig. 5.1 : *Gravitations.*
La force agissant sur la masse m_2 est opposée au rayon vecteur $\vec{\mathbf{r}}_{12}$ = dirigé de m_1 vers m_2

▷ L'expression $\dfrac{\vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|}$ (vecteur divisé par sa norme) est le vecteur unitaire porté par la même direction et sens que le vecteur $\vec{\mathbf{r}}$. La force exercée sur le corps 2 pointe de 2 vers 1 (remarquez le signe moins !).

● La force de gravitation est toujours attractive.

▷ La constante de gravitation G est une constante universelle :
$$G = (6,672 \pm 0,007)\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/\,kg^2}$$

▷ La relation exprime l'intensité de la force exercée par le corps 1 sur le corps 2 et réciproquement. La force sur l'un des corps est toujours dirigée vers l'autre.

- La force de gravitation est proportionnelle aux masses des corps en présence et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.

Cette expression est similaire à celle de la force de Coulomb (→ *Électricité*) ; toutefois, des masses exercent toujours une force attractive entre elles, alors que l'interaction coulombienne peut être attractive ou répulsive suivant les signes des charges en présence. Par analogie avec le champ électrique, on peut définir le champ de gravitation.

3. Champ de gravitation

$\vec{\mathbf{E}}_g$ (communément $\vec{\mathbf{g}}$ dans le cas du champ de gravitation terrestre), grandeur vectorielle qui, en tout point de l'espace, mesure la force de gravitation s'exerçant sur une masse unité :

$$\vec{\mathbf{E}}_g = \vec{\mathbf{g}} = -G\frac{M}{r^2}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|}$$

Le champ de gravitation ne dépend que de la masse M du corps qui le produit et est indépendant du corps plongé de ce champ. Ce vecteur champ est égal à l'accélération communiquée au corps plongé dans ce champ.

4. Potentiel de gravitation

Φ : décrit le **travail dans le champ de gravitation** . Le potentiel de gravitation est égal au travail nécessaire pour déplacer un corps d'un point 1 à un point 2 dans le champ de gravitation. La force de gravitation dérivant d'un potentiel, ce travail est indépendant du chemin parcouru.

Potentiel de gravitation			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Phi = G\frac{Mm}{r}$	Φ	J = Nm	potentiel de gravitation
	G	N m²/kg²	constante de gravitation
	M	kg	masse produisant le champ
	m	kg	masse du corps soumis au champ
	r	m	distance du corps produisant le champ

La force de gravitation $\vec{\mathbf{F}}$ dérive du potentiel de gravitation Φ :

$$\vec{\mathbf{F}}_g(\vec{r}) = -m\,\mathrm{grad}\,\Phi(r)$$

▹ Le potentiel de la force gravitation est $V(r) = m\,\Phi(r)$, $\quad \vec{\mathbf{F}}_g = -\mathrm{grad}\,V(r)$

L'énergie potentielle d'un corps de masse m, placé dans le champ de gravitation d'un corps de masse M situé à une distance $\vec{\mathbf{r}}$ est :

$$E_{\text{pot}}(\vec{\mathbf{r}}) = m\,\Phi(\vec{\mathbf{r}})$$

Le travail nécessaire, pour déplacer dans le champ de la pesanteur un corps de masse m du point $\vec{\mathbf{r}}_1$ au point $\vec{\mathbf{r}}_2$ est égal à la différence des énergies potentielles en ces points :

$$W_{12} = -\int_{\vec{\mathbf{r}}_1}^{\vec{\mathbf{r}}_2} \vec{\mathbf{F}}_g\,\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}} = E_{\text{pot}}(\vec{\mathbf{r}}_2) - E_{\text{pot}}(\vec{\mathbf{r}}_1) = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

5. Attraction terrestre

Poids : force de gravitation exercée par la masse de la Terre sur un corps placé au voisinage de sa surface. Elle dépend de la masse et du rayon terrestres et de la masse du corps qui y est soumis.

Accélération de la pesanteur $g = 9,80665\,\mathrm{m/s^2}$: due à la force d'attraction qu'exerce la masse de la Terre sur tout corps placé en son voisinage. Sa valeur, approximativement constante, dépend du lieu géographique et de l'altitude.

▷ L'intensité de l'accélération de la pesanteur est influencée par la force centrifuge due à la rotation de la Terre et, par conséquent, dépend de la latitude. Elle dépend également de la distance au centre de la Terre. Celle-ci n'étant pas de forme sphérique, l'accélération de la pesanteur n'a pas la même grandeur en tous les points situés au niveau de la surface de la mer. Enfin, la masse de la Terre n'étant pas répartie uniformément, la croûte terrestre est de densité variable et influence localement la valeur de l'accélération de la pesanteur. Ces variations locales sont parfois mises à profit pour la prospection des ressources du sous-sol (balance d'Eötvös).

5.1.2 Mouvement des planètes

La force de gravitation se manifeste également dans le mouvement des planètes. En 1609, Johannes Kepler, à partir des observations faites par Tycho-Brahé, des lois de Newton et de la gravitation, déduisit ses **lois de Kepler** décrivant le mouvement des planètes :

1. Première loi de Kepler

La trajectoire de chaque planète est une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.

▷ Une ellipse est définie soit par ses axes soit par son excentricité. Dans notre système planétaire, les trajectoires des planètes sont approximativement des cercles.

Écliptique : plan formé par la trajectoire que décrit la Terre dans son mouvement annuel autour du Soleil. L'écliptique est parfois utilisé comme système de référence.

Périhélie : point de l'orbite d'un planète le plus rapproché du Soleil.

Aphélie : point de l'orbite d'une planète le plus éloigné du Soleil.

▷ Les saisons terrestres ne sont pas dues aux variations de la distance au Soleil au périhélie ou à l'aphélie, mais à l'inclinaison de l'axe terrestre par rapport à l'écliptique. Suivant la position de la Terre sur l'écliptique, l'hémisphère nord ou sud est plus proche du Soleil.

2. Deuxième loi de Kepler, loi des aires

Les aires balayées par les rayons vecteurs de chaque planète en des temps égaux sont identiques.(Fig. : 5.2).

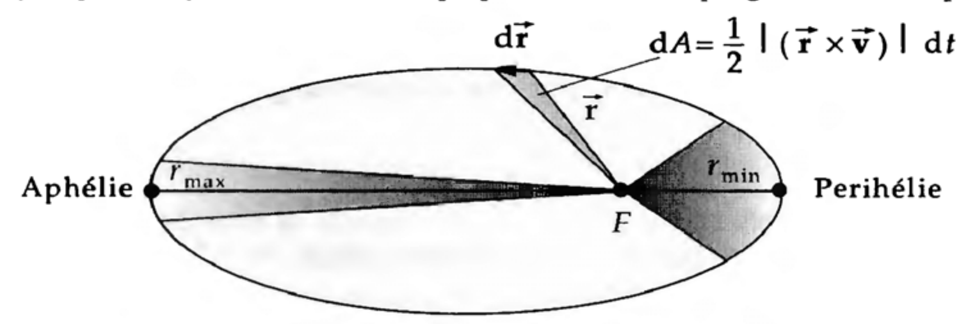


Fig. 5.2 : *Deuxième loi de Kepler (loi des aires). Les aires hachurées à r_{min} et r_{max} sont égales*

▷ La loi des aires exprime que le moment cinétique d'une planète par rapport au Soleil est conservé : le produit de la vitesse de la planète par sa distance au Soleil est constant. La vitesse orbitale est plus grande près, que loin du Soleil. Cette loi résulte de la conservation du moment cinétique $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$.

3. Troisième loi de Kepler

Les carrés des durées de révolution T_1 et T_2 de deux planètes sont proportionnels aux cubes des grands **axes** a_1 et a_2 de leurs orbites :

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad , \qquad \frac{T^2}{a^3} = \text{const.}$$

- Les lois de Kepler décrivent le mouvement des planètes sous l'attraction du Soleil. Elles ne tiennent pas compte de l'attraction mutuelle des planètes.
- La théorie de la relativité générale prédit des déviations à la loi de la gravitation au voisinage du Soleil, qui se manifestent par une lente rotation de l'orbite de la planète Mercure (déplacement du périhélie de Mercure).
- Les corps célestes peuvent suivre des trajectoires paraboliques ou hyperboliques. Cependant, ces trajectoires ne conduisent qu'une seule fois au voisinage du Soleil, les corps céleste s'échappant ensuite du système solaire (ex : certaines comètes).

5.1.3 Système planétaire

5.1.3.1 Soleil et planètes

1. Soleil

Le Soleil est l'astre central **du système solaire** qui se compose de neuf planètes et de corps célestes plus petits (lunes, comètes, astéroïdes). Les neuf planètes du système solaire sont pour partie similaires à la Terre en taille (Mercure, Venus et Mars) et composition, pour partie notablement plus grandes et composées de gaz (Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune).

Soleil		
Rayon	696 000 km	= 109 rayons terrestres
Masse	$1,99 \cdot 10^{30}$ kg	= 332000 masses terrestres
Masse volumique	1 410 kg/m^3	
Pesanteur	273,7 m/s^2	= 27,9 pesanteurs terrestres

2. Planètes et système solaire

Une planète est un corps céleste qui gravite autour d'une **étoile** centrale (Soleil). Par opposition à une **étoile**, corps céleste lumineux, une planète n'est visible que par la lumière qu'elle réfléchit. Sous l'action de la force d'attraction d'une étoile centrale, les planètes décrivent des orbites elliptiques autour de cette étoile. En général, une étoile peut avoir plusieurs planètes qui gravitent sur des orbites différentes (**système planétaire**).

Le système solaire comprend neuf planètes :

Planète	Distance au Soleil Millions km	Période Années	Diamètre km	Masse Masses terrestres	Durée d'une révolution
Mercure	57,9	0,241	4840	0,053	59 j
Vénus	108,2	0,615	12400	0,815	243 j
Terre	149,6	1,000	12756	1,000	23 h 56 min
Mars	227,9	1,881	6800	0,107	24 h 37 min
Jupiter	778	11,862	142800	318,00	9 h 50 min
Saturne	1427	29,458	120800	95,22	10 h 14 min
Uranus	2870	84,015	47600	14,55	10 h 49 min
Neptune	4496	164,79	44600	17,23	15 h 40 min
Pluton	5946	247,7	5850	≈ 0,1	-

3. Principales données terrestres

Terre	
Rayon (équateur)	6 378,163 km
Rayon (pôles)	6 356,777 km
Aplatissement	1:298
Masse	$5,977 \cdot 10^{24}$ kg
Masse volum. moyenne	5 517 kg/m^3
Pesanteur	9,80665 m/s^2
Vitesse de libération	11,19 km/s

▷ La durée de la révolution de la Terre est de 24 heures moins 4 minutes. Ces 4 minutes correspondent au chemin parcouru par la Terre sur son orbite autour du Soleil. De ce fait le lever du Soleil diffère tous les jours de 4 minutes.

▷ Jusqu'à présent, il n'a pas été possible de confirmer l'existence de planètes en dehors du système solaire.

▷ On ignore si le système solaire comprend d'autres planètes. La lumière solaire réfléchie par une planète inconnue pouvant être trop faible pour être mesurée, on essaye de déceller leur existence en mettant en évidence d'éventuelles anomalies de trajectoire que leur force de gravitation pourrait produire sur les planètes connues.

4. Relation de Titius-Bode

Les valeurs des rayons a_n des orbites des planètes forment approximativement une suite géométrique :

$$a_n \approx a_{\text{Terre}} k^n \qquad k \approx 1,85$$

($n_{\text{Mercure}} = -2$, $n_{\text{Vénus}} = -1$, $n_{\text{Terre}} = 0$, $n_{\text{Mars}} = 1$, $n_{\text{Jupiter}} = 3$, $n_{\text{Saturne}} = 4, \ldots$).

▷ La valeur manquante $n = 2$ correspond à la ceinture d'astéroïdes entre Mars et Jupiter.

5. Unité astronomique

(UA) : la distance moyenne de la Terre au Soleil :

$$1\,\text{UA} = 149,6 \cdot 10^6\,\text{km}$$

Pluton, la planète la plus externe est à environ 40 UA du Soleil, Mercure, la plus interne, à environ 0,4 UA. Ainsi, la taille du système solaire est bien plus petite que sa distance à l'étoile la plus proche (Centaure, 4,3 années-lumière $\approx$ 272 265 UA).

Année-lumière, (**Al**) (ou en anglais **Ly**) : distance parcourue par la lumière en une année.

$$1\,\text{Al} = 9,4605 \cdot 10^{12}\,\text{km} = 63\,240\,\text{UA}$$

Parsec : unité de longueur pour exprimer les distances stellaires ; représente la distance à laquelle le demi-grand axe de l'orbite terrestre autour du Soleil serait vu sous un angle de 1 seconde d'arc. Parsec est la contraction de **parallaxe-seconde**.

$$1\,\text{pc} = 3,2616\,\text{Al} = 206265\,\text{UA} = 3,0857 \cdot 10^{13}\,\text{km}$$

6. Mesure de grandeurs astronomiques

M **Parallaxe** (annuelle) d'un astre : angle sous lequel serait vu, depuis cet astre, un demi grand axe de l'orbite terrestre. Également : déplacement apparent d'une étoile, durant une année, mesuré à partir de la Terre et dû au mouvement de celle-ci sur son orbite. La parallaxe est d'autant plus grande que l'étoile est proche.
Mesure de distances : la parallaxe d'une étoile distante de 1 pc correspond à d'une seconde d'arc. Cette méthode est applicable jusqu'à des distances de $\approx$ 100 Al. Pour des distances plus grandes, on utilise des méthodes indirectes (éclat, déplacement Doppler, ...).

7. Lune

Corps céleste qui gravite autour d'une planète. Le rayon de la **lune terrestre** (communément : Lune) est à peu près égal au quart du rayon terrestre. Certaines planètes, spécialement les plus grosses : Jupiter, Saturne et Uranus, ont plusieurs lunes dont la taille peut atteindre celle d'une planète. Les **anneaux de Saturne**, constitués d'amas de rochers et de poussière, peuvent être assimilés à des lunes.

Lune terrestre		
Rayon	1738,0 km	= 27% du rayon terrestre
Masse	$7,350 \cdot 10^{22}$ kg	= 1,2% de la masse terrestre
Masse vol.	3 342 kg/m^3	= 61% de la masse vol. terrestre
Pesanteur	1,620 m/s^2	= 16,6% de la pesanteur terrestre
Vitesse orbitale	2,37 km/s	

8. Rotation des planètes

Les planètes (et lunes) tournent autour de leurs axes propres, la Terre en $\approx$ 24 heures, la Lune en $\approx$ 28 jours. La Lune présente toujours la même face à la Terre du fait de la valeur de sa période de révolution, l'autre face reste toujours cachée à la Terre.

Équateur : grand cercle de la sphère d'une planète, perpendiculaire à son axe de rotation. L'inclinaison du plan de l'équateur par rapport au plan de l'orbite d'une planète détermine la durée des jours au cours de

l'année et est responsable des saisons.

9. Asteroïdes et comètes

Astérode, petite planète, nettement plus petit qu'une des neuf planètes. La plupart des astéroïdes se trouvent dans la ceinture d'astéroïdes entre Mars et Jupiter. Leur diamètre s'étend de quelques kilomètres à 740 km (Cérès).

Comète : objet céleste dont la trajectoire est une ellipse très excentrée ou une hyperbole. Les comètes de trajectoire elliptique s'approchent du Soleil ou de la Terre avec des périodes pouvant atteindre 200 ans. La **comète de Halley** de période 76 ans est la plus connue. Les comètes, de ≈ 1 à 100 km de diamètre, ne sont visibles que lorsqu'elles sont proches du Soleil : les gaz solidifiés de leur surface s'évaporent alors et se manifestent par la **chevelure** ou la **queue** de la comète. Une comète est invisible lorsqu'elle se trouve dans l'espace des orbites des planètes.

Météorite : objet solide provenant de l'espace et qui atteint la surface de la Terre. Au voisinage de la Terre, l'échauffement dû aux frottement de l'atmosphère entraîne la combustion partielle ou totale de la météorite. Des restes métalliques peuvent atteindre la surface terrestre (parfois de très grande taille). L'observation des météorites peut se faire optiquement ou par radar.

5.1.3.2 Satellites

Satellite : planète secondaire qui gravite autour d'une planète principale. Corps en mouvement sur une orbite autour d'une planète, à l'origine désignait les lunes, actuellement aussi les **satellites artificiels**.
Satellite artificiel : objet placé sur une orbite elliptique dont le centre de la Terre est l'un des foyers.

- En fonction de leur vitesse initiale, les satellites artificiels peuvent se déplacer suivant une courbe conique : cercle, ellipse, parabole ou hyperbole. L'énoncé de la première loi de Kepler doit alors être modifié.

Les trajectoire paraboliques ou hyperboliques ne se referment pas. Dans ces cas le satellite s'échappe du champ de gravitation de la Terre.

1. Première vitesse cosmique

La **vitesse orbitale** v_o, **première vitesse cosmique**, est la vitesse nécessaire pour qu'un corps puisse décrire une orbite proche de la Terre. C'est la plus petite vitesse qu'un satellite peut avoir sans retomber sur la Terre. Sa valeur découle de l'équilibre de la force de gravitation et de la force centrifuge (force complémentaire due à l'accélération centripète).

2. Deuxième vitesse cosmique

Vitesse de libération v_l, **deuxième vitesse cosmique** ou **vitesse parabolique**, la vitesse qu'il faut communiquer à un corps pour le libérer du champ de gravitation. Le corps suit alors une trajectoire parabolique et s'éloigne indéfiniment de la planète.

Dans le cas de la planète Terre, ces vitesses cosmiques sont (Fig. 5.3) :

Vitesses cosmiques			**LT^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$v_o = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 7\,912\,\text{m/s}$	v_o	m/s	vitesse orbitale
$v_l = \sqrt{2}v_o = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$	v_l	m/s	vitesse de libération
$= 11\,190\,\text{m/s}$	G	N m²/kg²	constante de gravitation
	M	kg	masse terrestre
	r	m	rayon terrestre

▷ Les trajectoires sont elliptiques pour $v_0 < v < v_l$; hyperboliques pour $v \geq v_l$.

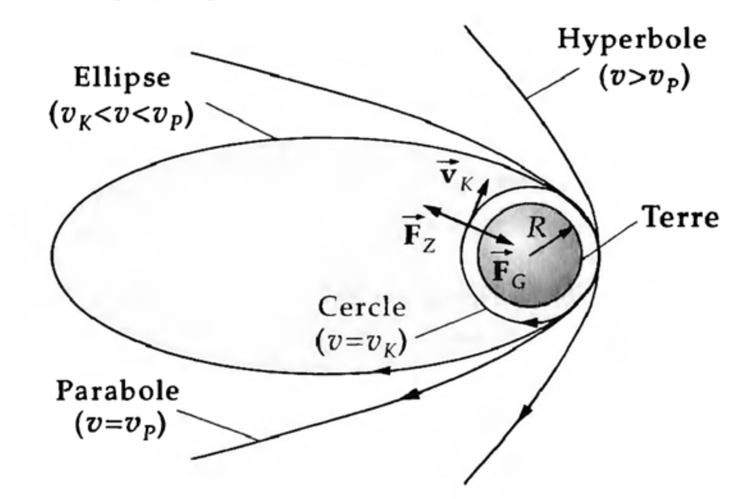


Fig. 5.3 : *Première et deuxième vitesse cosmique v_o, v_l ; résultent de l'équilibre entre force centrifuge F_c et de gravitation F_G*

3. Troisième vitesse cosmique

Troisième vitesse cosmique : la vitesse qu'il faut communiquer à un corps pour qu'il puisse s'échapper du système solaire. Elle se calcule à l'aide de la même relation que la vitesse de libération en utilisant la masse du Soleil et la distance au Soleil :

$$v = \sqrt{\frac{2GM_{\text{Soleil}}}{r_{\text{Soleil}-\text{Terre}}}} = 42,1\,\text{km/s}$$

5.2 Relativité restreinte

1. Théorie de la relativité restreinte

Théorie développée par Albert Einstein (1905) pour expliquer les phénomènes qui apparaissent lorsque des objets se déplacent à des vitesses proches de celle de la lumière.

D'après le principe de la relativité restreinte, les lois qui régissent les phénomènes physiques sont les mêmes dans tous les systèmes en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. En particulier, dans tout

repère galiléen, la vitesse de la lumière dans le vide a toujours même valeur dans toutes les directions. Ceci oblige à une révision totale des concepts classiques de l'espace et du temps (**espace-temps**).

2. Théorie de la relativité générale

Théorie également développée par Albert Einstein (1916), extension de la théorie de la relativité restreinte qui traite des systèmes en accélération et des forces de gravitation.

■ Cette théorie conduit à traiter de la même façon les forces de gravitation et les forces d'inertie au moyen d'un espace-temps courbe et constitue la base de la **cosmologie** moderne.

3. Effets relativistes

Les effets relativistes ne deviennent significatifs que lorsque les vitesses sont proches de celle de la lumière.

■ La théorie de la relativité intervient dans la physique des particules élémentaires (accélérateurs de particules, calculs cinématiques, ...), en physique atomique (calculs relativistes d'orbites et d'énergie, ...) ainsi qu'en astronomie et en astronautique. Des effets relativistes peuvent également être mis en évidence dans la navigation aérienne (dilatation du temps), grâce à des mesures de haute précision.

5.2.1 Principe de la relativité

1. Système d'inertie

Système (référentiel) dans lequel les lois de Newton sont vérifiées, en particulier le principe d'inertie : dans un système d'inertie un corps isolé (soumis à aucune force) conserve son état de mouvement. Les systèmes d'inertie sont des systèmes soit au repos, soit en translation uniforme les uns par rapport aux autres.

▷ La vitesse d'un référentiel ne peut être définie que par rapport à un autre référentiel dans lequel elle est mesurée. De ce fait, un référentiel d'inertie ne peut être défini par un système en translation uniforme sans se référer à un autre système qui soit aussi un référentiel d'inertie. La précédente définition, qui ne fait appel qu'aux propriétés physiques du référentiel d'inertie, évite les inconvénients d'une définition circulaire.

● Un référentiel qui se déplace avec une vitesse constante par rapport à un référentiel d'inertie est aussi un référentiel d'inertie.

Dans un système de coordonnées, un **événement** peut être défini par sa coordonnée d'espace x et sa coordonnée temps t. Ainsi, dans un référentiel donné, on attribue des **coordonées** (x, t) à chaque événement physique.

2. Transformation de Galilée

Transformation des coordonnées lors du passage d'un référentiel d'inertie à un autre *sans tenir compte de la théorie de la relativité restreinte*. En désignant les coordonnées d'espace par x et x' et par t et t' celles de temps, respectivement par rapport au premier référentiel et au deuxième animé de la vitesse v (Fig. 5.4), la transformation de Galilée entraîne :

Transformation galiléenne			
	Symbole	Unité	Dénomination
$x' = x - vt$	x, x'	m	coordonnées d'espace
$t' = t$	t, t'	s	coordonnées de temps
	v	m/s	vitesse relative des référentiels

La deuxième relation, $t' = t$, exprime que la mesure du temps (la marche d'une horloge, le mouvement d'un pendule) est indépendante de la vitesse de l'observateur.

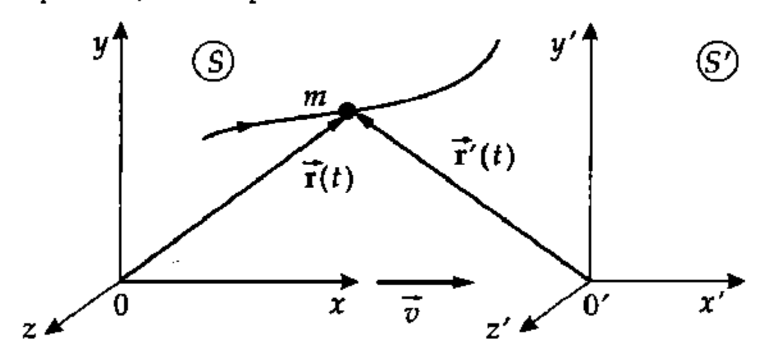


Fig. 5.4 : Transformation de Galilée. Le système de coordonnées S' est en mouvement rectiligne uniforme par rapport au système S avec la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$. L'échelle de temps est la même dans les deux référentiels

▷ Il est sous entendu que les origines des deux référentiels sont confondues à l'instant initial $t = 0$.

▷ Nous désignons par S' le référentiel se déplaçant à la vitesse v par rapport à l'observateur lié au référentiel S. Réciproquement, le référentiel S est en mouvement avec la vitesse $-v$ par rapport à un observateur lié à S'.

3. Trajectoire

$x(t)$: caractérise le mouvement d'un corps dans un référentiel donné (→ *Cinématique*).

■ D'après la transformation de Galilée, la trajectoire dans un référentiel en mouvement à la vitesse v est :

$$x'(t') = x'(t) = x(t) - vt$$

■ Un corps animé d'un mouvement rectiligne uniforme, dans le repère S, suit la trajectoire :

$$x(t) = x_0 + ut$$

(x_0 : position initiale à l'instant $t = 0$, u : vitesse du corps). Dans le référentiel d'inertie S', se déplaçant à la vitesse v par rapport à S, elle est :

$$x'(t') \;=\; x(t) - vt = x_0 + ut' - vt' = x'_0 + (u - v)t'$$

Dans une transformation galiléenne, la vitesse u' d'un corps dans le repére mobile s'obtient en soustrayant à la vitesse u du corps dans le repère fixe la vitesse v du système mobile :

$$\begin{aligned} u' &= u - v \\ u &= u' + v \end{aligned}$$

4. Principe de la relativité de la mécanique classique

Les lois de la mécanique classique sont invariantes dans tout référentiel d'inertie.

■ Transformation du principe fondamental de la dynamique :

Observateur dans S: $\vec{\mathbf{F}} = m\ddot{\vec{\mathbf{r}}}$

Observateur dans S': $\dot{\vec{\mathbf{r}}} = \dot{\vec{\mathbf{r}}}' + \vec{\mathbf{v}}$, $\dot{\vec{\mathbf{v}}} = 0$

$\ddot{\vec{\mathbf{r}}} = \ddot{\vec{\mathbf{r}}}'$, $\vec{\mathbf{F}}' = m\ddot{\vec{\mathbf{r}}}'$

La loi de force a la même forme mathématique dans les deux référentiels.

5. Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell qui décrivent la propagation des ondes électromagnétiques ne suivent pas ce principe de la relativité :

● Les ondes électromagnétiques (lumière) se propagent dans le vide avec la vitesse :

$$c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

Si cette vitesse se modifiait conformément à la transformation de Galilée, elle ne pourrait être valable que dans un seul repère défini.

■ La lumière émise par une lampe se déplaçant avec la vitesse $v = 0,9c$ devrait se propager à la vitesse c par rapport à un observateur immobile de la Terre où les ondes électromagnétiques ont la vitesse c. Par rapport à la lampe, la lumière se propagerait alors à la vitesse v' telle que :

$$v' = c - v = 0,1c$$

On pourrait alors se poser la question de savoir si un observateur qui se déplace avec une vitesse supérieure à celle de la lumière peut "dépasser" la lumière qu'il vient d'émettre.

Les équations de Maxwell ont une forme similaire à celles décrivant, entre autres, la propagation du son dans un gaz. La vitesse de propagation du son dans le gaz est celle du repére dans lequel le gaz est au repos. Un observateur peut se déplacer plus rapidement que le son qu'il a émis et ainsi produire une onde de choc (→ *Acoustique*).

6. Hypothèse de l'éther

Par analogie avec la propagation du son dans un milieu matériel, des physiciens ont postulé l'existence d'un milieu répandu dans tout l'univers, **l'éther**, dans lequel se propagerait la lumière.

■ La valeur de la vitesse de propagation de la lumière serait alors la même dans tout repère par rapport auquel l'éther serait au repos.

[M] En particulier, si l'éther est immobile, la valeur de la vitesse des ondes électromagnétiques, mesurée par un observateur appartenant à un astre en mouvement, dépend de la grandeur et de la direction de la vitesse de cet astre. Cette hypothèse fut soumise à vérification à l'aide d'un **interféromètre de Michelson** par l'expérience dite de **Michelson-Morley** (1881). L'expérience consistait à mesurer une éventuelle variation de la vitesse de propagation de la lumière due au mouvement de la Terre sur son orbite par rapport à l'éther immobile. Compte tenu de la vitesse orbitale de la Terre, un déplacement de ≈ 1 interfrange était attendu. Aucun déplacement des franges d'interférences ne fut observé dans cette expérience ni par d'autres plus récentes (Joos, 1930). La vitesse de la lumière a la même valeur c quelle que soit sa direction par rapport à la trajectoire de la Terre.

7. Principe de la relativité restreinte

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide a même valeur dans toutes les directions de tout référentiel d'inertie : $c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$.

▷ Au contraire de l'hypothèse de l'éther (mouvement absolu), d'après le principe de la relativité, tout mouvement est **relatif** à un référentiel donné, d'où le nom **théorie de la relativité**.

5.2.2 Transformation de Lorentz

1. Introduction

Le principe de la relativité n'est applicable que si l'on substitue à la transformation de Galilée une autre transformation : la **transformation de Lorentz**. Si, dans un référentiel S, un événement est défini par ses

coordonnées espace-temps x, y, z, t, alors le même événement est défini par ses coordonnées x', y', z', t' dans un référentiel S' en translation uniforme de vitesse v le long de l'axe x par rapport à S (Fig. 5.5) :

Transformation de Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Symbole	Unité	Dénomination
x, y, z	m	coordonnées d'espace dans S
t	s	coordonnées de temps dans S
x', y', z'	m	coordonnées d'espace dans S'
t'	s	coordonnées de temps dans S'
v	m/s	vitesse de S' par rapport à S
c	m/s	vitesse de la lumière dans le vide

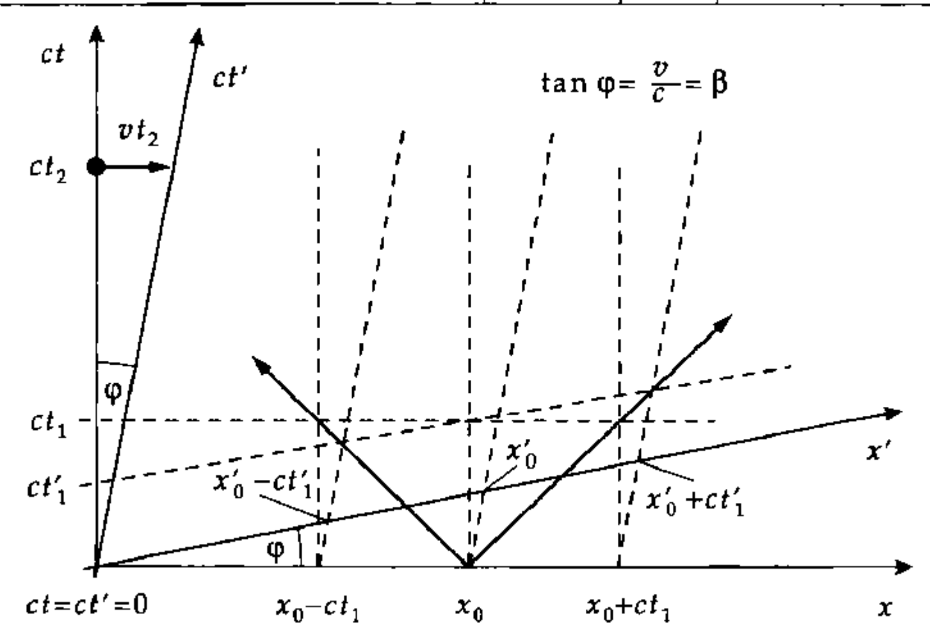


Fig. 5.5 : *Diagramme de Minkowski de la transformation de Lorentz : la ligne d'univers d'un signal lumineux, émis en ($x = x_0, t = 0$) est représentée. Puisque la lumière se propage avec la même vitesse c dans les deux systèmes, on déduit facilement les échelles des axes du système S'*

▷ La réciproque de la transformation de Lorentz s'obtient en changeant le signe de la vitesse relative de S par rapport à S' et en échangeant les coordonnées espace-temps. S se déplace à la vitesse $-v$ par rapport à S'.

2. Facteur relativiste

γ : grandeur caractéristique de la transformation de Lorentz :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dans le cas de vitesses v faibles par rapport à la vitesse de la lumière, on a :

$$v \ll c \quad \Longrightarrow \quad \frac{v}{c} \ll 1 \quad \Longrightarrow \quad \gamma \approx 1$$

● Pour $v \ll c$ la transformation de Lorentz est équivalente à la transformation galiléenne.

■ Ceci nous assure que la transformation de Lorentz ne contredit pas l'expérience, car il est difficile, dans la vie courante, de vérifier les effets relativistes qui ne se manifestent qu'à des vitesses très élevées.

3. Diagramme de Minkowski

Le diagramme de Minkovski et le point d'univers donnent une représentation graphique de la transformation de Lorentz. Un événement est représenté par son **point d'univers** (x,t) dans un plan où l'on porte en abscisse le lieu x de l'événement et en ordonnée son temps t (Fig. 5.6).

Ligne d'univers : représentation de la trajectoire d'une particule. On choisi les échelles des axes de façon à ce qu'un mouvement à la vitesse de la lumière, $x = c \cdot t$, soit représenté par une droite à 45°. Les unités d'abscisse et d'ordonnée sont respectivement la seconde-lumière (sl) et la seconde.
La **seconde-lumière** est la distance parcourue par la lumière en une seconde : 1 sl $\approx 3 \cdot 10^8$ m.

▷ Dans un diagramme de Minkowski, on ne peut représenter que des mouvements à une dimension ; la représentation de mouvements à deux ou trois dimensions nécessiterait des diagrammes à trois ou quatre dimensions.

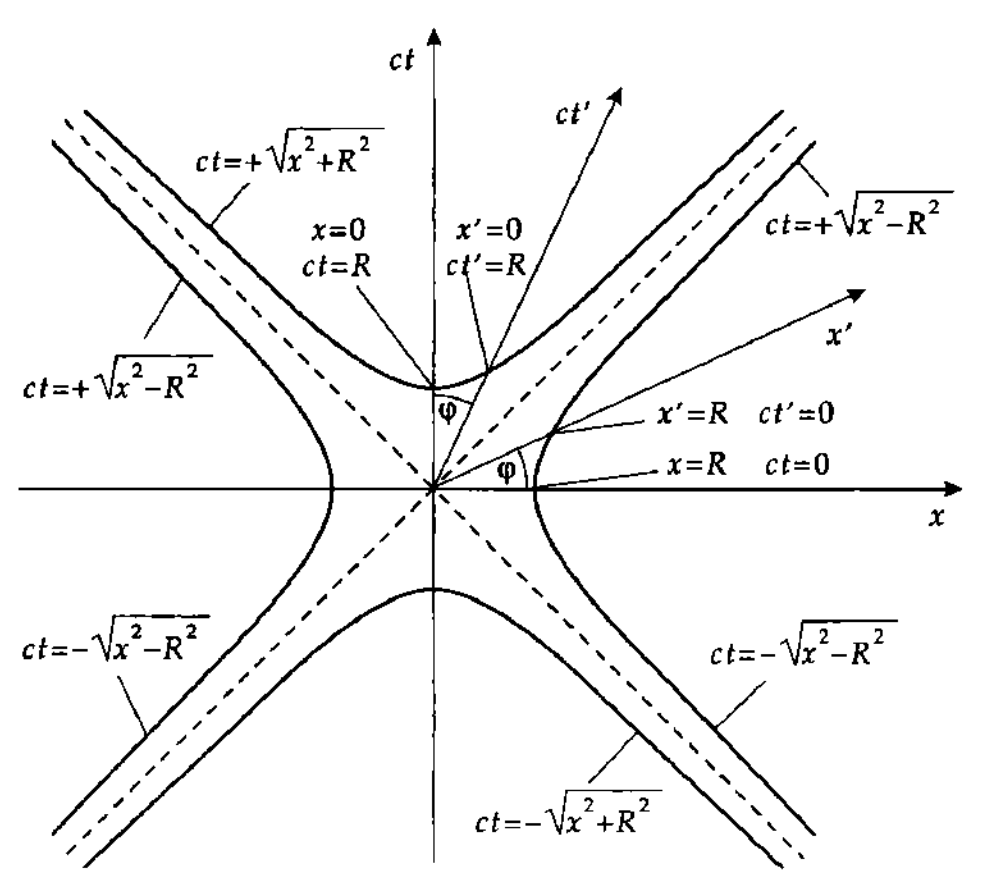


Fig. 5.6 : *Diagramme de Minkowski : x, t et x', t' sont les axes des deux systèmes, les intersections des hyperboles $ct = \pm\sqrt{x^2 \pm R^2}$ avec les axes des x définissent les points $x = \pm R$ et $x = \pm R'$*

Pour la représentation de la transformation de Lorentz par un diagramme de Minkowski, les origines du système fixe et du système mobile sont au même point d'univers : $(t' = 0, x' = 0)$ est confondu avec $(t = 0, x = 0)$. L'équation de l'axe x' de S' a pour équation :

$$t' = 0 \quad \Longrightarrow \quad \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{v}{c^2}x$$

Elle représente une droite faisant l'angle φ, défini par $\tan\varphi = \frac{v}{c}$, avec l'axe x. L'axe t' est situé à l'angle $-\varphi$ de l'axe t. Les échelles des axes du système S' doivent être corrigées du facteur $1/\gamma$ ($\rightarrow$ *Dilatation du temps et Contraction des longueurs*).

▶ Pour un observateur du système S', le système S se déplace à la vitesse $-v$, par conséquent, dans une telle représentation, le signe de l'angle φ doit être changé.

4. Comparaison avec la transformation de Galilée

La différence fondamentale entre la transformation de Lorentz et la transformation de Galilée consiste dans l'affirmation que les échelles de temps ne peuvent être les mêmes dans deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre. Ceci résulte de la constance de la vitesse de la lumière.

■ Deux événements qui se produisent au même instant $t_1 = t_2$ à des endroits différents dans un repére donné, paraissent se produire à des instants t'_1 et t'_2 différents dans un repère en mouvement par rapport au premier. Cette **relativité de la simultanéité** est phénomène général de la théorie de la relativité et une conséquence du fait que l'information de l'instant d'occurence d'un événement ne peut pas être transmise d'un observateur à un autre plus vite que la vitesse de la lumière.

● Un phénomène physique ne peut pas se propager plus vite que la lumière dans le milieu considéré.

Le facteur relativiste γ n'est pas défini pour des vitesses $v = c$ (division par zéro) et serait imaginaire pour des vitesses $v > c$ (racine d'un nombre négatif). De ce fait, il est impossible que des corps matériels (dotés de masse) puissent atteindre des vitesses $v \geq c$. Ceci est confirmé par le **théorème d'addition des vitesses**.

5. Tachyons

Particules hypothétiques qui se propageraient à des vitesses supérieures à celle de la lumière, mais qui ne pourraient exister à des vitesses $v < c$ et dont la masse s'exprimerait par un nombre imaginaire.

[M] Dans le vide, les tachyons pourraient émettre un rayonnement ($\rightarrow$ *rayonnement Cherenkov*). Un tel rayonnement est émis lorsqu'une particule se déplace avec une vitesse supérieure à la $\rightarrow$ *vitesse de phase* de la lumière (par exemple dans un milieu optique).

5.2.2.1 Addition des vitesses

La transformation de Lorentz a pour conséquence qu'un corps qui se déplace à la vitesse $\vec{u}'$ dans le repère S' a, dans un autre repère S, une vitesse $\vec{u}$ qui dépend de la vitesse v de S' par rapport à S, mais qui ne se

calcule pas par simple addition de $\vec{u}'$ et de v. Elle s'obtient à partir des relations :

Théorème d'addition des vitesses

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}$$
$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)}$$
$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right)}$$

Symbole	Unité	Dénomination
u_x, u_y, u_z	m/s	vitesse dans S
u'_x, u'_y, u'_z	m/s	vitesse dans S'
v	m/s	vitesse relative de S' le long de l'axe x de S

▷ Les relations réciproques de $\vec{u}'$ en fonction de $\vec{u}$ s'obtiennent en changeant le signe de v en $-v$.

Ces expressions sont obtenues en appliquant la transformation de Lorentz à une particule en mouvement rectiligne uniforme dans un repére mobile S' :

$$x' = u'_x t$$
$$y' = u'_y t$$
$$z' = u'_z t$$

À partir des expressions obtenues pour $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ pour un observateur du système au repos S, on peut alors examiner le chemin parcouru ($\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$) pendant l'intervalle de temps $\mathrm{d}t$. Après différentiation on a :

$$\mathrm{d}x = \gamma \mathrm{d}x' + \gamma v \mathrm{d}t'$$
$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}y'$$
$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}z'$$
$$\mathrm{d}t = \gamma \mathrm{d}t' + \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x' \quad ,$$

Dans le repére mobile S' s'écoule un intervalle de temps $\mathrm{d}t'$ différent de celui du repére immobile S.

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma \mathrm{d}x' + \gamma v \mathrm{d}t'}{\gamma \mathrm{d}t' + \gamma \frac{v}{c^2}\mathrm{d}x'} = \frac{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}}$$

Les vitesses u_y et u_z s'obtiennent de manière analogue.

- Pour des vitesses relatives faibles $v \ll c$, l'addition relativiste des vitesses tend vers l'expression d'addition classique de la transformation de Galilée $u = u' + v$.
- En revanche, pour des vitesses relatives v proche de la vitesse de la lumière, la vitesse relativiste résultante est plus petite $u < u' + v$.

- En particulier, pour $u'_x \approx c$ et $v \approx c$, on a :

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \approx \frac{c + c}{1 + \frac{c}{c^2}c} \approx c$$

- La vitesse d'un corps matériel ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière.

5.2.3 Effets relativistes

Les **effets relativistes** sont prédits par la transformation de Lorentz.

5.2.3.1 Contraction des longueurs

1. Distances dans le référentiel mobile S'

La distance entre deux points de l'axe x' du système S' est : $l' = x'_2 - x'_1$.

Dans le système immobile S, elle est obtenue par la transformation de Lorentz :

$$l = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 + vt') - \gamma(x'_1 + vt') = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma l'$$

La longueur du même segment apparaît ainsi plus courte du facteur γ dans le système au repos S.

2. Contraction des longueurs

La longueur d'un segment du système mobile S' apparaît à un observateur d'un système au repos S plus courte du facteur :

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

▷ Le principe de la relativité conduit à un paradoxe apparent, puisque la longueur d'un segment du système fixe S apparaît également contractée à un observateur du système mobile S'. Ce paradoxe peut être levé en considérant la relativité de la simultanéité dans les deux systèmes.

5.2.3.2 Dilatation du temps

1. Intervalle de temps dans le système mobile S'

L'intervalle de temps Δt, mesuré dans le système immobile S, séparant deux événements produits aux instants t'_1 et t'_2 en x'_1 et x'_2 du système mobile S' est, d'après la transformation de Lorentz :

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_2 - t_1 = \gamma\left[\left(t'_2 + \frac{v_{x'_2}}{c^2}\right) - \left(t'_1 + \frac{v_{x'_1}}{c^2}\right)\right] \\ &= \gamma(\Delta t' + \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1))\end{aligned}$$

Si les deux événements se produisent au même endroit de S', $(x'_2 = x'_1)$:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \gamma(\Delta t')$$

2. Dilatation du temps

L'intervalle de temps séparant deux événements d'un référentiel en mouvement apparaît, à un observateur fixe, augmenté du facteur :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

▷ La réciproque est encore vraie, chacun des observateurs des systèmes S et S' constatent que les horloges de l'autre observateur retardent (la durée d'un événement est allongée).

De plus, deux événements simultanés ($\Delta t' = 0$) produits en x'_1 et x'_2 du système mobile S', n'apparaissent pas simultanés à un observateur du système immobile S :

$$\Delta t = \gamma \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1)$$

▷ Si la simultanéité de deux évènements était conservée dans une transformation de Lorentz, l'axe x devrait être parallèle à l'axe x' dans le diagramme de Minkowski.

La relativité de la simultanéité permet la levée du paradoxe mentionné plus haut. À deux points x'_1 et x'_2 du système mobile S' correspondent les lignes d'univers :

$$x'_1(t') = x'_1 = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad x'_2(t') = x'_2 = \text{const.}$$

Dans le système fixe S, la ligne d'univers du premier point apparaît comme

$$x_1(t) = \gamma(x'_1 + vt') = \gamma\left[x'_1 + v\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x_1\right)\right]$$

où la transformation de Lorentz a été appliquée à la coordonnée t', afin d'obtenir la coordonnée t. En ordonnant en x_1, on a :

$$x_1(t)\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\gamma^2\right) = \gamma(x'_1 + v\gamma t)$$

En remplaçant γ par sa définition :

$$\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\gamma^2\right) = \gamma^2$$

d'où l'équation de la ligne d'univers dans S :

$$x_1(t) = \frac{x'_1}{\gamma} + vt$$

De même pour le deuxième point :

$$x_2(t) = \frac{x'_2}{\gamma} + vt$$

Dans le système S, les deux points se déplacent par conséquent à la même vitesse v. Leur distance l mesurée au même instant t dans S est :

$$l = x_2(t) - x_1(t) = \frac{x'_2 - x'_1}{\gamma} = \frac{l'}{\gamma}$$

ce qui constitue la relation inverse de celle correspondant à la mesure de la distance l ci-dessus, au même instant t', dans le système mobile S'.

Laquelle des deux relations utiliser dépend des conditions expérimentales. En général on utilise un étalon de longueur immobile dans l'un des systèmes ; les extrémités de l'instrument de mesure émettent un signal au même instant. Des coordonnées d'univers de ce système, on déduit la distance des deux points dans le système de l'observateur. Ainsi le signal est simultané dans le système dans lequel se trouve l'instrument de mesure.

3. Exemple : rayonnement cosmique

Le rayonnement cosmique, lorsqu'il pénètre dans l'atmosphère terrestre, par des collisions sur les molécules d'air, produit un rayonnement de grande énergie, principalement constitué de mésons. Les

mésons μ, produits à une altitude de $\approx$ 30 km, ont une durée de vie au repos de $2 \cdot 10^{-6}$ s. Avec une vitesse de $v = 0.9995\,c$ ($\gamma \approx 32$), dans l'hypothèse non relativiste, ces mésons ne pourraient franchir qu'une distance de $\approx$ 600 m et ne pourraient, par conséquent, pas être observés à la surface terrestre. En prenant en compte la dilatation du temps, la durée de vie de ces mésons est $32 \cdot 2 \cdot 10^{-6}$ s $\approx 6 \cdot 10^{-5}$ s. Cette valeur est suffisante pour que les mésons μ puissent être observés à la surface de la Terre.

5.2.4 Dynamique relativiste

Dynamique relativiste : généralisation des lois de la dynamique lorsque les vitesses v ne sont pas négligeables par rapport à la vitesse c de la lumière. Elle tient compte de la variation relativiste de la masse et conduit à l'équivalence masse-énergie.

5.2.4.1 Variation relativiste de la masse

1. Masse relativiste

La quantité de mouvement, en conséquence du théorème d'addition des vitesses de la théorie de la relativité, n'est conservée que si la masse est une fonction de la vitesse (Fig. 5.7). Considérons un choc mou (totalement inélastique) de deux corps de mêmes masses m animés des vitesses $u_1 = v$ le corps 2 étant au repos $u_2 = 0$ dans le système immobile S, soit : $[m(v) + m(0)]\,u = m(v)v$, où u est la vitesse finale des deux corps réunis. Dans le système S', animé de la vitesse v par rapport à S, le corps 1 est au repos $u'_1 = 0$ et le corps 2 a la vitesse $u'_2 = -v$. La vitesse finale u', d'après la conservation de la quantité de mouvement dans S' :

$$[m(0) + m(-v)]\,u' = -m(v)v$$

devrait être : $u' = -u$ ($m(-v) = m(v)$ devrait être valable dans toutes les directions de l'espace). Elle peut également être calculée à partir du théorème d'addition des vitesses :

$$u = \frac{u' + v}{1 + \dfrac{u'v}{c^2}} = \frac{-u + v}{1 - \dfrac{uv}{c^2}}$$

dont la résolution donne :

$$u = -\frac{c^2}{v}\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1\right)$$

De la limite classique $v \ll c$, par un développement limité, on obtient $u = v/2$. De la conservation de la quantité de mouvement on déduit alors :

Variation relativiste de la masse			**M**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0$$	$m(v)$	kg	masse à la vitesse v
	$m(0) = m_0$	kg	masse au repos
	v	m/s	vitesse du corps
	c	m/s	vitesse de la lumière
	γ	1	facteur relativiste

▷ La masse d'un corps dont la vitesse est proche de la vitesse de la lumière tend vers une valeur infinie. Ainsi, il est impossible de communiquer une vitesse proche de c à un corps matériel, car il faudrait disposer d'une énergie infinie.

Fig. 5.7 : *Variation relativiste de la masse*

2. Quantité de mouvement relativiste

$$\vec{\mathbf{p}} = m(v)\vec{\mathbf{v}} = \frac{m_0\vec{\mathbf{v}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 \vec{\mathbf{v}}$$

En utilisant cette expression, la conservation de la quantité de mouvement et les relations qui en sont dérivées sont valables sans modification.

3. Force relativiste

L'expression de la **force relativiste** est :

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{\vec{\mathbf{v}}^2}{c^2}}}\right)$$

Il faut tenir compte de la direction parallèle ou perpendiculaire de la force à la direction du déplacement de S' par rapport à S :

- v parallèle à l'axe x :

$$F_x = \frac{m_0 a_x}{(1 - \vec{\mathbf{v}}^2/c^2)^{3/2}} = m_0 \gamma^3 a_x$$

$$F_y = \frac{m_0 a_y}{\sqrt{1 - \vec{\mathbf{v}}^2/c^2}} = m_0 \gamma a_y$$

$$F_z = \frac{m_0 a_z}{\sqrt{1 - \vec{\mathbf{v}}^2/c^2}} = m_0 \gamma a_z$$

($\vec{\mathbf{a}}$ = vecteur accélération recherché)

● La force nécessaire pour accélérer un corps dans la direction parallèle au mouvement est augmentée du facteur γ^3 par rapport à la mécanique classique. Dans la direction perpendiculaire ce facteur est γ.

5.2.4.2 Énergie cinétique relativiste

1. Travail relativiste

Le travail relativiste, fourni pour l'accélération d'un corps est :

$$\Delta W = F\Delta s = m_0\gamma^3 a\Delta s = m_0\gamma^3 \frac{\Delta v}{\Delta t} v\Delta t = m_0\gamma^3 v\Delta v$$

(F : force agissante, Δs : chemin parcouru, Δv : accroissement de vitesse, Δt : intervalle de temps).

Pour accélérer un corps au repos ($u = 0$) jusqu'à la vitesse $u = v$, on a par intégration :

$$W = \int_0^v \frac{m_0 u}{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}} \mathrm{d}u = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$$

Énergie cinétique relativiste				**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$E_{\text{cin}} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} c^2 - m_0 c^2$	E_{cin}	J	énergie cinétique	
	m_0	kg	masse au repos	
	v	m/s	vitesse	
$= m_0\gamma c^2 - m_0 c^2$	c	m/s	vitesse de la lumière	
	γ	1	facteur relativiste	

▷ En mécanique classique $v \ll c$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \qquad E_{\text{cin}} \approx \frac{m_0}{2} v^2$$

2. Équivalence Masse-Énergie

Il n'est pas possible de définir le point zéro de l'énergie. En conséquence, on attribue à chaque masse une énergie totale relativiste $E = mc^2$, où m est la **masse relativiste**, variable avec la vitesse :

$$m = \gamma m_0$$

● **Équivalence Masse-Énergie** :
Un corps de masse m a l'**énergie totale relativiste** $E = mc^2$.
Un corps au repos a l'**énergie au repos** $E_0 = m_0 c^2$

■ De l'énergie peut être libérée si l'énergie de masse peut être transformée sous une autre forme d'énergie (par ex. : énergie de liaison dans des réactions exothermiques).

L'application de la théorie de la relativité aux particules élémentaires (théorie quantique des champs) conduit à de tels processus.

Antiparticules : chaque particule élémentaire possède son antiparticule, qui a la même masse et une charge égale mais de signe opposé. Lorsqu'une particule et son antiparticule se rencontrent, leur énergie de masse $2 \times (mc^2)$ peut se transformer en une autre forme d'énergie, en particulier sous forme de rayonnement électromagnétique (**dématérialisation** ou **annihilation** de paires de particule-antiparticule). À l'inverse,

un rayonnement électromagnétique d'énergie $E = h\nu$ suffisante peut conduire à la création d'une paire particule-antiparticule (**matérialisation** ou **création de paire**). On a également pu mettre en évidence de l'anti-matière, par exemple un atome d'anti-hydrogène constitué d'un anti-électron gravitant autour d'un anti-proton (→ *Physique nucléaire*).

3. Relation énergie-quantité de mouvement de particules relativistes

Pour des particules relativistes (qui se déplacent à des vitesses proches de c) :

Relation énergie-quantité de mouvement	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0^2 c^2$$	E	J	énergie totale relativiste
	p	kg m/s	quantité de mvt.
	m_0	kg	masse
	c	m/s	vitesse de la lumière

où E est l'énergie totale relativiste mc^2.

4. Énergie dans le centre de masse

E_{cm} : lors d'une collision de deux particules, la somme de leurs énergies mesurée dans le système de leur centre de masse (centre de gravité) :

$$E_{cm} = \sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_1 E_2 \left(1 - \frac{v_1}{c}\frac{v_2}{c}\right)\cos\theta}$$

(E_1, E_2 : énergie relativiste des particules 1 et 2 dans un système donné, v_1, v_2 : leurs vitesses dans ce système et θ : l'angle entre leurs trajectoires).
En particulier, si la particule 2 est au repos dans le système choisi (**système du laboratoire**), on a :

$$E_{cm} = \sqrt{m_1^2 c^4 + m_2^2 c^4 + 2E_{1lab}\, m_2\, c^2}$$

L'énergie dans le centre de masse caractérise l'**énergie disponible** lors de collisions. La vitesse dans le système du centre de masse est :

$$\frac{\vec{\mathbf{v}}_{cm}}{c} = \frac{\vec{\mathbf{p}}_{1lab}\, c}{E_{1lab} + m_2 c^2}$$

($\vec{\mathbf{p}}_{1lab}$: quantité de mouvement dans le système du laboratoire). Le facteur relativiste est :

$$\gamma_{cm} = \frac{E_{1lab} + m_2 c^2}{E_{cm}}$$

▷ En thermodynamique, la pression et l'entropie sont des invariants par rapport à la transformation de Lorentz. En revanche, la température et la quantité de chaleur dépendent de l'état de mouvement de leur référentiel.

5.3 Relativité générale et cosmologie

La **Théorie de la relativité générale** est une extension de la théorie de la relativité restreinte (A. Einstein 1911). Elle traite des systèmes en accélération (référentiels non inertiels) et des forces de gravitation. En particulier, la **gravitation** est reconsidérée dans le cadre mathématique de **l'espace courbe à quatre**

dimensions.

1. Principe de la relativité générale

Un référentiel d'inertie, placé dans un champ de gravitation, est équivalent à un référentiel en mouvement uniformément accéléré placé dans l'espace libre de gravitation. Aucune expérience ne permet à un observateur de distinguer s'il se trouve dans l'un ou l'autre de ces référentiels.

■ Un astronaute, dans une capsule freinée par les frottements de l'air, en chute vers la Terre avec une accélération équivalente à $-5/6g$, ne ressent plus que le $1/6$ restant de g. Il pourrait croire qu'il est en chute libre vers la Lune dont le champ de gravitation correspond à $1/6g$.

La coubure de l'espace est due à la présence de masses dans l'espace (à quatre dimensions) et se manifeste en relativité générale, entre autres, dans la gravitation. La distance entre deux points dépend de leur position dans l'espace et le temps, de la vitesse de la lumière et d'un coefficient : égal à 1 (courbure positive, espace fini sphérique), égal à 0 (courbure nulle, espace euclidien) ou égal à -1 (courbure négative, espace hyperbolique).

2. Mise en évidence de la relativité générale

- **Déviation de la lumière** dans le champ de gravitation du Soleil. Un rayon lumineux, issu d'une étoile lointaine, passant près du Soleil, subit une déviation de 1,75″ due à la courbure de l'espace. L'étoile semble être à un endroit différent de sa position réelle.
- **Rotation de la ligne des apsides**. La modification de la loi de Newton dûe à la forte gravitation des planètes internes, la ligne des apsides (ligne qui relie l'aphélie et le périhélie de l'orbite d'une planète) subit une rotation. Dans le cas de Mercure, déduction faite de l'influence des autres planètes, une rotation de 43″ par an subsiste.
- **Décalage vers le rouge** du spectre d'émission de la lumière provenant d'astres de grande masse. D'après la théorie de la relativité générale, la lumière est également soumise à la gravitation. L'énergie que la lumière perd, en quittant le champ de gravitation d'une étoile, se traduit par un décalage des lignes spectrales vers les grandes longueurs d'ondes (infrarouge). L'effet, à peine perceptible dans le cas du Soleil, est particulièrement visible dans le cas de **quasars**.

Quasar : objets célestes très lumineux donc visibles de très loin dans l'espace et le temps (plus de 12 millions d'années lumière). Découverts en 1960, ils se caractérisent par l'émission d'ondes radioélectriques dont l'énergie 100 à 1000 fois supérieure à celle rayonnée par une galaxie pourrait provenir de l'énergie gravitationnelle d'un trou noir de masse de l'ordre d'un milliard de masses solaires.

Trou noir : une étoile dont le champ de gravitation est si intense que la lumière ne peut s'en échapper. La radioastronomie (ondes radio, infrarouge, rayons X et γ) n'a pas encore permis de vérifier si le centre de notre galaxie renfermait un trou noir géant.

3. Propriétés de l'Univers

La théorie de la relativité générale, en fonction de la masse disponible, prévoit en univers infini ou fini. Un univers fini peut être comparée à la surface d'une sphère : elle n'a pas de frontières, cependant elle est finie.

Effet Hubble : preuve de l'expansion de l'univers. Les spectres d'émission d'étoiles lointaines montrent un déplacement Doppler vers l'infrarouge, donc s'éloignent de nous.

Constante de Hubble H :

$$H = 50 \text{ à } 100\,\text{km/s par Mpc}$$

(1 Mpc = 1 Megaparsec = 3,26 million années lumière) mesure l'accroissement de vitesse : dans l'espace courbe, chaque observateur croit que les autres s'éloignent de lui (comme des points à la surface d'un ballon de baudruche que l'on gonfle).

Selon la masse disponible dans l'univers, celui-ci pourrait être continuellement en expansion (**Univers ouvert**), ou, après avoir atteint son expansion maximale, se contracter (**Univers fermé**).

Big Bang : hypothèse selon laquelle l'univers a été créé il y a $\approx$ 1 à $2 \cdot 10^{10}$ ans à partir d'**un** point (**singularité**) de densité d'énergie extrême. Une expansion rapide, obéissant aux lois de la relativité générale, a suivi et a entraîné son refroidissment. Cette théorie du big bang, selon laquelle l'Univers a commencé par une gigantesque explosion, encore contestée en 1950, est devenue la base de la cosmologie moderne. En particulier, elle explique l'expansion de l'Univers mise en évidence par Edwin Hubble (1930). Les récentes découvertes de la physique des particules ont permis de décrire l'histoire de l'Univers à partir de l'instant t = 10^{-43} s après le Big Bang : d'un diamètre initial de 10^{-26}m et à la température de $\approx 10^{32}$ K, il est dans un état de "vide quantique". L'Univers traverse une phase d'inflation de t = 10^{-35} s à t = 10^{-32} s. lors de laquelle a lieu la matérialisation de quarks, d'électrons, de neutrinos et de leurs antiparticules avec un très léger excédent de matière par rapport à l'antimatière (1 pour un milliard). À t $\approx 10^{-6}$ s, la température plus basse (10^{13} K) permet des associations de quarks stables sous forme de protons, de neutrons et de leurs antiparticules. L'annihilation des particules et des antiparticules aboutit à un Univers dominé par le rayonnement (ère radiative) et où ne subsiste qu'un infime résidu (un milliardième du nombre initiale) de particules.
La **nucléosynthèse** : formation de noyaux légers tels que l'hélium a lieu entre t = 3 et 30 min. À t = 500 000 ans, la température n'étant plus que de 3 000 K, des atomes stables se forment, les électrons liés à ces atomes ne s'opposent plus au rayonnement, qui se dissocie de la matière : l'Univers est devenu transparent. Après cette phase de dissociation, la densité moyenne croît et les forces de liaison gravitationnelle peuvent l'emporter sur l'expansion si la densité moyenne dépasse la valeur critique ($\approx$ 5 $10^{-30} g/cm^2$). Une phase de contraction peut alors ramener l'Univers à son point initial (Univers fermé). Sinon, il se dilatera éternellement (Univers ouvert). Les estimations actuelles de la densité ne permettent pas de déterminer si l'Univers est ouvert ou fermé.

Rayonnement fossile ou cosmologique : ce rayonnement qui baigne tout l'Univers est encore perceptible aujourd'hui après le 15 milliards d'années écoulées depuis la phase de dissociation. Sa température caractéristique n'est plus que de 2,7 K en raison de l'expansion de l'Univers. Découvert en 1965 par Arno Penzias et Robert Wilson, le rayonnement fossile apporte une confirmation à la théorie du big bang.

5.3.1 Étoiles et galaxies

1. Les étoiles et leur classification

Étoile : corps céleste qui brille par sa lumière propre. Elle produit son énergie propre par **fusion thermonucléaire** en son centre à des températures très élevées ($\approx 10^6$ K).

Classification :
Les étoiles sont classées par leur grandeur (magnitude) et la longueur d'onde (couleur) de la lumière qu'elles émettent. Les distances typiques entre étoiles dans les galaxies sont de l'ordre de l'année-lumière, les distances entre galaxies de l'ordre de plusieurs millions d'années-lumière. À l'oeil nu, on peut observer de 5 000 à 10 000 étoiles, avec une petite lunette jusqu'à 100 000. Environ 10 milliards d'étoiles sont observables à l'aide d'instruments astronomiques.

Galaxie (voie lactéee) : ensemble d'étoiles formant un système dynamique. Sa forme peut s'apparenter à un disque ou une spirale de $\approx$ 30 000 parsec de diamètre (100 000 Al), de $\approx$ 1000 Al d'épaisseur et de masse totale $\approx$ 200 millions de masses solaire, le Soleil se trouve excentré dans un des bras de spirale à

une distance de ≈ 28 000 Al. La trace du disque galactique est visible dans le ciel nocturne sous la forme de la **Voie lactée**. Notre galaxie est entourée d'un halo d'étoiles vieilles (généralement rouges) groupées en amas sphériques **amas globulaires** renfermant de 10 000 à 1 million d'étoiles. Les étoiles jeunes (bleues) se situent préférentiellement le long des bras spiraux de la galaxie.

Les étoiles sont classées suivant leur éclat apparent d'après une échelle qui tient compte d'une classification empirique établie par Hipparque (130 av. J.C.). Cette échelle empirique a été remplacée par l'échelle des **magnitudes apparentes** m qui varient comme l'opposé de 2,5 fois le logarithme décimal de l'éclat apparent, le zéro étant fixé arbitrairement par un choix d'étoiles standards. Dans cette échelle, les astres très brillants ont des magnitudes apparentes petites, alors que les astres faibles ont des magnitudes élevées. La plupart des étoiles visibles à l'oeil nu sont répertoriées d'après la classification de Bayer (1603), utilisant une lettre grecque pour désigner l'éclat dans sa constellation. Si l'alphabet grec ne suffit pas, on utilise une lettre latine suivie d'un nombre.

■ L'étoile la plus brillante dans la constellation Cassiopée :

Nom propre	Schedir
Nomencl. de Bayer	α Cassiopée (abbrév. : α Cas)

2. Magnitude et classe spectrale

Magnitude d'une étoile : grandeur qui caractérise son éclat vu de la Terre. Elle est liée à sa luminosité absolue et à sa distance à la Terre. Initialement échelonnée entre 1^m et 6^m (m = du latin magnitudo), s'étend maintenant de la luminosité du Soleil, -27^m, à l'étoile de plus faible magnitude 23^m. Un degré de magnitude correspond à une diminution de luminosité d'un facteur $10^{0,4} = 2,512$.

Magnitude	Exemple
-27^m	Soleil
-13^m	pleine Lune
-11^m	demi Lune
-1^m à -5^m	planète proche
jusqu'à -2^m	étoiles les plus brillantes (Sirius, Vega)
$+6^m$	limite de visibilité pour l'oeil
$+14^m$	Pluton
$+23^m$	limite de résolution photographique

Classe spectrale (types spectraux) : classification du spectre d'émission d'une étoile. La diversité des spectres observés est fonction de la température superficielle pouvant aller de $2.500°K$ à $35.000°K$. Les catégories désignées par les lettres W, O, B, A, F, G, K, M sont subdivisées en 10 sous-catégories allant de 0 à 9.

Le spectre d'une étoile est constitué de **bandes d'émission** larges entrecoupées de **lignes d'absorption**. Les classes spectrales sont répertoriées par une majuscule latine et un nombre.

■ La classe spectrale du Soleil est G 2, la classe spectrale d'Aldébaran est K5, la classe spectrale de Bételgeuse est M0.

● La classe spectrale d'une étoile est en étroite relation avec la température de sa surface.

5.3.1.1 Évolution des étoiles

1. Source d'énergie des étoiles

Une étoile se forme par contraction de fragments de matière interstellaire devenue instable. Elle tire son énergie des processus de fusion thermonucléaires qui s'établissent grâce à une élévation de température de plusieurs millions de degrés résultant de fortes compressions. La fusion de l'hydrogène, catalysée par des noyaux de carbone et d'azote, aboutit à la formation d'hélium (**cycle de Bethe** ou **cycle du carbone**). La combustion de l'hydrogène est relativement lente et dépend de la masse de l'étoile : $\approx$ 50 millions d'années pour une étoile de 1 masse solaire et $\approx$ 100 000 ans pour une étoile de 10 masses solaires. La durée de combustion est inversement proportionnelle à la masse de l'étoile.

■ En 4,5 milliards d'années d'existence, le Soleil n'a consumé que 0,3% de sa masse ; dans des étoiles de masse plus élevée la combustion est beaucoup plus rapide.

Lorsque la majeure partie de l'hydrogène est consumée, l'énergie produite par l'étoile diminue, entraînant une rapide contraction. L'évolution ultérieure d'une étoile dépend beaucoup de sa masse. Pour une étoile de masse $\geq$ 1 masse solaire, la compression fait croître la température centrale jusqu'à quelques millions de degrés K favorisant alors des processus de fusions de noyaux plus lourds jusqu'au carbone. Quand la masse d'un étoile est inférieure à 0,005 masse solaire, les réactions de fusion ne peuvent pas s'amorcer et l'étoile continue à se contracter jusqu'à ce qu'elle ne rayonne plus et devient une **naine noire**.

■ Le Soleil n'atteindra cet état probablement que dans $\approx$ 3,5 milliards d'années. Les étoiles de masse plus élevée, après combustion, deviennent instables et forment des étoiles pulsantes, puis des novae et supernovae enfin des naines blanches, des étoiles à neutrons ou des trous noirs.

2. Étoiles particulières

Étoile double : un système de deux étoiles qui gravitent l'une autour de l'autre (autour de leur centre de gravité).

Les **étoiles variables** : présentent des fluctuations d'éclat irrégulières ou périodiques qui peuvent résulter d'instabilités dans le processus de combustion ou, dans le cas d'étoiles doubles, de l'occultation d'une étoile par l'autre (variable à éclipse).

Nova : étoile dont l'éclat varie brusquement de 7 à 10 magnitudes en l'espace d'un jour par expulsion des couches gazeuses externes, puis décline lentement pendant plusieurs mois pour retourner à son état initial. Une faible partie de la masse stellaire seulement est consumée dans ce processus qui, dans certains cas, peut se reproduire périodiquement. Jusqu'à présent, dans notre voie lactée, 166 novae ont été observées.

Supernova : étoile de grande masse en phase finale d'évolution. Le noyau subit un brutal effondrement gravitationnel dégageant une très grande énergie. Après l'explosion, une supernova se transforme en naine blanche ou en étoile à neutrons. Les restes de l'explosion constituent des sources de rayonnements électromagnétiques et se regroupent en **structures filamenteuses** ou en amas nébuleux en expansion. Les supernovae sont beaucoup plus rares que les novae, leur éclat peut varier de 20 ordres de magnitude (100 millions de fois plus lumineux). Depuis le début de l'ère chrétienne 7 à 10 supernovae ont été observées. La nébuleuse du Crabe est constituée des restes d'une supernova observée en $\approx$ 1054 de notre ère. La supernova SN1987 du Grand Nuage de Magellan constitue l'observation la plus récente (février 1987) : elle a donné lieu à une intense émission de neutrinos.

Pulsar : étoile à neutrons en rotation rapide et fortement magnétisée, qui constitue une source caractérisée par l'émission de courtes impulsions périodiques d'intensité variable. Les périodes se situent entre la milliseconde (**pulsar milliseconde**) et plusieurs secondes.

Étoile à neutrons : les étoiles massives, après un stade de dilatation des couches externes (phase supergéante) deviennent des supernovae. Lorsqu'une supernova a cédé la majeur partie de son énergie, le noyau stellaire résiduel subit un effondrement brutal dû à son champ de gravitation ; la forte compression qui en résulte conduit à la formation d'une masse compacte de neutrons par interaction des électrons du cortège atomique avec les protons du noyau ($\rightarrow$ *interaction faible*). Le rayon d'une étoile à neutrons est typiquement de ≈ 10 km et sa masse volumique de $\approx 3 \cdot 10^{17}$ kg/m^3.
La contraction d'un noyau stellaire de plus de trois masses solaires entraîne des forces de gravitation qui dépassent les limites de résistances de la matière ; par effondrement, toute la masse est contenue dans une sphère de quelques kilomètres de rayon, un **trou noir** se forme.

6 Mécanique des corps déformables

6.1 Élasticité

Un solide réel n'est jamais parfaitement rigide : soumis à des forces, il se déforme. Les déformations s'accompagnent de réactions du solide s'opposant aux forces agissantes, les équilibrant si le solide reste au repos.

On peut distinguer diverses déformations : allongement résultant de forces de traction, contraction ou écrasement dû à une compression, flexion sous l'action d'un couple fléchissant et glissement par un couple cisaillant. À ces déformations on associe des coefficients caractérisant les propriétés mécaniques d'un solide et reliant les déformations aux forces agissantes. Le **diagramme effort/déformation** (Fig. 6.1) représente schématiquement l'allure des variations relatives de la déformation $\frac{\Delta l}{l}$ en fonction de la force agissante par unité de surface *F/S*. Pour des petites valeurs de cette force, la déformation croît linéairement avec elle et est réversible. Au-delà d'une certaine valeur L_e (limite élastique) la déformation augmente plus rapidement et ne disparaît pas entièrement lorsqu'on supprime la force (déformation permanente). Enfin, la force augmentant, la rupture du solide a lieu (limite de rupture R).

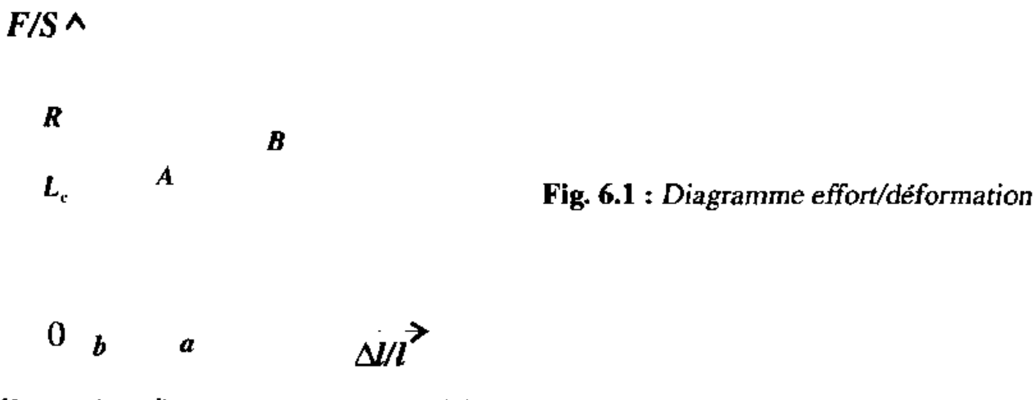


Fig. 6.1 : *Diagramme effort/déformation*

Une **déformation élastique** augmente linéairement avec la force agissante et est réversible, le solide reprend sa forme originale, lorsque les forces cessent d'être appliquées.

Une **déformation plastique** est un processus irréversible, la déformation persiste, le solide ne reprend pas sa forme initiale lorsque l'effort cesse d'être appliqué ; le solide est le siège d'une déformation permanente.

6.1.1 Contrainte (effort, sollicitation)

1. Définition et propriétés de la contrainte

Contrainte : force interne d'un solide, rapportée à l'unité de surface, provoquée par des actions extérieures. Les efforts s'exerçant dans un solide sont décrits par les forces agissant sur les volumes élémentaires du solide. Ces éléments de volume subissent alors des **déformations** .

Contrainte S : rapport de la force à l'élément de surface sur lequel elle agit.

La **contrainte normale** σ est la composante normale à l'élément de surface de la contrainte.

La **contrainte tangentielle** τ est la composante tangentielle à la surface élémentaire de la contrainte. Elle agit parallèlement à la surface et dans le plan d'une face d'un élément de volume du solide.

Contrainte				$\mathbf{ML^{-1}T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\vec{\mathbf{S}} = \dfrac{\Delta\vec{\mathbf{F}}}{\Delta A}$	$\vec{\mathbf{S}}$	N/m^2	vecteur contrainte	
$\vec{\sigma} = \dfrac{\Delta\vec{\mathbf{F}}_n}{\Delta A}$	$\vec{\sigma}$	N/m^2	contrainte normale	
$\vec{\tau} = \dfrac{\Delta\vec{\mathbf{F}}_t}{\Delta A}$	$\vec{\tau}$	N/m^2	contrainte tangentielle	
	ΔA	m^2	surface élémentaire	
	$\Delta\vec{\mathbf{F}}$	N	force agissante	
	$\Delta\vec{\mathbf{F}}_n$	N	composante normale de F	
	$\Delta\vec{\mathbf{F}}_t$	N	composante tangentielle de F	

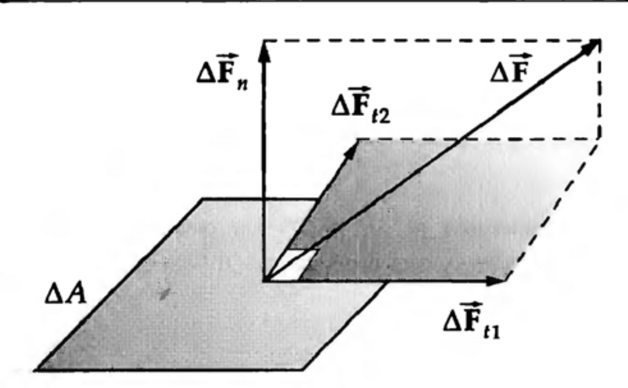


Fig. 6.2 : *Décomposition de la force $\vec{\mathbf{F}}$ appliquée à la surface ΔA, en sa composante normale $\vec{\mathbf{F}}_n$ et deux composantes tangentielles*

Newton par mètre^2, N/m^2, unité SI de la contrainte :
1 N/m^2 est la contrainte qui résulte de l'application d'une force de 1 N sur une surface de 1 m^2.

▸ L'ordre de grandeur typique des contraintes dans un solide est le MN/m^2 = N/mm^2.

▸ À une sollicitation à la compression correspond une contrainte de signe négatif.

▸ On admet, en première approximation, que la section droite d'un solide n'est pas modifiée lors d'une déformation.

■ Une masse $m = 1$ kg est suspendue à un fil de diamètre $d = 1$ mm. La contrainte de traction subie par le fil est alors :
$$S = \frac{F}{A} = \frac{mg}{\pi(d/2)^2} = \frac{1\,\text{kg}\cdot 9,81\,\text{m/s}^2}{\pi\cdot(0,5\,\text{mm})^2} = 12,5\,\text{MN/m}^2$$

2. Tenseur des efforts

Les contraintes subies par un cube élémentaire d'un solide peuvent être décrites par les composantes des forces qui agissent sur chacune des faces de ce cube. Ces **neuf** composantes constituent le **tenseur des efforts** (contraintes) τ_{ij} :

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} = \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} = \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} = \sigma_z \end{pmatrix}$$

Fig. 6.3 : *Tenseur des efforts (ou tenseur des contraintes)*

- Le premier indice des éléments du tenseur des efforts désigne la direction de la normale à la surface sur laquelle la contrainte est appliquée et le deuxième indice indique la direction de la contrainte.

■ L'élément τ_{xy} est la composante suivant la direction y de la force s'exerçant sur la face perpendiculaire à l'axe x (yOz).

Les éléments diagonaux représentent **les contraintes normales** et les éléments non diagonaux les **contraintes tangentielles**. Pour que le cube élémentaire ne subisse pas de rotation, il faut que la somme des moments des forces appliquées soit nulle, cela entraîne les relations :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Le tenseur des efforts est symétrique, les neufs composantes se réduisent à six : trois efforts normaux et trois efforts tangentiels.

6.1.1.1 Traction, flexion, cisaillement, torsion

Les contraintes subies par un solide peuvent être décrites par une ou plusieurs des sollicitations simples suivantes :

Traction, extension ou compression : les forces extérieures se réduisent à deux forces égales, directement opposées, qui tendent à allonger (Fig. 6.4) ou comprimer le solide. Dans la direction perpendiculaire aux forces, une striction (Fig. 6.5) peut se produire dans le cas d'une traction ou une dilatation dans le cas d'une compression.

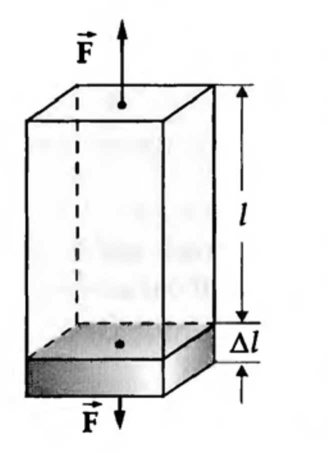


Fig. 6.4 : *Allongement*

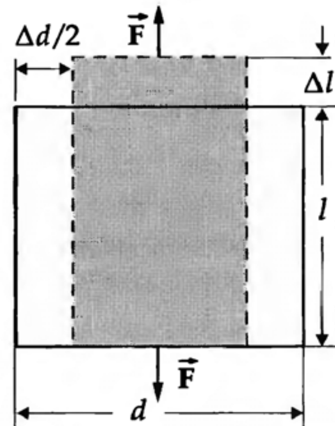


Fig. 6.5 : *Striction*

Pression isotrope (pression hydrostatique) : la pression est la même sur toutes les faces du solide (Fig. 6.6).

Flexion : les forces extérieures déterminent un moment fléchissant (Fig. 6.8). Dans un solide en flexion existe une **ligne neutre**, les parties du solide situées de part et d'autre de cette ligne subissent des contraintes de signe contraire, extension pour l'une, compression pour l'autre.

Cisaillement : les forces extérieures se réduisent à deux forces qui tendent à séparer le corps en deux tronçons en les faisant glisser, l'un par rapport à l'autre (Fig. 6.7), suivant le plan d'une section. Les forces agissent parallèlement au plan de cette section (contraintes tangentielles).

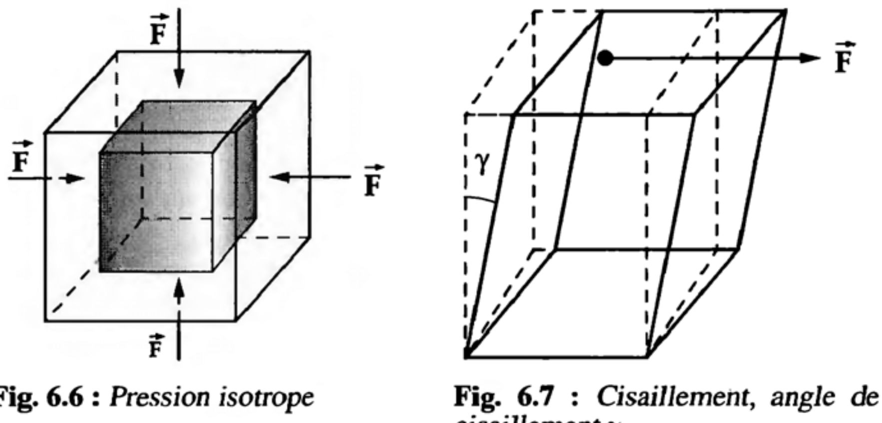


Fig. 6.6 : *Pression isotrope*

Fig. 6.7 : *Cisaillement, angle de cisaillement* γ

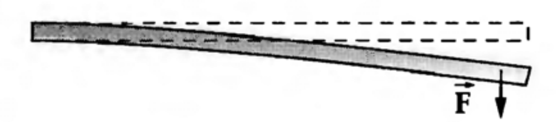


Fig. 6.8 : *Flexion*

Torsion : les forces extérieures se réduisent à deux **couples** de sens contraires ayant même direction que l'axe géométrique du solide. L'un de ces couples peut être remplacé par un encastrement. Pour un cylindre, sous l'effet du couple de torsion, les génératrices du cylindre s'enroulent autour de son axe géométrique suivant des hélices.

6.1.2 Déformation élastique

Une déformation élastique entraîne la modification de la forme géométrique d'un solide sous l'action de forces extérieures. Le solide reprend sa forme initiale lorsque l'action de ces forces cesse.

Méthode des éléments finis : pour décrire la déformation d'un solide, on considère la déformation subie, sous l'action des contraintes, par une petite partie de dimensions finies de son volume. La déformation globale est calculée après décomposition du solide en de tels éléments finis.

On distingue deux déformations simples d'un cube :

- la **dilatation** ε : la longueur d'un ou plusieurs côtés change, mais les angles entre les faces restent constant :
  $$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$
  où l est la longueur initiale d'un côté et Δl sa variation.

▷ Les contractions sont considérées comme des dilatations négatives.

- le **cisaillement** γ : la longueur des côtés reste inchangée, les angles entre les arêtes changent lors de la déformation. Dans un parallélépipède rectangle, γ exprime la variation de l'angle (en radians) des arêtes concernées par rapport à l'angle droit.

En pratique, on rencontre les quatre cas suivant :

- **allongement, contraction**
- **dilatation transversale, striction**
- **compression isotrope**
- **cisaillement**

6.1.2.1 Allongement, contraction

1. Propriétés de l'allongement

L'**allongement** ou la **contraction** est produit par une force de traction ou de compression extérieure exercée sur le solide. La variation de longueur, proportionnelle à la force exercée, suit la **loi de Hooke** dans le domaine d'élasticité.

Contrainte = module d'élasticité × allongement relatif

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma \qquad \sigma = E\varepsilon$$

Symbole	Unité	Dénomination
ε	1	allongement relatif
E	N/m^2	module d'élasticité
σ	N/m^2	contrainte normale

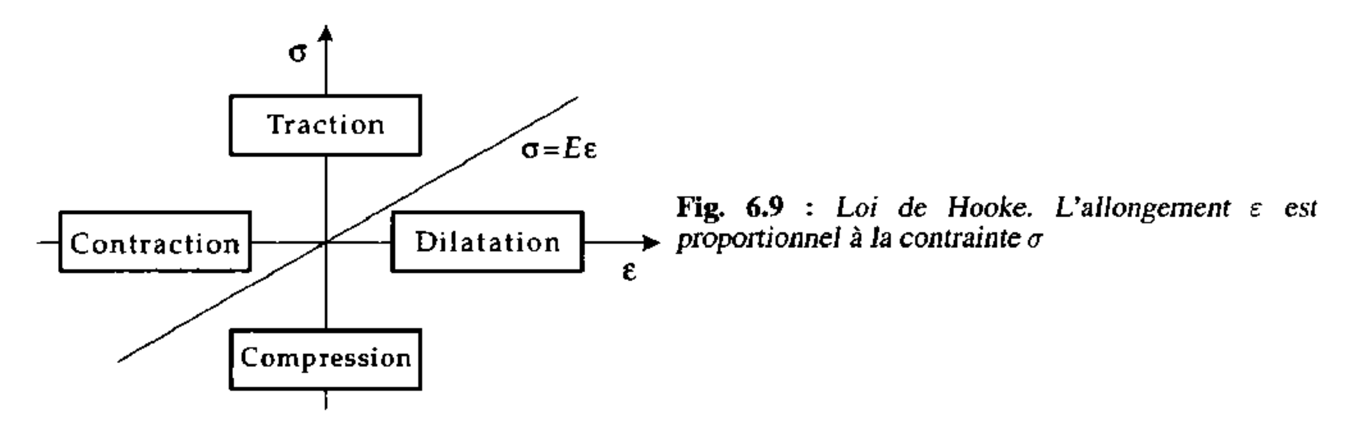


Fig. 6.9 : *Loi de Hooke. L'allongement* ε *est proportionnel à la contrainte* σ

2. Module d'élasticité

Le **module d'élasticité** E (ou **module d'Young**) mesure la contrainte normale σ (qui produit l'allongement relatif $\varepsilon = \Delta l/l$). E est caractéristique d'un matériau. Dans le système SI :

$$[E] = \frac{N}{m^2}$$

exprimé généralement en $N/mm^2 = MN/m^2$ ou GN/m^2. Les valeurs de E se situent typiquement entre 10^4 et 10^5 N/mm^2 (→ *Table 8.2*), et dépendent de la température.

Constante d'élasticité α : valeur inverse du module d'élasticité E. Elle permet de calculer l'allongement produit par une traction donnée :

$$\alpha = \frac{1}{E}$$

Unité SI de la constante d'élasticité :

$$[\alpha] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{N}}$$

▷ La loi de Hooke n'est valable que pour de petites élongations, dans les cas différents, la relation entre contrainte normale et allongement est **non linéaire**.

■ Le module d'élasticité de l'or est 81 000 N/mm^2. Pour contracter l'arête d'un cube d'or de 1% de sa longueur initiale l = 10 cm ($\varepsilon = -0{,}01$), il faut appliquer une force de compression de :

$$\sigma = E\varepsilon = -81 \cdot 10^9\,\mathrm{N/m^2} \cdot 0{,}01 = -810\,\mathrm{N/mm^2}$$

ceci peut être réalisé, par exemple, en posant sur sa face supérieure une masse

$$m = \frac{F}{g} = \frac{A \cdot \sigma}{g} = \frac{l^2\sigma}{g} = 826 \cdot 10^3\,\mathrm{kg} = 826\,\mathrm{t}$$

L'allongement relatif d'un élément cubique ε d'un solide est une fonction $\varepsilon(\sigma)$ de la contrainte normale σ qui lui est appliquée.

Le **module d'élasticité** représente la variation $\mathrm{d}\sigma$ de la contrainte normale qui entraîne une variation $\mathrm{d}\varepsilon$ de l'allongement relatif.

$$E(\sigma) = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon}$$

Par conséquent, le module d'élasticité est la dérivée par rapport à l'allongement relatif de la fonction $\sigma(\varepsilon)$; graphiquement, c'est la pente de la courbe de contrainte normale.

6.1.2.2 Striction, contraction transversale

1. Définition de la striction

La **striction** désigne la variation de dimension d'un corps dans la direction perpendiculaire à la force appliquée.

● Une force de traction produit un allongement dans sa direction et une striction dans la direction perpendiculaire. Une compression produit une contraction dans sa direction et une dilatation dans la direction perpendiculaire.

La **striction relative** ou variation relative de la dimension transversale à la contrainte ε_t est proportionnelle à l'allongement relatif et à la contrainte normale :

Striction			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$\varepsilon_t = \frac{\Delta d}{d} = -\nu\varepsilon = -\frac{\nu}{E}\sigma$	ε_t	1	striction
	ν	1	coefficient de Poisson
	E	N/m^2	module d'élasticité
	σ	N/m^2	contrainte normale

2. Coefficient de Poisson

Le **coefficient de Poisson** est le rapport de la variation relative de la dimension transversale $\Delta d/d$ à la variation relative de longueur $\Delta l/l$ dans la direction de la force.

$$\mu = \frac{\Delta d/d}{\Delta l/l}$$

▷ Le signe moins entre ε_t et ε tient compte du fait qu'un allongement produit un rétrécissement dans la direction perpendiculaire.

▷ Les valeurs du coefficient de Poisson sont $\mu \approx 2$ à 3.

■ Dans l'exemple précédent d'un cube d'or de côté $l = 10$ cm, dont la hauteur diminue de 1% lorsqu'il est chargé par une masse de 826 tonnes ($\varepsilon = -0,01$) la largeur augmente de :

$$\varepsilon_t = -\frac{1}{\mu}\varepsilon = 0,42 \times 0,01 = 0,42\,\%$$

3. Variation de volume

Cette déformation entraîne une variation du volume du cube d'or :

$$\Delta V = V' - V = (d + \Delta d)^2(l + \Delta l)^2 - d^2 l$$

(V, V' : volumes sans et avec contrainte, ΔV : variation du volume l, d : hauteur et largeur sans contrainte, Δl : variation de la hauteur, Δd : variation de la largeur). En négligeant les termes du deuxième ordre en Δd et Δl on obtient :

$$\Delta V = d^2 \Delta l + 2dl\Delta d$$

la variation relative de volume est alors :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d} = \varepsilon(1 - 2\frac{1}{\mu})$$

▷ avec $\frac{1}{\mu} = \nu = 0,5$ le volume reste inchangé, avec $\nu < 0,5$ il augmente. Des valeurs de $\nu > 0,5$ entraîneraient une diminution du volume, mais ne correspondent pas à une réalité physique.

■ La variation de volume du cube d'or de côté 10 cm est :

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1 - 2\nu) = -0,01(1 - 2 \times 0,42) = -0,16\,\% \quad ,$$

soit :

$$\Delta V = -0,0016 \cdot V = -0,0016 \times 1000\,\text{cm}^3 = 1,6\,\text{cm}^3$$

4. Tenseur de dilatation

$\hat{\varepsilon}$ détermine l'état de dilatation d'un solide lorsqu'un point matériel à $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, par la dilatation, se déplace de $\vec{s}(\vec{r})$ vers le point $\vec{r} + \vec{s}(\vec{r})$:

$$dx_i \to dx_i + ds_i = dx_i + \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial s_i}{\partial x_k} dx_k\,.$$

Les éléments du tenseur de dilatation sont exprimés à l'aide des dérivées partielles du vecteur déplacement $\vec{s}$ par rapport aux coordonnées x_i, $i = 1, 2, 3$:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \varepsilon_2 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \varepsilon_3 \end{pmatrix}\,, \quad \varepsilon_i = 2\frac{\partial s_i}{\partial x_i}\,, \quad \gamma_{ik} = \gamma_{ki} = \frac{\partial s_k}{\partial x_i} + \frac{\partial s_i}{\partial x_k}\,.$$

Le tenseur de dilatation est un tenseur symétrique.

6.1.2.3 Compression isotrope

1. Propriétés de la compression isotrope

Compression isotrope : des forces égales s'exercent de toute part sur le solide.

La variation relative de volume est dans ce cas :

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\varepsilon(1 - 2\nu)$$

où le facteur 3 tient compte du fait qu'il y a trois contraintes normales qui s'exercent sur le solide ; si on pose :

$$\sigma = -\Delta p$$

où Δp est la contrainte de compression, et en posant $\varepsilon = \sigma/E$, on a :

$$-\Delta p = \frac{\Delta V}{V}\frac{E}{3(1-2\nu)}$$

de manière analogue au module d'élasticité, on définit le module de compressibilité :

Pression = compressibilité × variation rel. de volume			**$ML^{-1}T^{-2}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$-\Delta p = K\frac{\Delta V}{V}$$	Δp	Pa = N/m^2	pression
	K	N/m^2	module de compressibilité
	ΔV	m^3	variation de volume
	V	m^3	volume du solide

2. Module de compressibilité

Le **module de compressibilité** K mesure la pression qui produit une variation relative de volume donnée.

Unité usuelle du module de compressibilité K : N/mm^2 = MN/m^2 ou GN/m^2.

▶ Les valeurs typiques du module de compressibilité se situent entre 100 et 200 GN/m^2 (glace : $K \approx 10\,\mathrm{GN/m^2}$, plomb : $K \approx 44\,\mathrm{GN/m^2}$) (→ *Table 8.3/4*).

■ Le module de compressibilité du cuivre est 126 000 N/mm^2. Soumis à une pression isotrope de 1 atmosphère ($\approx 10^5$ Pa), le volume d'un bloc de cuivre varie de :

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{K} = 7,9 \cdot 10^{-7} = 0,000079\%$$

Le volume d'un bloc de cuivre de 1 m^3 diminue, dans ces conditions, de ≈ 0,8 cm^3.

Le module de compressibilté K et le module d'élasticité E sont liés par le coefficient de Poisson ν :

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Pour les fluides, on utilise généralement le **coefficient de compressibilité** χ qui est l'inverse du module de compressibilité K :

$$\chi = \frac{1}{K} = \frac{\Delta V/V}{-\Delta p}$$

(→ *Table 8.3/4*).

▹ Pour un gaz on a :

$$\chi = \frac{A}{V(p + p_T)}$$

(A : fonction caractéristique du gaz, croissante avec la température, V : volume, p : pression externe, p_T : pression de Van der Waals). Pour un gaz parfait $A = 1, p_T = 0$.

6.1.2.4 Flexion

1. Définition de la notion de flexion

Dans les déformations par traction, les éléments du solide parallèles aux forces agissantes conservent leur direction.
Lors d'une **flexion**, la déformation comporte une courbure, qui est due à l'action des couples exercés par les forces extérieures.

Flexion plane d'une poutre : d'après les liaisons avec les supports (appuis) et les points d'application des forces (sans tenir compte de la réaction des appuis) on distingue :

- encastrement à une extrémité, les forces agissent à l'extrémité libre.
- encastrement ou appui aux deux extrémités, les forces agissent au milieu de la poutre.

Considérons une poutre homogène horizontale, présentant un plan de symétrie vertical, soumise à des forces extérieures (poids propre, charge).
On dit qu'il y a flexion plane si, sous l'action des forces externes, chaque fibre de la poutre se déforme en restant dans son même plan vertical.
La flexion plane entraîne à la fois des déformations par allongement du côté opposé à la direction de la force et par raccourcissement du côté de la direction de la force. Dans le plan médian de la poutre existe une **fibre neutre** (Fig. 6.10) qui ne subit ni allongement, ni raccourcissement.

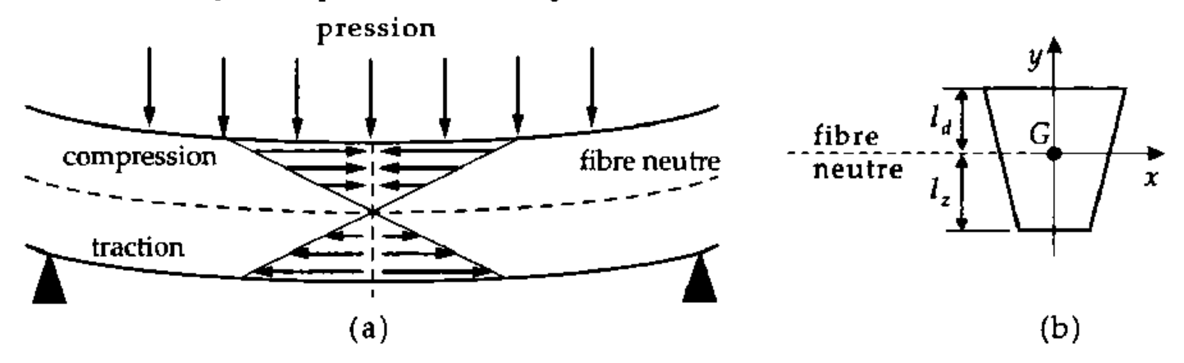


Fig. 6.10 : *Flexion : traction et compression d'une poutre en flexion plane. La fibre neutre passe par le centre de gravité G de la poutre, (a) coupe longitidinale, (b) coupe transversale*

2. Moment fléchissant

$\vec{\mathbf{M}}_f$: produit de la force extérieure $\vec{\mathbf{F}}_i$ et son bras de levier $\vec{\mathbf{l}}_i$ (distance du point d'application de la force au point d'appui) :

Moment fléchissant			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{\mathbf{M}}_f = \sum_i \vec{\mathbf{F}}_i \wedge \vec{\mathbf{l}}_i$	$\vec{\mathbf{M}}_f$	Nm	moment fléchissant
	$\vec{\mathbf{F}}_i$	N	i-ème force extérieure
	$\vec{\mathbf{l}}_i$	m	i-ème bras de levier

Le moment fléchissant résultant est la somme vectorielle des moments fléchissant de chacune des forces extérieures.

3. Flèche

La flèche est le déplacement vertical maximum subi par la poutre, sous l'action de la force F qui la charge. Elle est fonction de la disposition géométrique du problème et du rapport :

$$\frac{F}{EI_a}$$

où E est le module d'élasticité et I_a le **moment d'inertie de section droite** de la poutre. Pour une poutre de section droite circulaire de diamètre d :

$$I_{a}\text{circ.} = \frac{\pi}{64} d^4 \approx 0,049\, d^4$$

et pour une poutre de section droite rectangulaire de hauteur h et de largeur b :

$$I_{a}\text{rect.} = \frac{b}{12} h^3 \approx 0,083\, bh^3$$

4. Exemples : flèche et moment fléchissant typiques

La flèche maximum f et le moment fléchissant maximum M_{max} d'une poutre de longueur l, en fonction de la disposition de la charge est :

- encastrement unilatéral, charge F répartie uniformément sur la poutre (Fig. 6.11 (b)) :

$$f = \frac{l^3}{8} \frac{F}{EI_a} \quad , \quad M_{max} = \frac{l}{2} F$$

- appui bilatéral, charge répartie uniformément (Fig. 6.11 (d)) :

$$f = \frac{l^3}{77} \frac{F}{EI_a} \quad , \quad M_{max} = \frac{l}{8} F$$

- encastrement unilatéral, charge à l'extrémité de la poutre (Fig. 6.11 (a)) :

$$f = \frac{l^3}{3} \frac{F}{EI_a} \quad , \quad M_{max} = lF$$

- appui bilatéral, charge entre les appuis à la distance a d'une extrémité et à b de l'autre (Fig. 6.11 (c)) :

$$f = \frac{a^2 b^2}{3l} \frac{F}{EI_a} \quad , \quad M_{max} = \frac{ab}{l} F$$

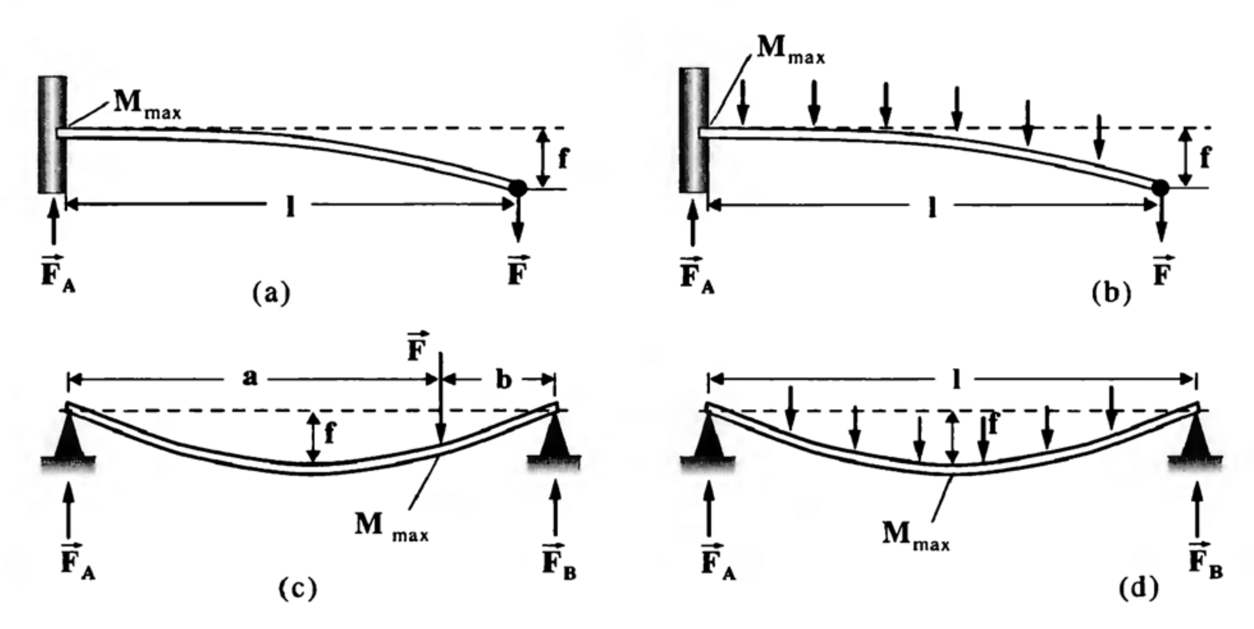


Fig. 6.11 : *Flèche d'une poutre : à gauche charge ponctuelle, à droite charge répartie. En haut encastrement unilatéral, en bas appui bilatéral*

5. Exemple : poutre en acier

Une poutre en acier ($E = 200\ GN/m^2$), de 2 m de long et de section droite carrée de côté 10 cm supporte une charge de 1000 kg. Son moment d'inertie de section droite est :

$$I_a = I_{a,\text{rect.}} = 0,083 \times (0,1\,\text{m}) \times (0,1\,\text{m})^3 = 8,3 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^4$$

d'où :

$$\frac{F}{EI_a} = 5,9 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^{-2}$$

la flèche et la contrainte normale, dans divers cas de disposition de la charge, sont :

unilatéral répartie	$f = \frac{l^3}{8}\frac{F}{EI_a} = 5,9\,\text{mm}$	$M_{\text{max}} = \frac{l}{2}F = 9\,810\,\text{Nm}$
bilatéral répartie	$f = \frac{l^3}{77}\frac{F}{EI_a} = 0,6\,\text{mm}$	$M_{\text{max}} = \frac{l}{8}F = 2\,450\,\text{Nm}$
unilatéral extrémité	$f = \frac{l^3}{3}\frac{F}{EI_a} = 16\,\text{mm}$	$M_{\text{max}} = lF = 19\,620\,\text{Nm}$
bilatéral centre	$f = \frac{(l/2)^4}{3l}\frac{F}{EI_a} = 1\,\text{mm}$	$M_{\text{max}} = \frac{(l/2)^2}{l}F = 4\,900\,\text{Nm}$

Par ailleurs :

- en doublant la longueur de la poutre, la flèche est multipliée par huit et la contrainte normale est doublée.

- en réduisant la longueur des côtés de la section droite d'un facteur deux, le moment d'inertie de cette section diminue d'un facteur seize et la flèche est alors multipliée par seize.

6. Contrainte à la flexion

La contrainte à la flexion σ_f est le quotient du moment fléchissant M_f et du **moment résistant** W_f :

$$\sigma_f = \frac{M_f}{W_f}$$

$$W_{f.\text{circ.}} = 0,098\, d^3$$
$$W_{f.\text{rect.}} = 0,167\, h^2 b$$

■ Dans le cas de l'exemple de la poutre ci-dessus on a :
$W_f = 1,67 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3$
Les contraintes maximum sont alors :

unilatéral, charge répartie	$\sigma_{max} = 59\,\text{N/mm}^2$
bilatéral, charge répartie	$\sigma_{max} = 15\,\text{N/mm}^2$
unilatéral, charge à l'extrémité	$\sigma_{max} = 118\,\text{N/mm}^2$
bilatéral, charge au centre	$\sigma_{max} = 3\,\text{N/mm}^2$

La résistance à la traction des aciers se situe entre 400 et 1 200 N/mm^2. Si on diminue les côtés de la section droite d'un facteur deux, le moment résistant est divisé par huit et la contrainte augmente du même facteur huit.

La déformation de la poutre est décrite par le rayon de courbure R de sa fibre neutre :

Rayon de courbure d'une poutre fléchie			
	Symbole	Unité	Dénomination
$R = \frac{E \cdot I}{M_f}$	R	m	rayon de courbure
	E	N/m^2	module d'élasticité
	I	kg m^2	moment d'inertie
	M_f	Nm	moment fléchissant

I est le moment d'inertie de la section droite calculé par rapport à l'axe constitué par la fibre neutre.

6.1.2.5 Cisaillement

1. Propriétés du cisaillement

Cisaillement (glissement) : déformation due à des forces qui agissent parallèlement aux faces d'un solide. Il se produit, par exemple, quand on applique à deux faces opposées d'un cube des forces tangentielles formant un couple. Dans un élément cubique du solide, les angles droits se déforment de l'**angle de cisaillement** γ.

● Pour des valeurs faibles, l'angle de cisaillement est proportionnel à la **contrainte de cisaillement** τ :

Cisaillement = module de rigidité × angle de cisaillement			**$ML^{-1}T^{-2}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\tau = G\gamma$	τ	N/m^2	contrainte de cisaillement
	G	N/m^2	module de rigidité
	γ	rad	angle de cisaillement

2. Module de rigidité

Le **module de rigidité**, ou **module de cisaillement** G : mesure la contrainte (en N/m^2) qui produit un angle de cisaillement unité (en radian). C'est le rapport entre la valeur commune F des **efforts tranchants** formant un couple en agissant sur l'unité d'aire S de deux faces opposées d'un parallélépipède rectangle et l'angle (de cisaillement) γ dont tournent les arêtes normales à S.

Unité SI du module de rigidité G :

$$[G] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = \frac{1}{\mathrm{Pa}}$$

Généralement, on définit le module de rigidité par :

$$G(\tau) = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\gamma}$$

- Le module de rigidité G et le module d'Young E sont liés par le coefficient de Poisson ν :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

puisque $0 \leq \nu \leq 0,5$ on a :

$$\frac{E}{3} \leq G \leq \frac{E}{2}$$

▷ Pour des matériaux anisotropes, dont les caractéristiques dépendent de la direction, un module d'élasticité différent correspond à chacune des directions privilégiées du solide.

6.1.2.6 Torsion

1. Torsion et contrainte de torsion

Une **Torsion** se produit lorsque des contraintes de cisaillement s'exercent dans des directions différentes et qu'il en résulte un couple.

La **contrainte de torsion** τ est le rapport du couple appliqué M_t au **moment résistant** à la torsion W_t du solide :

$$\tau = \frac{M_t}{W_t} \qquad [\tau] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

- Le moment résistant W_t dépend de la géométrie du solide.

■ Dans le cas d'un solide cylindrique de diamètre de section droite d :

$$W_t = \frac{\pi}{16} d^3 = 0,196\, d^3 \qquad [W_t] = \mathrm{m}^3$$

2. Angle de torsion

ψ est proportionnel à la longueur l du solide, au couple agissant M_t et inversement proportionnel au module de rigidité G :

Angle de torsion

$$\psi = l\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{dl}} = \frac{lW_t}{GI_p}\tau = \frac{l}{GI_p}M_t$$

Symbole	Unité	Dénomination
ψ	rad	angle de torsion
l	m	longueur du solide
W_t	m^3	moment résistant
I_p	m^4	moment d'inertie polaire de la section droite
G	N/m^2	module de cisaillement
τ	N/m^2	contrainte de torsion

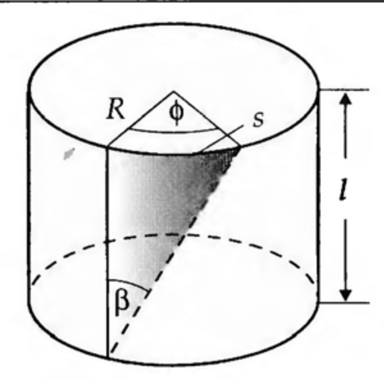


Fig. 6.12 : *La torsion (ϕ) pour une tige cylindrique peut être déduite du cisaillement (α) d'un cylindre creux $r, r + \mathrm{d}r$*

3. Moment d'inertie polaire

Le **moment d'inertie polaire de la section droite** I_p est le moment d'inertie de la section droite par rapport à son centre de gravité :

$$I_p = \int r^2\,dA\,, \quad r^2 = x^2 + y^2\,, \quad dA = dx\,dy$$

- Pour une section droite circulaire de diamètre d :
  $I_p = 0,098\,d^4 \qquad [I_p] = \mathrm{m}^4$

6.1.2.7 Energie et travail de déformation

1. Travail de déformation

Un travail est effectué lors d'une déformation élastique. En considérant l'allongement relatif ε, on peut calculer le travail effectué :

$$\Delta W = F\Delta l = \sigma A \cdot l\Delta\varepsilon = V\sigma\Delta\varepsilon$$

En intégrant entre l'allongement ε initial et final du solide, le travail effectué ΔW est :

Travail de déformation			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\Delta W = V \int \sigma(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = V\sigma\Delta\varepsilon \quad (\text{pour } \sigma = \text{const.})$$	ΔW	J	travail effectué
	V	m^3	volume du solide
	$\Delta\varepsilon$	1	allongement relatif
	σ	N/m^2	contrainte normale
	A	m^2	aire de la section droite
	l	m	longueur du solide
	Δl	m	variation de longueur

$\sigma(\varepsilon)$ est la contrainte normale qui dépend de la compression dans le solide.

Une contrainte de compression $\sigma < 0$ entraîne une compression ($\Delta\varepsilon < 0$), le travail effectué est alors :

$$\Delta W = -\sigma \cdot \Delta\varepsilon > 0$$

La dilatation ou la compression d'un solide nécessite qu'un travail soit effectué.

2. Conservation de l'énergie lors d'une déformation élastique

Lors d'une déformation parfaitement élastique, le travail fourni lors de la déformation est entièrement restitué lorsque le solide reprend sa forme initiale.

▷ Il n'existe pas de déformation parfaitement élastique. Pour des raisons thermodynamiques, une partie de l'énergie est dissipée sous forme de chaleur.

■ Le travail nécessaire pour comprimer de 1 % la longueur des côtés du cube en or de l'exemple plus haut est :
$W = V\sigma\Delta\varepsilon = 1000\,\mathrm{cm}^3 \cdot -810\,\mathrm{N/mm}^2 \cdot (-0,01) = 8\,100\,\mathrm{J}$

6.1.3 Déformation plastique

1. Propriétés de la déformation plastique

Lors d'une déformation plastique, le solide ne reprend pas sa forme initiale, la déformation persiste partiellement ou entièrement. Le travail fourni pour la déformation n'est pas entièrement restitué.

Ceci se manifeste par la **courbe d'hystérésis** de la déformation plastique. En alternant traction et compression, on représente les contraintes σ en fonction des allongements ε qu'elles produisent, **Diagramme** σ-ε.

Les déformations plastiques se caractérisent par une hystérésis, c'est à dire un diagramme contrainte/allongement qui comporte deux branches (Fig.6.13). De ce fait, même lorsque la contrainte σ s'annule, un **allongement résiduel** ou une **contraction résiduelle** ε_r persiste.

2. Perte d'énergie plastique

Le travail effectué lors de ce processus est proportionnel à l'aire comprise entre les deux branches de la courbe :

Perte d'énergie plastique				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$W = V \oint \sigma \, d\varepsilon$$	W	J	perte d'énergie	
	V	m^3	volume	
	σ	N/m^2	contrainte normale	
	ε	1	allongement relatif	

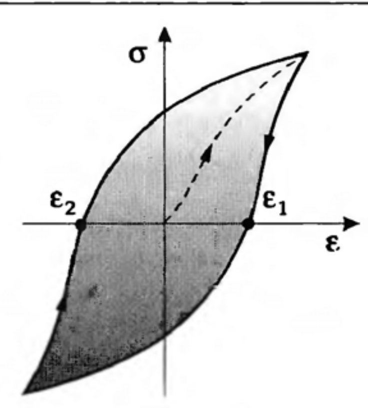


Fig. 6.13 : *Hystérésis d'une déformation plastique. Courbe de première déformation (trait tireté)*

▷ Les déformations plastiques jouent un rôle important dans les industries de transformation de matériaux (laminoirs, emboutissage, chaudronnerie, ...).

6.1.3.1 Résistance à la traction

Le comportement des matériaux soumis à la traction est étudié au moyen de machines d'essais. Une éprouvette, extraite du matériau à tester, y est soumise à l'action de charges que l'on fait varier progressivement : les charges en fonction des allongements ou raccourcissements qui en résultent sont reportées sur un **diagramme contrainte/allongement** (Fig. 6.14). On peut distinguer plusieurs domaines :

1. Domaines de déformations

- **Domaine élastique** : l'allongement obéit à la loi de Hooke, le solide reprend sa forme initiale lorsque la contrainte cesse d'être appliquée.
- **Domaine élasto-plastique** : le solide ne reprend pas totalement sa forme initiale lorsque la contrainte cesse d'être appliquée, cependant les petites élongations ultérieures obéissent encore à la loi de Hooke.
- **Domaine plastique** : la déformation subsiste en grande partie lorsque la contrainte cesse. La contrainte nécessaire pour augmenter la déformation diminue : la courbe contrainte-déformation s'aplatit ; la structure interne du solide a été modifiée par les fortes contraintes appliquées.
- **Point de rupture** : un allongement important conduit à la rupture du solide.

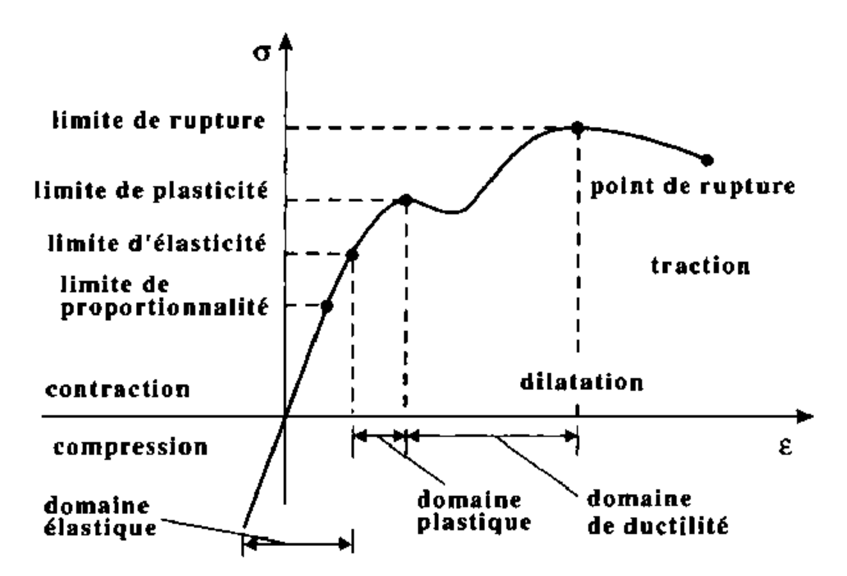


Fig. 6.14 : *Diagramme contrainte-déformation*

2. Paramètre, et propriétés de l'effort de traction

M L'établissement d'un diagramme contrainte/allongement est effectué selon une procédure normalisée **DIN 50 145** qui définit, entre autres paramètres, les dimensions de l'éprouvette, la vitesse de variation de la charge, et la température pendant la mesure.

▷ Les constantes caractéristiques des matériaux dépendent fortement de leur composition (en particulier dans le cas d'alliages).

a) Droite de Hooke : tangente à l'origine du diagramme contrainte-allongement ; pour de petites élongations, sa pente est égale au **module d'élasticité** E du corps étudié.

b) Limite élastique σ_f : valeur de la contrainte au-delà de laquelle une déformation plastique prend place. Conventionnellement, c'est la charge par mm^2 de section initiale qui provoque un allongement de 0,2 %. Sur le diagramme contrainte/allongement, l'intersection avec la parallèle à la droite de Hooke passant par l'abscisse $\varepsilon = 0{,}2$ % indique la valeur de la limite élastique.

c) Contrainte de rupture σ_B : valeur de la contrainte au-delà de laquelle la rupture du solide se produit.

▷ Pour des métaux les valeurs sont comprises entre 10 et 20 N/mm^2 ; pour des aciers ordinaires elles vont de 400 à 1 200 N/mm^2. Pour des aciers spéciaux, ces valeurs peuvent aller jusqu'à 4 500 N/mm^2.

d) Limite de rupture ε_B : valeur de l'allongement au-delà duquel il y a rupture.

▷ Les valeurs typiques de la contrainte de rupture vont de 0,02 (cuivre), 0,45 (acier V2A) jusqu'à 0,5 (aluminium, or).

▷ Les déformations plastiques, au contraire des déformations élastiques, n'entraînent pas (ou très peu) de variation de volume ; le coefficient de Poisson est dans ce cas $\nu = 0,5$.

Le **coefficient de sécurité**, choisi lors de la conception d'un projet, est le rapport de la charge de rupture à la charge réellement appliquée. Suivant le type de construction ses valeurs sont comprises entre 1,5 et 3, mais peuvent, dans des cas spéciaux, aller jusqu'à 10.

6.1.3.2 Flambage

1. Flambage et charge critique

Le flambage ou (flexion latérale) se produit lorsqu'une barre, subissant une compression longitudinale croissante, fléchit latéralement (constitue une brisure de symétrie).

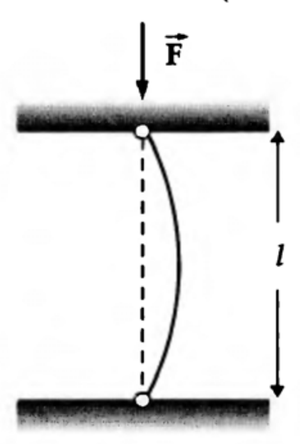


Fig. 6.15 : *Flambage d'une barre sous l'action d'une force $\vec{F}$. A cause de la déformation, la compression agit comme une contrainte de flexion*

Le flambage a lieu lorsque la contrainte de compression σ atteint la valeur critique σ_c donnée par la **formule d'Euler** :

Charge critique : formule d'Euler			$ML^{-1}T^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\sigma_c = \pi^2 \dfrac{E}{\lambda^2}$	σ_c	N/m^2	charge critique
	E	N/m^2	module d'élasticité
	λ	1	élancement

▷ Lors de la conception de machines, on applique généralement un coefficient de sécurité compris entre 5 et 10.

2. Élancement

L'élancement λ, est défini par : $\lambda = l\sqrt{\frac{A}{I_a}}$
(l : longueur de la barre, A : aire de la section droite, I_a : moment d'inertie de section droite).

■ Une barre de longueur 1 m et de 1 cm de diamètre a un moment d'inertie de section droite :
$I_a = 0,049 \cdot (1\,\text{cm})^4 = 490\,\text{mm}^4$
On en déduit son élancement :
$$\lambda = 1\,\text{m} \cdot \sqrt{\frac{79\,\text{mm}^2}{490\,\text{mm}^4}} = 400$$
Avec un module d'élasticité de 200 GN/m^2, la contrainte critique est :
$$\sigma_c = \pi^2 \frac{200\,\text{GN/m}^2}{400^2} = 12,3\,\text{MN/m}^2$$
qui cororespond à une charge critique :
$F = \sigma_c \cdot A = 975\,\text{N}$
En appliquant un coefficient de sécurité de 8, cette barre pourra supporter en toute sécurité une charge de 12 kg.

6.1.3.3 Dureté

1. Définition de la dureté

La **dureté** est la résistance qu'un solide présente à la pénétration d'une sonde dans sa surface (Fig. 6.16). De fortes contraintes apparaîssent dans le solide et produisent localement une déformation permanente (empreinte).

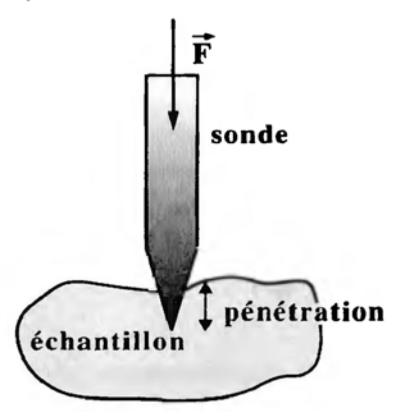


Fig. 6.16 : *Mesure de la dureté : selon la dureté, la sonde, sous l'action d'une poussée constante, pénètre plus ou moins l'éprouvette. Des dimensions de l'empreinte on déduit la dureté*

La dureté d'un matériau est déterminée par des méthodes de mesures standards. Ces mesures utilisent une sonde de forme et de constitution propre à chaque méthode exerçant une contrainte déterminée pendant un temps donné sur la surface de l'éprouvette. La dureté est exprimée par un nombre fonction de la géomètrie de la sonde, de la force appliquée et de la déformation résultante de l'éprouvette. (→ *Table 8.2*).

▷ La sonde doit avoir une dureté plus grande que celle du corps à mesurer.

Dureté Brinell HB **(DIN 50 351)** : la sonde est une bille en acier extra dur trempé. Le nombre de dureté Brinell est le rapport de la force appliquée F à l'aire A de l'empreinte laissée sur l'éprouvette multiplié par un facteur 0,102 :

$$HB = 0,102\,\frac{F}{A}$$

Le facteur 0,102 , par souci de compatibilité avec d'anciennes valeurs de dureté, convertit la force (Newton) en unité kilogrammepoids.

▷ Cette méthode n'est généralement utilisée que pour des matériaux relativement peu durs. Une sonde sphérique ne pénètre que très peu les matériaux très durs.

▷ Les valeurs de duretés, déterminées par cette méthode, ne sont valables que si le diamètre de l'empreinte se situe entre 0,2 et 0,7 fois le diamètre de la sonde.

Dureté Vickers HV **(DIN 50 133)** : la sonde est une forme pyramidale à base carrée. Le nombre de dureté Vickers est le rapport de la force appliquée F à l'aire A de l'empreinte laissée sur l'éprouvette. L'aire de l'empreinte est déterminée par sa diagonale d :

$$HV = 0,102\frac{F}{A} = 0,189\frac{F}{d^2}$$

▷ Les duretés Brinell et Vickers ont à peu près les mêmes valeurs. La méthode de Vickers, s'appliquant aussi bien aux matériaux très durs, sert en général de méthode de référence.

▷ Par expérience, on constate qu'il y a une relation entre la dureté Vickers HV et la résistance à la rupture R_m **(DIN 50 150)** :

$R_m \approx 3,38HV$

Dureté Rockwell HR (**DIN 50 103**) : la forme, les dimensions de la sonde et la force appliquée sont standardisées :

- Rockwell-B : bille d'acier de diamètre 1,59 mm (1/16 pouce), 883 N
- Rockwell-C : cône en diamant d'angle au sommet 120°, 1 373 N

À chaque 2μm de profondeur de pénétration correspond une unité de dureté. Pour faciliter les comparaisons entre les valeurs mesurées, une précontrainte de 98 N est appliquée dans chacune des deux méthodes. Rockwell-B est utilisée pour des matériaux moyennement durs, Rockwell-C pour des matériaux très durs (aciers trempés). La méthode Rockwell permet une automatisation des mesures, mais elle est moins précise que les autres méthodes.

▷ Dans certaines limites, on peut comparer les duretés mesurées par les différents procédés. Les tables de comparaison sont conformes à la norme **DIN 50 150**.

6.2 Hydrostatique

Hydrostatique : étude de l'équilibre des liquides et gaz (**les fluides**) au repos, par opposition à **hydrodynamique** qui étudie les propriétés des fluides en mouvement. Nous étudierons plus particulièrement la **pression** dans un fluide et la force de **poussée** qui en résulte sur les corps qui y sont plongés.

6.2.1 Liquides et gaz, fluides

Liquide : état de la matière dans lequel les molécules sont faiblement liées (**forces de cohésion**). Un liquide n'a pas de forme propre, il épouse la forme de son contenant. Les forces de cohésion dans les liquides sont néanmoins plus importantes que dans les gaz et se manifestent par une faible compressibilité et une relativement grande tension superficielle.

Gaz : état de la matière dans lequel les forces entre molécules sont très faibles, à courte portée et se manifestent par des collisions. Leur compressibilté est élevée ($\rightarrow$ *Thermodynamique*), leur cohésion et par conséquent leur tension superficielle sont faibles. L'écoulement des gaz est également décrit par l'hydrodynamique, cependant il faut tenir compte de leur compressibilité et des variations de masse volumique qui en résultent.

▷ Dans l'étude de l'hydrostatique et de l'hydrodynamique on utilise le terme **fluides** pour désigner indifféremment des liquides et des gaz.

Un fluide n'ayant pas de forme propre, les notions de masse et de force utilisées en mécanique du solide seront remplacées par celles de **masse volumique** et de **pression**.

6.2.2 Pression

1. Définition de la pression

Pression : quotient de la force exercée perpendiculairement à un élément de surface par la grandeur de celui-ci. Elle est indépendante de l'orientation de la surface (**pression isotrope** Fig. 6.17) et ne dépend que de la position verticale (hauteur) du point autour duquel s'étend l'élément de surface considéré (**pression**

hydrostatique Fig. 6.19).

Pression = $\frac{\textbf{Force}}{\textbf{Surface}}$				$ML^{-1}T^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$p = \frac{F_N}{S}$	p	Pa	pression	
	F_N	N	composante normale de la force	
	S	m^2	surface sur laquelle agit la force	

2. Unités de pression

Pascal (Pa) : unité SI de pression.
1 Pascal est la pression, produite par une force de 1 N sur une surface de 1 m^2.

$$[p] = \text{Pa} = \text{Pascal} = \text{N}/\text{m}^2$$

Autres unités → *Tab. 34/3.*

▹ La pression isotrope n'est pas une grandeur vectorielle ; elle a même valeur dans toutes les directions autour d'un même point.

▹ Attention! Le symbole p utilisé pour la pression est le même que pour la quantité de mouvement.

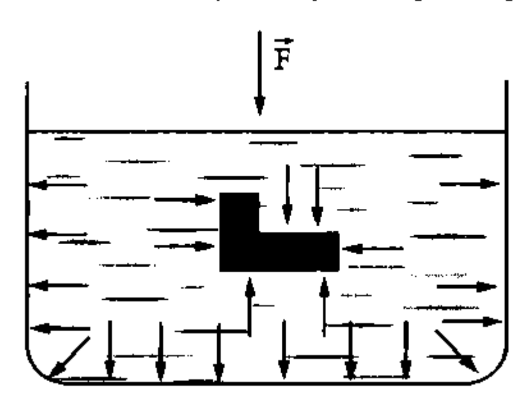


Fig. 6.17 : *Pression isotrope (dont l'action est représentée par des flèches) s'exerce de la même façon dans toutes les directions*

Pression atmosphérique : au niveau de la mer ≈ 1 *bar* = 10^5 Pa.

Vide (technique) : domaine ou règne une pression résiduelle faible. On distingue :

Vide primaire	1 bar à 10^{-3} bar
Vide secondaire	10^{-3} bar à 10^{-6} bar
Ultra vide	moins de 10^{-11} bar

3. Mesure de la pression

M **Autoclave** : récipient à parois épaisses pouvant résister à des pressions élevées (1000–10000 bar).
Pompe à vide : par exemple **pompe à vapeurs de mercure, pompe turbomoléculaire, pompe cryogénique, pompe ionique ...** pour l'obtention de pressions très faibles (10^{-11} bar).
Les mesures de pressions sont basées sur la force que la pression produit sur un élément de surface connue ; l'intensité de la force est mesurée soit par son action sur un ressort (**manomètre, manomètre à lame d'acier**, soit par la déformation d'une capsule métallique (**baromètre anéroïde**), soit par la déformation d'un tube enroulé en spirale (**manomètre de Bourdon**) .

Baromètre à mercure : mesure la pression en la comparant à la pression hydrostatique d'une colonne de mercure. Les techniques modernes utilisent des **éléments piézoélectriques** ou des **jauges de contrainte** (→ *Électrotechnique*), constitués de cristaux (quartz, silicium) dont la conductivité est fonction de la pression (→ *Thermodynamique*).

6.2.2.1 Principe de Pascal

1. Principe de Pascal

Dans un liquide incompressible en équilibre, une augmentation de pression se transmet intégralement. Dans un récipient contenant un liquide incompressible et muni de deux pistons de surfaces respectives S_1 et S_2 (Fig. 6.18), la force due à la pression p du liquide compense la force F_1 ainsi que la force F_2 :

$$F_1 = S_1 p \quad , \qquad F_2 = S_2 p$$

d'où

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \quad \text{et} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2}$$

- En tout point du liquide règne la même pression.

2. Presse hydraulique

Système qui, par application directe du principe de Pascal, permet à partir d'une force F_1, appliquée sur un piston de surface S_1, d'obtenir sur un piston de surface S_2 une force F_2 telle que :

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$$

▷ De la conservation de l'énergie, il découle que la course du piston de plus grande surface S_2 est plus petite du facteur S_1/S_2 de celle du petit piston.

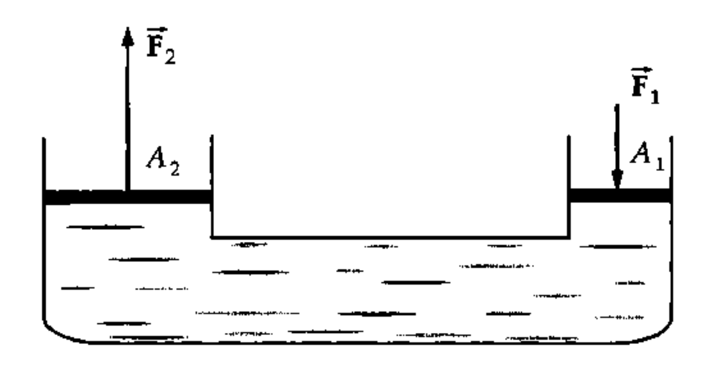


Fig. 6.18 : *Principe de Pascal : presse hydraulique*

3. Hydraulique

Science qui étudie l'écoulement des liquides. En technologie, application du principe de Pascal pour la transmission de forces : freins hydrauliques, transmission hydraulique, vérins hydrauliques, convertisseur de couple. La transmission hydraulique permet de changer la direction d'une force sans organe mécanique.

Les gaz, au contraire des liquides, sont très compressibles. Lors de la compression d'un gaz, le **travail de compression** est converti en **énergie interne** (→ *Thermodynamique*). Les gaz comprimés peuvent être

utilisés comme source d'énergie pour des machines outils (**pneumatiques**).

6.2.2.2 Loi fondamentale de l'hydrostatique

1. Définition de la pression hydrostatique

La **pression l'hydrostatique** est la différence des pressions entre deux points A et B d'une même masse fluide. Elle est égale au poids d'une colonne de ce fluide ayant pour section l'unité de surface et pour hauteur la distance verticale h des deux points.

Pression hydrostatique			$M^{-1}L^{-1}T^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$p_A - p_B = h\rho g = \dfrac{\rho V g}{S}$	p	Pa	pression hydrostatique
	ρ	kg/m^3	masse volumique du liquide
	V	m^3	volume de la colonne de liquide
	S	m^2	surface de la base de la colonne
	h	m	hauteur de la colonne de liquide
	g	m/s^2	pesanteur

■ Une colonne d'eau de 10 m de hauteur exerce à sa base une pression de :
$p = \rho g h = 10\,\mathrm{m} \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2} = 9,81 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$
Une colonne de mercure ($\rho = 13\,600\,\mathrm{kg/m^3}$), qui exercerait à sa base la même pression, aurait une hauteur :

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{9,81 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}}{13\,600\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}} = 735\,\mathrm{mm}$$

La pression hydrostatique au sein d'un liquide dépend de la profondeur d'immersion h, elle est constante à une profondeur donnée (Fig. 6.19).

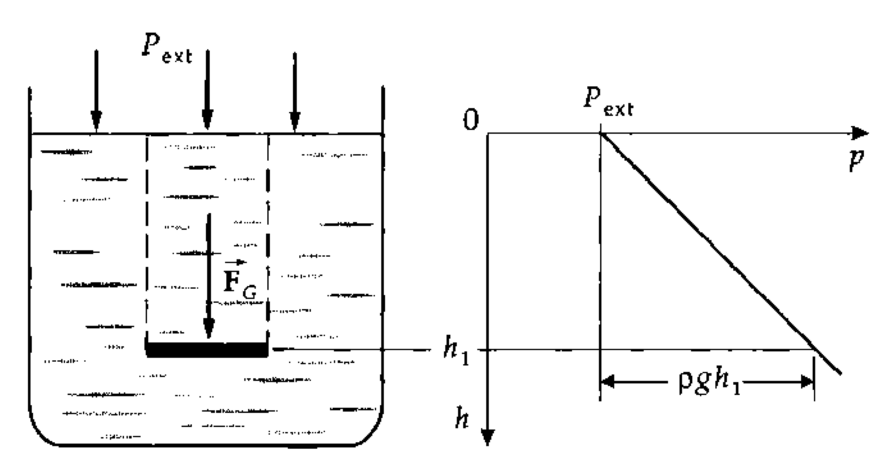


Fig. 6.19 : *Pression hydrostatique dans un fluide. P_{ext} représente la pression extérieure qui s'ajoute à la pression hydrostatique*

2. Paradoxe hydrostatique

La pression exercée sur le fond d'un récipient contenant un liquide ne dépend que de la hauteur de remplissage et est indépendante de la forme du récipient, donc du volume de liquide.

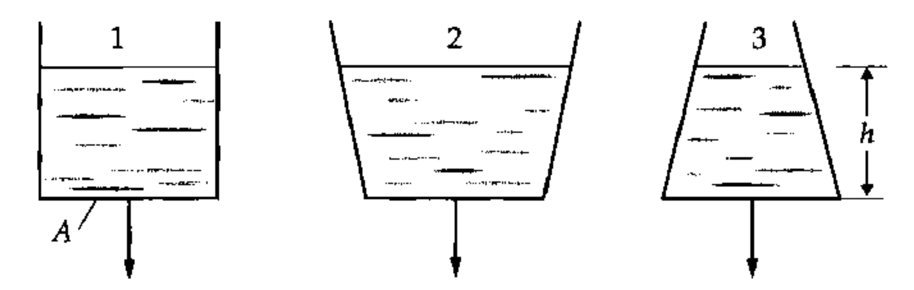


Fig. 6.20 : *Paradoxe hydrostatique : la pression sur le fond du récipient A est indépendante de la forme du récipient*

Dans le cas du récipient 2, la résultante des forces de pression sur les parois latérales est dirigée vers le haut et compense le poids de l'excès de liquide, tandis que pour le vase 3 la résultante, dirigée vers le bas, compense le poids du liquide manquant.

3. Manomètre

M **Baromètre à mercure** : utilisé pour la mesure de la pression atmosphérique. La chambre barométrique (Fig. 6.21) est vide de tout gaz, et la pression y est négligeable (tension de vapeur du mercure) (→ *Thermodynamique*). À la surface libre S du mercure dans le vase, règne la pression atmosphérique p_0. Entre ces deux points, d'après le principe fondamental de l'hydrostatique, on a la différence de pression : $p_0 = \rho g h$ (→ *Manomètre de McLeod*).

Manomètre à mercure à air libre : sert à mesurer des différences de pression. Il est généralement constitué d'un tube en U contenant du mercure. La pression à mesurer p_1 et la pression hydrostatique $\rho g h_1$ agissent dans une des branches, la pression de référence p_0 et la pression hydrostatique $\rho g h_2$ dans l'autre. À l'équilibre on a :

$$p_1 - p_0 = \rho g(h_2 - h_1)$$

4. Vases communicants

Dans un récipient, de forme telle que la surface libre se compose de plusieurs éléments séparés (tubes reliés entre eux, vases communicants (Fig. 6.22)), le niveau des différentes surfaces libres du fluide est le même.

M Les baromètres à vase communicants (tubes en U) peuvent être utilisés pour la mesure de faibles différences de pression.

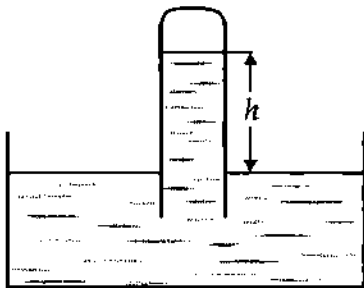


Fig. 6.21 : *Baromètre : la hauteur de la colonne est proportionnelle à la pression atmosphérique*

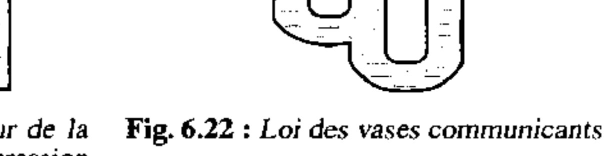


Fig. 6.22 : *Loi des vases communicants*

▷ Les forces de tension superficielle (capillarité) sont négligées.

6.2.2.3 Compressibilité

1. Définition de la compressibilité

Compressibilité κ (m^2/N) : capacité à modifier le volume d'un fluide par des variations de pression. Elle est définie par le rapport de la variation relative de volume $\frac{\Delta V}{V}$ à la variation de pression Δp qui la produit :

Compressibilité				$M^{-1}LT^2$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\kappa = \dfrac{\Delta V}{V \Delta p}$	κ	1/Pa = m^2/N	compressibilité	
	ΔV	m^3	diminution de volume	
	V	m^3	volume primitif	
	Δp	Pa	augmentation de pression	

Des valeurs typiques de compressibilité sont $\approx 10^{-9}\,\text{Pa}^{-1}$ (→ *Tab. 8.3/4*).

■ La compressibilité de l'eau dans les condition TPN (température 0 °C et pression 101,325 hPa) est $0,5 \cdot 10^{-9}\,\text{Pa}^{-1}$. Sous une pression égale à la pression atmosphérique 10^5 Pa, le volume de 1 m^3 d'eau varie de :

$$\Delta V = \kappa V \Delta p = 0,5 \cdot 10^{-9}\,1/\text{Pa} \cdot 1\,\text{m}^3 \cdot 10^5\,\text{Pa} = 0,5 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3 = 50\,\text{cm}^3$$

2. Dilatation volumique

Coefficient de dilatation volumique γ : caractérise la dilatation d'un fluide par l'élévation de sa température. L'augmentation relative du volume $\frac{\Delta V}{V}$ d'un fluide est proportionelle à l'augmentation de température $\Delta\theta$, tant que celle-ci reste faible.

Coefficient de dilatation volumique				1
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\dfrac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta\theta$	$\Delta V/V$	1	chgt. relatif de volume	
	γ	1/K	coeff. de dilatation volumique	
	$\Delta\theta$	K	variation de température	

Le coefficient de dilatation volumique a la dimension 1/K. Il dépend de la température du corps et est généralement rapporté à la température $\theta_0 = 0\,°\text{C}$.

▷ Le coefficient de dilatation volumique de l'eau est $\gamma = 0,18 \cdot 10^{-3}\,\text{K}^{-1}$ à 20 °C. Pour d'autres liquides, ce coefficient peut être beaucoup plus grand. Pour des gaz parfaits à 20 °C, on a :
$\gamma = \dfrac{1}{\theta_0} = 1/3,4 \cdot 10^{-3}\,\text{K}^{-1}$

6.2.2.4 Pression hydrostatique dans les gaz

1. Calcul de la pression hydrostatique dans les gaz

Lors du calcul de la pression hydrostatique dans un gaz, il faut tenir compte de sa compressibilité. La masse volumique ρ d'un gaz à la pression p est donnée par la relation de proportionalité :

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}$$

où ρ_0 est la masse volumique à la pression p_0. L'augmentation de pression Δp produite par un accroissement Δh de l'altitude de la colonne de gaz est :

$$\Delta p = -\frac{\Delta m \cdot g}{S} = -\rho g \Delta h$$

(S : section de la colonne de gaz, Δm : masse de la colonne de gaz de hauteur Δh, g : pesanteur), le signe – tient compte du fait que la pression diminue lorsque l'altitude augmente. Cette expression peut être écrite sous la forme de l'équation différentielle :

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\int_0^{h_1} \frac{\rho_0 g}{p_0} \mathrm{d}h$$

(p_0 : pression au sol, p_1 : pression à l'altitude h_1). Par intégration, on obtient :

$$\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) = -\frac{\rho_0 g}{p_0} h_1$$

2. Nivellement barométrique

De la pression hydrostatique, on déduit le **nivellement baromètrique** (Fig. 6.23) :

Nivellement baromètrique	Symbole	Unité	Dénomination
$p = p_0 e^{-Ch}$	p	Pa	pression à l'altitude h
$C = \frac{\rho_0 g}{p_0}$	h	m	altitude
	C	1/m	constante
	p_0	Pa	pression au sol
	ρ_0	kg/m³	masse volumique au sol
	g	m/s²	pesanteur

La pression dans une colonne de gaz diminue exponentiellement avec l'altitude. Dans l'atmosphère terrestre, on a :

$$C = 0,1256/\,\mathrm{km}$$

pour une pression et une température au sol : $p_0 = 101,3\,\mathrm{kPa}$ et 0 °C.

- La pression atmosphérique diminue de 100 Pa = 1 mbar lorsque l'altitude augmente de ≈ 8 m.

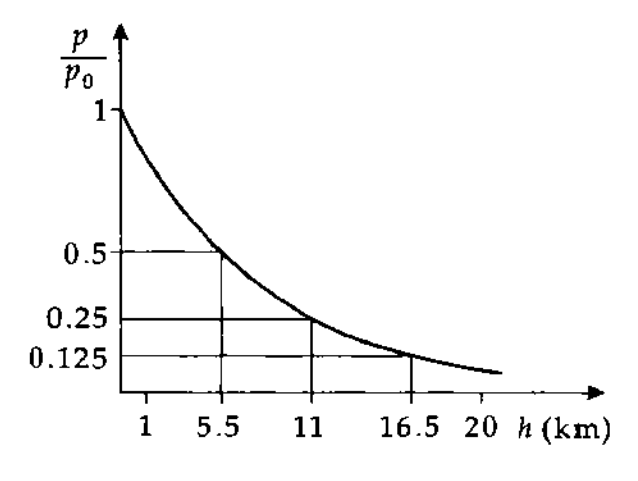


Fig. 6.23 : *Nivellement barométrique*

3. Nivellement barométrique international

La diminution de la température avec l'altitude n'est pas prise en compte dans cette relation. Si on en tient compte, on obtient la formule **internationale de nivellement** :

$$p = \left(1 - \frac{0,0065\,1/\mathrm{m} \cdot h}{288}\right)^{5.255} \times 101,325\,\mathrm{kPa}$$

Cette relation est valable jusqu'à une altitude de ≈ 11 km. La variation de la masse volumique de l'air avec l'altitude est :

$$\rho = \left(1 - \frac{0,0065\,1/\mathrm{m} \cdot h}{288}\right)^{4.255} \times 1,2255\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

4. Atmosphère normale

▷ La pression atmosphérique subit des variations dues aux conditions météorologiques de ≈ 10 %. Au niveau de la mer et à une température de 15 °C, la **pression normale** et la **densité normale** sont en moyenne :

$$p_0 = 101,325\,\mathrm{kPa}, \qquad \rho_0 = 1,293\,\mathrm{kg/m}^3$$

(historiquement : 760 Torr, 1 atm : atmosphère physique, appelée pression atmosphérique normale).

Hémisphères de Magdeburg : utilisées lors de la célèbre expérience d'Otto von Guericke (1654), pour la mise en évidence de la pression atmosphérique. Une sphère métallique de rayon r =21 cm est constituée de deux hémisphères accolés ; quand on y fait le vide, il faut, pour séparer ces deux hémisphères, exercer un effort supérieur à la force $F = p\pi r^2 = 1,4 \cdot 10^4$ N produite par la pression atmosphérique p sur la surface d'un grand cercle. Cette force est équivalente à celle d'un poids de 1,4 tonnes.

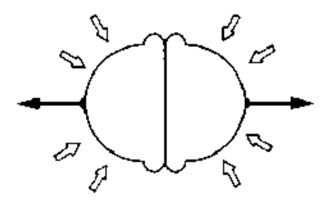


Fig. 6.24 : *Hémisphères de Magdeburg*

6.2.2.5 Pompes

Pompe : appareil pour aspirer, refouler ou comprimer des liquides ou gaz (fluides).

1. Genres de pompes

On peut classer les pompes suivant leur principe de fonctionnement :

- Le déplacement :
    - **Pompe à piston** : le piston, animé d'un mouvement de va-et-vient, aspire le liquide à travers une **soupape d'aspiration** puis le refoule à travers une **soupape de refoulement**. On distingue les **pompes aspirantes**, où le liquide monte par l'effet de la pression atmosphérique lorsque le piston s'élève puis s'écoule, et les **pompes aspirantes et foulantes**, dans lesquelles le liquide d'abord aspiré par l'ascension du piston est ensuite refoulé par celui-ci.

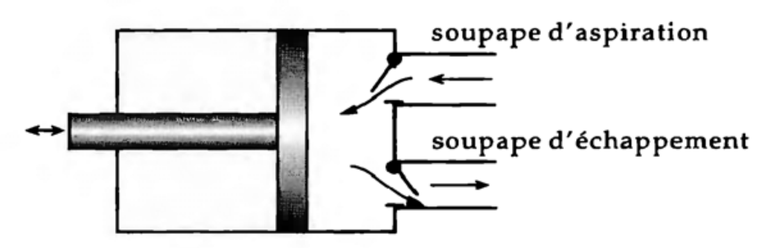


Fig. 6.25 : *Pompe à piston : dans son mouvement de va-et-vient, le piston aspire puis refoule le fluide*

- **Pompe à membrane** : le piston est remplacé par une membrane soumise à un mouvement alternatif. La déformation de la membrane produit une variation de volume ; ces pompes sont souvent utilisées pour des liquides corrosifs.
- **Pompe à palettes** : un rotor muni de palettes tourne dans un cylindre dont l'axe est excentré par rapport à celui du rotor. De ce fait, le volume de gaz contenu entre deux palettes varie produisant successivement aspiration et compression.
- **Pompe à engrenage** : deux roues dentées, engrenées l'une dans l'autre, en tournant en sens inverse, poussent le liquide vers l'extérieur. La vitesse de rotation n'influe que sur le débit et non pas sur la hauteur de refoulement ; elles sont souvent utlisée pour les systèmes de lubrification (pompe à huile des véhicules automobiles).

● Le frottement entre fluide et organe mécanique tournant à grande vitesse :

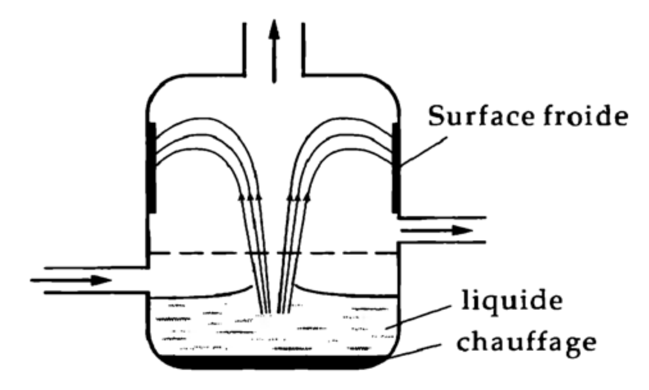
- **pompe centrifuge** : le fluide, en contact avec une roue tournant à l'intérieur d'une bâche qui l'entoure, subit l'accélération centrifuge (Fig. 6.27). L'énergie cinétique du fluide est transformée en énergie potentielle. Le débit varie comme la vitesse, la pression en sortie comme le carré de la vitesse et la puissance absorbée comme le cube de la vitesse. Elles sont généralement entraînée par un moteur électrique.

● Le frottement entre un fluide auxiliaire et le fluide à déplacer :

- **Trompe à eau** : un jet d'eau sous pression sort d'une buse effilée et pénètre dans un entonnoir évasé en produisant une aspiration. Le vide obtenu est limité par la pression de vapeur saturante de l'eau utilisée.
- **Pompe à diffusion (pompe moléculaire)** : un fluide (vapeur de mercure, vapeur d'huile, ...) entraîne le gaz à pomper dans une tuyère divergente. Les vapeurs du fluide d'entraînement, en se refroidissant, se condensent et retombent au bas de la pompe (Fig. 6.26). Le fluide y est revaporisé par réchauffement. Ces pompes, utilisées pour produire un vide poussé (vide secondaire), nécessite que l'enceinte soit prévidée par une pompe primaire (pompe à palette).

● L'adhésions sur une surface :

- (**Getter** : utilisée pour obtenir un vide extrême ; ultra-vide.



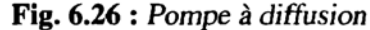


Fig. 6.26 : *Pompe à diffusion*

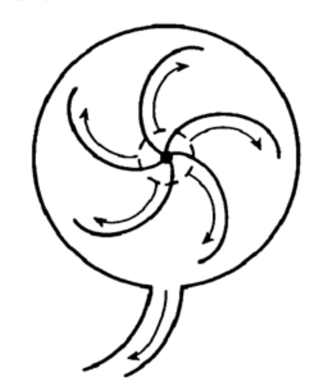


Fig. 6.27 : *Pompe centrifuge, l'admission d'air est axiale*

2. Turbines

Turbine : machine dans laquelle l'énergie d'un fluide moteur (eau, vapeur, gaz, ...) fait tourner une roue mobile sur l'axe de laquelle on recueille du travail.

- **Turbine hydraulique** : elle peut être à flux radial ou axial. On distingue les turbines à action, dans lesquelles les pressions à l'entrée et à la sortie sont les mêmes, et les turbines à réaction pour lesquelles la pression est plus élevée à l'entrée.
- **Turbine Francis** : du type à réaction, utilisée pour les basses et moyennes chutes. Des aubes directrices permettant de modifier le débit de l'eau dirigent le flux vers la roue mobile. L'eau, en s'écoulant de la circonférence vers l'axe, lui communique son mouvement.
- **Turbine Kaplan** : utilisée pour les basses chutes, elle permet de grandes vitesses de rotation. C'est une turbine à hélice où l'eau s'écoule parallèlement à l'axe.
- **Turbine à vapeur** : comme pour les turbines hydrauliques, la vapeur agit par son énergie cinétique sur la roue mobile (turbine à action) ou par détente sur les aubes de la roue mobile (turbine à réaction). Selon le type de turbine, la vapeur est admise parallèlement ou perpendiculairement à l'axe. Dans les turbines dites à injection totale, la vapeur est injectée sur toute la circonférence de la roue mobile ; la turbine est dite à injection partielle si la vapeur est admise localement par une tuyère.
- **Turbine à gaz** : son fonctionnement est similaire à celui d'une turbine à vapeur. Le fluide moteur est généralement constitué des gaz de combustion obtenus à partir de combustibles solides, liquides ou gazeux. L'axe de ces turbines entraîne également un compresseur qui fournit l'air comprimé nécessaire à la combustion.
  La turbine à gaz est parfois utilisée pour la motorisation d'avions à hélices (**turbo-propulsion**) ou celle de prototypes de véhicules automobiles (Rover en 1950). Les rendements obtenus peuvent atteindre 35 % à des vitesses de rotation de l'ordre de 20.000 t/min. Les difficultés de réalisation sont dues à la température de fonctionnement élevée $>$ 800°C.

Roue à eau (roue à auguets) : roue hydraulique formée de deux couronnes circulaires entre lesquels sont disposés des auguets ou des aubes. Elle transforme l'énergie disponible d'une chute d'eau en énergie mécanique. Elle fut beaucoup utilisée dans le passé comme source d'énergie pour les moulins à grain, scieries ou petites industries. Le rendement peut atteindre $\approx$ 85%, la puissance est :

$$P = g \cdot \rho \cdot Q \cdot h$$

(g : accélération de la pesanteur, ρ : masse volumique de l'eau, Q : débit d'eau, h : hauteur de la chute d'eau).

3. Propriétés et paramètres des pompes

Hauteur de refoulement H : distance verticale qui sépare la pompe du point le plus haut à laquelle la pompe peut élever un liquide. C'est une caractéristique d'une pompe déterminée par le poids de la colonne de liquide que la force de pression de la pompe peut équilibrer. Elle dépend également de la perte de charge subie par le liquide lors de son écoulement dans les conduites.

Débit Q : volume de fluide déplacé par la pompe par unité de temps. Il dépend de la vitesse d'écoulement et de l'aire de l'orifice de sortie de la pompe.

La **courbe caractéristique** d'une pompe représente la hauteur de refoulement en fonction du débit ; pour des débits élevés la hauteur de refoulement diminue généralement .

La **puissance** P_Q d'une pompe est le produit de la force de poids par unité de volume ρg, du débit Q et de

la hauteur de refoulement H :

$$P_Q = g\rho HQ$$

Rendement d'une pompe : rapport de la puissance fournie P_Q à la puissance mécanique absorbée P_0 :

$$\eta = \frac{P_Q}{P_0}$$

Pompes aspirantes : l'effet d'aspiration provient de la différence entre la pression atmosphérique et la dépression créée par le mouvement du piston. Cette différence de pression est au plus égale à la pression atmosphérique. Il s'ensuit que la hauteur de pompage de l'eau ne peut excéder 10 m.

6.2.3 Poussée d'Archimède

1. Poussée d'Archimède

Tout corps immergé dans un fluide (liquide ou gaz), est soumis à une force opposée à son poids et proportionnelle au poids du volume du fluide déplacé. Elle résulte de la différence de pression entre le haut et le bas du corps (Fig. 6.28). Soit un corps homogène, cylindrique de section S. Si le sommet se trouve à la hauteur h_1, et le bas à la hauteur h_2, on a :

$$F_A = F_2 - F_1 = S\,(p_2 - p_1) = S\,\rho_0\,g\,(h_2 - h_1)$$

(ρ_0 : masse volumique du fluide, p_1, p_2 : pressions, F_1, F_2 : forces en h_1 resp. h_2, F_A : poussée d'Archimède, g : pesanteur).
La quantité $S(h_2 - h_1)$ représente le volume immergé du corps, soit :

Poussée d'Archimède			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$F_A = \rho_0\,g\,V$	F_A	N	poussée
$= m_{\text{dépl}}\,g = F_{\text{G,dépl}}$	ρ_0	kg	masse volumique du fluide
$= \dfrac{\rho_0}{\rho}\,F_G$	g	m/s^2	pesanteur (9,81 m/s^2)
	V	m^3	volume du corps
	$m_{\text{dépl}}$	kg	masse du fluide déplacé
	$F_{\text{G,dépl}}$	N	poids de $m_{\text{dépl}}$
	ρ	kg/m^3	masse volumique du corps
	F_G	N	poids du corps

▶ Si le corps n'est pas homogène, on utilise sa masse volumique moyenne, c'est à dire le rapport de sa masse totale à son volume.

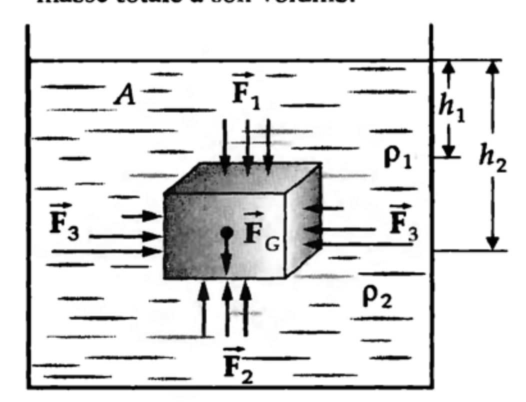


Fig. 6.28 : *Les forces latérales se compensent ; la force de pression hydrostatique au bas $\vec{F}_2$ est supérieure à $\vec{F}_1$*

Le poids effectif d'un corps immergé est égal à la force de gravitation due à sa masse, diminuée de la poussée d'Archimède :

$$F_{\text{eff}} = F_G - F_A = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) F_G$$

La **balance de Mohr** mesure ce poids effectif.

■ La densité du fer par rapport à l'eau est 7,8. Un morceau de fer plongé dans l'eau subit une poussée d'Archimède :

$$F_A = \frac{\rho_{\text{eau}}}{\rho_{\text{fer}}} F_G = \frac{1}{7,8} F_G = 0,13 F_G$$

soit 13 % de son poids, sous l'eau, le poids effectif (apparent) du fer est égal à 0,87 fois son poids réel.

● **Principe d'Archimède** :
Les forces exercées par un fluide en équilibre sur un corps qui y est immergé admettent une résultante unique, verticale, dirigée vers le haut, égale au poids du fluide déplacé.
La force verticale, portée par une droite passant par le centre de gravité du volume du fluide déplacé, est appelée **poussée d'Archimède**.

▷ Ce principe s'applique également aux corps partiellement immergés.

▷ Un corps moins dense que l'eau repose néanmoins au fond d'un récipient si aucun fluide ne peut s'introduire entre le fond et le corps.

Trois possibilités sont à distinguer pour la poussée d'Archimède :

$F_A < F_G$	Le corps s'immerge totalement, il est plus dense que le fluide.
$F_A = F_G$	Le corps flotte en équilibre indifférent, sa densité est égale à celle du fluide.
$F_A > F_G$	Le corps surnage ou est partiellement immergé, sa densité est inférieure à celle du fluide.

Un corps placé dans l'air (ou un gaz) subit une poussée d'Archimède égale au poids du volume d'air déplacé :

Aéronef, ballon : corps flottant dans l'air grâce à la poussée d'Archimède. Un ballon contient un gaz moins dense que l'air (hélium, air chaud). L'hydrogène, inflammable, fut utilisé dans le passé.

2. Mesures de densité

M La poussée d'Archimède F_A peut être mise à profit pour mesurer la masse volumique ρ d'un solide. À l'aide d'une **balance de Mohr** (Fig. 6.29), on réalise la pesée F_{liq} lorsque le corps, suspendu à un bras de la balance, plonge dans un liquide de masse volumique connue (ρ_{liq}), puis la pesée F_{air} lorsque le corps est placé dans l'air. La différence des pesées est alors égale à la différence des poussées :

$$F_{air} - F_{liq} = F_{A,liq} - F_{A,\text{air}} = (\rho_{liq} - \rho_{\text{air}})Vg \approx \rho_{liq}Vg$$

($F_{A,liq}$ poussée dans le liquide, $F_{A,\text{air}}$: poussée dans l'air, ρ_{liq} : masse volumique du liquide, ρ_{air} : masse volumique de l'air, V : volume du corps, g : accélération de la pesanteur). En première approximation, la masse volumique de l'air est généralement négligeable devant celle du corps, alors :
$F_{air} = \rho V g = mg$
(m : masse du corps) soit :

$$\rho = \frac{\rho_{liq}}{1 - \dfrac{F_{liq}}{mg}}$$

Si le corps est moins dense que le liquide, on réalise la pesée en ajoutant un poids additionel F_{ad} au bras qui le soutient. On remplace la force F_{liq} par la différence $F_{ad} - F_{liq}$:

$$\rho = \frac{\rho_{liq}}{1 - \dfrac{F_{ad} - F_{liq}}{mg}}$$

▷ Cette méthode n'est utilisable que si le corps peut être complètement immergé dans le liquide, c'est à dire des corps de densité supérieure à celle du liquide utilisé.

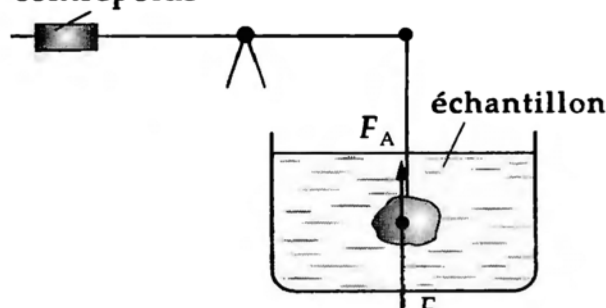


Fig. 6.29 : *Mesure de masse volumique avec une balance de Mohr*

La masse volumique d'un liquide peut être déterminée de la même façon, en utilisant un solide de masse volumique ρ connue. En réécrivant la relation ci-dessus, on a :

$$\rho_{liq} = \rho \left(1 - \frac{F_{liq}}{mg}\right)$$

Si $F_{liq,1}$ et $F_{liq,2}$ sont les poids nécessaires pour réaliser l'équilibre de la balance pour un même solide immergé successivement dans deux liquides différents de masses volumiques ρ_1 et ρ_2, alors il vient :

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1 - \dfrac{F_{liq,1}}{mg}}{1 - \dfrac{F_{liq,2}}{mg}}$$

M Une autre méthode de mesure de la masse volumique d'un liquide est basée sur la profondeur d'immersion d'un solide (aréomètre, densitomètre) dans le liquide dont on veut mesurer la masse volumique. Si le solide immergé a une surface de section droite constante S, une hauteur H et son centre de gravité s'immerge à une profondeur h, alors à l'équilibre le bilan des forces est :

$$F_A - F_G = hS\rho_{liq}g - HS\rho g = 0$$

(F_A est la poussée d'Archimède et F_P le poids du solide). On en déduit :

$$\rho_{liq} = \frac{H}{h}\rho$$

La masse volumique d'un solide homogène, partiellement immergé, peut être déterminée de la même manière :

$$\rho = \frac{h}{H}\rho_{liq}$$

6.2.4 Cohésion, adhésion, tension superficielle

1. Cohésion

C'est la force qui unit entre elles les molécules d'un corps solide ou d'un fluide. Elle est due à la répartition des charges électriques dans les molécules (polarisation) et à l'équilibre des forces attractives et répulsives qui en résultent (cf. **Forces de Van der Waals**). Ces forces, très réduites dans les gaz réels (sauf au voisinage du point d'ébullition), disparaissent dans les gaz sous faible pression, qui se comportent alors comme des gaz parfaits. Elles sont à courte portée et leur intensité devient négligeable lorsque la distance entre molécules est supérieure à $\approx 1\ \mu$m (rayon d'action moléculaire).

- **Siphon** (Fig. 6.30) : tube recourbé à deux branches inégales pour transvaser des liquides. Dès que le liquide a dépassé le point le plus élevé du tuyau, son poids l'entraîne dans la partie descendante du siphon. La cohésion maintient les molécules ensemble et empêche la veine liquide de se rompre. La cohésion des gaz étant très faible, il est difficile de les siphoner.

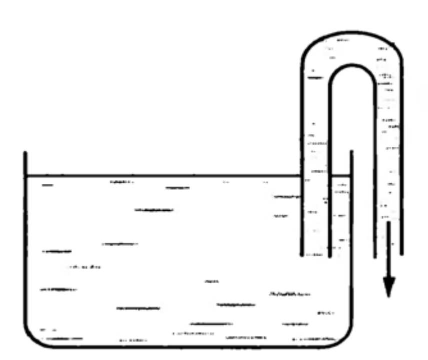


Fig. 6.30 : *Siphon : Le liquide est entraîné dans le siphon par la cohésion et son poids.*

2. Tension superficielle

C'est la force qui se manifeste à la surface d'un liquide, due à la cohésion des molécules qui le constituent (Fig. 6.31). Chaque molécule prise dans la masse du liquide est soumise de la part des molécules qui l'entourent à des forces agissant dans toutes les directions et dont la résultante est nulle. Ces molécules sont en équilibre indifférent. Au contraire, une molécule située à la surface du liquide (interface liquide-air ou liquide-solide) ou à une distance inférieure au rayon d'action moléculaire, est soumise de la part de ses voisines à des forces d'attraction dont la résultante est dirigée vers l'intérieur du liquide. Cette résultante, qui s'oppose à l'augmentation de la surface du liquide, est compensée par une force de pression de l'intérieur du liquide (par ex. : pression à l'intérieur d'une goutte d'eau). On dit que la surface du liquide possède une énergie potentielle : l'**énergie potentielle de surface**.

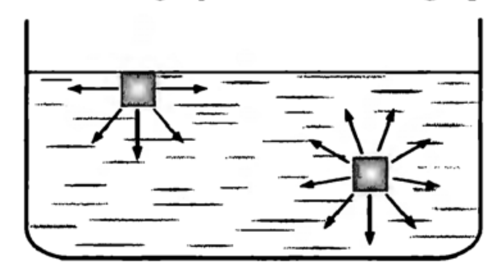


Fig. 6.31 : *Tension superficielle : dans la masse du liquide les forces de cohésion se compensent, ceci n'est pas le cas à sa surface*

La tension superficielle s'oppose à toute augmentation de la surface du liquide. Pour accroître la surface de la quantité ΔS, il faut fournir un travail ΔW. Le rapport du travail ΔW à l'accroissement de surface ΔS

est appelé **tension superficielle** A :

Tension superficielle				MT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$A = \dfrac{\Delta W}{\Delta S}$	A	$J/m^2=kg/s^2=N/m$	tension superficielle	
	ΔW	J	travail à fournir	
	ΔS	m^2	accroissement de la surface	

▶ Des valeurs typiques de tension superficielle sont 0,02 N/m pour des hydrocarbures, 0,07 N/m pour des molécules fortement polaires telles que l'eau ou la glycérine ; le mercure, liquide à température ambiante, est un cas extrême avec $A = 0,49\ N/m$. (cf. Tab. 8.3/22). D'une façon générale, la tension superficielle dépend de la température, elle est également très sensible aux impuretés (détergents, poussières, ...).

3. Mesures de tension superficielle

M Pour la mesure de la tension superficielle, on peut utiliser un fil métallique en forme de U comportant un fil mobile horizontal de longueur l (Fig. 6.32), qui trempe dans le liquide. En tirant le fil mobile vers le haut d'une quantité Δh, il se forme une lame liquide, présentant une interface liquide-air de part et d'autre, de surface totale $\Delta S = 2.l.\Delta h$. En appelant F la force de tension superficielle, le travail fourni pour tirer sur le fil mobile est $\Delta W = F.\Delta h$, le travail par unité de surface est alors :

$$A = \frac{\Delta W}{\Delta S} = \frac{F\Delta h}{2.l.\Delta h} = \frac{F}{2.l}$$

Fig. 6.32 : *Mesure de la tension superficielle par la mesure de la force* $\vec{F}$ *nécessaire pour former une lame liquide.*

La tension superficielle est par conséquent une force par unité de longueur de la ligne de contact liquide-air. Ce dispositif de mesure ne permettrait guère une mesure réelle à cause des forces de frottement entre le tube en U et la tige qui y coulisse. Les mesures réelles peuvent être effectuées avec le dispositif de Terquem qui forme une lame liquide entre deux tiges horizontales.

● La force F_A, due à la tension superficielle qui agit sur une ligne de contact de longueur totale l, est :

$F_A = l.A$

▷ Tout système cherche à évoluer vers un état d'énergie potentielle minimale. Pour cette raison, la surface d'un liquide est toujours la **surface la plus faible** pour un volume donné.

■ La surface la plus faible pour un volume donné est la sphère : en l'absence d'autres forces, une goutte liquide prend la forme d'une sphère.

6.2.4.1 Loi de Laplace

La loi de Laplace est une relation liant la différence de pression $\Delta P = (P_2 - P_1)$ entre les deux faces d'une membrane liquide ou d'un film liquide à la tension y régnant. Elle permet, notamment, d'établir la relation

entre la différence des pressions P_i à l'intérieur et P_0 à l'extérieur d'une goutte, son rayon R et la tension superficielle du liquide qui la constitue.

Pression à l'intérieur d'une goutte.

Supposons la goutte coupée en deux hémisphères. La force de tension superficielle agissant entre les deux hémisphères est égale à la longueur de contact $2\pi R$ (circonférence de la base d'un hémisphère) multipliée par la tension superficielle A. Cette force est équilibrée par la résultante des forces dues à la surpression $\Delta P.S$, où S est la surface de base d'un hémisphère et $\Delta P = P_i - P_0$, soit :

$$2\pi RA = \Delta P \pi R^2 = (P_i - P_0)\pi R^2$$

On en déduit :

$$\Delta P = (P_i - P_0) = \frac{2A}{R}$$

▷ Pour calculer la surpession à l'intérieur d'une bulle (par ex. : bulle de savon), il faut tenir compte du fait qu'elle est constituée d'une membrane liquide mince, donc qu'il y a deux films (interne et externe). Il s'ensuit que la ligne de contact est constituée de deux circonférences de longueur totale $4\pi R$, d'où :

$$\Delta P = (P_i - P_0) = \frac{4A}{R}$$

1. Adhésion

L' **adhésion** : désigne les forces attractives entre deux molécules de substances différentes, au contraire de la cohésion qui désigne les forces entre molécules identiques. Elle agit entre solides, liquides et gaz. En particulier, lors du contact d'un liquide (goutte) avec un solide (substrat), suivant l'intensité relative des forces de cohésion (entre les molécules de la goutte) et des forces d'adhésion (entre la goutte et le substrat), (Fig. 6.33) on peut distinguer les cas suivants :

- les forces d'adhésion l'emportent sur celles de cohésion, le liquide s'étale sur toute la surface du substrat (le liquide mouille parfaitement),
- les forces de cohésion l'emportent sur celles d'adhésion, le liquide se "resserre" et forme une goutte (le liquide ne mouille pas le substrat, le liquide perle).

Ces phénomènes furent étudiés notamment par **Pierre-Gilles de Gennes** (prix Nobel de Physique 1991).

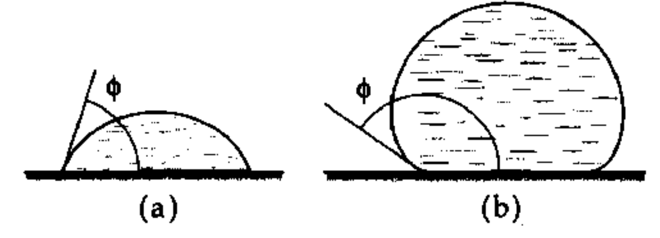


Fig. 6.33 : *Un liquide mouille un substrat si $\phi < \pi/2$. Si $\phi > \pi/2$ le liquide ne mouille pas le substrat*

2. Capillarité

C'est la tendance manifestée par un liquide à s'élever vers le haut dans un tube très fin (**capillaire**) (Fig. 6.34). Ce phénomène est dû à la tension superficielle du liquide en contact avec la paroi interne du tube capillaire et la force $F_A = A \cdot l = A \cdot 2\pi r$ qui en résulte (A : tension superficielle, l : circonférence du capillaire de rayon interieur r). Cette force équilibre le poids mg de la colonne de liquide de hauteur h

$F_G = mg = \rho \cdot h \cdot 2\pi r$. Avec $F_G = F_A$, on a :

Ascension dans un capillaire, loi de Jurin			L
	Symbole	Unité	Dénomination
$h = \dfrac{2A}{g\rho r}$	h	m	hauteur d'ascension
	A	N/m	tension superficielle
	ρ	kg/m^3	masse volumique du liquide
	g	m/s^2	pesanteur
	r	m	rayon intérieur du capillaire

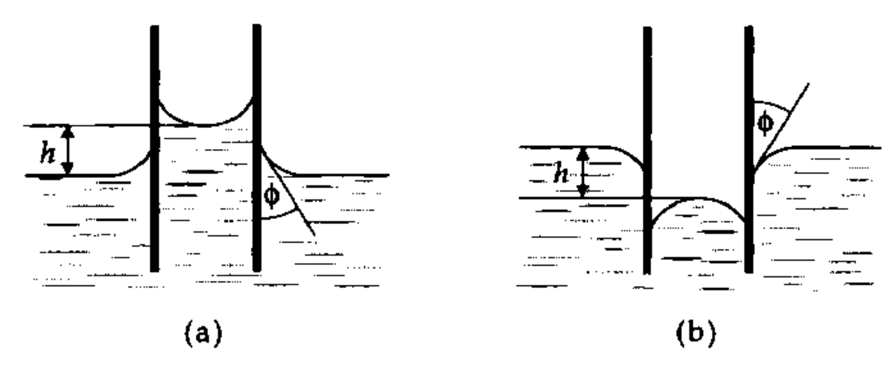


Fig. 6.34 : *Ascension (positive et négative) dans un capillaire*

■ Dans un capillaire de rayon intérieur $r = 1\ mm$, de l'eau ($A = 0,07\ N/m$, $\rho = 1000\ kg/m^3$) s'élève de la hauteur :

$$h = \frac{2A}{g\rho r} = \frac{2 \cdot 0,07\,\text{N/m}}{9,81\,\text{m/s}^2 \cdot 1000\,\text{kg/m}^3 \cdot 0,5\,\text{mm}} = 29\ \text{mm}$$

▸ Pour un liquide donné, la hauteur d'ascension ne dépend que du rayon intérieur du capillaire.

▸ La tension superficielle A d'un liquide peut être déterminée par la mesure de sa hauteur d'ascension dans un capillaire connu.

L'angle de contact θ : est l'angle entre la surface d'un liquide et la paroi solide avec laquelle il est en contact. Il résulte de l'action des forces moléculaires liquide-liquide et liquide-solide et dépend de la nature et de l'état de propreté du solide ainsi que de celle du liquide. Pour un liquide qui mouille même imparfaitement la paroi solide, $\theta < 90°$.

▸ En considérant la résultante des forces de tension superficielle et de poids des lames liquides apparaîssant le long de la ligne de contact, on montre que deux corps flottants voisins, tous deux même imparfaitement mouillés par le liquide, s'attirent. Il y a également attraction si les deux ne sont pas mouillés. Par contre, il y a répulsion si l'un est mouillé et l'autre non.

6.3 Hydrodynamique

L'application des lois de la dynamique au **mouvement d'ensemble** d'une masse fluide ne présente pas de difficultés majeures. Cependant, comme les divers points d'une masse fluide sont mobiles les uns par rapport aux autres, les problèmes posés sont généralement plus complexes que ceux de la dynamique

des solides. L'**hydrodynamique** est l'étude des écoulements de liquides et de gaz (**aérodynamique**) produits sous l'influence de forces extérieures dues à la pesanteur ou à des différences de pression ; l'hydrodynamique des **fluides réels** fait en plus intervenir des forces intérieures de frottement des molécules de fluide entre elles, dues à la viscosité. Pour l'écoulement des gaz, la compressibilité intervient également ; néanmoins, si leur vitesse d'écoulement reste faible ($\approx$ 1/3 de la vitesse du son dans ce gaz), il se comportent pratiquement comme des fluides incompressibles.

6.3.1 Champ d'écoulement

1. Définition d'un champ d'écoulement

Chaque particule d'un fluide en mouvement possède à un instant donné une vitesse définie par sa grandeur et sa direction. L'hypothèse de base de l'hydrodynamique est que, dans un volume élémentaire, la vitesse moyenne des particules est la même, c'est à dire qu'en chaque point du fluide, on peut attribuer la même vitesse $\vec{v}$ à chaque particule contenue dans le volume élémentaire entourant ce point. La distribution dans l'espace et en fonction du temps des vitesses correspondantes est appelée un **champ de vitesse** $\vec{v}(x, y, z, t)$ (champ vectoriel). De même on peut définir un champ de **masse volumique** $\rho(x, y, z, t)$, un **champ de pression** $p(x, y, z, t)$ ou un **champ de température** $T(x, y, z, t)$ (champs scalaires).
Nous ne considérerons que des états de **régime permanent**, c'est à dire qu'en chaque point d'un fluide, la vitesse d'écoulement $\vec{v}$ a une une grandeur et une direction qui ne dépend que des coordonnées d'espace de ce point et non pas du temps. Cette distribution spatiale des vitesses constitue un **champ de vitesse** $\vec{v}(x, y, z)$. De façon analogue on peut définir un **champ de pression** $p(x, y, z)$, un **champ de température** $T(x, y, z)$ et un **champ de densité** $\rho(x, y, z)$.

▷ Cette description n'est valable qu'à l'équilibre thermodynamique local (→ *Thermodynamique*). Alors on peut définir la température et la pression et déduire la masse volumique à l'aide de l'équation d'état. Dans des situations où l'équilibre thermodynamique n'est pas atteint, la description de l'écoulement fait appel à la **théorie cinétique des gaz** ou à la **théorie de transport**.

2. Propriétés du champ de vitesse

Le champ de vitesse est un champ de vecteurs ; sa valeur $\vec{v}(x, y, z)$ en un point (x, y, z) indique la vitesse moyenne des particules fluides contenues dans un volume élémentaire entourant ce point ; parmi les régimes d'écoulements on distingue :

- régime permanent (stationnaire) : la vitesse en un point est indépendante du temps. Si de plus, la vitesse est la même en tout point, l'écoulement est dit uniforme (homogène).
- régime non permanent (turbulent) : la vitesse en un point dépend du temps.

Les **lignes de courant** sont définies comme tangentes en chaque point au vecteur vitesse du fluide (Fig. 6.35) ; en régime permanent, elles représentent les trajectoires fixes suivies par les particules de fluide en mouvement. En mêlant un traceur (encre) au fluide en mouvement, on peut visualiser le champ d'écoulement.

● En régime permanent (stationnaire), les lignes de courant se confondent avec les trajectoires des particules fluides.

La description mathématique complète d'un écoulement est réalisée à l'aide de l'**analyse vectorielle**.

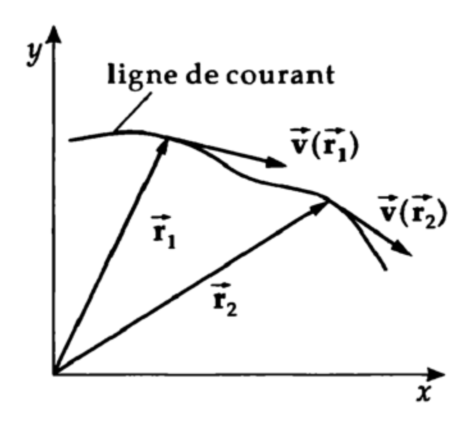


Fig. 6.35 : *Lignes de courant. Le vecteur vitesse $\vec{v}(\vec{r})$ est tangent à la ligne de courant au point $\vec{r}$*

3. Exemples de lignes de courant

Dans la représentation des lignes de courants, la densité n des lignes (n = nombre de lignes traversant une surface unité) caractérise la vitesse d'écoulement : $n \propto |\vec{v}|$

Tube de courant : région de l'espace ayant la forme d'un tube dont les génératrices correspondent aux lignes de courant. En régime stationaire (non turbulent), les lignes de courant ne traversent pas les parois d'un tube de courant.

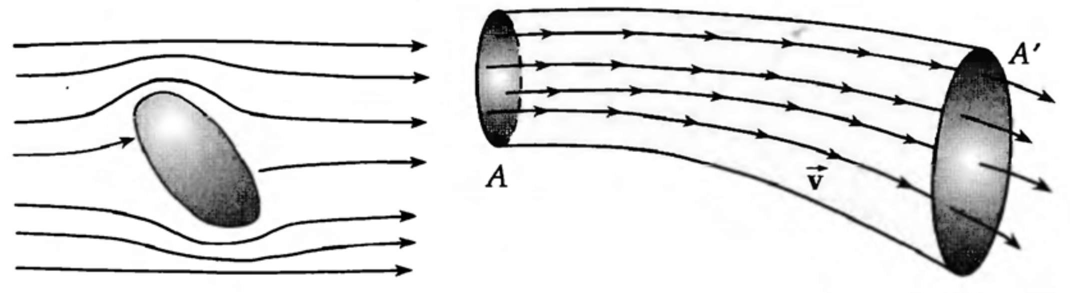


Fig. 6.36 : *Champ d'écoulement autour d'une plaque*

Fig. 6.37 : *Champ de vitesse dans un tube de courant*

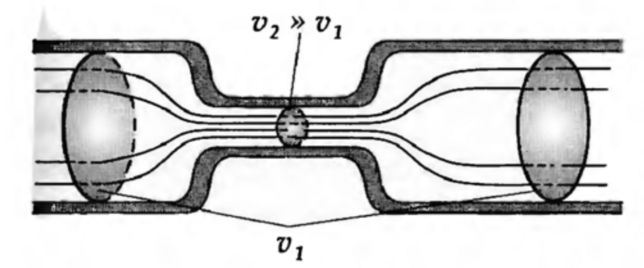


Fig. 6.38 : *Densité n des lignes de courant dans un tube à section variable*

6.3.2 Équations fondamentales des fluides parfaits

Un **fluide parfait** est un fluide incompressible au sein duquel les forces de frottements ne se manifestent pas : sans viscosité.

▷ La compressibilité des **gaz parfaits** obéit à la loi de Boyle-Mariotte (→ *Thermodynamique*). L'écoulement des gaz parfait n'obéit généralement pas aux lois des fluides parfaits.

6.3.2.1 Équation de continuité

1. Établissement de l'équation de continuité

L'équation de continuité exprime la conservation de la masse. Considérons un fluide incompressible qui remplit complètement un tube. Du fait de son incompressibilité, si une masse de fluide pénètre à une des extrémités du tube, pendant le même temps une masse égale de fluide doit sortir à l'autre extrémité. Soit un tube de section S (Fig. 6.39), dans lequel s'écoule un fluide incompressible avec la vitesse v. La masse Δm de fluide qui, pendant le temps Δt, traverse la surface S est donnée par :

$$\Delta m = \rho v S \Delta t$$

Dans le cas d'un tube à section variable, à l'endroit de section S' où le fluide s'écoule à la vitesse v', la masse de fluide qui, pendant le même intervalle de temps Δt, traverse S' est :

$$\Delta m' = \rho' v' S' \Delta t$$

On doit avoir $\Delta m = \Delta m'$ et $\rho = \rho'$ le fluide étant incompressible, d'où :

$$vS = v'S'$$

Équation de continuité				L^3T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$vS = v'S'$	v, v'	m/s	vitesse resp. en S et S'	
	S, S'	m^2	sections du tube	

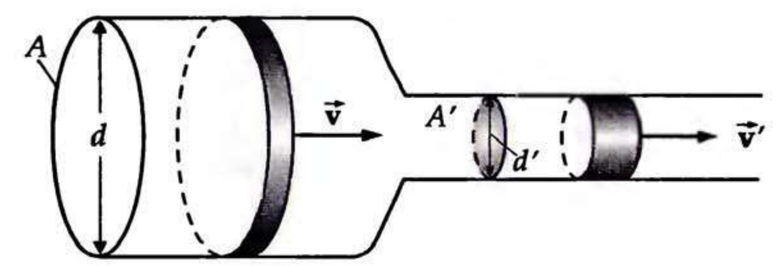


Fig. 6.39 : *Écoulement dans un tube à section variable* $S = \pi d^2/4$

- Le produit de la section du tube par la vitesse du fluide est constant. Si la section diminue, la vitesse d'écoulement augmente.

▷ Généralement, la vitesse d'écoulement n'est pas uniforme au travers d'une section droite d'une conduite, elle est faible près des parois et plus forte vers l'axe du tube. L'équation de continuité reste néanmoins valable si on considère la vitesse moyenne $\bar{v}$ d'écoulement.

Débit (Q) m^3/s : désigne le volume de fluide qui s'écoule dans un conduit par unité de temps. Il est égal au produit de la vitesse du fluide par la section du conduit, $Q = vS$.

▷ Une relation analogue exprime la conservation de la charge dans les courants électriques (→ *Électricité*). Une équation de continuité exprime généralement la conservation d'une grandeur physique.

- Le volume de fluide entrant dans un cube élémentaire est égal au volume de fluide qui s'en écoule pendant le même intervalle de temps (fluide incompressible).

2. Forme locale de l'équation de continuité

On en déduit la forme locale ou **différentielle de l'équation de continuité** : le volume de liquide, entrant par unité de temps, à travers un élément de surface $\Delta y \cdot \Delta z$ perpendiculaire à l'axe x est :

$$V_{entr.,x} = v_x(x) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

Le débit sortant par la face élémentaire opposée est

$$V_{sort.,x} = v_x(x + \Delta x) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

D'après le théorème de Taylor :

$$v_x(x + \Delta x) \approx v_x(x) + \frac{\partial v_x}{\partial x}(x) \cdot \Delta x$$

En appliquant le même raisonnement aux composantes sur les axes y et z, on calcule la différence ΔV des volumes élémentaires de fluide entrant et sortant :

$$\Delta V = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$$

La quantité entre parenthèse représente la **divergence** du champ du vecteur vitesse d'écoulement $\vec{\mathbf{v}}$:

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

L'équation de continuité du fluide incompressible exprimant qu'il ne peut y avoir ni accumulation ni destruction de fluide en un point, soit $\Delta V = 0$, sa formulation locale est alors :

Équation de continuité différentielle (locale)			**LT^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\operatorname{div} \vec{\mathbf{v}} = 0$	$\vec{\mathbf{v}}$	m/s	champ de vitesse

3. Potentiel de vitesse, équations de Laplace et de Poisson

Cette équation différentielle peut être résolue en introduisant un **potentiel des vitesses** ou un **potentiel de courant**. Un potentiel des vitesses Φ est un champ scalaire, dont le **gradient** représente le champ des vitesses $\vec{\mathbf{v}}$.

$$\overrightarrow{grad}\, \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \vec{\mathbf{v}}$$

$$\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{grad}\, \Phi$$

En utilisant Φ, l'équation de continuité s'écrit alors :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Phi = 0$$

L'opérateur vectoriel entre parenthèse est appelé le **Laplacien** de Φ. L'équation de continuité est encore appelée **équation de Laplace** ou, si le membre de droite est différent de zéro, **équation de Poisson**. Ces équations ont leurs analogues dans d'autres domaines de la physique (→ *Électricité*).

Laplacien (opérateur de Laplace)Δ : produit scalaire de l'**opérateur Nabla** $\vec{\nabla}$ par lui-même. Il est égal à la somme de toutes les dérivées partielles secondes :

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Il existe de nombreux outils analytiques et numériques pour la résolution des équations de Laplace et de Poisson en fonction des conditions aux limites.

4. Condition de Helmholtz

La représentation d'un débit à l'aide d'un potentiel Φ n'est possible que dans le cas d'écoulements laminaires, c'est à dire si on a affaire à un **écoulement non tourbillonaire**. Pour un écoulement permanent ceci signifie que les lignes de courant ne se referment pas sur elles-mêmes. Cette condition peut encore être énoncée à l'aide de l'opérateur vectoriel rot $\vec{v}$ appelé le **rotationnel** du champ des vitesses :

$$\text{rot}\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Un écoulement est non tourbillonaire si en tout point de l'espace, le rotationel du champ des vitesses s'annule : rot $\vec{v} = 0$ (**Condition de Helmholtz**).

5. Sources et puits

Les **sources** sont des régions de l'espace d'où partent les lignes de courant.
Les **puits** sont des régions où les lignes de courant aboutissent. Le nombre de lignes de courant qui traversent une surface entourant la source, n'est pas égal au nombre de lignes de courant qui ressortent de cette surface ; la différence dépend de l'intensité de la source. Pour la divergence du champ de vitesse on a alors :

$$\text{div}\,\vec{v} = q\,, \qquad q\ :\ \text{densité de source}, \quad q > 0\ :\ \text{Source}, \quad q < 0\ :\ \text{Puits}$$

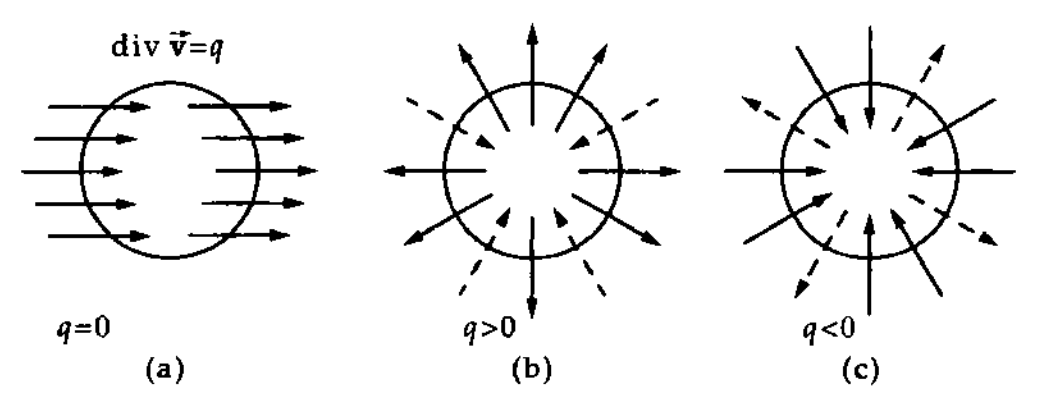


Fig. 6.40 : *Divergence du champ de vitesse. (a) : Courant sans source, (b) : Source $q > 0$, (c) : Puits $q < 0$*

6.3.2.2 Équation d'Euler

L'équation d'Euler décrit l'écoulement d'un fluide incompressible et non visqueux (fluide parfait). Elle est l'expression de la loi de Newton :

$$\rho \cdot \left((\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathrm{grad}})\vec{\mathbf{v}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} \right) \equiv \rho \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{F}} - \vec{\mathrm{grad}} p$$

où la relation :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{grad}} v + \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} = \left(\frac{1}{2} \vec{\mathrm{grad}} v^2 + \mathrm{rot} \vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{v}} \right) + \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t}$$

représente la variation de la vitesse d'un élément de volume dans un repère en mouvement avec le fluide. Le membre de gauche de cette équation est l'accélération et le membre de droite les forces agissantes :

- les forces extérieures $\vec{\mathbf{F}}$
- la force de pression le long du gradient de pression $-\,\mathrm{grad}\, p$

▷ Dans le cas de l'écoulement d'un fluide visqueux (frottements), l'équation d'Euler devient → *l'équation de Navier-Stokes.*

6.3.2.3 Équation de Bernoulli

1. Introduction

L'équation de Bernoulli : établit une relation entre le diamètre d'une conduite dans laquelle circule un fluide et la pression qui y régne.
On distingue :

- la **pression statique** ou **pression isotrope** : agit dans toutes les directions du fluide, aussi bien perpendiculairement que parallèlement à la direction d'écoulement du fluide.
- la **pression hydrostatique**, qui dépend de la profondeur d'immersion dans un fluide, est une pression statique. La pression hydrostatique est l'analogue de l'énergie potentielle d'un corps placé dans le champ de pesanteur.
- la **pression dynamique** : pression due à l'écoulement d'un fluide agissant dans la direction de l'écoulement et qui s'ajoute à la pression hydrostatique. La pression dynamique est l'analogue de l'énergie cinétique d'un corps.

● **Loi de Bernoulli** : la somme des pressions statiques et dynamiques est constante dans un écoulement laminaire.

▷ De ce fait, la pression dans un écoulement laminaire est **anisotrope**. La pression hydrostatique est la partie **isotrope** de la pression.

2. Établissement de l'équation de Bernoulli

La loi de Bernoulli découle de la conservation de l'énergie. Si un volume de fluide ΔV, en un point de section droite S d'une conduite, possède une énergie cinétique $\frac{1}{2}\rho\Delta V v^2$ (ρ : masse volumique du fluide, v : vitesse du fluide) et en un autre point de section droite S' l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\rho\Delta V v'^2$, alors la différence :

$$\Delta W_{\mathrm{cin}} = \frac{1}{2}\rho\Delta V(v'^2 - v^2)$$

est due à la différence d'énergie de pression W_p et d'énergie potentielle $\Delta V \rho g(h - h')$ (où $(h - h')$ est la différence d'altitude des deux points).

L'énergie de pression W_p : est le travail nécessaire pour faire entrer le volume de fluide ΔV à la pression p dans un tube, soit :

$$W_p = pS\Delta x = p\Delta V$$

alors :

$$\Delta W_{cin} = \Delta V(p - p') + \Delta\rho g(h - h')$$

Équation de Bernoulli			**$ML^{-1}T^{-2}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const.}$$	p	Pa	pression
	ρ	kg/m^3	masse volumique
	v	m/s	vitesse d'écoulement
	g	m/s^2	pesanteur
	h	m	altitude

Le premier terme est la pression statique, le deuxième la pression dynamique, le troisième la pression hydrostatique. Ce dernier terme fait partie de la pression statique mais dépend de l'altitude (Fig. 6.41).

▷ L'équation de Bernoulli est valable dans le cas de l'écoulement en régime permanent d'un fluide parfait incompressible. Elle peut, dans certaines limites, s'appliquer à l'écoulement d'un fluide réel.

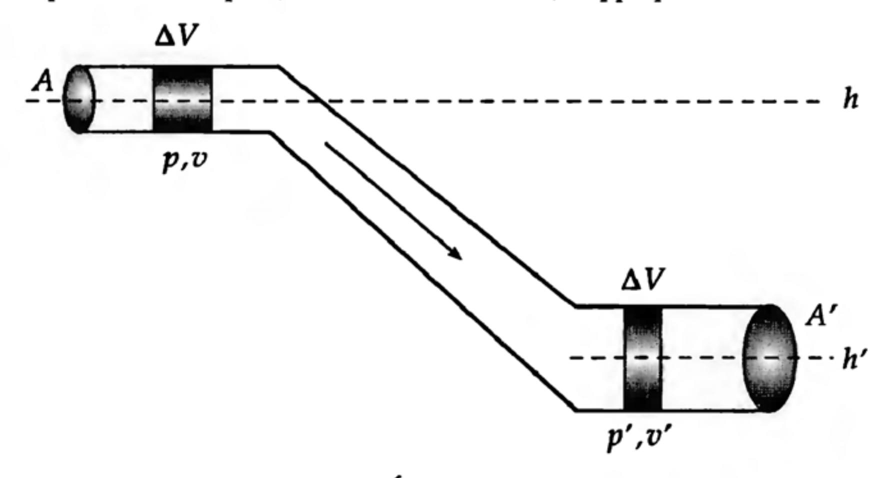


Fig. 6.41 : *Équation de Bernoulli*

3. Techniques de mesures basés sur la loi de Bernoulli

Tuyére, buse : rétrécissement ou étranglement dans un tube à section variable. D'après l'équation de continuité, si la section d'une conduite devient plus faible, la vitesse d'écoulement du fluide augmente ; d'après l'équation de Bernoulli, il s'ensuit alors une diminution de la pression dans le rétrécissement (**tube de Venturi, trompe à eau**). La diminution de pression est convertie en énergie cinétique.

Diffuseur : élargissement d'un tube, la pression du fluide qui y circule augmente. L'énergie cinétique est convertie en pression. Les diffuseurs sont notamment utilisés dans les turbines hydrauliques pour évacuer l'eau qui a traversé la turbine dans le canal de fuite.

L'équation de continuité et l'équation de Bernoulli trouvent leur application dans de nombreuses techniques de mesure :

M **Sonde de pression** : sert à mesurer la pression statique p dans un fluide ; généralement une ouverture pratiquée dans la paroi du récipient et mis en communication avec une capsule manométrique ou un manomètre à tube en U.

M **Tube de Pitot** : sert à la mesure de pressions statiques et dynamiques. La vitesse d'écoulement du fluide est nulle à l'avant du tube de Pitot, à cet endroit on mesure la pression statique et hydrodynamique ($p' = p + \rho g h$).

M **Tube de Prandtl** : sert à mesurer la pression dynamique et par conséquent, la vitesse d'écoulement du fluide. Il est constitué par la réunion d'une sonde de pression et un tube de Pitot. Ainsi, il mesure la différence de pression entre un tube de Pitot et une sonde de pression.

$\Delta p = p' - p = \frac{1}{2}\rho v^2 \; v = \sqrt{\left(\frac{2.\Delta p}{\rho}\right)}$

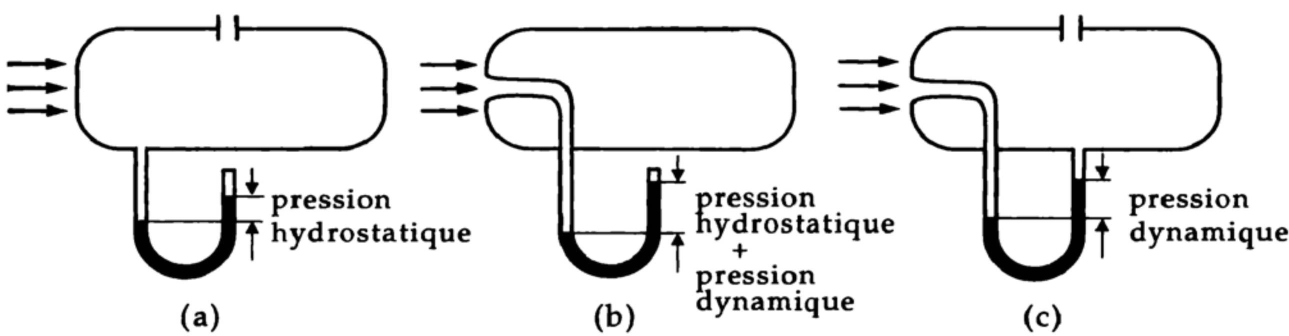


Fig. 6.42 : *Mesures de pression en application de l'équation de Bernoulli. (a) : Sonde de pression (statique), (b) : Tube de Pitot (stat. et dynam.), (c) : Tube de Prandtl (dynamique)*

4. Tube de Venturi

En vertu de l'équation de continuité, dans un tube qui présente une variation de section (rétrécissement), la vitesse d'écoulement varie. **Le principe de Venturi** permet de déterminer le débit Q du fluide par la mesure de la chute de pression dans l'étranglement. L'équation de continuité $v_1.S_1 = v_2.S_2$ montre que la vitesse augmente là où la section diminue. En vertu du théorème de Bernoulli, cela entraîne une diminution de la pression dans l'étranglement :

$$Q = S_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{(S_1/S_2)^2 - 1}} \cdot \sqrt{\frac{2|\Delta p|}{\rho}}$$

(S_1 : section du tube, S_2 : section de l'étranglement, Δp : chute de pression, ρ : masse volumique du fluide, g : pesanteur).

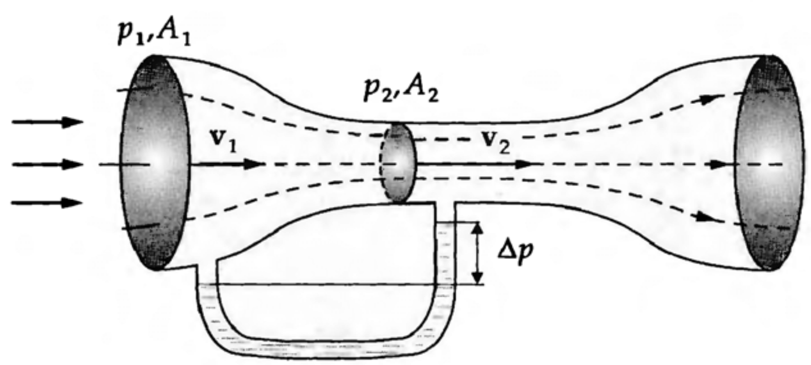


Fig. 6.43 : *Tube de Venturi. Une chute de pression se produit dans l'étranglement*

▷ Dans le cas de l'écoulement de fluides réels visqueux, il est nécessaire d'introduire des facteurs correctifs qui sont déterminés par un étalonnage.

6.3.2.4 Théorème de Torricelli

1. Vitesse d'écoulement

La vitesse d'écoulement d'un fluide parfait incompressible, par un orifice calibré percé dans la paroi de son récipient, découle de l'équation de Bernoulli. Le volume de fluide s'écoulant à la vitesse v_2 par l'orifice situé à la hauteur h_2 est faible et la section S_2 de l'orifice est très faible par rapport à la section du réservoir. En raison de l'équation de continuité, on peut alors considérer que la vitesse v_1 au haut du réservoir est négligeable. Dans ce cas, compte tenu de la pression atmosphérique p_0 :

$$\rho g h_1 + p_0 = \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v^2 + p_0$$

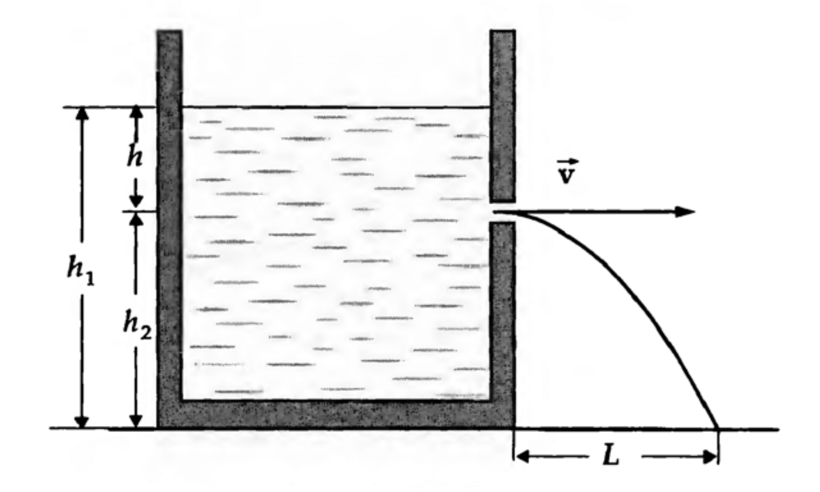
soit :

Vitesse d'écoulement en paroi mince $\propto \sqrt{\text{Hauteur}}$				**LT^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$v = \sqrt{2gh}$	v	m/s	vitesse d'écoulement	
	g	m/s^2	pesanteur	
	$h = h_1 - h_2$	m	hauteur de la colonne de liquide	

2. Théorème de Torricelli

La vitesse d'écoulement d'une colonne de liquide de hauteur h est égale à celle qu'aurait tout corps tombant en chute libre de la même hauteur h (Fig. 2.).

▷ La **viscosité** du fluide est négligée dans ce cas. On en tient compte en multipliant la vitesse d'écoulement par un terme correctif ϕ (eau : $\phi \approx 0,97$). Par ailleurs, on constate que le jet liquide à sa sortie de l'orifice a une **section contractée** s plus faible que celle S de l'orifice. Pour un orifice en paroi mince (biseauté) le rapport $s/S = \alpha \approx 0,61$.



Loi de Torricelli : la vitesse d'écoulement $\vec{v}$ dépend de la hauteur h et est indépendante de ρ

3. Vitesse d'écoulement d'un tube

Par un raisonnement analogue, on calcule la vitesse d'écoulement à la sortie d'une conduite en fonction de la surpression Δp qui y règne par rapport à la pression externe :

Vitesse d'écoulement par un tube			LT^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$	v	m/s	vitesse d'écoulemnt
	Δp	Pa	surpression
	ρ	kg/m³	masse volumique

▷ Le frottement (viscosité du fluide) a été négligé dans l'établissement de cette relation. L'effet de la viscosité peut être prise en considération par un terme correctif Φ (coefficient de vitesse). Pour l'eau $\Phi = 0,97$.

4. Débordement

Débordement : écoulement d'un fluide par le bord de son récipient, par exemple : débordement d'une digue, barrage ou écluse (Fig. 6.44). Le débit est :

$$Q = \frac{2\kappa}{3} \cdot h \cdot b \cdot \sqrt{2gh}$$

(h : hauteur du débordement, b : largeur de la chute, g : pesanteur). Le facteur de contraction κ peut être calculé (norme Suisse) par :

$$\kappa = 0,615 \cdot \left(1 + \frac{1}{1,6 + 1000h}\right)\left(1 + 0,5\frac{h^2}{H^2}\right)$$

Valable pour des hauteurs de chute $H - h \geq 0,3\,\text{m}$, $H \geq 2h$ et $h = 0,025\,\text{m} \ldots 0,8\,\text{m}$.

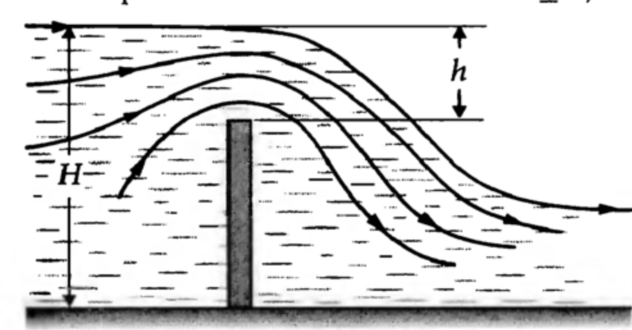


Fig. 6.44 : *Débordement : écoulement par le bord d'un récipient*

6.3.2.5 Effets d'aspiration

En vertu de l'équation de Bernoulli, la pression dans un fluide qui s'écoule est plus faible que celle qui règne dans son environnement. Cette baisse de pression provoque une aspiration :

- **Phénomène de Venturi** : la diminution de la section d'une conduite produit une accélération de l'écoulement, si la vitesse atteinte est suffisamment élevée, on peut obtenir une pression statique inférieure à la pression atmosphérique et aspirer un fluide extérieur.
  - **Trompe à eau** (Fig. 6.45) : permet d'aspirer un gaz à l'aide d'un courant liquide. Un ajutage conique rétrécit le jet de liquide (eau, mercure ...) et augmente sa vitesse, la diminution de la pression statique

est alors utilisée pour aspirer l'air extérieur. Relié à un récipient, un tel système permet d'y faire le vide. Les **pompes à diffusion** de vapeur de mercure (ou d'huile de silicone) permettent de produire un vide poussé de l'ordre de 1 Pa = 10^{-5} bar. Le vide obtenu est limité par la valeur de la tension de vapeur du liquide utilisé.

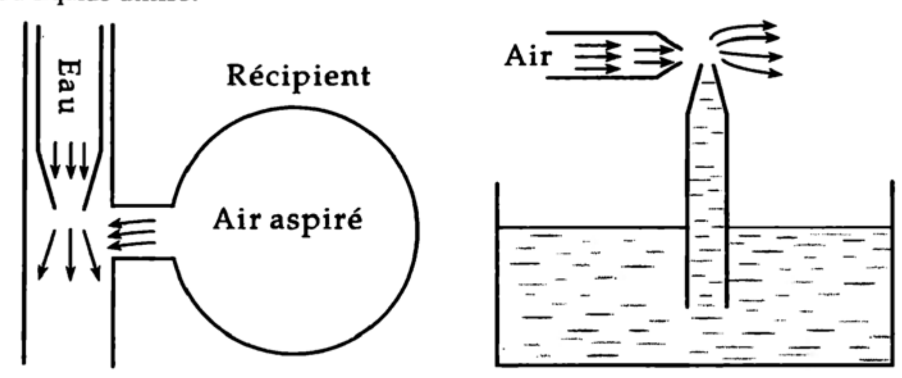


Fig. 6.45 : *Trompe à eau*   **Fig. 6.46 :** *Pulvérisateur*

- **Pulvérisateur** (Fig. 6.46) : son fonctionnement est analogue à celui de la trompe à eau. C'est l'air sortant d'un tube effilé qui subit une baisse de pression qui permet d'aspirer le liquide contenu dans un récipient. En même temps, ce liquide est pulvérisé et projeté en fines gouttelettes par le flux d'air (vaporisateur de parfums, pistolet à peinture ...).
- **Bec Bunsen, brûleur à gaz** : le courant de gaz d'éclairage en sortant par un petit orifice (buse) à grande vitesse, aspire l'air extérieur par des trous latéraux et l'entraîne en se mélangeant avec lui.
- **Paradoxe hydrodynamique, effet de sol** (Fig. 6.47) : le flux d'un gaz ou d'un liquide s'écoulant à grande vitesse d'un tube peut aspirer un disque placé près de l'orifice du tube. De façon analogue, lorsque deux véhicules roulent côte à côte à grande vitesse, la vitesse relative de l'air compris entre eux devenant grande, la baisse de pression qui en résulte attire les véhicules l'un vers l'autre. Le même phénomène est utilisé pour augmenter la tenue de route de certains véhicules par "effet de sol".

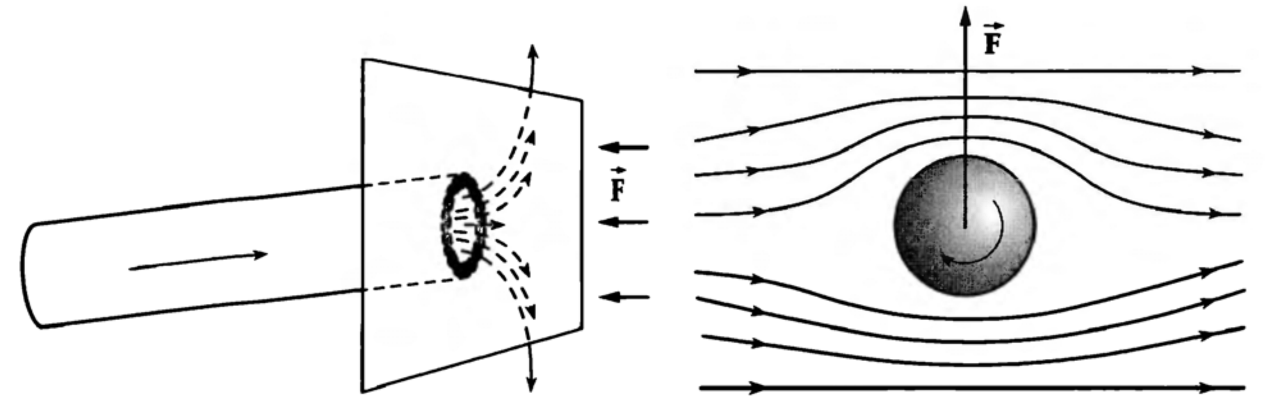


Fig. 6.47 : *Paradoxe hydrodynamique : la plaque est aspirée par le fluide qui s'écoule du tube*

Fig. 6.48 : *Effet Magnus*

6.3.2.6 Portance, poussée dynamique

Portance : résultante des forces de pression qui agissent sur un corps placé dans un courant fluide (aile d'avion, aileron,...). Elle apparaît lorsque la vitesse d'écoulement d'un fluide autour d'un corps prend des

valeurs différentes sur cetaines faces du solide. D'après l'équation de Bernoulli, la pression est plus faible sur la face près de laquelle la vitesse est la plus grande.

Effet Magnus (Fig. 6.48) : un cylindre tournant autour de son axe et soumis à l'action du vent, qui est normale à l'axe du cylindre, subit une force perpendiculaire à la direction du vent. La rotation du cylindre entraîne les couches de fluide sur un côté et augmente leur vitesse, tandis qu'un ralentissement se produit sur le côté opposé. Le théorème de Bernoulli montre que la pression de l'air est plus forte du côté du cylindre où la vitesse d'écoulement du fluide est la plus grande, dans le cas de la figure (Fig. 6.48) une force dirigée verticalement vers le bas apparaît. En inversant le sens de rotation du cylindre, une force dirigée vers le haut serait produite.
L'effet Magnus est mis à profit pour la propulsion de navires, où des cylindres tournants remplacent les voiles : chaque cylindre, haut d'une dizaine de mètres, large de 3 m, tournant à $\approx$ 2 tours/s produit une force permettant de propulser le navire.

Aile d'avion : en mouvement relatif par rapport à l'air, les lignes de courant contournent l'aile par le dessus et le dessous ; par construction, la vitesse d'écoulement est plus grande au voisinage de sa face supérieure que près de sa face inférieure. La différence de pression qui en résulte, produit une force dirigée verticalement vers le haut : la **poussée aérodynamique** ou **portance**. La différence de pression peut être supérieure à 60 kg/m^2.

Portance, poussée aérodynamique				$\mathrm{MLT^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$F_A = c_A \frac{\rho}{2} A v^2$	F_A	N	portance	
	c_A	1	coefficient de *Lift*	
	ρ	kg/m^3	masse volumique du fluide	
	v	m/s	vitesse relative d'écoulement	
	A	m^2	aire projetée de l'aile	

La portance est proportionnelle au carré de la vitesse et à l'aire déployée de l'aile.

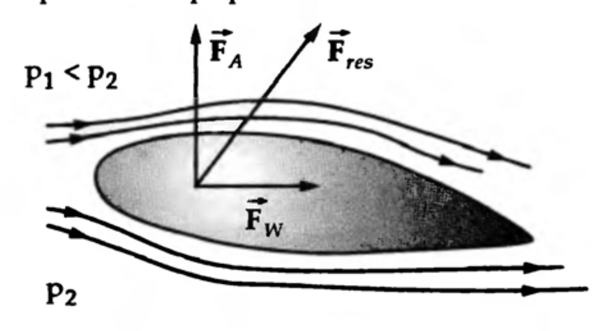


Fig. 6.49 : *Portance d'une aile dans un écoulement laminaire. La poussée $\vec{F}_A$ et la traînée $\vec{F}_W$ donnent lieu à la résultante $\vec{F}_{res}$*

▷ Le coefficient de *Lift*, ou de poussée dynamique, est déterminé expérimentalement dans une soufflerie. Sa valeur est typiquement comprise entre 0,02 et 0,05.

▷ Dans le calcul d'une aile d'avion, il faut également tenir compte du frottement. La résultante est composée de la poussée verticale (**portance**) et des forces de frottements dirigées vers l'arrière (**traînée**) ; son point d'application, en fonction de l'**angle d'attaque**, peut être déterminé en soufflerie par la mesure du couple qui s'exerce sur l'aile.

6.3.3 Fluide réel incompressible

Fluide réel : se différencie du fluide parfait par la prise en compte des forces de frottement entre les couches de fluide en mouvement. On distingue :

- L'**écoulement laminaire** où les couches fluides se déplacent de façon permanente, parallèlement entre elles.
- L'**écoulement turbulent**, non stationnaire, dans lequel la direction et la grandeur de la vitesse peuvent changer aléatoirement.

6.3.3.1 Frottement interne

Frottement interne : forces de frottement dues à la cohésion des molécules d'un fluide qui se déplacent les unes par rapport aux autres. Une partie de l'énergie cinétique du fluide est dissipée sous forme de chaleur.

1. Écoulement laminaire

Les différentes couches de fluide, avec des vitesses différentes, glissent les unes sur les autres sans se mélanger (Fig. 6.50). Les forces de frottement apparaissent entre les couches adjacentes lors de ce glissement et conduisent à une diminution de la vitesse. Ce régime d'écoulement laminaire est encore appelé (→ *régime de Poiseuille*). Antonyme : **écoulement turbulent.**

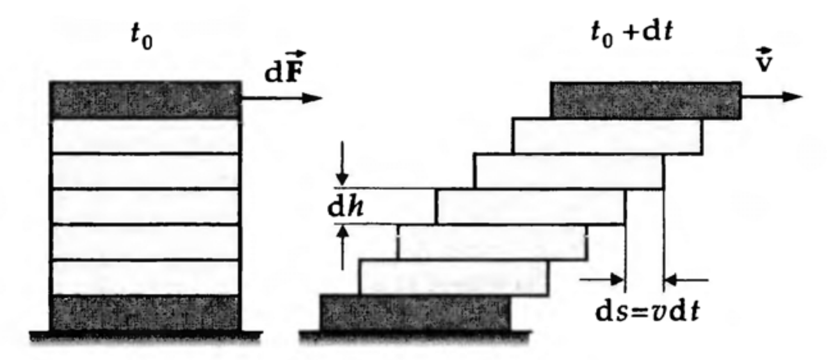


Fig. 6.50 : *Couches fluides lors d'un écoulement laminaire. Les couches successives glissent les unes par rapport aux autres*

Gradient de vitesse, $\Delta v/\Delta x$: différence des vitesses de deux couches adjacentes de fluide relativement à leur épaisseur. En représentant la vitesse $v(x)$ en fonction de la position transversale à l'écoulement x, on obtient le **profil des vitesses** (Fig. 6.51) dont la dérivée première, dv/dx, est appelé gradient de la vitesse.

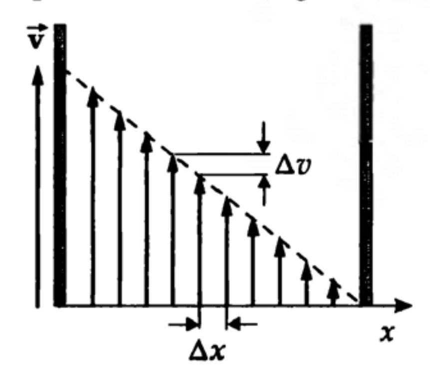


Fig. 6.51 : *Profil des vitesses lors d'un écoulement laminaire entre deux surfaces planes parallèles en mouvement relatif*

2. Loi de Newton

La **loi de Newton** : mesure la force de frottement F_f entre les couches fluides lors d'un écoulement laminaire. Elle est proportionnelle à la surface S de la couche (parallèlement à son mouvement) et au gradient de la vitesse d'écoulement (→ *hypothèse de Navier : proportionnelle au taux de variation de la vitesse le long de la normale à la couche fluide*).

Force de frottement, loi de Newton			**MLT^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$F_f = \eta S \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$	F_R	N	force de frottement
	η	Pa·s = N·s/m^2	viscosité (dynamique)
	S	m^2	aire de la couche
	$\Delta v/\Delta x$	1/s	gradient de vitesse

La constante de proportionnalité η est la **viscosité (dynamique)**. Elle s'exprime en **Pascal.seconde** (Pa.s). La force nécessaire pour mettre en mouvement un fluide est d'autant plus grande que sa viscosité est forte. (→ *Tab. 8.3/13 à 8.3/18*). Des valeurs caractéristiques sont : 10^{-5} Pa.s pour les gaz, 10^{-3} Pa.s pour l'eau entre $0,1$ et $0,01$ Pa.s pour les huiles moteurs.

Autre unité pratique (n'est pas une unité du système SI) :

1 Poise $= 0,1$ Pa.s

3. Fluidité et viscosité cinématique

Fluidité ϕ : l'inverse de la viscosité :

$$\phi = \frac{1}{\eta} \quad , \qquad [\phi] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Ns}}$$

Viscosité cinématique ν : le quotient de la viscosité η par la masse volumique ρ d'un fluide :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad , \qquad [\nu] = \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$$

Unité obsolète :

1 Stokes $= 1\,\mathrm{St} = 10^{-4}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$

Des valeurs typiques sont $10^{-6}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ pour l'eau, $10^{-4}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$ pour l'air et de 1 à plusieurs centaines m^2/s pour les huiles moteurs.

La viscosité (dynamique) est une mesure de la force de frottement qui agit sur une couche fluide. La viscosité cinématique tient compte de la masse volumique du fluide et par conséquent de sa masse $m = \rho V = \rho A\,\Delta x$, elle mesure son accélération :

$$a = \frac{F_f}{m} = \frac{F_f}{\rho S\,\Delta x} = \nu \frac{\Delta v}{(\Delta x)^2}$$

(a : accélération, m : masse de la couche, F_f : frottement, S : surface, Δx : épaisseur de la couche, Δv : différence des vitesses).

▷ La viscosité est caractéristique d'une substance et dépend fortement de la température et de la pression. La dépendance en fonction de la température est approximée par :
$\eta = A\,\mathrm{e}^{b/T}$

Ainsi, la viscosité diminue lorsque la température augmente ; il est important de contrôler cette variation pour les lubrifiants. A et b sont des constantes caractérisant une substance.
La viscosité des gaz est beaucoup plus faible que celle des liquides (air : $1,7 \cdot 10^{-5}$ Pa.s, eau : $1,8 \cdot 10^{-3}$ Pa.s à 0 °C) (→ *Tab. 8.3/13 à 8.3/18*). La viscosité de solutions et de mélanges dépend fortement de leurs concentrations.

▷ Les **substances non newtoniennes** sont des fluides n'obéissant pas à la loi de Newton du frottement visqueux ou dont les déformations ne sont pas plastiques. Ce sont, par exemple, des polymères liquides et des **dispersions** de fines particules solides ou liquides dans un liquide, appelées **suspensions** ou **colloïdes** suivant la taille de ces particules.

6.3.3.2 Équation de Navier-Stokes

1. Équation du mouvement des fluides réels

L'équation de continuité reste valable. L'équation d'Euler devient **l'équation de Navier-Stokes** :

$$\rho \cdot \left((\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathrm{grad}})\vec{\mathbf{v}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t}\right) = \rho \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathbf{F}} - \vec{\mathrm{grad}} p + \eta \cdot \Delta \vec{\mathbf{v}}$$

ou encore :

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\frac{1}{2}\vec{\mathrm{grad}} v^2 + \mathrm{rot}\vec{\mathbf{v}} \wedge \vec{\mathbf{v}}\right) = \vec{\mathbf{F}} - \frac{1}{\rho}\vec{\mathrm{grad}} p + \frac{\eta}{\rho} \cdot \Delta \vec{\mathbf{v}}$$

Le membre de droite, constitué de la force externe $\vec{\mathbf{F}}$ et de la force de pression $-\vec{\mathbf{grad}} p$, comprend un terme de force supplémentaire :

$$\eta \cdot \Delta \vec{\mathbf{v}} = \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{v}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{v}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{v}}}{\partial z^2}\right)$$

(Δ désigne l'opérateur vectoriel de Laplace :→ *Laplacien.* Il dépend de la courbure de la distribution de vitesse et exprime la force de frottement.

L'équation de Navier-Stokes est l'équation fondamentale de l'hydrodynamique des fluides visqueux. En conjonction avec l'équation de continuité, elle permet de décrire tout écoulement de fluides visqueux incompressibles, les écoulements turbulents y compris. Des algorithmes permettent de la résoudre numériquement.

2. Cas particuliers d'écoulement defluides réels

On distingue les cas spéciaux suivant :

- écoulement d'un fluide de viscosité négligeable : $\eta \approx 0$. L'équation de Navier-Stokes se réduit à une → *équation d'Euler.*
- écoulement permanent : la dérivée par rapport au temps disparaît,
- écoulement d'un fluide à très grande viscosité : $\eta \to \infty$. Le membre de gauche de l'équation de Navier-Stokes devient négligeable, l'écoulement résulte de l'équilibre entre gradient de pression et frottement.
- écoulement turbulent : au lieu de résoudre directement cette équation, on exprime la turbulence dans un élément de volume par la dissipation d'énergie due au frottement.

6.3.3.3 Écoulement laminaire dans un tube

1. Modélisation de l'écoulement laminaire

Considérons un fluide s'écoulant dans un tube, suffisamment lentement pour que le régime soit laminaire. La couche de fluide en contact direct avec la paroi du tube adhère à celle-ci et la vitesse est donc nulle au contact de la paroi. La mince couche de fluide cylindrique adjacente à cette couche immobile est animée d'une faible vitesse, et les couches de fluide successives se déplacent avec des vitesses de plus en plus grandes. L'écoulement laminaire dans un tube cylindrique de rayon R peut par conséquent se concevoir comme une succession de cylindres creux de rayon r et d'épaisseur Δr dans chacun desquels la vitesse peut être considérée constante. Une force de frottement (force de viscosité) F_f tangentielle apparaît entre deux couches adjacentes de vitesse relative Δv et s'oppose à leur glissement relatif. Dans un écoulement permanent, cette force est compensée par la force de pression F_p agissant sur le cylindre considéré comme un "piston".

$$F_p = pS_{\text{cylindre}} = \pi p r^2$$

Pour un tel cylindre de longueur L, la force de viscosité qui agit sur sa paroi latérale d'aire $S_{\text{latérale}} = 2\pi r L$:

$$F_f = -\eta S_{\text{latérale}} \frac{\Delta v}{\Delta r} = -\eta 2\pi r L \frac{\Delta v}{\Delta r}$$

Le gradient de vitesse est par conséquent :

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = -\frac{pr}{2\eta L}$$

Il est proportionnel à la pression et à la distance à l'axe, et varie en raison inverse de la viscosité et de la longueur du tube.

2. Établissement de la loi de Poiseuille

Par passage à la limite $\mathrm{d}v/\mathrm{d}r$ et en séparant les variables :

$$r\,\mathrm{d}r = -\frac{2\eta l}{p}\,\mathrm{d}v$$

Puis en intégrant :

$$r^2 = -\frac{2\eta l}{p} v + C$$

La constante d'intégration C est déterminée par la condition aux limites $v = 0$ pour $r = R$ (vitesse nulle au contact de la paroi), d'où :

Loi de Poiseuille			LT^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$v(r) = \frac{p}{4\eta l}(R^2 - r^2)$	$v(r)$	m/s	profil des vitesses
	r	m	distance à l'axe du tube
	p	Pa	pression
	η	Pa s	viscosité
	l	m	longueur du tube
	R	m	rayon du tube

Le profil des vitesses (Fig. 6.52) est une fonction parabolique du rayon ; le fluide s'écoule le plus rapidement sur l'axe du tuyau. La vitesse d'écoulement est proportionnelle à la pression et au carré du rayon du tube (donc à sa section) et inversement proportionnelle à la viscosité du fluide et à la longueur du tube.

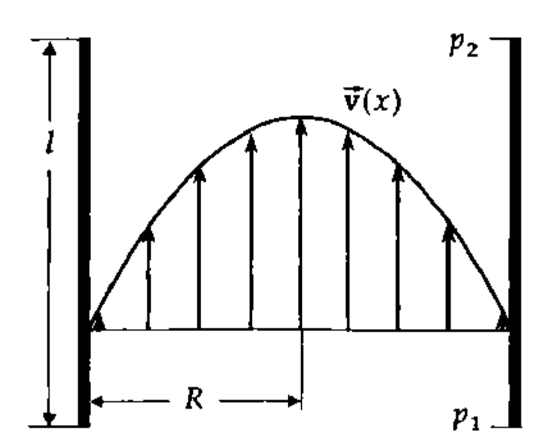


Fig. 6.52 : *Loi de Poiseuille. Profil des vitesses d'un écoulement laminaire dans un tube cylindrique*

3. Propriétés de l'écoulement laminaire dans un tube

▷ La pression va en diminuant le long du tube, la quantité p mesure la différence de pression entre les extrémités du tube, c'est la **perte de charge**. Pour une vitesse d'écoulement donnée, la perte de charge est proportionnelle à la longueur du tube. Sa valeur, en fonction de la vitesse $v_0 = v(0)$ sur l'axe du tube, est :

$$p = \frac{4\eta l}{R^2} v_0$$

Le débit $Q = \Delta V / \Delta t$ dans un tube s'obtient par intégration sur la surface de section droite du tube :

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} p$$

▷ Le débit d'un tube est proportionnel à la puissance quatrième de son rayon et dépend linéairement de la pression p. Pour augmenter le débit il est par conséquent plus efficace d'augmenter la section πR^2 du tube que la pression.

▷ Pour un débit Q donné, la perte de charge est :

$$p = \frac{8\eta l}{\pi R^4} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{8\eta l Q}{\pi R^4}$$

M Cette relation entre pression et débit est utilisée pour la mesure de la viscosité d'un liquide (**viscosimètre à écoulement, viscosimètre d'Ostwald**). On mesure le temps que met un volume donné de liquide pour s'écouler d'un réservoir à travers un tube assez étroit pour que l'écoulement soit laminaire. En maintenant le niveau invariant dans le réservoir, la différence de pression p est constante.

6.3.3.4 Écoulement autour d'une sphère, loi de Stokes

Les forces de frottement dues à un écoulement laminaire de fluide autour d'une sphère (ou le mouvement d'une sphère relatif à un fluide) résultent en une force de résistance à l'avancement, dont la résultante peut

être calculée par intégration des équations du mouvement. On trouve :

Formule de Stokes				**MLT^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
	F_f	N	force de frottement	
$F_R = 6\pi\eta r v$	η	Pa s	viscosité dynamique	
	r	m	rayon de la sphère	
	v	m/s	vitesse relative au fluide	

La force de frottement (résistance à l'avancement) est directement proportionnelle au rayon de la sphère et à la vitesse relative de la sphère par rapport au fluide.

▷ La formule de Stokes permet de déterminer **la vitesse limite** v_l atteinte par une sphère de rayon r, de masse volumique ρ tombant dans un fluide de viscosité η et de masse volumique ρ_0. La force qui entraîne la chute est le poids P de la sphère diminué de la poussée d'Archimède P_A due au fluide. Cette force produit un mouvement uniformément accéléré dans la phase initiale (transitoire), mais la force de frottement F_f augmentant avec la vitesse, elle compensera le poids apparent et le mouvement devient uniforme avec la vitesse limite :

$$v_l = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2(\rho - \rho_0)g}{\eta}$$

[M] **Viscosimètre à chute, viscosimètre de Höppler** : une bille de rayon et de masse volumique connus est lachée au sommet d'un tube contenant le liquide dont on déduit la viscosité η, par la mesure de la vitesse limite de chute v_l :

$$F_f = 6\pi\eta r v = P - P_A = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)$$

d'où la vitesse limite de chute :

$$v_l = \frac{2gr^2(\rho - \rho_0)}{9\eta}$$

On en déduit la viscosité dynamique :

$$\eta = \frac{2gr^2(\rho - \rho_0)}{9v}$$

6.3.3.5 Équation de Bernoulli

Loi de Bernoulli :
Lors de l'écoulement d'un fluide visqueux (fluide réel), la pression diminue le long du tube à cause du travail des forces de frottement ($\Delta p \rightarrow$ *perte de charge*).
L'équation de Bernouilli devient :

$$(p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1) - (p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2) = \Delta p$$

avec respectivement p_1, p_2 : pression, v_1, v_2 : vitesse d'écoulement et h_1, h_2 : hauteur de deux points du tube, Δp : la perte de charge.

Hauteur de perte de charge h_p : hauteur de la dénivellation d'une conduite qui permet de compenser la perte de charge :

$$h_p = \frac{\Delta p}{\rho g}$$

Cette hauteur est fonction du coefficient de frottement du tube. Rapportée à l'unité de longueur, elle correspond à la pente qu'il faut donner à une conduite pour compenser la perte de pression due aux frottements.

6.3.4 Écoulement turbulent

1. Caractéristiques d'un écoulement turbulent

Écoulement turbulent : le fluide est animé de mouvements tourbillonnaires qui produisent un brassage continuel de tout le volume. L'écoulement n'est plus permanent ou stationnaire, il varie avec le temps (→ *régime de Venturi*). Toutefois, sur des intervalles de temps suffisamment long par rapport au temps caractéristique des turbulences, on peut définir une distribution moyenne des vitesses. Si celle-ci est indépendante du temps, on considère l'écoulement turbulent comme stationnaire et on tient compte des turbulences par des coefficients de frottement appropriés.

2. Tourbillons

Les **tourbillons** se produisent par suite des frottements auxquels le fluide est soumis. Lorsque la vitesse d'écoulement devient grande, le gradient de vitesse au voisinage de la paroi d'un tube par exemple est beaucoup plus grand qu'en régime laminaire. Cette **couche limite** est instable : les perturbations, même petites, qui s'y produisent conduisent à un changement de régime d'écoulement. Les lignes de courant de la couche limite, d'abord parallèles entre elles, s'incurvent et ondulent légèrement (Fig. 6.53). Le gradient de vitesse change alors localement et, d'après l'équation de Bernoulli, des variations de pression en résultent qui tendent à accentuer la déformation initiale des lignes de courant, ce qui est le caractère d'un état instable.

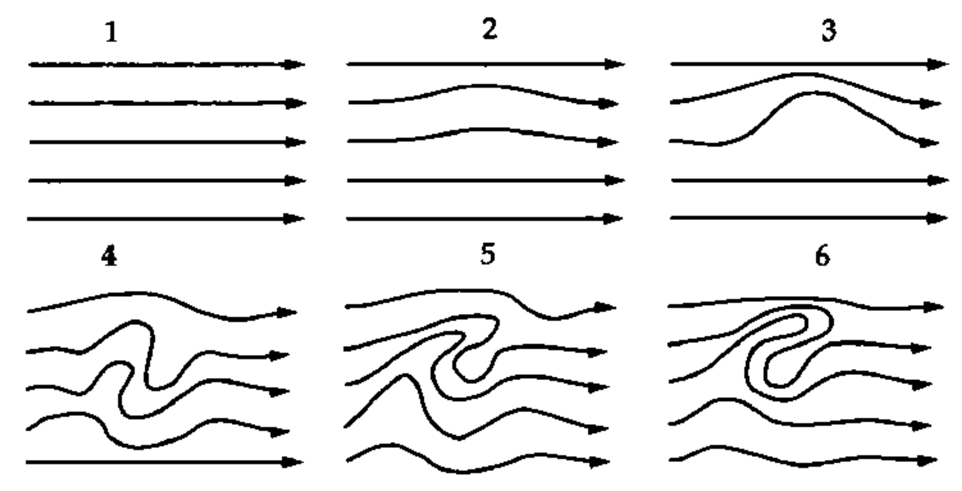


Fig. 6.53 : *Transition d'un régime laminaire vers un régime turbulent. Établissement d'un régime tourbillonnaire à la suite d'une petite perturbation*

3. Nombre de Reynolds

Une règle empirique sert à déterminer dans quelles conditions un écoulement est laminaire ou turbulent et à évaluer le degré de turbulence. Selon cette règle, c'est la valeur d'une quantité sans dimension, appelée le **nombre de Reynolds** R_e, qui détermine la nature de l'écoulement. Pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds, un régime turbulent s'établit spontanément (Fig. 6.53). Si le nombre de Reynolds est inférieur à une *valeur critique* $R_c \approx 2400$, un régime turbulent ne peut pas exister. Les écoulement turbulents sont un exemple de → *Dynamique non linéaire*. Le frottement des particules de fluide dans un tourbillon dissipe

un supplément d'énergie qui affecte l'écoulement du fluide. On en tient compte par une force de frottement additionnelle.

- Dans un écoulement turbulent, les forces de frottement sont plus grandes que dans un écoulement laminaire.

6.3.4.1 Coefficient de résistance

Deux forces de résistance agissent sur un corps placé dans un écoulement turbulent :

- **Force de frottement** F_f : obéissant à la loi de Newton, déjà décrite dans le cas des écoulements laminaires.
- **Force de pression** F_p : supplémentaire due à la différence de pression que subisent les faces amont et aval du corps placé dans un écoulement turbulent. À l'arrière de la face aval se produit un tourbillon, la vitesse moyenne du fluide peut y être très grande produisant alors une chute de pression en vertu de l'équation de Bernoulli.

La somme de ces forces constitue la force de résistance F_W.

$$\vec{\mathbf{F}}_W = \vec{\mathbf{F}}_R + \vec{\mathbf{F}}_D$$

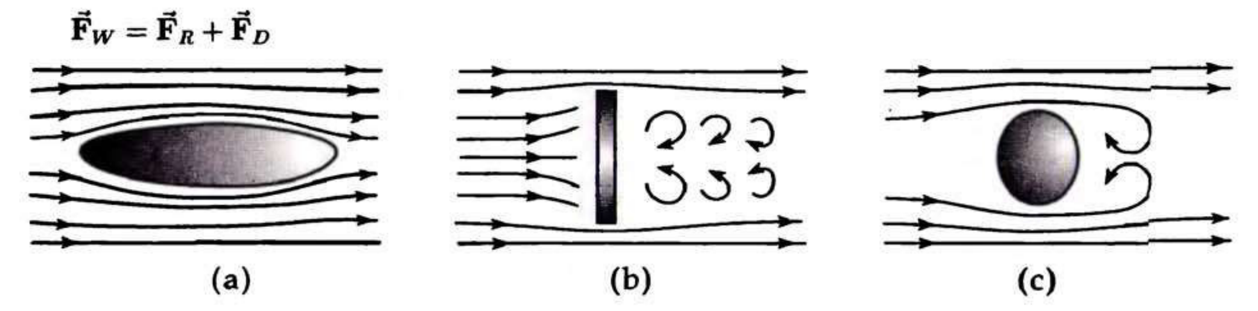


Fig. 6.54 : *Résistance lors d'écoulements : (a) : écoulement laminaire (frottement), (b) : écoulement turbulent autour d'une surface plane (résistance dynamique), (c) : résistance de frottement et de pression dynamique dans le cas de l'écoulement autour d'une sphère*

1. Coefficient de résistance

Le coefficient de résistance caractérise l'intensité de la force de résistance.

Force de résistance, trainée			**MLT^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$F_W = C_w \frac{\rho}{2} A v^2$$	F_W	N	force de résistance (résistance)
	C_w	1	coefficient de résistance
	ρ	kg/m³	masse volumique du fluide
	S	m²	aire de la section droite du corps : maître couple
	v	m/s	vitesse de l'écoulement

Le coefficient de résistance est sans dimension, sa valeur dépend de la forme et des dimensions du solide.

- La résistance est proportionnelle au maître couple du corps et au carré de sa vitesse par rapport au fluide.

2. Formes aérodynamiques

▷ Des valeurs typiques du coefficient de résistance se situent entre 0,055 et 1,3 (→ *Tab. 8.3/21*). Les valeurs les plus faibles sont obtenues avec des *formes aérodynamiques*. Celles-ci adoptent généralement la forme d'une goutte et offrent la résistance à l'avancement la plus faible. La chute de pression le long d'une ligne de courant y est très progressive de sorte qu'un tourbillon ne peut pas se former.

M Le coefficient de résistance aérodynamique est déterminé par la mesure directe de la force de résistance dans une soufflerie aérodynamique. En se basant sur la loi de similitude on peut utiliser des modèles réduits pour faire ces mesures.

▷ La force de résistance dans l'atmosphère est principalement due à la formation de tourbillons. On parvient à maintenir un régime d'écoulement laminaire, par des fentes ou des ailerons. Les becquets, par contre, produisent des turbulences qui peuvent améliorer l'adhérence au sol des véhicules.

La puissance $P = F_W v$, dépensée par un corps dans un écoulement turbulent est :

$$P = C_w \frac{\rho}{2} S v^3$$

■ Pour doubler la vitesse, il faut multiplier la puissance par 8.

3. Force des vents

Sur des édifices, les vents peuvent exercer des pressions ou des dépressions (sur la face opposée au vent : arrachement de tuiles, ...). **Degrés-Beaufort** → *Tab. 34/6*.

■ Lorsque le vent souffle par dessus une maison, la pression statique à l'intérieur est supérieure à la pression au dessus du toit (→ *Loi de Bernoulli*).

● La pression du vent p_v augmente avec le carré de sa vitesse :

$p_v = c_p v^2$ $[p_v] =$ Pa = Pascal

Le coefficient de proportionnalité est typiquement $c_p = 1{,}0\ \text{kg/m}^3$.

Pression du vent sur des édifices		
Hauteur au-dessus du sol	Vitesse du vent/(m/s)	Pression/(kPa)
jusqu'à 8 m	30	0,5
8 à 20 m	36	0,8
20 à 100 m	42	1,1
supérieure à 100 m	46	1,3

6.3.5 Lois de similitude

1. Types de similitudes

Les **lois de similitude** établissent un rapport entre les caractéristiques d'écoulement d'un système original et ses modèles réduits. Le modèle doit satisfaire aux deux conditions de similitude suivantes :

- **Similitude géometrique** : Le modèle doit être une représentation à l'echelle du dispositif original.
- **Similitude hydrodynamique** : masse volumique, viscosité, vitesse d'écoulement des fluides et résistance à l'écoulement doivent être dans un rapport donné à la situation originale.

2. Nombre de Reynolds

Le **nombre de Reynolds** Re, décrit la similitude hydrodynamique. Les spectres aérodynamiques (hydrodynamiques) de deux corps géomètriquement semblables et orientés de façon similaires, sont semblables lorsque le rapport de la résistance F_t due aux tourbillons, à la résistance F_f due aux frottements laminaires, est le même. Ce rapport est appelé nombre de Reynolds :

Nombre de Reynolds				1
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$Re = \frac{L\rho v}{\eta} = \frac{Lv}{\nu}$$	Re	1	nombre de Reynolds	
	L	m	longueur caractéristique du corps	
	ρ	kg/m^3	masse volumique du fluide	
	v	m/s	vitesse d'écoulement	
	η	Pa s	viscosité dynamique	
	ν	m^2/s	viscosité cinématique	

Le nombre de Reynolds est une grandeur sans dimensions. L désigne une dimension linéaire caractéristique du corps, par exemple le rayon dans le cas d'une sphère ou le côté dans le cas d'un cube se déplaçant normalement à une de ses faces.

3. Loi de similitude

- Cette **loi de similitude** est utilisée pour les essais de modèles réduits dans un **tunnel aérodynamique** (soufflerie).
- Pour obtenir la similitude aérodynamique (hydrodynamique) pour un modèle réduit (L plus petit que l'original), il faut augmenter proportionnellement la vitesse d'écoulement ou diminuer la viscosité cinématique dans les mêmes proportions. Cette dernière condition peut être satisfaite soit en diminuant la viscosité dynamique, soit en augmentant la masse volumique du fluide.

4. Nombre de Reynolds critique

Le **nombre de Reynolds critique** Re_{cr} , est la valeur particulière du nombre de Reynolds qui constitue un critère de passage du régime d'écoulement laminaire à un régime turbulent. Si la valeur du nombre de Reynolds d'un écoulement donné dépasse cette valeur critique ($Re > Re_{cr}$), l'écoulement devient turbulent.

▹ La valeur critique du nombre de Reynolds dépend des caractéristiques géométriques de l'écoulement. Dans un tube cylindrique lisse, cette valeur se situe entre 1000 et 2500. La transition du régime laminaire au régime turbulent n'est pas brutale et dépend également de la présence de perturbations dans l'écoulement (Fig. 6.54). (Par ex. : si un écoulement est caractérisé par un nombre de Reynolds égal ou un peu au-dessus de sa valeur critique, un régime laminaire peut subsister, mais instable. Il suffit de frapper légèrement sur le tube pour passer au régime turbulent. Au contraire, si le nombre de Reynolds est inférieur à la valeur critique, ce passage n'a jamais lieu. Si un tourbillon s'amorce en un point, il disparaît rapidement).

Des turbulences n'apparaissent qu'à partir d'une certaine vitesse critique v_c. De ce fait, lors d'écoulements autour d'un obstacle, les tourbillons se forment à l'arrière de l'obstacle là où les lignes de courant se resserrent en subissant une accélération.

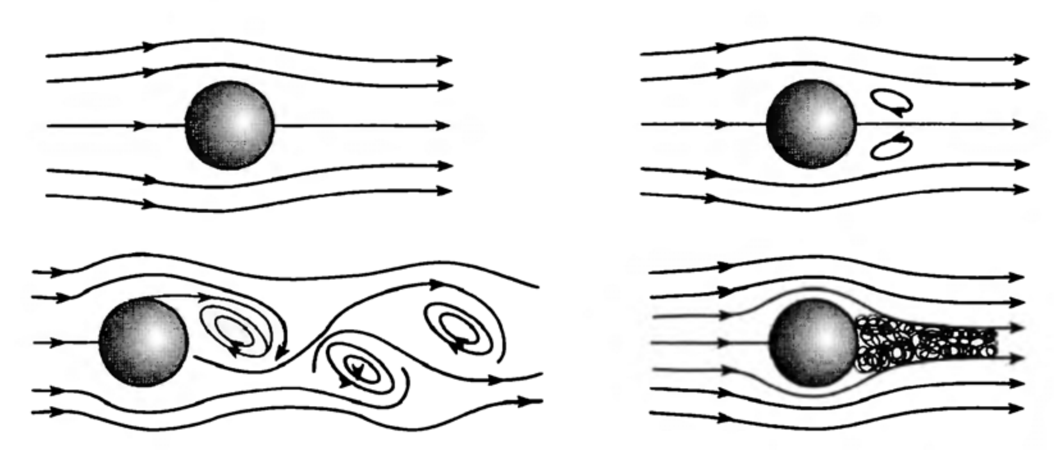


Fig. 6.55 : *Établissement d'un écoulement turbulent en fonction d'une valeur croissante du nombre de Reynolds*

Couche limite d'écoulement laminaire : se forme lors de l'écoulement d'un fluide réel autour d'un obstacle. Près de la surface de l'obstacle, les forces de frottement contribuent à la réduction de la vitesse d'écoulement et le nombre de Reynolds devient inférieur à sa valeur critique. Ainsi, les turbulences ne peuvent se former qu'au delà de cette couche limite (Fig. 6.56).

Nombre de Froude *Fr* : autre critère de similitude qui inclut l'action de la force de gravitation. Il est utilisé dans la description des ondes de surface (par ex. : sillage de bateaux).

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{Lg}}$$

(g : accélération de la pesanteur).

Dans l'étude de modèles réduits, l'égalité des nombres de Reynolds et de Froude du modèle à ceux de l'original devraient être respectée. Malheureusement, à cause de la dépendance en L, ceci n'est pas possible. Lorsqu'on étudie des modèles d'écoulements dans des tubes, où la pesanteur n'intervient que faiblement, on veille à l'égalité des nombres de Reynolds. Par contre, pour l'étude de modèles de coques de navires, on porte l'attention sur le nombre de Froude.

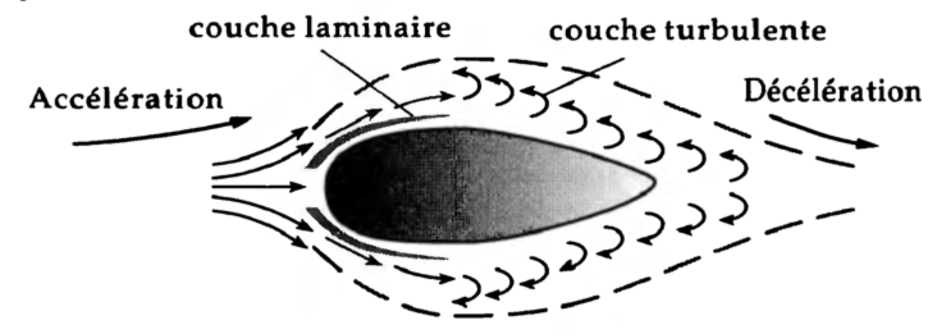


Fig. 6.56 : *Couches limites (laminaire et turbulente)*

6.3.5.1 Résistance dans les tubes

1. Frottements dans un tube, perte de charge

Lors de l'écoulement d'un fluide dans un tube, la perte de charge Δp due aux forces de frottement dépend des dimensions du tube (longueur l, diamètre d, de la vitesse d'écoulement v), du régime d'écoulement et

de l'état de surface de ses parois internes :

$$\Delta p = \lambda \rho \frac{l}{d} \frac{v^2}{2} = \rho g h$$

Le coefficient de proportionalité λ est le coefficient de résistance. Pour des tubes aux parois lisses, λ peut être déterminé à l'aide de formules empiriques :

- pour un écoulement laminaire : $Re < Re_{krit}$.
  $$\lambda = \frac{64}{Re}$$
- **Formule de Blasius** : $Re_{crit} \leq Re \leq 10^5$.
  $$\lambda = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}$$
- **Formule de Nikuradse** : $10^5 \leq Re \leq 10^8$.
  $$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{Re^{0,237}}$$
- **Formule de Kirschmer-Prandtl-Kármán** : en régime critique
  $$\frac{1}{\lambda} = \left(2 \cdot \log \frac{\sqrt{\lambda} \cdot Re}{2,51}\right)^2$$
  Les solutions de cette équation sont déterminées par des méthodes graphiques ou numériques.

2. Rugosité

Le coefficient de frottement dans des tubes dont la surface interne est rugueuse et présente des aspérités dépend de la taille moyenne h des aspérités.

Type de tube	Aspérité h
matière synthétique	≈0,007 mm
acier	0,05 mm
acier rouillé	0,15 mm à 4 mm
fonte	0,1 mm bis 0,6 mm
canal en béton	1 mm à 3 mm
canal maçonné	3 mm à 5 mm

▷ On considére qu'un tube est lisse ou rugueux en fonction de la rugosité relative de ses parois et du nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement.
Rugosité relative :
$$h_{rel} = \frac{h}{d}$$
(h : hauteur moyenne des aspérités, d : diamètre du tube) Un tube est dit lisse pour
$$Re \cdot \frac{h}{d} < 65$$
et rugueux pour
$$Re \cdot \frac{h}{d} > 1300$$

6.3.6 Écoulement de fluides compressibles

Bien que l'équation de Bernoulli ne s'applique en toute rigueur qu'aux fluides incompressibles, elle donne des résultats acceptables pour l'écoulement des gaz si la vitesse reste faible. L'effet produit par la variation de masse volumique du fluide devient important lorsque la vitesse relative d'écoulement est comparable à la vitesse du son dans le fluide. Dans les sections précédentes, nous avons négligé la compressibilité des fluides (variation de la masse volumique ρ). Dans le cas des liquides cette approximation est justifiée. Cependant, la compressibilité des gaz intervient entre autres dans la propagation des sons, les ondes de choc, les écoulements dans les tuyères et dans l'atmosphère (météorologie).

Les équations du mouvement des fluides compressibles s'appuient sur l'équation d'état du fluide reliant entre eux la pression, la masse volumique et la température.

1. Propagation du son

Son : petites variations de pression se propageant dans un fluide. Les **ondes sonores**, dans un fluide donné, se propagent avec une **vitesse de propagation** v constante qui dépend généralement de la température, de la pression et du milieu. Dans un gaz parfait, la vitesse du son est indépendante de la pression et varie comme la racine carré de la température :

$$v = \sqrt{\gamma \cdot R \cdot T}$$

(γ : coefficient adiabatique du gaz, R : constante des gaz parfaits, T : température).

- Dans un gaz au repos, le son issu d'une source immobile se propage de façon uniforme dans toutes les directions de l'espace (isotrope) avec la vitesse v. Les surfaces d'ondes sont des sphères concentriques.

2. Cône de Mach

Si la source sonore se déplace avec la vitess v_s, les surfaces d'ondes émises successivement ne seront plus concentriques. Par la composition de vitesse de propagation de l'onde v et du mouvement de la source v_s, les fronts d'ondes seront resserrés dans le sens du déplacement de la source. La perception du son par un observateur immobile sera modifiée (effet Doppler). Si la source se déplace à une vitesse supérieure à celle du son dans le milieu considéré, les surfaces d'ondes successives vont se recouper. Il y a formation d'une **onde de choc** (onde balistique).

Cône de Mach : lorsque la source se déplace à une vitesse supérieure à celle du son, l'enveloppe des points de recoupement des surfaces d'onde constitue le cône de Mach (concentration de l'énergie).

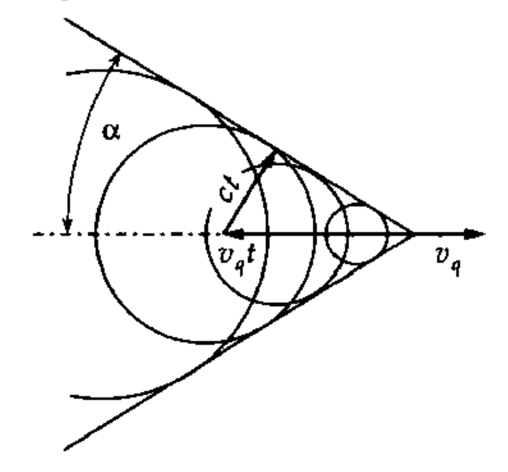


Fig. 6.57 : *Cône de Mach produit par une source sonore se déplaçant à une vitesse $v - s$ supérieure à celle c de l'onde. α est l'angle de Mach*

Angle de Mach α : demi-angle au sommet du cône de Mach :

$$\sin\alpha = \frac{v}{v_s}$$

(v_s : vitesse de la source sonore).

L'onde de choc (onde balistique), est due à une grande et brusque variation de pression qui se propage à une **vitesse supersonique**. Cette variation de pression se produit sur quelques libres parcours moyens des molécules du gaz (quelques micromètres).

Effet Cerenkov : effet analogue à une onde de choc, qui se produit lorsqu'une particule chargée se déplace dans le milieu qu'elle traverse à une vitesse supérieure à celle de la lumière.

7 Dynamique non-linéaire, chaos et fractales

La **dynamique non-linéaire** étudie les phénomènes complexes causés par des termes non-linéaires dans les équations du mouvement, en particulier le chaos déterministe.

3. Exemple : oscillateurs avec un terme d'amortissement non-linéaire

Les oscillateurs avec un amortissement non-linéaire et/ou entretenus par une force non-linéaire, présentent **un large spectre de résonances** qui se modifient avec l'amplitude (**dépendance en amplitude de la fréquence de résonance**).

Les oscillations d'un système mécanique ne sont approximativement linéaires que pour des oscillations de faible amplitude (approximation des petits mouvements). Pour des amplitudes plus grandes, des **distorsions** se produisent qui, dans des cas extrêmes, peuvent conduire à la destruction du système.

Les systèmes électroniques (amplificateurs, générateurs de signaux) ont pratiquement toujours des caractéristiques non-linéaires, ce qui produit, pour des signaux de grande amplitude, des distorsions harmoniques ou d'intermodulation dans certains amplificateurs.

4. Exemple : interaction entre planètes

Les forces entre planètes ne dépendent pas linéairement des coordonnées d'espace (mais de puissances des distances relatives). Les équations du mouvement admettent des solutions dans le cas de deux planètes, mais il n'existe pas de solutions générale dans le cas du problème à plusieurs corps.

Dans le système planétaire, l'attraction Soleil-planète prédomine (ellipses de Kepler), mais les forces d'attraction réciproque entre les planètes produit des perturbations. La dynamique non-linéaire, dans ce cas, analyse la **stabilité** des orbites des planètes par rapport à ces perturbations.

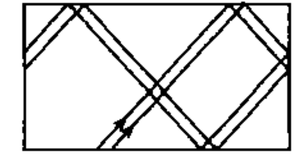
5. Turbulences

Les turbulences dans les écoulements liquides ou gazeux sont des exemples de processus non-linéaires. Elles se caractérisent par le fait qu'elles n'apparaissent que si un **paramètre** déterminé (ici le *nombre de Reynolds*) dépasse une certaine valeur (**bifurcation**).

Les turbulences dans l'atmosphère déterminent les conditions météorologiques. Elles illustrent la **sensibilité aux conditions initiales** : certaines turbulences (cyclones de plusieurs centaines de kilomètres de diamètre) ne seraient prévisibles que si les conditions initiales étaient connues de façon précise. De tels systèmes sont déterministes, cependant non prévisibles (**chaos déterministe**).

6. Billard

Un billard est un espace délimité par des parois réfléchissantes, dans lequel des particules peuvent se déplacer librement. Si les parois sont incurvées (par exemple : deux demi-cercles aux deux extrémités), alors le parcours d'une particule dépend de façon très sensible des conditions initiales. Deux trajectoires, très proches au départ, peuvent diverger sensiblement après réflexion sur la paroi incurvée (Fig. 7.1).



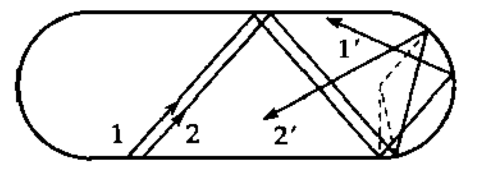


Fig. 7.1 : *Billard rectangulaire et à extrémités incurvées.*

7.1 Systèmes dynamiques et chaos

La dynamique étudie en général l'**évolution dans le temps** de systèmes physiques. On distingue les systèmes **conservatifs** (qui conservent l'énergie) et les systèmes **non conservatifs** (qui dissipent de l'énergie). Pour les systèmes conservatifs on analyse l'**intégrabilité**, alors que pour les systèmes dissipatifs on se préoccupe de l'**évolution dans le temps**, de l'existence d'**attracteurs** et la **sensibilité aux conditions initiales** qui conduit aux **attracteurs étranges** et au **chaos déterministe**.

7.1.1 Systèmes dynamiques

1. Système

C'est la description abstraite d'un processus (physique, chimique, économique, écologique, ...). L'état d'un système dynamique est représenté par une série de valeurs numériques (**variables**), qui décrivent sa situation et qui sont susceptibles d'une **évolution** dans le temps.

2. Exemples de systèmes dynamiques

- Un pendule simple est décrit par son élongation par rapport à sa position de repos. La variable est l'élongation angulaire θ. L'évolution dans le temps est définie par l'équation différentielle du mouvement du pendule :

  $$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin\theta$$

  ($\omega = \sqrt{g/l}$ pulsation des oscillations de faible amplitude). La non-linéarité des oscillations se produit lorsque les termes d'ordre supérieur du développement de $\sin\theta$ ne sont plus négligeables.

- Autres exemples de systèmes dynamiques : le mouvement de corps en mécanique classique, le courant électrique dans des circuits électriques, le déroulement de réactions chimiques, le développement de données économiques, l'évolution démographique ....

3. Contre-exemple d'un système dynamique

Les **équilibres thermodynamiques** étudiés en *Thermodynamique*. Ils n'ont pas d'évolution dans le temps, ils donnent une information sur l'état (stationnaire) d'un système en fonction des conditions extérieures. La **théorie cinétique des gaz** établit la relation entre le système dynamique (mouvement moléculaire) et les conditions d'équilibre.

4. Système déterministe

Un système dont l'évolution dans le temps (dans le futur et éventuellement dans le passé) peut être déterminée à partir de la connaissance de l'état présent.

- Tout système de mécanique classique est déterministe : son mouvement est déterminé par les équations du mouvement (lois de Newton). Il suffit de connaître les conditions initiales pour établir l'état de ce système à un instant quelconque.

  Les systèmes stochastiques, soumis à des influences dont seule la distribution de probabilité est connue, sont non-déterministes : les molécules d'un gaz en thermodynamique, la théorie cinétique des gaz, le mouvement Brownien (l'influence stochastique est l'incertitude sur la collision avec une autre molécule), de même pour les phénomènes quantiques ou pour les modèles économiques ou biologiques où des termes stochastiques simulent des variations aléatoires.

5. Système continu

Système dont les variables évoluent continuement, de sorte qu'à chaque instant t on puisse associer un état du système. Son évolution dans le temps peut alors être déterminé par un système d'**équations différentielles** qui indique, dans un état donné du système, avec quelle vitesse chaque variable évolue.

■ En mécanique classique ou en électrocinétique, l'évolution d'un système est définie par des variables continues (position, courant).

6. Système discret

Système dont les variables se modifient par palier d'un instant t_n à un instant t_{n+1}, sans que l'état du système entre ces deux instants soit connu. Son évolution dans le temps est déterminé par une **représentation**, qui indique quelles sont les valeurs des variables à l'instant t_{n+1} si leurs valeurs à l'instant t_n (ou antérieures $t_{n-1}, t_{n-2}, \ldots$) sont données.

■ Des systèmes discrets sont utilisés dans des modèles mathématiques, par exemple dans la conception de modèles économiques (données mensuelles ou annuelles ...) et pour la représentation de systèmes continus à l'aide de → *sections de Poincaré*.

7. Système linéaire

Système pour lequel causes et effets sont liés par une relation linéaire et qui peut, par conséquent, être décrit par une équation linéaire.

■ Oscillateur harmonique : la force de rappel est proportionelle à l'élongation.
$\ddot{x} = -\omega^2 x$
(ω : pulsation), sa fréquence est indépendante de l'amplitude x.

● **Principe de superposition** :
Si, pour un système linéaire, il existe deux solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$, toute **combinaison linéaire** ou **superposition linéaire** de ces solutions est encore solution du système.
$x(t) = \alpha\, x_1(t) + \beta\, x_2(t)$
où α, β sont des coefficients quelconques.

En particulier, pour des valeurs élevées de la variable, les propriétés d'un système linéaire peuvent se déduire par un facteur d'échelle.

■ La fréquence propre d'un oscillateur harmonique (linéaire) ne dépend pas de l'amplitude de ses oscillations.

■ Un oscillateur harmonique admet deux solutions générales, par exemple une solution en sinus et une en cosinus (elles ne diffèrent que par la phase). On peut construire une solution d'amplitude et de phase quelconques par une combinaison linéaire des solutions précédentes.

Grâce au principe de superposition, il suffit de connaître quelques solutions élémentaires de l'équation d'un système linéaire. Généralement, une solution complète d'un système est obtenue par une combinaison linéaire d'une solution générale et d'une solution particulière.

8. Système non-linéaire

Pour un système non-linéaire, cause et effet ne sont pas proportionnels. Le système ne peut pas être décrit par une équation linéaire.

- Les propriétés d'un oscillateur dont la force de rappel et/ou l'amortissement ne sont pas linéaires, varient avec l'amplitude des oscillations. Pour de tels oscillateurs, de nombreuses résonances se produisent en fonction de l'**amplitude** de l'excitation .

- Pendule simple : pour de grandes élongations, la force de rappel n'augmente pas linéairement mais seulement en fonction du sinus de l'élongation angulaire (donc plus faible que dans un cas linéaire).

7.1.1.1 Espace de configuration et espace de phase

1. Espace de configuration

Espace à n dimensions engendré par les n variables d'un système physique. Dans l'espace de configuration, l'état d'un système est représenté par un point dont les coordonnées sont les variables.

- L'évolution temporelle d'un système dynamique est représentée par une **trajectoire** dans l'espace de configuration : à chaque instant t correspond un point $x(t)$ dans l'espace de configuration.

a) Exemples de trajectoires

- Trajectoire d'un point matériel en mécanique classique : l'espace de configuration est l'espace dans lequel le point matériel se déplace (en général l'espace à trois dimensions).

- **Suite de Fibonacci** en tant que système dynamique, est définie par la relation de récurence :

  $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

  avec les conditions initiales $x_0 = x_1 = 1$. Son espace de configuration est l'axe réel, sa trajectoire la suite $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$.

[M] **Table traçante** x-t : utilisée pour la représentation du mouvement d'un système. Une ou plusieurs variables sont représentées sur l'axe vertical, le temps sur l'axe horizontal.

b) Exemple : pendule simple

- La représentations x-t d'un pendule simple est une sinusoïde.

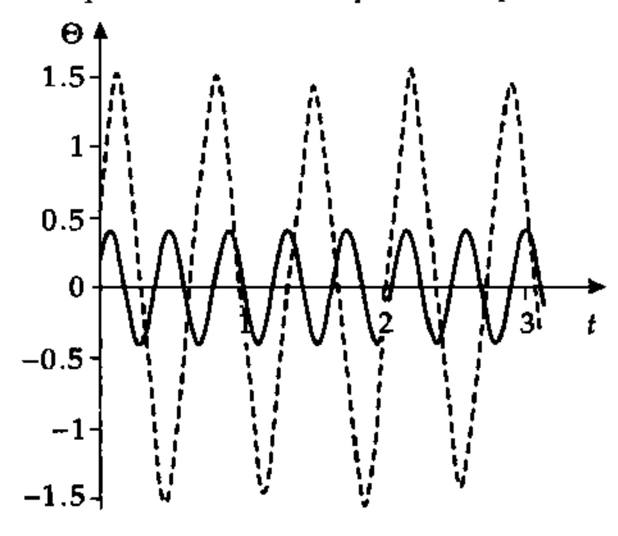


Fig. 7.2 : *Diagramme x-t d'un pendule simple. Pour de petites amplitudes, les oscillations sont harmoniques, pour de grandes amplitudes, la fréquence et la forme des oscillations se modifient*

2. Espace de phase

Pour établir l'évolution temporelle d'un système, il ne suffit pas, en général, de connaître l'état présent du système. Il faut également connaître la rapidité avec lesquelles les variables varient (dérivées par rapport au temps).

■ Dans le cas du pendule simple, en plus de son élongation, il faut également connaître sa vitesse.

L'**espace de phase** est l'espace engendré par toutes les grandeurs dont la connaissance à **un** instant t est nécessaire pour déterminer l'évolution temporelle d'un système. Chaque point dans l'espace de phase caractérise de façon unique l'état du système à un instant donné.

a) Exemples d'espaces de phase

■ Pour établir l'évolution de la suite de Fibonacci, il faut connaître la valeur actuelle x_n et la valeur précédente x_{n-1}. Chaque point de l'espace de phase est par conséquent décrit par **deux** valeurs.

■ En mécanique classique, l'espace de phase est engendré par les variables position x et les variables quantité de mouvement p correspondantes. C'est l'espace des états pour un système de la mécanique classique.

b) Trajectoire dans l'espace de phase

▷ Le concept d'espace de phase est aussi utilisé pour d'autres systèmes et désigne alors l'espace des états.

La **trajectoire** dans l'espace de phase représente l'évolution d'un système au cours du temps : à chaque instant correspond un point dans l'espace de phase.

■ L'espace de phase d'un oscillateur harmonique est engendré par la variable position angulaire θ et sa dérivée par rapport au temps $\dot{\theta}$ (Fig. :7.3).

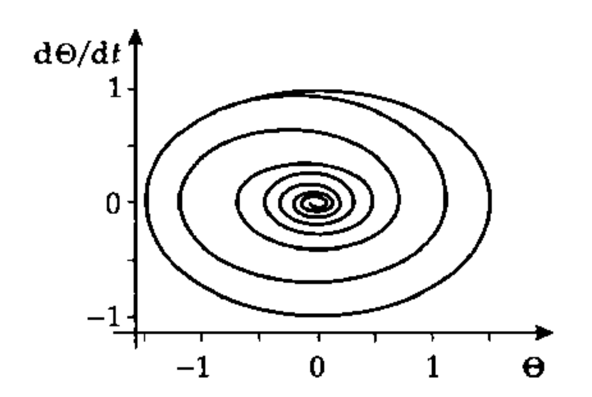


Fig. 7.3 : *Trajectoire d'un oscillateur harmonique dans son espace de phase (ellipse : mouvement périodique) et d'un oscillateur amorti (spirale)*

M Une **table traçante** x-y représente le mouvement d'un système dans l'espace de phase : à chaque axe correspond une des variables de l'espace de phase.

c) Exemple : pendule simple . Dans le cas du pendule simple, l'axe horizontal porte l'élongation angulaire, l'axe vertical sa vitesse (dérivée) $\dot{\theta}$. Pour des oscillations de faible amplitude, la trajectoire dans l'espace de phase est une ellipse. Pour de grandes amplitudes des distorsions se produisent, les ellipses font place à des ovales et la période est fonction de l'amplitude. Lorsque l'amplitude est ($\theta = \pi$), le pendule oscille autour de cette nouvelle position d'équilibre instable (libration) ; au-delà de cette valeur de θ, les oscillations sont remplacées par des rotations continues. Les deux courbes formant la frontière entre les domaines d'oscillation et de rotation sont appelées **séparatrices**.

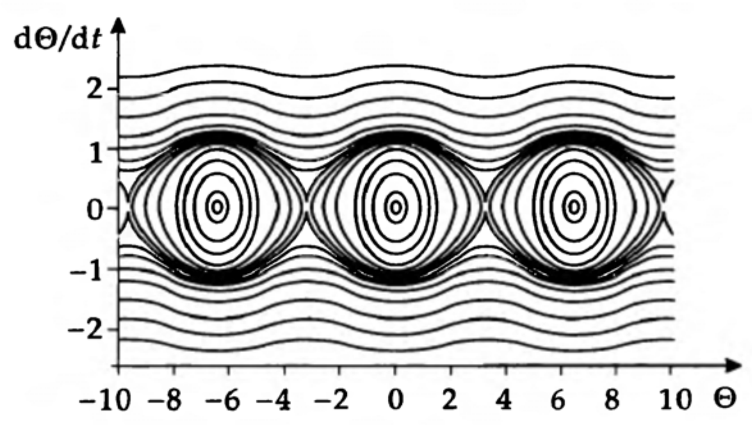


Fig. 7.4 : *Trajectoire d'un pendule simple dans l'espace de phase. Pour des oscillations de faible amplitude θ, la trajectoire est identique à celle de l'oscillateur harmonique (idéal), pour de grandes amplitudes des distorsions se produisent, les ellipses font place à des ovales et la période est fonction de l'amplitude*

d) Propriétés des trajectoires dans l'espace de phase

- Les trajectoires fermées dans l'espace de phase représentent des mouvements périodiques.

Dans le cas d'un système déterministe, la position du système dans l'espace de phase à un instant donné détermine l'évolution temporelle (trajectoire) du système :

- Les trajectoires dans l'espace de phase ne peuvent pas se croiser. Sinon, il y aurait indétermination sur la trajectoire suivie au point de croisement des deux trajectoires.

▹ **Singularité** : point de rencontre de plusieurs trajectoires dans l'espace de phase où le système se fige ou vers lequel le système tend asymptotiquement. En un tel point, le système perd l'information sur la trajectoire suivie pour l'atteindre.

3. Section de Poincaré

a) Définition de la section de Poincaré : coupe par un plan dans l'espace de phase. On ne considère qu'un sous espace (hypersurface) de l'espace de phase engendré par quelques $(n-1)$ coordonnées de l'espace de phase. Par exemple, dans un espace de configuration à 3 dimensions, la trajectoire coupe un plan S (avec la condition $\dot{p} < 0$ en des points successifs $x_1, x_2, \ldots$ qui appartiennent à la section de Poincaré de l'espace de phase par le plan S (Fig. :7.6).

Section (coupe) de Poincaré : un sous-espace de l'espace de phase, défini par une valeur d'une coordonnée de phase (respectivement S et $\dot{p}$ dans l'exemple ci-dessus). On considère ses points d'intersection avec la trajectoire dans l'espace de phase.

▹ Ce procédé se distingue d'une **projection** pour laquelle on considèrerait les valeurs des coordonnées de l'espace de phase de façon continue. Dans le cas section d'une section, on ne considère le système qu'aux instants où une des coordonnées de l'espace de phase admet une valeur définie.

b) Exemple d'une section de Poincaré pour un oscillateur anharmonique : la section est faite par rapport à la variable de phase $\sin \omega t = 0$ de l'excitation externe. Expérimentalement ceci peut être réalisé en éclairant l'oscillateur avec un stroboscope ; la figure représente la trajectoire correspondante dans l'espace de phase.

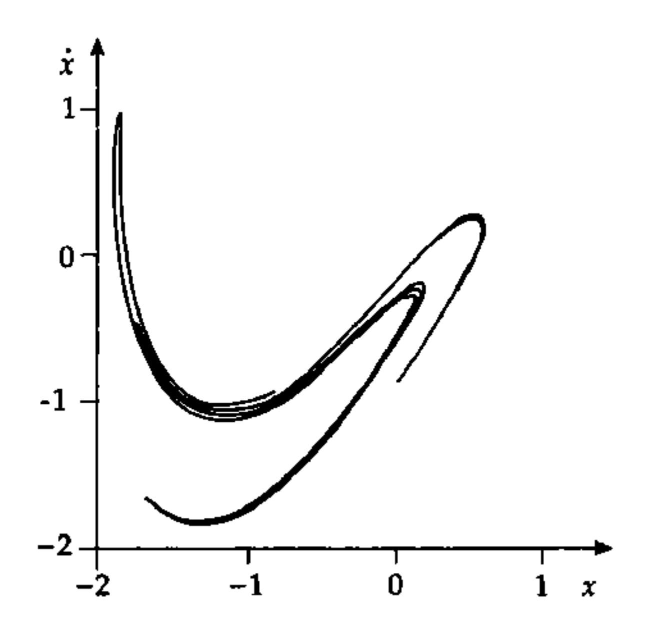


Fig. 7.5 : *Section de Poincaré d'un oscillateur anharmonique (oscillateur de Duffing)*

c) **Exemple : pendule** : on peut utiliser la ligne $\theta = 0$ de l'élongation comme coupe de Poincaré. Chaque trajectoire coupe cette ligne en deux points : une fois à droite dans son mouvement droite-gauche ($\dot{\theta} < 0$) et une fois à gauche dans le mouvement gauche-doite ($\dot{\theta} > 0$). La section de Poincaré est alors une droite sur laquelle sont reportés les deux points $\dot{\theta}$. Une autre section consiste à prendre la ligne de vitesse nulle $\dot{\theta} = 0$. On reporte alors les valeurs de θ chaque fois que $\dot{\theta} = 0$. Ceci est le cas pour les points d'élongation maximale $\pm\theta_{max}$.

d) Propriétés de la section de Poincaré

● Chaque point de la section de Poincaré correspond à un point défini de l'espace de phase.

▷ Au contraire, une coordonnée ne peut pas être reconstruite à partir d'une simple projection dans l'espace de phase.

De ce fait, un point d'une section de Poincaré détermine complètement la trajectoire qui le traverse et ainsi également l'intersection suivante de la trajectoire avec la section de Poincaré.

4. Représentation de Poincaré

La représentation de Poincaré fait correspondre à chaque point de la section de Poincaré le point d'intersection suivant avec la trajectoire dans l'espace de phase. Elle permet de réduire l'étude de la dynamique du système à la question : en quel point la trajectoire dans l'espace de phase va-t-elle couper la section de Poincaré?

● La représentation de Poincaré réduit un système dynamique continu à un système discret. La discrétisation du temps conduit à substituer aux équations différentielles un système d'équations algébriques généralement plus facile à résoudre.

La section de Poincaré permet l'identification des systèmes périodiques :

- Une trajectoire **périodique** ou **quasi-périodique** dans l'espace de phase, coupe une section de Poincaré en un nombre fini de points.
- Une trajectoire **apériodique, chaotique**, coupe une section de Poincaré en un nombre infini de points.

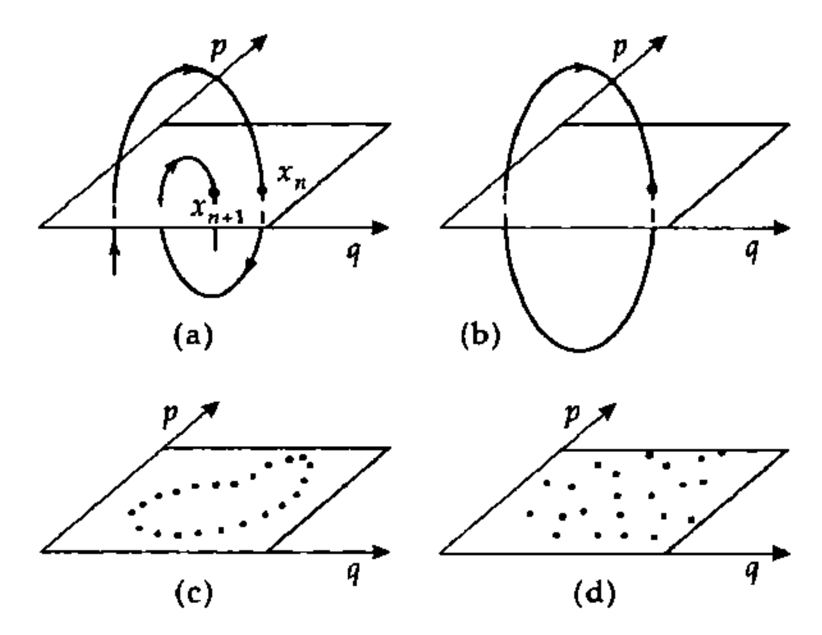


Fig. 7.6 : *Représentation d'une trajectoire dans l'espace de phase par une section de Poincaré. On observe la suite des points $x = (q,p)$, auxquels la trajectoire coupe le plan p, q du haut vers le bas. (a) : Représentation de Poincaré $x_n \to x_{n+1}$. (b) : Mouvement périodique. (c) : trajectoire régulière ; les points d'intersection sont situés sur une courbe. (d) : Trajectoire chaotique ; les points d'intersection sont distribués irrégulièrement sur le plan de section*

7.1.2 Systèmes conservatifs

Système conservatif : système pour lequel l'énergie mécanique est conservée (ne varie pas au cours du temps). Un tel système est caractérisé par l'existence d'une **fonction énergie**, qui fait correspondre une valeur de l'énergie à chaque point de l'espace de phase. Le système évolue alors sur les surfaces équipotentielles définies par cette fonction.

- Les systèmes mécaniques sans frottements constituent des systèmes conservatifs. Ceci est également le cas de circuits électriques qui ne comportent pas de résistances ohmiques.
  Le mouvement des planètes sous l'influence de l'attraction gravitationelle du Soleil et des autres planètes est un exemple concret d'un système conservatif non-linéaire. Le problème à deux corps (Soleil + une planète) peut être résolu analytiquement, le problème à plusieurs corps (Soleil + plusieurs planète) n'admet pas de solution analytique.

7.1.2.1 Théorème de Liouville

Le comportement d'un système conservatif dans l'espace de phase est régi par le théorème de Liouville : pour ceci, on considère des trajectoires dans l'espace de phase qui proviennent de points infiniments voisins. Ces points restent-ils étroitements liés ou se dispersent-ils au cours de l'évolution du système dans l'espace de phase?

- **Théorème de Liouville** :
  La valeur de l'aire d'une surface englobant une partie de l'espace de phase, ne change pas au cours de l'évolution temporelle du système (Fig. 7.7).
  Un volume élémentaire de l'espace de phase se conserve lors de l'évolution d'un système, mais sa forme change généralement.

▷ Ceci ne répond que partiellement à la question posée. Si on considère, par exemple, une surface rectangulaire de l'espace de phase, le théorème de Liouville ne précise pas la forme que prend cette surface lors de son évolution. Le rectangle peut se déformer en conservant la valeur de son aire mais adopter une forme quelconque, irrégulière → *fractale.*

▷ L'espace de phase englobe non seulement la variable position, mais aussi la vitesse. Dans l'espace de phase, proximité signifie alors position proche (par exemple, élongation du pendule) et vitesse similaire.

Le théorème de Liouville fixe des limites sévères à la dynamique d'un système conservatif.

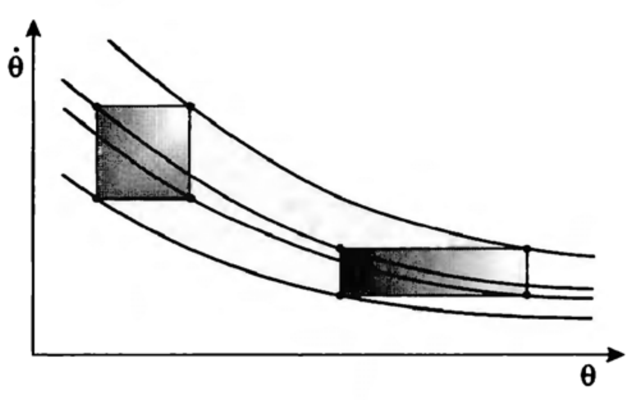


Fig. 7.7 : *Théorème de Liouville : la grandeur d'un élément de l'espace de phase d'un système conservatif ne change pas lors de son évolution dans le temps. Les aires hachurées ont même valeur de surface*

7.1.2.2 Intégrabilité

L'oscillateur harmonique et les systèmes d'oscillateurs harmoniques couplés sont les exemples classiques de systèmes conservatifs. Leur solution est un mouvement **quasi-périodique**, c'est à dire un mouvement qui peut être décrit par une superposition d'oscillations harmoniques de plusieurs fréquences :

$$x(t) = c_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + c_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) + \ldots$$

($c_1, c_2, \ldots$: constantes, $\omega_1, \omega_2, \ldots$: pulsations, $\phi_1, \phi_2, \ldots$: phases).

■ Le mouvement de deux pendules couplés est décrit par la superposition de leurs oscillations propres :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right), \\ x_2(t) &= A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \end{aligned}$$

Par un changement de variables z_1 et z_2, on a :

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x_1(t) - x_2(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ z_2(t) &= x_1(t) + x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

1. Intégration

Pour intégrer les équations du mouvement d'un système dynamique, on cherche à utiliser un système de coordonnées dans lequel les oscillations sont harmoniques. On peut alors se demander si par une **transformation de coordonnées** appropriée, tout système conservatif peut s'interpréter par un ou plusieurs oscillateurs coupés.

a) Système intégrable : système qui, par un choix approprié des variables peut être décrit par la superposition d'oscillations harmoniques. Un tel système est caractérisé par l'existence de **constantes**

du mouvement (intégrale du mouvement), c'est à dire des grandeurs qui ne changent pas lors de l'évolution temporelle du système (par exemple, l'énergie ou les pulsations ω_i). La connaissance de toutes les constantes du mouvement caractérise complètement le mouvement y compris les phases ϕ_i.

■ Tout système linéaire est intégrable.
Le problème à deux corps (Soleil et planète) est intégrable.

b) Système non intégrable : système dont le mouvement n'est ni périodique, ni pseudo-périodique et qui, par conséquent, ne peut se réduire à un oscillateur harmonique par un changement de coordonnées.

Les systèmes non intégrables peuvent avoir un comportement périodique dans une partie de leur espace de phase et irrégulier dans une autre partie. En particulier ils présentent une forte **sensibilité aux conditions initiales** qui conduit au **chaos**.

■ Le problème à plusieurs corps (trajectoires de deux ou plusieurs planètes autour du Soleil) n'est pas intégrable. Il existe certaines orbites stables ($\rightarrow$ *relation de Titius-Bode*), d'autres orbites sont instables et conduisent à des déviations de trajectoires et/ou à l'effondrement du système.

7.1.3 Systèmes dissipatifs

1. Définition d'un système dissipatif

Un **système dissipatif** est un système qui ne conserve pas l'énergie, qui perd de l'énergie au cours de son évolution temporelle.

■ Un pendule amorti, un circuit électrique comportant une résistance ohmique, sont des exemples de systèmes non conservatifs.

Le théorème de Liouville ne s'applique pas aux systèmes dissipatifs :

● Pour un système dissipatif, l'aire d'un élément de surface de l'espace de phase diminue au cours de l'évolution d'un système dissipatif.

L'existence d'attracteurs et de cycles limites est caractéristique des systèmes dissipatifs, ils déterminent leur **comportement à long terme**.

2. Point fixe et cycle limite

Point fixe : point vers lequel convergent une ou plusieurs trajectoires d'un système dans l'espace de phase.

Cycle limite, mouvement périodique d'équilibre vers lequel évolue le système après sa phase transitoire. Ce comportement unique d'équilibre, indépendant des conditions initiales, peut être stationnaire (par exemple, dans le cas d'un pendule amorti entretenu). L'information sur les conditions initiales est perdue.

▷ À cause du théorème de Liouville, un tel comportement n'est pas possible pour un système conservatif.

3. Attracteurs

La représentation de points fixes et de cycles limites dans l'espace de phase constitue un attracteur vers lequel convergent toutes les trajectoires.

Attracteur : domaine de l'espace de phase vers lequel converge le système.

Bassin d'attraction d'un attracteur : tous les points de l'espace de phase dont les trajectoires convergent vers cet attracteur.

La connaissance des attracteurs et du bassin d'attraction d'un système permet de décrire un système dissipatif. La dynamique non-linéaire des systèmes dissipatifs cherche à définir et à caractériser ces attracteurs qui déterminent l'**évolution à long terme** du système.

7.1.3.1 Attracteurs étranges, chaos déterministe

Les attracteurs les plus simples sont des points fixes (le système atteint un certain état et y reste) et des cycles limites (le système converge vers un mouvement périodique). La connaissance de ces attracteurs permet de prévoir le comportement à long terme du système. D'autres attracteurs existent qui ne permettent que de prévoir dans quelle partie de l'espace de phase le système va se trouver et se caractérisent par le fait que l'évolution du système n'est prévisible que si les conditions initiales sont parfaitement connues. Toute incertitude sur les conditions initiales rend les prévisions sur l'état du système impossible.

1. Sensibilité et dépendance aux conditions initiales

De très petites modifications des conditions initiales peuvent faire évoluer le système vers un état très différent.

- **Représentation de Bernoulli** : représentation itérative définie par :

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{, si} \quad x_n \text{ dans l'intervalle } [0\,;\,0,5] \\ 2x_n - 1 & \text{, si} \quad x_n \text{ dans l'intervalle } [0,5\,;\,1] \end{cases}$$

Les nombres réels x_n sont compris entre 0 et 1. Si la valeur initiale x_0 n'est pas connue de manière précise, il n'est pas possible de prévoir si une valeur x_n se trouve dans la moitié inférieure ou supérieure de l'intervalle.

Si on exprime x_0 dans le système binaire, $x_0 = 0,b_1b_2b_3\ldots$, avec les valeurs $b_i = 0$ ou 1, la représentation de Bernoulli ne fait que déplacer la virgule vers la droite, c'est à dire $x_1 = 0,b_2b_3b_4\ldots$ etc. Si $b_2 = 0$, cette valeur se trouve dans la moitié inférieure de l'intervalle. Un nombre irrationel a un nombre infini de valeurs binaires b_i, de sorte que le système n'est prévisible que si les conditions initiales sont suffisamment bien connues.

2. Ergodicité

Hypothèse ergodique : un système passe forcément par tous les états qui lui sont accessibles. Ceci n'est vrai que pour les sytèmes à une dimension. Dans le cas général le système passe aussi près que l'on veut de tout état.

L'**ergodicité** est la propriété d'un mouvement de s'approcher aussi près que l'on veut d'un point d'un ensemble. Au bout d'un temps suffisamment long, un mouvement ergodique a couvert tout l'ensemble.

3. Exposant de Lyapunov

L'exposant (ou nombre caractéristique) de Lyapunov λ, caractérise la vitesse à laquelle une perturbation évolue :

$$|f(x + \Delta x, t) - f(x, t)| = \Delta x \, \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

pour des temps t suffisamment long et des distances Δx petites.

4. Exemple : oscillateur de Duffing

L'**oscillateur de Duffing** est un oscillateur non-linéaire régi par l'équation (de Duffing) :

$$m\ddot{x} = -D_1 x - D_2 x^2 - D_3 x^3 - b\dot{x} + F \sin \omega t$$

D_1 est la partie linéaire de la constante de rappel du ressort, tandis que D_2 et D_3 décrivent ses parties non-linéaires qui se manifestent pour les grandes élongations. b est le coefficient de frottement fluide (linéaire). Le comportement non-linéaire est déterminé par ces constantes.

Le terme $F \sin \omega t$ représente une force excitatrice externe périodique d'amplitude F, de pulsation ω.

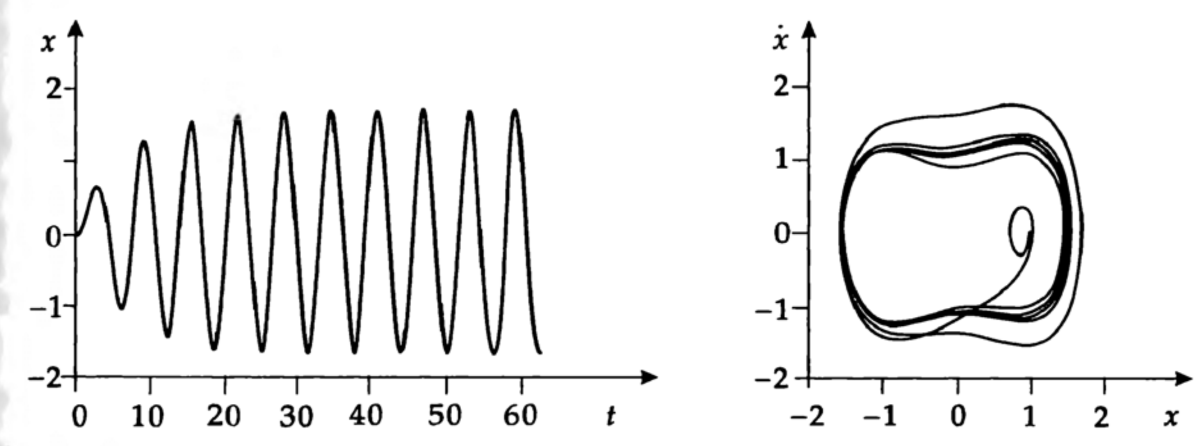


Fig. 7.8 : *Oscillateur de Duffing. Les oscillations sont nettement différentes de celles d'un oscillateur harmonique, la trajectoire dans l'espace de phase est déformée. Cependant, le comportement reste régulier (non chaotique)*

5. Système chaotique

Un système qui présente une grande sensibilité aux conditions initiales, mais qui évolue cependant, dans un espace de phase délimité.

▷ Des systèmes linéaires peuvent également être sensibles aux conditions initiales (par exemple, des trajectoires divergent exponentiellement) ; pour un système chaotique cette sensibilité se manifeste dans un espace de phase limité (→ *l'attracteur étrange*).

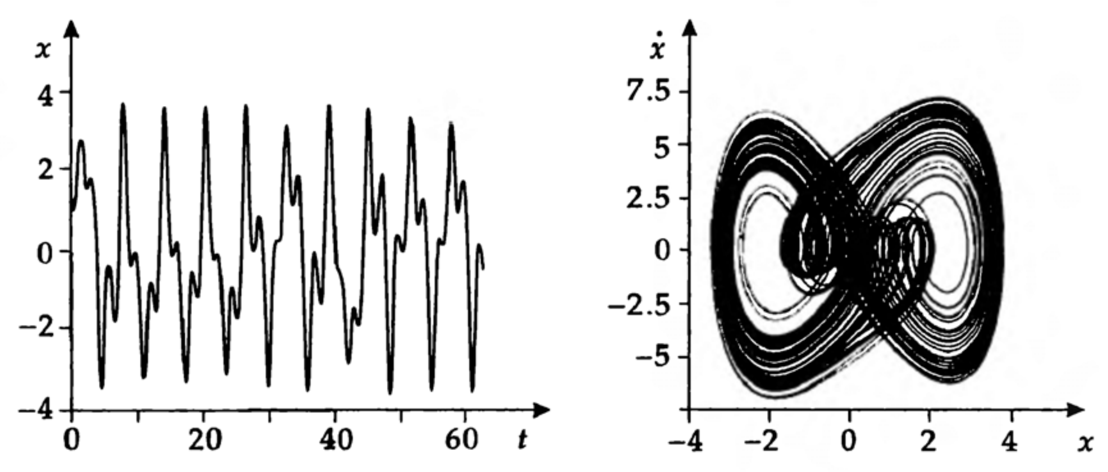


Fig. 7.9 : *Oscillateur de Duffing dans le domaine du chaos. Le diagramme x-t présente des irrégularités au voisinage du zéro. La trajectoire dans l'espace de phase tends à occuper toute la surface, elle se trouve dans un attracteur étrange*

6. Chaos déterministe

● Puisqu'il n'est pas possible d'avoir une connaissance exacte des conditions initiales, l'évolution à long terme du système n'est pas prévisible, bien qu'il se comporte strictement de manière

déterministe. Le système est déterministe, mais non prévisible.

7. Attracteur étrange

Attracteur pour lequel le système est sensible aux conditions initiales. Le système se déplace vers l'attracteur, mais son mouvement y est chaotique (Fig. 7.9).

7.2 Bifurcations

Paramètre extérieur : grandeur caractéristique d'un système dans son ensemble, définie à l'extérieur du système (c.à.d. par l'expérimentateur).

■ Les masses des corps dans un problème à plusieurs corps, la constante de rappel d'un ressort et le coefficient d'amortissement d'un oscillateur. En particulier, ces paramètres peuvent déterminer le degré de non-linéarité d'un système, par exemple, en modifiant les caractéristique d'un ressort dans le cas d'un oscillateur.

La théorie du chaos se préoccupe, entre autres, de savoir quels sont les valeurs de ces paramètres qui conduisent à un comportement chaotique.

7.2.1 Application de premier retour

On utilise souvent des applications non-linéaires unidimensionnelles du type :

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

qui peuvent rendre compte d'un comportement chaotique.

1. Itération d'une application unidimensionnelle

La technique d'étude de ce genre d'application fait, en général, appel au graphe de la fonction f et à la première bissectrice du système d'axes $(xk + 1, x_k)$. Comme exemple d'application non-linéaire, nous prenons un système dynamique discret de la variable x défini par :

$$x_{n+1} = r\, x_n\, (1 - x_n)$$

(x_n, x_{n+1} sont des valeurs successives de la variable, r est un paramètre). Cette représentation (représentation logistique) est l'un des exemples les plus simples d'un système dynamique discret.

2. Graphe de la représentation logistique

La Fig. 7.10 montre le graphe x_n–x_{n+1} de la représentation logistique. La valeur x_n est reportée sur l'axe horizontal, la valeur suivante x_{n+1} est reportée sur l'axe vertical.

■ Le graphe x_n–x_{n+1} peut servir à visualiser la dynamique de la représentation logistique. On commence en un point x_n donné de l'axe horizontal en montant verticalement jusqu'à la courbe dont la position verticale donne la valeur x_{n+1} correspondante. De ce point, en allant horizontalement vers la droite, on rejoint la diagonale, en descendant verticalement jusqu'à l'axe horizontal, on se trouve alors au point x_{n+1} et on recommence le processus.
En laissant les chemins parcourus deux fois, il suffit d'aller chaque fois verticalement de la diagonale vers la courbe puis de retourner horizontalement vers la diagonale.

▷ L'espace de configuration de la représentation logistique est l'axe réel, sur lequel est reportée la variable x. Puisqu'aucune autre information que la valeur actuelle de x n'est nécessaire pour trouver les valeurs futures, l'axe réel est également l'espace de phase (espace des états).

La Figure 7.10 montre un tel processus d'itérations pour diverses valeurs du paramètre r.

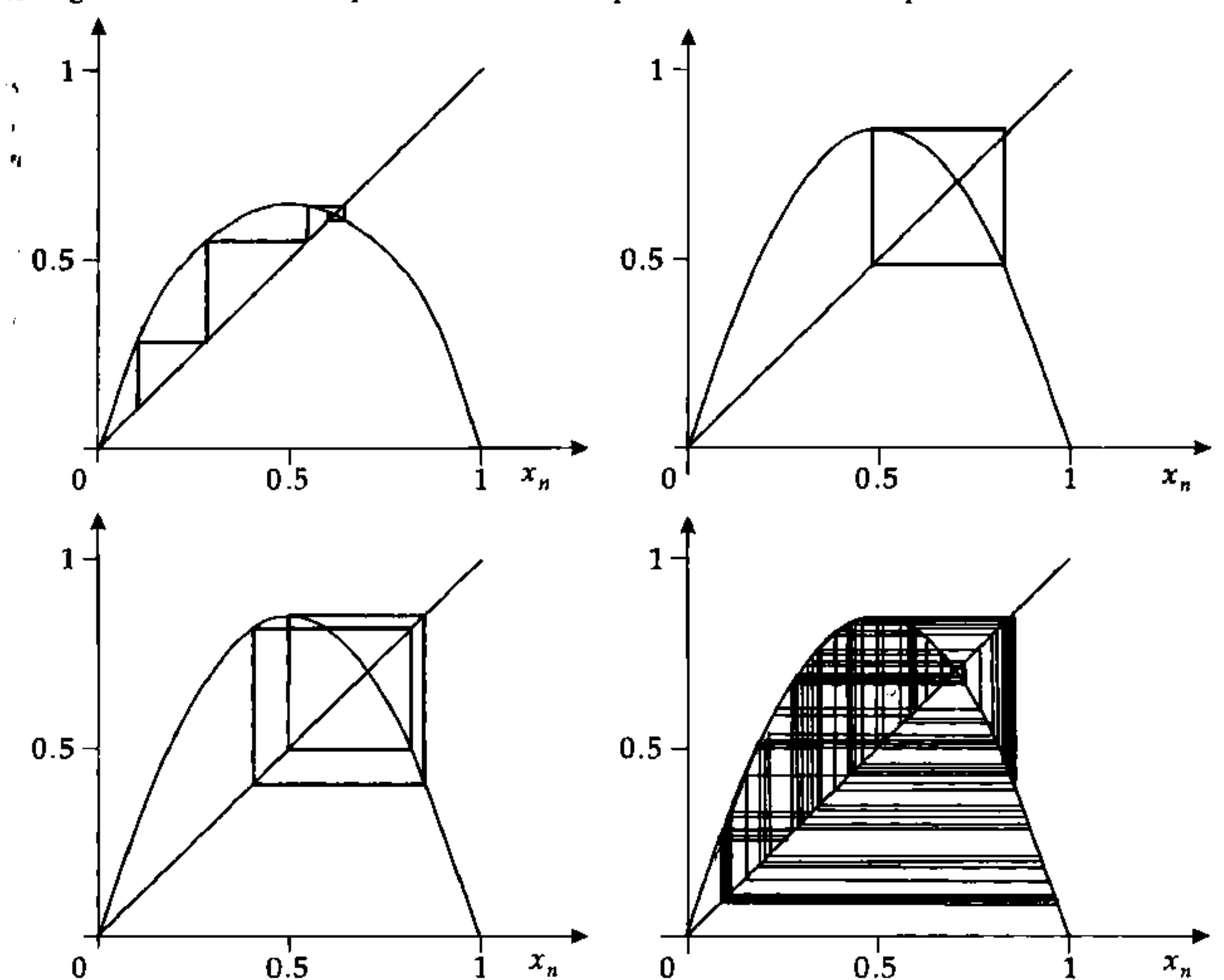


Fig. 7.10 : *Pas d'itérations de l'équation logistique pour diverses valeurs du paramètre r qui définit la courbure de la parabole*

3. Propriétés de la représentation logistique pour différents paramètres r

1. **Point fixe** comme attracteur. Le système évolue de la plupart des conditions initiales vers le point fixe, soit le point x tel que :

   $x = r\,x\,(1-x) \qquad \Longrightarrow \qquad x_{n+1} = x_n = x$

2. Pour des valeurs plus grandes du paramètre r, qui détermine la forme de la parabole, apparaît un cycle limite de période 2. Après la période transitoire, le système oscille entre deux valeurs.

3. En augmentant encore le paramètre r on obtient un cycle limite de période 4 : **doublement de période**. Après quatre pas, on revient à un même état.

4. Pour des valeurs encore plus grande du paramètre r, on obtient des cycles limites de période de plus en plus longue (8, 16, 32, ...). Les distances entre les différentes valeurs r_n deviennent de plus en plus petites.

5. À partir d'une valeur critique r_∞, la période devient infinie, le système devient apériodique.

4. Trajectoire de la représentation logistique

La **trajectoire** de la représentation logistique est constituée de tous les points x_n qui sont atteints à partir de la valeur initiale x_0. Dans le cas d'un point fixe elle se résume au point fixe et éventuellement de son voisinage immédiat (si on a retiré les transitoires, par exemple en ne marquant qu'à partir de la centième itération).

Dans le cas d'un cycle limite de période 2, elle est constituée des deux points représentant les valeurs de x. Pour un cycle limite de période n, elle est constituée de n points distincts.

Dans le domaine apériodique, un nombre infini de points la constituent, toute une partie de l'axe est occupée.

5. Diagramme des bifurcations

De ces trajectoires on déduit le diagramme des bifurcations.

Le **diagramme des bifurcations** est obtenu en portant le paramètre r sur l'axe horizontal et les valeurs x_n sur l'axe vertical. Pour chaque valeur de r on prend toutes les valeurs x_n qui s'obtiennent à partir d'une valeur initiale donnée pour ce r (en laissant de côté les transitoires) (Fig. 7.11).

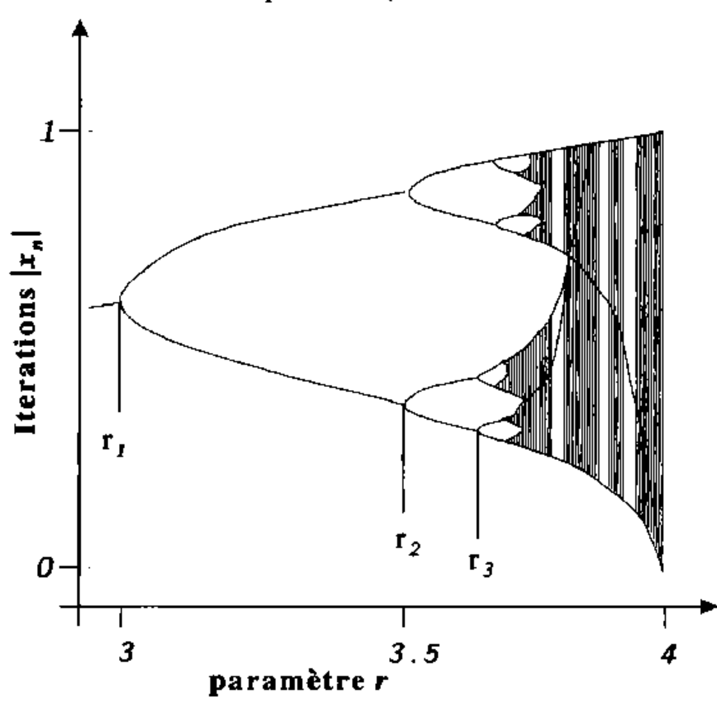


Fig. 7.11 : *Diagramme des bifurcations de l'équation logistique : à chaque valeur du paramètre r on marque les x_n correspondants (les transitoires ne sont pas représentées)*

- $r < r_1$: le système admet un point fixe, à chaque r un seul point est marqué, sur le diagramme des bifurcation apparaît un unique segment de la courbe.
- $r_1 < r < r_2$: le système se trouve dans un cycle limite de période 2, deux points sont marqués pour chaque valeur de r, correspondant à deux segments.
- Pour r augmentant, des cycles limites de périodes de plus en plus grandes apparaissent, la courbe présente des bifurcations et des branches de plus en plus nombreuses.
- Enfin, le système devient apériodique. Tout un domaine est marqué pour chaque valeur de r.

Sur le diagramme de bifurcation, on observe alors une courbe qui, pour certaines valeurs de r se sépare en deux branches. Ces embranchements se succèdent de plus en plus rapidement, jusqu'à ce que la courbe

présente un nombre infini de branches pour une valeur critique r_∞.

6. Bifurcations

Une bifurcation désigne un changement de comportement d'un système lors de la variation d'un paramètre continu : dans l'exemple précédent, la transition du point fixe vers un cycle limite de période 2 constitue une bifurcation. Une nouvelle bifurcation a lieu lorsque le système évolue vers un cycle limite de période 4 et ainsi de suite jusqu'au régime apériodique, lorsque le paramètre r varie continuement.

Le rôle particulier de la représentation logistique réside dans le fait que les représentations de Poincaré de beaucoup de systèmes dynamiques ont une structure similaire et parcourent les mêmes série de bifurcations. On dit alors que de tels systèmes atteignent un mouvement chaotique dans le scénario de Feigenbaum.

- Dans le scénario de Feigenbaum, les systèmes se caractérisent par une suite de doublements de période, jusqu'à ce que le chaos intervienne.

▷ Il existe encore d'autre voies qui conduisent au chaos, tous les systèmes ne subissent pas le scénario de Feigenbaum.

7.2.2 Universalité

L'**universalité** provient du fait que les représentations de Poincaré de beaucoup de systèmes ont des formes similaires à celle de la représentation logistique, de sorte que ces systèmes parcourent également une succession de doublement de période.

Feigenbaum parvint en 1979 à en déduire des propriétés universelles pour ces systèmes :

- Si on désigne par r_n la valeur de r au n-ième doublement de période et par r_∞ sa valeur lorsqu'intervient le mouvement chaotique, les distances $r_\infty - r_n$ forment une suite géométrique :

  $$r_\infty - r_n = C\,\delta^{-n}$$

  (première **loi de Feigenbaum**). C est une constante dépendant du système, en revanche δ est universel (a la même valeur pour tous les systèmes qui suivent ce scénario).

  $$\delta = 4,669201\ldots$$

  (première **constante de Feigenbaum**).

Les paramètres pour lesquels le doublement de période se produit sont par conséquent liés par une relation simple qui peut être vérifiée expérimentalement. Ainsi, le chaos ne signifie pas qu'il n'est pas possible de faire des prévisions sur les propriétés du mouvement.

▷ Deux autres lois de Feigenbaum décrivent d'autres propriétés universelles, en particulier la position x_n des éléments attracteurs.

7.3 Fractales

1. Dimension fractale

La dimension D d'un ensemble se mesure à l'aide d'un étalon de mesure. Sur une droite (espace à une dimension), l'étalon est un segment de longueur définie l, sur une surface on utilise un carré de côté l et dans l'espace (à trois dimensions) un cube d'arête l. On compte combien de fois $N(l_0)$ il faut reporter l'étalon

de mesure l_0 pour couvrir complètement l'ensemble à mesurer. Si on réduit la dimension de l'étalon, le nombre $N(l)$ augmente dans l'espace de dimension D avec la D-ième puissance :

$$\frac{N(l)}{N(l_0)} \sim \left(\frac{l_0}{l}\right)^D$$

(l_0 : étalon initial, l : nouvel étalon).

La dimension D est donnée par la relation de Hausdorff-Besicovitch :

$$D = \lim_{l_0 \to 0} \frac{\ln N(l_0)}{\ln 1/l_0}$$

■ Si on divise par deux la dimension de l'étalon dans l'espace à deux dimensions, il faudra $2^2 = 4$ nouveaux petits carrés pour couvrir le même ensemble. Dans l'espace à trois dimensions, il faudrait $2^3 = 8$ fois plus de petits cubes pour couvrir le même ensemble.

2. Objet de dimension fractale

Il y a des objets pour lesquels le nombre d'étalons de mesure n'augmente pas avec un nombre entier D, mais avec un nombre fractionnaire.

■ a) **Ensemble triadique de Cantor** : l'ensemble de Cantor est un sous-ensemble à une dimension de l'intervalle entre 0 et 1. On l'obtient en enlevant au segment unité son tiers central, puis on répète cette opération sur les deux segments restants et on réitère indéfiniment ce processus (Fig. 7.12). Si $l_0 = \frac{1}{3}$, il faut $N(l_0) = 2$ segments pour recouvrir les premiers $2/3$ restants. On obtient ainsi, la dimension fractale D par la relation de Hausdorff :

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63$$

Si la dimension de l'étalon est divisée par deux, il faudra alors $2^{0.63} \approx 1,55$ plus de segments que précédemment.



Fig. 7.12 : *Ensemble de Cantor*

■ Si, sur une carte à faible résolution, on mesure la longueur des côtes d'un pays, on obtient un résultat plus petit que si on utilisait une carte à grande résolution, qui montre plus de détails.

b) Ilôt ou flocon de neige de Koch

La **courbe de Koch** s'obtient de la façon suivante : on commence par un segment. Le tiers central est remplacé par deux segments de longueurs identiques, faisant un angle de 60 degrés de façon à former un triangle équilatéral privé de sa base (Fig. 7.13). On recommence l'opération avec les quatres segments de cette nouvelle figure. La dimension D de cette courbe est :

$$D = \frac{ln4}{ln3} \approx 1,262$$



Fig. 7.13 : *Première étape de la construction de la courbe de Koch*

Le **flocon de neige de Koch** s'obtient en partant d'un triangle équilatéral, puis en opérant de manière analogue à celle de la courbe de Koch sur les trois côtés du triangle (Fig. 7.14).

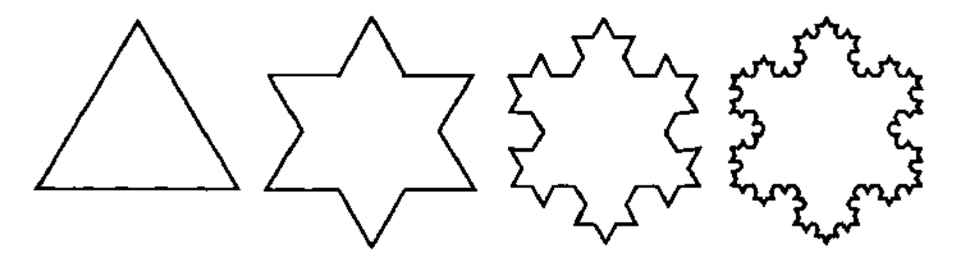


Fig. 7.14 : *Les premières étapes de la construction du flocon (ou ilôt) de neige de Koch*

c) Triangle de Sierpinski

Le triangle de Sierpinski est constitué d'un triangle équilatéral dont on enlève une partie triangulaire de côté moitié et dont les sommets s'appuient sur les milieux des côtés du triangle initial. À chaque itération, la surface diminue du facteur $3/4$ (Fig. 7.15). La dimension D du triangle de Sierpinski est :

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585$$

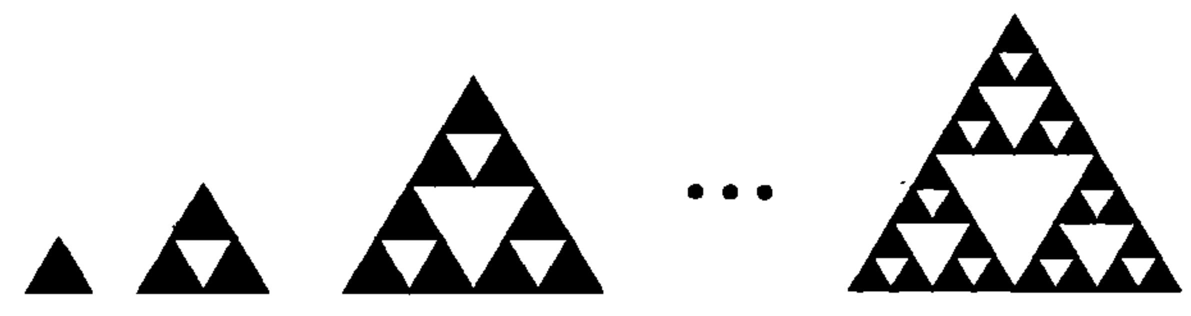


Fig. 7.15 : *Les premières étapes de la construction du triangle de Sierpinski et son itération*

3. Fractal

Objet de dimension fractionnaire, au contraire d'objets comme une droite, une surface ou un volume dont les dimensions sont entières $(1, 2$ ou $3)$.

Autosimilitude : le fait qu'un ensemble fractal ressemble à l'ensemble initial.

■ Dans l'ensemble de Cantor, chaque tiers d'un intervalle ressemble à l'intervalle lui-même.

● Tous les attracteurs étranges connus sont fractals.

▷ Ceci signifie que l'ensemble des points de l'espace de phase qui appartiennent à l'attracteur, a une dimension fractale. Ceci constitue le lien essentiel entre la dynamique non-linéaire et la géométrie fractale.

D'autres objets fractals se manifestent, lorsqu'on examine pour quelles valeurs de ses paramètres un système présente un comportement chaotique.

4. Ensemble de Mandelbrot

Objet fractal bien connu, c'est l'ensemble de tous les point μ du plan complexe, de sorte que l'itération de l'application :

$$z \to z^2 - \mu$$

(commençant en $z_0 = 0$) ne tende pas vers l'infini. Cet ensemble est autosemblable et est limité par une courbe fractale.

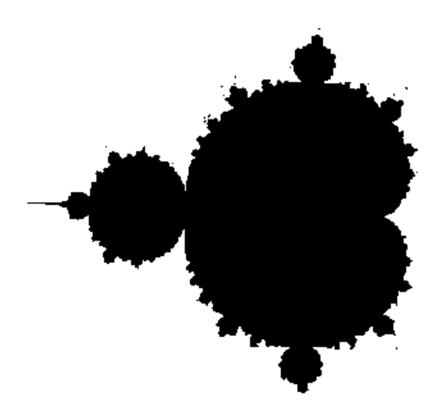


Fig. 7.16 : *Bonhomme de Mandelbrot*

Symboles de la mécanique

Symb.	Unité	Dénomination
α	rad/s^2	Accélération angulare
α	1	Coef. dilatation linéaire
γ	1	Facteur relativiste
ϵ	1	Dilatation
η	1	Rendement
η	Pa s	Viscosité dynamique
κ	1/Pa	Compressibilité
μ_c	1	Coef. frottement cinétique
μ_s	1	Coef. frottement statique
μ	1	Coef. de Poisson
ν	1/s	Fréquence
ν	1	Coef. dilat. transverse
ν	m^2/s	Viscosité cinématique
ρ	kg/m^3	Masse volumique
σ	N/s	Tension superficielle
τ	N/m^2	Cisaillement
Φ	J	Potentiel de gravitation
ϕ	rad	Angle
ϕ	m^2/Ns	Fluidité
ω	rad/s	Vitesse angulaire
A	m^2	Aire
a	m/s^2	Accélération
c	m/s	Vitesse de la lumière
c_w	1	Coef. résistance aérodynamique
d	m	Distance, bras de levier
E	J	Énergie
E	N/m^2	Module d'élasticité
$\vec{\mathbf{e}}$	1	Vecteur unitaire
e	1	Nombre d'Euler
$\vec{\mathbf{F}}$	N	Force
f	m	Coef. frot. de roulement
Fr	1	Nombre de Froude

Symb.	Unité	Dénomination
G	N m^2/kg^2	Const. d'attraction
G	N/m^2	Module de cisaillement
g	m/s^2	Accél. pesanteur
HB	1	Dureté Brinell
HV	1	Dureté Vickers
HR	1	Dureté Rockwell
h, H	m	Hauteur
I	m^4	Moment d'inertie de section droite
J	kg m^2	Moment d'inertie
$\hat{J}$	kg m2	Tenseur d'inertie
K	N/m^2	Module de compression
k	N/m	Constante d'un ressort
$\vec{\mathbf{L}}$	kg m^2/s	Moment cinétique
l	m	Longueur
M	Nm	Moment d'une force
m	kg	Masse
P	W	Puissance
p	Pa	Pression
$\vec{\mathbf{p}}$	kg m/s	Quantité de mouvement
Q	m^3/s	Débit
Re	1	Nombre de Reynolds
r	m	Rayon
$\vec{\mathbf{r}}$	m	Rayon vecteur
S	N/m^2	Tension
s	m	Chemin parcouru
t	s	Temps
Δt	s	Intervalle de temps
V	m^3	Volume
W	J	Travail
v	m/s	Vitesse
x, y, z	m	Position
$\vec{\mathbf{x}}$	m	Vecteur position
$x(t)$	m	Fonction position

8 Tables de la mécanique

8.1 Masse volumique

8.1.1 Solides

8.1/1 : **Corps purs** (à $T = 293\,\mathrm{K} = 20\,°\mathrm{C}$)

Solide		$\rho/(10^3\,\mathrm{kg/m^3})$	Solide	$\rho/(10^3\,\mathrm{kg/m^3})$	
Aluminium	Al	2,707	Or	Au	19,320
Antimoine	Sb	6,684	Osmium	Os	22,480
Argent	Ag	10,500	Palladium	Pd	12,080
Arsenic	As	5,727	Phosphore (noir)	P	2,700
Barium	Ba	3,510	Phosphore (violet)		2,36
Beryllium	Be	1,850	Phospore (jaune)		1,82
Bismuth	Bi	9,800	Platine	Pt	21,450
Calcium	Ca	1,540	Plomb	Pb	11,373
Cadmium	Cd	8,648	Plutonium	Pu	19,84
Césium	Cs	1,878	Polonium	Po	9,320
Cerium (cub.)	Ce	6,657	Potassium	K	0,851
Cerium (hex.)		6,757	Praséodyme	Pr	6,773
Chrome	Cr	7,190	Protactinium	Pa	15,37
Cobalt	Co	8,830	Radium	Ra	5,500
Cuivre	Cu	8,954	Rhénium	Re	20,530
Dysprosium	Dy	8,550	Rhodium	Rh	12,400
Erbium	Er	9,006	Rubidium	Rb	1,520
Etain (blanc)	Sn	7,304	Ruthenium	Ru	12,300
Etain (gris)		5,75	Samarium	Sm	7,520
Europium	Eu	5,243	Scandium	Sc	2,989
Fer	Fe	7,897	Sélénium	Se	4,81
Gallium	Ga	5,904	Sodium	Na	0,970
Gadolinium	Ga	7,900	Strontium	Sr	2,630
Germanium	Ge	5,350	Thallium	Tl	11,860
Hafnium	Hf	13,300	Tantale	Ta	16,690
Holmium	Ho	8,795	Tantale (amorphe)		14,401
Iridium	Ir	22,420	Tellure	Te	6,250
Indium	In	7,28	Tellure (amorphe)		6,00
Lanthane	La	6,145	Terbium	Tb	8,229
Lutétium	Lu	9,840	Titane	Ti	4,540
Lithium	Li	0,530	Thorium	Th	11,7
Magnésium	Mg	1,746	Thulium	Tm	9,321
Manganèse	Mn	7,210	Tungstène	W	19,350
Mercure	Hg	13,546	Uranium	U	18,700
Molybdène	Mo	10,200	Vanadium	V	5,960
Néodyme	Nd	7,004	Ytterbium	Yb	6,965
Neptunium	Np	20,45	Yttrium	Y	4,469
Nickel	Ni	8,906	Zinc	Zn	7,144
Niobium	Nb	8,570	Zirconium	Zr	6,520

8.1.1.1 Alliages métalliques

8.1/2 : Matériaux de construction

Matériau	Composition	$\rho(10^3\,\mathrm{kg/m^3})$
Alliages d'aluminium		
Dural	Al (0,5 % Cu)	$2,787$
Bronze d'aluminium	*	$2,7$
AlCuMg	*	$2,8$
AlMg	5 % Mg	$2,6$
Fonte d'aluminium(Si)	12 % Si	$2,65$
Alliages de cuivre		
Deltametall	56 % Cu, 40 % Zn, 2 % Fe, 1 % Pb	$8,6$
Laiton (laminé)	30 % Zn	$8,522$
Laiton (fonte)	*	$8,4$
Bronze phosphoreux	4,5 % Sn, 0,2 % P	$8,91$
Bronze	25 % Sn	$8,666$
Manganine	12 % Mn, 4 % Ni	$8,5$
Maillechort	15 % Ni, 22%Zn	$8,618$
Tombac	80 % Cu, 20%Zn	$8,5$
Alliages de fer		
Fonte	Fe+0,4 % C	$7,272$
Invar	36 % Ni	$8,7$
Acier		
	0,5 % C	$7,833$
	1,0 % C	$7,801$
	1,5 % C	$7,753$
Acier inoxydable		
Z6CN18-09		$8,0$
Z6CND17-11		$7,7$
Acier au chrome	3 % Cr	$7,7$
Alliages de nickel		
Nichrome	24 % Fe, 16 % Cr	$8,250$
Vanachrome V	20 % Cr	$8,410$
Monel	32 % Cu, 1 % Mn	$8,9$

8.1/3 : Alliages utilisés en électricité

Matériau	Composition	$\rho(10^3\ \mathrm{kg/m^3})$
Résistances		
Manganine	86 % Cu, 12 % Mn, 2 % Ni	$8,5$
Constantan	55 % Cu, 1 % Mn, 44 % Ni	$8,8$
Contacts		
Cuivre à l'Ag	1...7 %Ag, 0,2 % Cd, Rest Cu	$8,9\ldots9,2$
Maillechort	45-75 %Cu, 5-45 %Zn, Rest Ni	$8,5\ldots10,4$
Argent-Cadmium	5...20 % Cd, Rest Ag	$10,1$

8.1/4 : Alliages à propriétés magnétiques

Matériau	Composition	$\rho(10^3 \frac{kg}{m^3})$
Tôles (transfo)	Acier avec 2,5...4,5 % Si	$7,57\ldots7,7$
Permalloy	Acier avec 36...40 % Ni	$8,15$
Mumétal	alliage Ni-Fe avec ≈ 50 % Ni	$8,6$
AlNiCo 9/5	11...13 % Al, <5 % Co, <1 % Ti, 2...4 % Cu, 21...28 % Ni, reste Fe	$6,8$
AlNiCo 18/9	6...8 % Al, 24...34 % Co, 5...8 % Ti, 3...6 % Cu, 13...19 % Ni, reste Fe	$7,2$
trCo 112/110	Alliage cobalt–terres rares	$8,1$

8.1.1.2 Autres matériaux

8.1/5 : Ferrites

Matériau	Composition	$\rho(10^3 \frac{kg}{m^3})$
SIFERRIT DB	15 % BaO, 85 % Fe_2O_3	5
SIFERRIT DS	16 % SrO, 84 % Fe_2O_3	$4,4\ldots4,6$
MAGNETOFLEX 35	52 % Co, 13 % V, 35 % Fe	$8,1$
SIFERRIT U 60	Oxyde de fer, Ba,Co	$4,8$
SIFERRIT K	Oxyde de fer, Ni, Zn	$4,2\ldots4,4$
SIFERRIT M	Oxyde de fer, Ni, Mn, Zn	$4,5\ldots4,6$
SIFERRIT N	Oxyde de fer, Ni, Mn, Zn	$4,7\ldots4,8$

8.1/6 : Verres

Matériau	$\rho/(10^3 \frac{kg}{m^3})$	Matériau	$\rho/(10^3 \frac{kg}{m^3})$
Verre au silicate d'aluminium	$2,53$	Verre à bouteilles	$2,6$
Verre barité (clair; optique)	$2,90$	Verre Flint (léger)	$2,5\ldots3,2$
Verre barité (foncé; optique)	$3,56$	Verre Flint (lourd)	$3,5\ldots5,9$
Verre au plomb	$2,89$	Fibre de verre (textiles)	$2,46$
Verre borosilicate	$2,23$	Fibre de verre (Fiberglas)	$2,53$
Verre à vitres	$2,48$	Quarz	$2,2$

8.1/7 : Matériaux de synthèse

Matière	Composition	$\rho/(10^3\,kg/m^3)$
Duroplastes		
Phénoplaste	Phénolaldéhyde	$1,27\ldots1,35$
Bakélite	Phénolaldéhyde et sciure de bois	$1,35\ldots1,45$
Bakélite	Phénolaldéhyde et amiante	$1,7\ldots2,1$
Aminoplastes	Anilin	$1,2\ldots1,25$
	Phénolurée et sciure de bois	$1,45\ldots1,5$
	Mélamine et sciure de bois	$1,45\ldots1,55$
	Mélamine et amiante	$1,7\ldots2,0$
Résines polyester	avec fibre de verre	$1,7\ldots1,9$
Thermoplastes		
Dérivés cellulosiques	Cellulose A souple	1,32
	Acétate de cellulose A	1,33
	Acétobutyrate de cellulose	1,20
	Nitrate de cellulose	1,38
	Ethylcellulose	1,14
	Benzylcellulose	1,22
Dérivés éthyléniques	Polyéthylène	0,92
	Polypropylène	$0,90\ldots0,91$
	Polystyrol	1,05
	Copolymère styrol/butadiène	1,06
	Styrol/nitrileacrylique	1,08
	Ester polyacrylique	1,18
	Chlorure de polyvinyle(PVC)	1,38
Polycarbonate		1,2
Protéines	Polyuréthane	1,21
	Corne synthétique	1,35
	Polyamide(Ultramid A)	1,15
	Polyamide(Rilsan)	1,04
	Polyamide(Vestamid)	1,02
Fluorocarbonates	Polytrifluormonochloréthylène	$2,1\ldots2,2$
(Téflon)	Polytétrafluoroéthylène	2,2
Silicones	Mastic de silicone	$1,2\ldots2,3$
	Résine de silicone	1,65
Elastomères		
Néoprène	Polychlorbutadiène, polychloroprène	1,24
Buna S	Copolymère de butadiène/Styrol	1,2
Perbunan	Copolymère de butadiène/nitrile acrylate	1,2

8.1/8 : Céramiques

Matériau	$\rho/(10^3\,\mathrm{kg/m^3})$	Matériau	$\rho/(10^3\,\mathrm{kg/m^3})$
Porcelaine	2,3 ... 2,6	Stéatite	2,7
Rutil	3,7	Titanate de Barium	5
Corindon	3,8	Al_2O_3	3,9
ZrO_2	5,5	SiC	3,2
Si_3N_4	3,2	Diamant	3,5

8.1/9 : Semiconducteurs

Matériau		$\rho/(10^3\,\mathrm{kg/m^3})$	Matériau		$\rho/(10^3\,\mathrm{kg/m^3})$
Élément	Ge	5,32	$A_{IV}B_{VI}$	PbS	7,50
	Si	2,33		PbSe	8,15
	Se	4,79		PbTe	8,16
	Te	6,24	$A_{III}B_V$	BN	2,25
$A_{II}B_{IV}$	ZnS	4,09		BP	2,97
	ZnSe	5,26		AlP	2,38
	ZnTe	5,70		AlAs	3,79
	CdS	4,84		AlSb	4,26
	CdSe	5,74		GaP	4,13
	CdTe	5,86		GaAs	5,32
	HgSe	8,26		GaSb	5,60
	HgTe	8,20		InP	4,78
$A_{IV}B_{IV}$	SiC	3,22		InAs	5,66
				InSb	5,77

8.1/10 : Matériaux de construction 1.3 **Remarque :** On distingue la masse volumique brute ρ_B et la masse volumique nette ρ. La masse volumique brute est défnie par $\rho_B = \frac{\text{masse}}{\text{volume total}}$. La masse volumique nette tient compte du volume occupé par les pores et est définie par $\rho = \frac{\text{masse}}{\text{volume solide}}$. Le tableau donne la masse volumique brute.

Matériau	$\rho/(10^3\,\mathrm{kg/m^3})$	Matériau	$\rho/(10^3\,\mathrm{kg/m^3})$
Briques		**Pierres naturelles**	
Tuiles (terre cuite)	1,0 ... 2,2	Granite	2,6 ... 2,8
Briques (vernissées)	1,6 ... 2,2	Basalte	2,9 ... 3,9
Carrelages	0,8 ... 2,0	Marbres	2,6 ... 2,8
Tuiles (béton cellulaire)	0,5 ... 0,8	Grés des Vosges	2,6 ... 2,7
Briques réfractaires	0,8 ... 2,1	Pierre ponce	0,2 ... 1,3
Pierres de taille	2,0 ... 2,5	Ardoise	2,6 ... 2,7
Bois 15% humidité		Briques de plâtre	2,0 ... 2,2
Epicéa, sapin	0,43 ... 0,49	Amiante	2,5 ... 2,6
Pin	0,48 ... 0,56	Quartz	2,65
Mélèze	0,55 ... 0,63	Pierres calcaires	2,4 ... 2,8
Chêne	0,63 ... 0,72	Comblenchien	2,6 ... 2,7
Hêtre	0,66 ... 0,76	Gneis	2,6 ... 2,9

8.1/11 : Matériaux en vrac

Remarque : Les valeurs indiquées sont celles des masses volumiques brutes.

Matériau	ρ (10^3 kg/m^3)	Matériau	ρ (10^3 kg/m^3)
Coton (ouate)	0,080	Sable	1,2 ... 1,6
Petits pois	0,700	Neige (fraiche)	0,08 ... 0,19
Foin	0,050	Neige (tassée)	0,2 ... 0,4
Chaux	0,500	Ciment	0,9 ... 1,2
Pommes de terre	0,670	Gravier	1,8
Maïs	0,750	Polystyrène	0,015

8.1.2 Liquides

Les valeurs de masses volumiques sont données pour une température de 293 K = 20°C. La masse volumique, dans le même état de phase, peut être calculée à l'aide de la relation :

$$\rho_T = \frac{\rho}{1 + \gamma(T - 293\,\mathrm{K})}$$

où γ est le coefficient de dilatation de la substance considérée.

8.1/12 : Liquides dans les conditions TPN

Substance	$\rho/(10^3$ kg/m$^3)$	Substance	$\rho/(10^3$ kg/m$^3)$
Acétone	0,792	Lessive de soude (40 %)	1,43
Alcools		Pentane	0,626
Alcool amylique	0,814	Pétrole	0,81
Alcool éthylique	0,789	**Acides**	
Alcool butylique	0,810	Acide acétique	1,049
Glycérine	1,260	Acide nitrique (50 %)	1,31
Alcool isobutylique	0,801	Acide nitrique (100 %)	1,502
Alcool isopropylique	0,785	Acide chlorhydrique (40 %)	1,195
Alcool méthylique	0793	Acide sulfurique (50 %)	1,40
Alcool propylique	0,804	Acide sulfurique (100 %)	1,834
Bromure d'éthyle	1,430	**Huiles**	
Acétate d'éthyle	0,901	Pétrole, huile minérale	0,73 ... 0,94
Iodure d'éthyle	1,933	Mazout	0,95 ... 1,08
Essence (ordinaire)	0,68 ... 0,72	Huile moteur	0,90 ... 0,92
Essence (aviation)	0,72	Huile d'olive	0,91
Benzène	0,921	Huile de parafine	0,87 ... 0,88
Chloroforme	0,879	Huile d'arachide	0,87
Chlorobenzène	1,066	Huile de silicone	0,76
Fluorobenzène	1,024	Huile de transformateurs	0,87
Glycérine	1,26	Huile de vaseline	0,8
Kérosène	0,82	Toluène	0,867
Xylol	0,88	Tetrachlorure de carbone	1,595
Eau de mer	1,01 ... 1,05	Eau	1,003
Lait	1,03	Eau lourde	1,1

8.1/13 : Masse volumique de quelques métaux à l'état liquide (en fusion)

Métal	$T/(°C)$	$\rho/(10^3\,kg/m^3)$	Métal	$T/(°C)$	$\rho/(10^3\,kg/m^3)$
Al	660	2,380	Na	100	0,928
	900	2,315		400	0,854
	1100	2,261		700	0,780
Bi	300	10,03	Sb	409	6,834
	600	9,66		574	6,729
	962	9,20		704	6,640
Fe	1530	7,23	Pb	400	10,51
Au	1100	17,24		600	10,27
	1200	17,12		1000	9,81
	1300	17,00	Ag	960,5	9,30
K	64	0,82		1092	9,20
Hg	100	12,875		1300	9,00

8.1.3 Gaz

La masse volumique des gaz dépend fortement de la température. Cette dépendance n'est pas une fonction linéaire. Les masses volumiques ρ_0 sont données pour la température $T_0 = 273$ K et la pression normale $p_0 = 1,0132 \cdot 10^5$ Pa. Pour une température T et une pression p différentes, la masse volumique peut être calculée à l'aide de la relation : $\rho = \rho_0 \cdot p/p_0 \cdot T_0/T$.

Gaz	ρ_0 (kg/m^3)	Gaz	ρ_0 (kg/m^3)
Éthane	1,355	Krypton*	3,68
Éthylène	1,2611	Gaz d'éclairage	≈ 0,58
Ammoniaque	0,7708	Air sec	1,2928
Argon*	1,783	Méthane	0,7167
Acétylène	1,1715	Néon*	0,900
Butane,n-	2,70	Ozone	2,14
Butane,iso-	2,67	Propane	2,01
Chlore	3,17	Radon*	9,73
Acide chlorhydrique	1,639	Oxygène*	1,429
Fréon	5,51	Sulfure de carbone	3,40
Gaz de haut fourneau	1,28	Dioxyde de soufre	2,931
Hélium*	0,1785	Hydrogène sulfuré	1,54
Dioxyde de carbone*	1,9768	Azote*	1,2504
Monoxyde de carbone*	1,2502	Hydrogène*	0,08988
Xénon*	5,85		

* Ces gaz se comportent comme des "gaz parfaits" dans le domaine de température $T < 1000$ K.

8.2 Propriétés élastiques

Les limites d'élasticité σ_f, le module d'élasticité (module de Young) E, le module de rigidité (tension de cisaillement) G et le coefficient de Poisson ν sont reportés dans le tableau suivant. Les grandeurs caractéristiques de la dureté des matériaux telles que la résistance à la traction (charge de rupture) σ_B et la dureté Brinell HB sont également reportées. Ces grandeurs dépendent des traitements subis par les solides et ne sont données qu'à titre indicatif.

8.2/1 : Propriétés élastiques

Matériau	E (10^{10} Pa)	G (10^{10} Pa)	ν
Ag (recuit)	8,05	2,59	0,38...0,407
Al (recuit)	6,85	2,45	0,359...0,369
Au	8,06	2,91	0,422
Bi	3,19	1,2	0,33
Cd	4,99	1,92	0,3
Co (recuit)	19,6...20,6	–	0,34
Cu (laminé)	11,2	4,15	0,358...0,378
Cr	27,9	11,5	–
Fe	10...13	3,5...5,3	0,23...0,31
Fe (soudé)	21	7,7	0,28
In	5,2	–	–
Ir	5,2	–	0,44
Mg	15,6	0,35	0,31
Mn	15,7	–	–
Mo	30900	11810	0,324
Nb (recuit)	15,6	3,8	0,38
Ni (recuit)	20,2	7,7	0,300
Os	55,5	–	–
Pb	1,62	0,562	0,446
Pd	11,3	5,11	0,393
Pt (recuit)	14,7	6,09	0,387
Rh (recuit)	27,5	–	0,32
Ru (recuit)	42,2	–	–
Sb	7,8	–	0,33
Sn	12,7	1,8	0,33
Ta (recuit)	18,3	6,9	0,39
Ti	11,6	4,4	–
U	16,6	8,3	0,21
V (recuit)	14,8	–	–
W (recuit)	34,2...40	8,8...21,5	–
Zn	4,06...5,86	1,64...4,78	0,33
Zr	7,4	–	–

8.2/2 : Tensions critiques

Matériau	σ_f (10^7 Pa)	σ_B (10^7 Pa)	HB (10^7 Pa)
Ag (recuit)	–	13, 5	20, 6
Al (recuit)	5, 63 . . . 6, 44	8, 96 . . . 10, 75	18, 4
Au	–	12, 4	18, 9
Bi	–	–	7
Ca	–	6, 0	41, 6
Cd	–	6, 3	19, 6
Co (recuit)	–	48, 6	129, 1
Cr (recuit)	–	8	68, 8
Cu (laminé)	6, 85	20 . . . 25	52
Fe	–	1, 84 . . . 22, 5	–
In	3, 0	5, 05	0, 98
Ir	–	22	212
La	–	13	40
Mg	11, 2	29, 4	4, 4
Mo	29, 4	30, 8	134
Nb (recuit)	–	32, 2 . . . 40, 6	73, 5
Ni (recuit)	20, 5	34, 5 . . . 56, 1	90 . . . 120
Os	–	–	348, 7
Pb	0, 49 . . . 0, 98	1, 47 . . . 1, 76	3, 75 . . . 4, 18
Pd	–	18, 2	31
Pt (recuit)	–	14, 0	29, 9
Rh (recuit)	–	55	54
Ru (recuit)	–	–	179, 5
Sn	–	2, 94 . . . 3, 92	29, 2 . . . 44, 1
Ta (recuit)	–	31 . . . 44, 7	44, 1 . . . 122, 4
Ti (recuit)	7, 5	29, 6	102, 8
U	–	38, 6	–
V (recuit)	52, 5	56, 5	74, 2
W (recuit)	10, 8	69, 9 . . . 80, 9	196 . . . 245
Zn	1, 17	1, 47 . . . 2, 4	4, 8 . . . 5, 2
Zr	11, 3	24, 7	33, 3

8.2/3 : Fils

Matériau	E (GPa)	σ_B (GPa)
Acier	196	3, 4
Be	290	1, 52
W	400	2, 75

8.2/4 : Cristaux filamenteux

Matériau	E (GPa)	σ_B (GPa)
Graphite	980	20, 5
Al_2O_3	410	1, 08 . . . 17, 6
BeO	410	19
SiC	450	3, 05
B_4C	450	9, 8

8.2/5 : Acier

Le module d'élasticité $E = (195\ldots206)$ GPa, le module de cisaillement $G = (79\ldots89)$ GPa et le coefficient de Poisson $\nu = 0,23\ldots0,31$ ont des valeurs proches pour tous les aciers. Les différentes nuances d'acier diffèrent par leurs limites d'élasticité σ_f, charges de rupture σ_B et dureté Brinell HB.

Nuance	Composition (exemple)	σ_B (10^7 Pa)	σ_f (10^7 Pa)	HB (10^7 Pa)
Acier ordinaire	$\approx 0,25\%$ C	$\approx 4,7$	$2,5$	≈ 13
Acier à ressort	$\approx 0,47\%$ C $\approx 1,65\%$ Si $\approx 0,65\%$ Mn	14	$12,2$	41
Profilé d'acier	$0,55\%$ C $0,2\%$ Si $0,8\%$ Mn	$\approx 7,5$	≈ 4	20
Corde à piano	$0,9\%$ C $0,15\%$ Si $0,4\%$ Mn	≤ 36	-	-
Acier rapide	$0,9\%$ C $0,33\%$ Si $0,4\%$ Mn $0,1\%$ W	9	$4,5$	25
Acier à outil	$1,3\%$ C $0,25\%$ Si $0,35\%$ Mn	6	-	17
Acier inox	$< 0,1\%$ C $0,4\%$ Si $0,3\%$ Mn 18% Cr 8% Ni	$\approx 6,5$	$> 2,7$	≈ 16.5
Tôle à transfo.	$0,07\%$ C $3,7\%$ Si $0,2\%$ Mn	≤ 12	-	-
Fonte d'acier	$0,1\%$ C $0,3\%$ Si $0,4\%$ Mn	$3,8$	$1,8$	11
Carbure de tungstène	6% C 88% W 6% Co	-	-	160

8.2/6 : Matériaux céramiques

Matériau	Formule chimique	σ_{bB}/ (MPa)	E/ (GPa)
Oxyde d'Aluminium	Al_2O_3	400	400
Oxyde de Zirconium	ZrO_2	600	240
Carbure de Silicium	SiC	440	440
Nitrure de Siliciumd	Si_3N_4	700	210
Diamant	-	300	900

8.2/7 : Matériaux synthétiques

σ_{dB} est la charge de rupture à la traction et σ_{bB} la charge de rupture correspondant au cisaillement (effort tranchant). δ désigne, en pourcent, la diminution de la section (striction) à la rupture.

Matériau	E/ GPa	σ_B MPa	σ_{dB}/ MPa	σ_{bB}/ MPa	H_B/ GPa	δ %
Polyamide	1,5...3,2	60...90	93...98	93...98	147...176	6...12
avec fibre de verre	10...18	120...220	108	122...147	274...294	4...6
Polycarbonate	2...3,5	55...75	78...88	78	147...157	5...7
avec fibre de verre	3,5...9,5	70...140	130	171...219	-	2...5
Polystyrène	3...3,6	45...65	98	98	137...147	2...4
avec fibre de verre	5...10	96...117	103...130	-	3	
Polyéthylène HD	0,4...1,5	20...35	24,5	21,6	44...57	12...20
Polyéthylène LD	0,15...0,6	8...20	12,3	11,8...16,7	-	8...11
Polypropylène	0,65...1,4	18...38	59	78	61,7	10...20
avec fibre de verre	2,5...6	40...75	48	69	-	7...70
Chlorure de polyvinile (dur)	2,9...3,6	50...80	-	-	-	3...4
Chlorure de polyvinile (souple)	0,45...0,6	15...30	-	-	-	50...300
Polytétrafluoréthylène	0,45...0,75	9...12	-	-	-	250...500

8.2/8 : Fibres

Matériau	σ_B/ (MPa)	δ %	Matériau	σ_B/ (MPa)	δ %
Soie acétate	176...215	25	Verre	2100	-
Bambou	345	-	Soie naturelle	410	-
Viscose	265...440	15...24	Laine	156...172	-
Nylon	490...635	15...35	SiO_2	1380...1480	-

8.3 Propriétés dynamiques

8.3.1 Coefficients de frottements

Les coefficients de fottement solide dépendent fortement des propriétés d'adhésion des surfaces des matériaux en contact les données reportées dans le tableau suivant sont des valeurs moyennes. Pour des applications précises, il est nécessaire de déterminer expérimentalement les valeurs des coefficients de frottement dans chaque cas.

8.3/1 : Frottement de roulement

Sur		f/
Matériau	Matériau	(mm)
Caoutchouc	Asphalte	0,10
Caoutchouc	Béton	0,15
Bois	Bois	0,5...0,8
Acier	Acier (trempé)	0,005...0,01
Acier	Acier (doux)	0,05

8.3/2 : Coefficient de frottement cinématique (glissement)

Sur		Frottement cinématique μ		
			Lubrifié par	
Matériau	Matériau	à sec	H_2O	graisse
Bronze	Bronze	0,20	0,10	0,06
	Fonte grise	0,18		0,08
	Acier	0,18		0,07
Chêne	Chêne=*	0,20 ... 0,40	0,10	0,05 ... 0,15
	Chêne≠*	0,15 ... 0,35	0,08	0,04 ... 0,12
Fonte grise	Fonte grise		0,31	0,1
	Cuivre	0,25		
	Bois	0,35	0,25	
Caoutchouc	Asphalte	0,5	0,3	0,2
	Béton	0,6	0,5	0,3
	Fonte grise	0,4 ... 0,5		
Courroie (cuir)	Chêne	0,4		
	Métal	0,28	0,25	0,12
Acier	Chêne	0,2 ... 0,5	0,26	0,02 ... 0,1
	Glace		0,014	
	Acier	0,1 ... 0,3		0,02 ... 0,08
	Garniture de frein	0,5 ... 0,6		
	Polyéthylène	0,4 ... 0,5		
	Téflon	0,03 ... 0,05		
	Polyamide	0,3 ... 0,5		0,1
	Hostalène	0,35 ... 0,45		
Polyéthylène	Polyéthylène	0,5 ... 0,7		
Téflon	Téflon	0,035 ... 0,055		
Polyamide	Polyamide	0,4 ... 0,5		

8.3/3 : Coefficient de frottement statique

Sur		Frottement statique μ_0		
			Lubrifié par	
Matériau	Matériau	à sec	H_2O	graisse
Bronze	Bronze			0,11
	Acier	0,19		0,10
Chêne	Chêne=*	0,40 ... 0,60		0,18
	Chêne≠*	0,50		
Fonte grise	Fonte grise			0,16
Chanvre	Bois	0,5		
Courroie	Chêne	0,5		
en cuir	Métal	0,6	0,25	0,62
Acier	Chêne	0,5 ... 0,6		0,11
	Glace		0,03	
	Acier	0,15 ... 0,3		0,1

* = correspond au déplacement dans la direction des fibres et ≠ au déplacement perpendiculaire aux fibres.

8.3.2 Compressibilité

La compressibilité d'un matériau est mesurée par son module de compressibilté $\kappa = (\frac{1}{V})\left(\frac{\Delta V}{\Delta P}\right)$. ΔV représente la variation de volume sous l'action d'une variation de pression ΔP. Le module de compressibilité dépend à la fois de la température et de la pression. Pour les gaz, cette dépendance est donnée par :

$$\kappa = \frac{A}{V(P+P_T)}$$

où A est une fonction croissante de la température, P la pression extérieure et P_T la pression de Van-der-Waals à la température T.

8.3.2.1 Gaz

Les tableaux suivant résument la compressibilité de quelques gaz par la déviation de leur comportement par rapport à un gaz parfait, à l'aide de la grandeur $\kappa + \frac{1}{P}$.

8.3/4 : Hélium

Pression	$\left(\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P} + \frac{1}{P}\right)$ (10^3 Pa^{-1})							
(MPa)	−253 °C	−208 °C	−183 °C	−150 °C	−100 °C	−50 °C	0 °C	50 °C
0–0,1	0	10,34	8,97	6,57	4,67	3,62	2,47	2,1
0,1–1	−0,74	8,88	7,09	5,56	4,13	3,21	2,57	2,17
1–5	22,2	9,43	7,12	5,56	4,1	3,19	2,55	2,16
5–10	29,6	9,29	7,21	5,51	4,07	3,14	2,49	2,12

8.3/5 : Azote

Pression	$\left(\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P} + \frac{1}{P}\right)/(10^3$ Pa$^{-1})$							
(MPa)	−130 °C	−100 °C	−50 °C	0 °C	50 °C	100 °C	200 °C	400 °C
0–0,1	−33,1	−17,9	−6,65	−2,47	0	1,08	1,71	1,80
0,1–1	−36,4	−18,5	−6,96	−2,14	0	1,12	1,96	2,11
1–2	−43	−18,9	−6,66	−1,84	0,21	1,22	2,04	2,11
2–4	−60,7	−20,7	−6,09	−2,1	0,5	1,4	2,08	2,12
4–6	−83,1	−20,7	−5,17	0	0,872	1,62	1,56	2,15
6–8	–	−17,4	−3,93	−0,05	1,22	1,84	2,84	2,17
8–10	–	−8,67	−2,29	0,7	1,58	2,07	2,33	2,17
10–20	–	–	2,87	2,41	2,59	2,29	2,69	2,29
20–40	–	–	6,73	4,36	3,83	3,15	2,85	2,17
40–60	–	–	5,94	5,15	3,95	3,41	2,72	2,03
60–80	–	–	4,7	4,7	3,53	3,12	2,54	1,93
80–100	–	–	3,78	3,43	3,07	2,78	2,34	1,81

8.3/6 : Hydrogène

Pression	$\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P}+\frac{1}{P}/(10^3\ \mathrm{Pa}^{-1})$							
(MPa)	−208 °C	−183 °C	−150 °C	−50 °C	0 °C	50 °C	100 °C	200 °C
0–0,1	−33,2	−4,49	1,09	3,11	3,63	2,96	2,92	2,53
0,1–1	−15	−3	1,7	3,28	3,28	3,06	2,82	2,48
1–2	−15,2	−1,96	2,07	7,14	3,29	3,08	2,81	2,51
2–4	−11,7	−0,28	2,76	1,63	3,38	3,10	2,77	2,47
4–6	−0,93	1,96	3,52	3,72	3,45	3,09	2,74	2,45
6–8	6,87	4,24	4,31	3,96	3,51	3,12	2,71	2,46
8–10	–	6,41	10,2	4,51	3,58	3,1	2,7	2,45

8.3/7 : Méthane

Pression	$\left(\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P}+\frac{1}{P}\right)/(10^3\ \mathrm{Pa}^{-1})$						
(MPa)	−70 °C	−50 °C	−25 °C	0 °C	25 °C	50 °C	100 °C
0–0,1	−29,9	−23,6	−16,8	−11,8	−9,03	−5,83	−2,88
0,1–2	−35,2	−25,1	−17,3	−12,2	−8,75	−6,32	−3,36
2–4	−51,8	−30,1	−18,7	−12,5	−8,56	−6,05	−2,94
4–6,1	−107	−40,8	−20,6	−12,8	−8,36	−5,75	−2,60
6,1–8,1	−67,4	−46,2	−21,0	−12,3	−7,88	−4,97	−2,06
8,1–10,1	23,0	−29,0	−113	−10,8	−6,54	−4,15	−1,51
10,1–12,1	30,5	0,60	84,0	−8,32	−5,36	−3,27	−2,09
12,1–14,1	26,4	11,7	−3,38	−4,93	−3,27	−2,13	1,94
14,1–16,2	25,1	16,6	3,80	−0,99	−1,38	−0,95	−0,19
16,2–18,2	22,2	−17,2	7,83	1,99	0,27	0,24	0,47
18,2–20,2	20,4	50,6	9,55	4,91	2,47	1,66	1,33
20,2–30,4	16,0	14,1	10,8	7,66	5,32	3,91	2,72
30,4–40,5	11,7	10,8	9,51	8,15	6,59	5,45	3,92
40,5–50,6	9,18	8,64	7,88	6,99	6,27	5,54	4,32
50,6–60,8	7,48	7,19	6,72	6,20	5,70	5,11	4,15
60,8–81,1	5,93	5,74	5,44	3,22	4,77	4,49	3,86
81,1–101,3	4,63	4,47	4,29	8,9	4,05	3,73	3,35

8.3/8 : Monoxyde d'azote

Pression	$\left(\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P}+\frac{1}{P}\right)/(10^3\ \mathrm{Pa}^{-1})$							
(MPa)	−70 °C	−50 °C	−25 °C	0 °C	25 °C	50 °C	100 °C	150 °C
0–0,1	−6,64	−6,04	−5,43	−3,45	0	0	0	0
0,1–2,5	−11,4	−6,66	−3,19	−2,27	−0,94	−0,35	1,2	2,64
2,5–5	−11,3	−7,31	−3,79	−2,01	0,17	1,29	1,5	
5–7,5	−9,75	−6,05	−3,18	−1,21	0	0,83	1,56	1,99
7,5–10	−5,38	−3,5	−0,92	−0,20	0,18	1,16	1,55	2,09
10–15	0,64	0,54	0,80	1,51	2,16	1,96	2,29	2,35
15–20	6,77	4,75	4,02	2,76	2,64	2,95	2,71	2,65
20–30	9	6,67	5,53	4,54	3,99	3,63	3,26	299
30–40	8,34	7,82	6,02	5,41	4,65	4,19	3,49	3
40–61	6,69	6,17	5,53	5,03	4,45	4,09	3,51	3,11
61–81	5,09	4,85	4,51	4,18	4,98	3,63	3,16	2,86
81–101	4,08	1,15	3,71	3,51	2,32	3,09	2,82	2,58

8.3/9 : Dioxyde de carbone

Pression	$\left(\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P}+\frac{1}{P}\right)/(10^3\ \mathrm{Pa}^{-1})$							
(MPa)	0 °C	10 °C	20 °C	30 °C	40 °C	50 °C	60 °C	80 °C
0–5	−160	−158	−44,9	−35,7	−30,0	−25,3	−21,8	−16,9
5–7.5	73,4	68,2	−230	−221	−61,8	−41	−30,9	−20,5
7,5–10	54,5	52,5	47,3	30	−132	−47,3	−24,6	
10–15	36,9	36,3	34,5	29,9	19,6	−15,6	−30,3	−24,3
15–20	26,1	25,6	24,6	23,6	21,3	17,4	11,1	−3,09
20–30	18,3	17,8	17,4	17	16	14,8	13,2	8,85
30–40	12,9	12,7	12,4	12	11,7	11,3	10,8	9,38
40–50	15,1	9,8	9,64	9,43	9,09	8,9	8,66	7,97
50–60	2,85	7,95	7,84	7,79	7,68	7,42	7,16	6,79
60–71	6,82	6,81	6,65	6,57	6,46	6,34	6,22	5,9
71–81	5,85	5,84	5,83	5,73	5,64	5,52	5,43	5,15
81–91	5,2	5,13	5,02	5,93	4,88	4,82	4,75	4,58
91–101	4,58	4,47	4,42	4,25	4,25	4,23	4,12	4,01

8.3.2.2 Liquides et solides

8.3/10 : Compressibilité en fonction de la température

	$\kappa\ 10^{-11}\mathrm{Pa}^{-1}$						
T (° C)	Acétone	Tétrachlorure de carbone	Benzène	Chloroforme	Alcool éthylique	Methanol	Eau
0	82	89,8	80,9	86,6	98,7	107	50
10	110	97	87	91,8	104	114	47,8
20	125	103,5	94,5	100	111	121,5	45,8
30	133,4	112,8	102	109	118,5	129,5	44,6
40	150	122	110	118,5	126,5	138,5	44,1
50	160	132,6	118,5	129,5	136	147,6	44

8.3/11 : Compressibilité de liquides (TPN)

Liquide	κ (10^{-11}Pa^{-1})
Huile d'olive	63
Huile de parafine	62,67
Mercure	4
Pétrole	69,6

8.3/12 : Compressibilité de solides à 0 °C

Solide	κ (10^{-11}Pa^{-1})	Solide	κ (10^{-11}Pa^{-1})
Al	1,38	Si	0,324
Au	0,617	Mo	0,47
Cd	2,13	Cu	0,74
Fe	0,597	Pl	0,385

8.3.3 Viscosité

8.3/13 : Viscosité de liquides dans les conditions TPN

Liquide	η (μPa · s)	Liquide	η (μPa · s)
Acétone	330	Térébenthine	1490
Alcool éthylique	1192	Orthoxylène	807
Alcool méthylique	591	Metaxylène	615
Benzène	649	Paraxylène	643
Bisulfure de carbone	367	Mercure	1550
Ether	234	Pétrole	1460
Glycérine	$83 \cdot 10^4$	Toluène	585
Acide nitrique	1770	Poix	$3 \cdot 10^{13}$
Acide sulfurique	$22 \cdot 10^3$	Eau lourde	1260

8.3/14 : Viscosité de liquides cryogéniques à la pression de vapeur saturée

Hydrogène		Azote		Oxygène		Argon	
TK	η(μPa · s)	TK	η(μPa · s)	TK	η(μPa · s)	TK	η(μPa · s)
15	217	60		60	5800	85	2720
16	197	70	2200	70	3580	90	2300
17	178	80	1410	80	2500	95	1970
18	161	90	1040	90	1890	100	1970
19	147	100	850	100	1520	105	1540
20	134	110	760	110	1280	110	1410

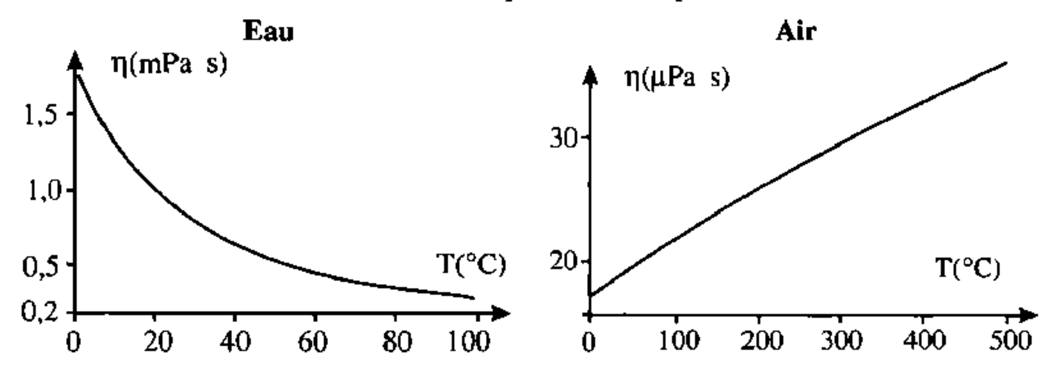
8.3/15 : Viscosité de solutions acqueuses de glycérine en (mPa · s)

Glycérine	Température (°C)					
(% masse)	0	20	40	60	80	100
20	2,44	1,76	1,07	0,731	0,635	...
40	8,25	3,72	2,07	1,3	0,918	0,668
60	29,9	10,8	5,08	2,85	1,84	1,28
80	255	60,1	20,8	9,42	5,13	3,18
90	1310	219	60,0	22,5	11,0	6,00
95	3690	523	121	39,9	17,5	9,08
100	12070	1412	284	81,3	31,9	14,8

8.3/16 : Viscosité de l'eau à différentes températures

T(°C)	η(μPa · s)	T(°C)	η(μPa · s)
0	1793	60	469
10	1309	70	406
20	1006	80	357
30	800	90	315
40	657	100	284
50	550		

8.3/17 : Viscosité en fonction de la température à la pression normale



8.3/18 : Viscosité de gaz dans les conditions TPN

Gaz	η (μPa · s)	Gaz	η (μPa · s)
Air	18,1	Chlore	14,7
Ammoniaque	10,8	Méthane	12
Monoxyde de carbone	18,4	Monoxyde d'azote	18,6
Dioxyde de carbone	16	Azote	18,4
Hydrogène	9,5	Oxygène	20,9
Hydrogène sulfuré	13	Dioxyde de soufre	13,8

8.3/19 : Viscosité des gaz à pression normale et $T_0 = 273.15$ K

Gaz	η (μPa · s)	Gaz	η (μPa · s)	Gaz	η (μPa · s)	Gaz	η (μPa · s)
N_2	1665 10^{-8}	C_5H_{10}	665 10^{-8}	CO_2	1367 10^{-8}	C_3H_6	784 10^{-8}
NO	1800 10^{-8}	C_4H_{10}	689 10^{-8}	C_2H_6	1223 10^{-8}	C_3H_7OH	715 10^{-8}
NH	935 10^{-8}	C_5H_{12}	638 10^{-8}	C_2H_4	855 10^{-8}	H_2S	1179 10^{-8}
Ar	2085 10^{-8}	C_3H_7OH	720 10^{-8}	$C_3H_6O_2$	685 10^{-8}	CS_2	920 10^{-8}
H_2	840 10^{-8}	C_3H_4	808 10^{-8}	C_2H_2	955 10^{-8}	SH_4	1076 10^{-8}
H_2O	883 10^{-8}	C_5H_{10}	665 10^{-8}	C_6H_6	693 10^{-8}	C_5H_{10}	639 10^{-8}
(vapeur)		CH_3Br	1232 10^{-8}	Br_2	1390 10^{-8}	CCl_4	906 10^{-8}
Air	1708 10^{-8}	CH_2Cl_2	916 10^{-8}	C_3H_{10}	682 10^{-8}	C_2N_2	933 10^{-8}
He	1860 10^{-8}	CH_3OH	870 10^{-8}	C_4H_{10}	690 10^{-8}	HCN	672 10^{-8}
O_2	1910 10^{-8}	CH_3Cl	1084 10^{-8}	HBr	1710 10^{-8}	C_6H_{12}	653 10^{-8}
Kr	2330 10^{-8}	NOCl	989 10^{-8}	HJ	1700 10^{-8}	C_3H_6	808 10^{-8}
Xe	2110 10^{-8}	CO	1132 10^{-8}	HCl	1320 10^{-8}	Cl_2	1245 10^{-8}
CH_4	1028 10^{-8}	C_5H_{10}	623 10^{-8}	PH_3	1072 10^{-8}	$CHCl_3$	933 10^{-8}
Ne	2975 10^{-8}	C_3H_8	750 10^{-8}	C_6H_{14}	600 10^{-8}	$C_4H_8O_2$	960 10^{-8}
SO_2	1158 10^{-8}	$C_5H_{10}O_2$	740 10^{-8}	$(CH_3)_2O$	870 10^{-8}	C_2H_5OH	775 10^{-8}
CO	1662 10^{-8}			$(CH_5)_2O$	680 10^{-8}	C_2H_5Cl	911 10^{-8}

8.3/20 : Correction de température

La variation de la viscosité d'un gaz en fonction de la température absolue peut être calculée avec :

$$\eta = \eta_{T_0} \sqrt{\frac{T}{T_0}} \frac{1 + \frac{C}{T_0}}{1 + \frac{C}{T}}$$

Le facteur correctif C ne varie que faiblement dans le domaine de température θ.

Gaz	C (°C)	θ (°C)	Gaz	C (°C)	θ (°C)	Gaz	C (°C)	θ (°C)
N_2	103,9	25-280	$(C_2H_5)_2O$	404	122-309	C_3H_6	312,6	20-120
NO	128	20-250	C_5H_{10}	368	20-120	C_3H_7OH	515,6	122-273
NH	503	20-300	C_4H_{10}	368	20-120	SO_2	306	300-825
Ar	142	20-827	C_3H_7OH	459,9	119-308	H_2S	331	0-100
C_2H_2	198,2	20-120	J_2	568	106-523	CS_2	499,5	114-310
$C_3H_6O_2$	541,5	119-306	HJ	390	0-100	C_4H_4S	467	20-245
C_6H_6	447,5	130-313	O_2	126,6	20-280	PH_3	290	0-100
Br_2	533	190-600	"	125	15-630	CO_2	254	25-280
HBr	375	0-100	Kr	188	0-100	"	213	300-824
C_3H_{10}	377,4	20-120	Xe	252	0-100	CO	101,2	22-277
Air	106,8	20-280	CH_4	162	20-500	CCl_4	335	128-315
"	111	16-825	CH_3Br	276	20-120	"	365,4	128-315
H_2	73	20-200	CH_3OH	486,9	111-312	Cl_2	351	20-250
"	86	100-200	CH_2Cl_2	425	22-309	HCl	360	0-250
"	105	200-250	CH_3Cl	441	20-308	$CHCl_3$	373	121-308
"	234	713-822	H_3AS	300	0-100	C_2H_2	330	0-100
Vapeur d'eau	673	100-350	Ne	61	20-100	HCN	901	20-330
He	83	100-200	C_5H_{10}	382,8	122-306	C_3H_6	372	20-120
"	95	200-250	C_3H_8	278	20-250	C_6H_{12}	350,9	122-306
	173	682-815	"	290	25-280	C_2H_6	252	20-250
			C_2H_4	225	20-250	$C_4H_8O_2$	504	128-314

8.3.4 Résistance d'écoulement

8.3/21 : Coefficient aérodynamique

Forme du corps		c_x	Forme du corps		c_x
		1,1		$R : r = 2$	1,22
	$a : b = 1$ $a : b = 4$ $a : b = 10$ $a : b = 18$	1,1 1,19 1,29 1,4		$l : d = 2$ $l : d = 5$ $l : d = 10$ $l : d = 20$	0,2 0,06 0,083 0,094
	sans fond (parachute) sans fond	1,33 0,34		avec fond avec fond	1,17 0,4
	$Re < 2 \cdot 10^5$ $Re = 10^6$	0,45 0,13	avec fond	$\alpha = 60°$ $\alpha = 30°$	0,51 0,34
	$Re > 10^5$ $l : d = 1,8$ $Re < 4,5 \cdot 10^5$ $l : d = 0,75$ $Re > 5,5 \cdot 10^5$ $l : d = 0,45$	 0,1 0,6 0,2		$Re \approx 8 \cdot 10^4$ $h : d = 1$ $l : d = 2$ $l : d = 5$ $l : d = 10$	 0,63 0,68 0,74 0,82
	$Re \approx 5 \cdot 10^5$ $l : d = 30$	 0,78		$Re \approx 10^6$ $l : d = 5$ $l : d = 8$ $l : d = 18$	 0,08 0,1 0,2
		0,4 ⋮ 0,55			0,3 ⋮ 0,4
		0,23			0,6 ⋮ 0,7

8.3.5 Tension superficielle

8.3/22 : Tension superficielle de liquides et solutions

Liquide	σ (10^{-3}Nm^{-1})	Liquide	σ (10^{-3}Nm^{-1})
Acétone	23,7	Huile d'olives	33
Alcool éthylique	22,3	Huile de parafine	26
Alcool méthylique	22,6	Thérébentine	27
Aniline	43	Eau	
Benzène	28,9	Eau à 5 °C	74,92
Chloroforme	27,2	Eau à 10 °C	74,22
Glycérine	64	Eau à 20 °C	72,75
Mercure	475	Eau à 30 °C	71,18
Solutions			
Acide sulfurique (conc.)	55	Acide nitrique	41
Par 1 % en poids, ajoutez les valeurs suivantes à celles de l'eau pure.			
Chlorure de calcium	0,29	KOH	0,32
Sulfate de cuivre	0,11	Chlorure de sodium	0,28
Chlorure de potassium	0,19	NaOH	0,5

Partie II Vibrations et ondes

Oscillations : vibrations périodiques d'un système (**oscillateur**), ayant un point d'équilibre stable, qui ont lieu si :

- un tel système mécanique, électrique ou thermodynamique est écarté de son point d'équilibre.
- des forces de rappel tendent à ramener le système vers son point d'équilibre.

La plupart des systèmes physiques peuvent être le siège d'oscillations.

Ondes : évolutions spatiales et temporelles d'un système qui intervient lorsque :

- les constituants d'un système peuvent effectuer des oscillations
- tous les constituants peuvent interagir, donc si l'énergie d'un constituant peut être échangée avec ses voisins
- l'équilibre mécanique, électrique ou thermique, d'au moins un des constituants du système, peut être rompu par une perturbation extérieure

L'énergie est transférée d'un élément du système à un autre sans transport de matière.

■ Le son (**onde acoustique**) désigne les ondes qui se propagent dans un milieu dense (ondes de densité). La lumière désigne les **ondes électromagnétiques** d'un certain domaine de fréquence.

9 Oscillations

1. Phénomènes périodiques

Évènement périodique : qui se reproduit à intervalles réguliers. Si l'évènement se répète à intervalles de temps fixes, on dit qu'il est **périodique en temps**. S'il se reproduit à des positions régulièrement espacées on dit qu'il est **périodique dans l'espace**.

■ La rotation de la Terre est un mouvement périodique dans le temps, elle occupe la même position à des intervalles de temps égaux à un jour. Les lignes d'un papier millimétré constituent un système périodique dans l'espace, elles sont régulièrement espacées de 1 mm.

2. Période

Période T (s) : intervalle de temps au bout duquel un évènement périodique se reproduit avec la même phase. L'unité SI de la période est la seconde (s).

Fréquence f (s^{-1}) : mesure le nombre de fois qu'un évènement périodique se reproduit par unité de temps. La fréquence s'exprime par l'inverse d'un temps s^{-1}. Le **hertz**, **Hz**, est l'unité SI de fréquence : 1 Hz=1/s.

■ Une fréquence de 1 Hz signifie qu'un événement se reproduit une fois toutes les secondes. La fréquence du courant électrique alternatif distribué en Europe est de 50 Hz, son intensité dans un sens donné passe par un maximum tous les 1/50ième de seconde, mais il change de sens 100 fois par seconde.

3. Oscillateur

Oscillateur ou **vibrateur** : système qui peut être le siège d'oscillations.

■ Un pendule est un oscillateur mécanique, de même qu'un système constitué d'une masse suspendue au bout d'un ressort. Un circuit électrique constitué d'une capacité et d'une inductance est un exemple d'oscillateur électrique ($\rightarrow$ *Électricité*).

Position de repos : état d'un système oscillant avant d'être mis en mouvement par une sollicitation extérieure, soit l'**état d'équilibre** mécanique, électrique ou thermodynamique du système considéré.

4. Oscillateur harmonique

Oscillation harmonique ou **oscillation libre** : processus périodique sans dissipation d'énergie (par ex. : sans frottement), dont l'amplitude est représentée par une fonction sinusoïdale du temps (Fig. 9.1). Les fonctions sinus et cosinus ne diffèrent que par un déphasage de $\pi/2$, par conséquent on dira fonction sinusoïdale même si elle est représentée par un cosinus :

Oscillateur harmonique			
	Symbole	Unité	Dénomination
$u(t) = A\sin(2\pi ft + \phi)$	$u(t)$		élongation au temps (t)
	A		amplitude
	f	Hz	fréquence
	t	s	temps
	ϕ	rad	déphasage

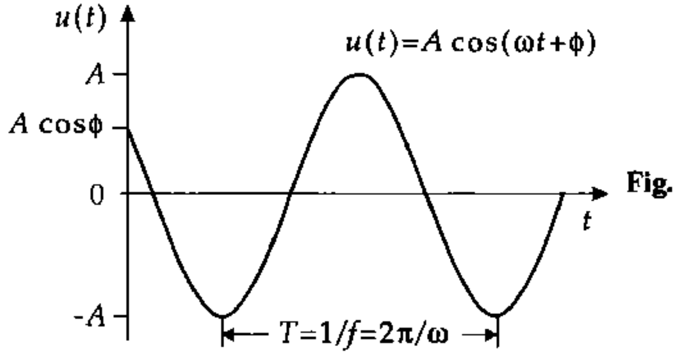


Fig. 9.1 : *Oscillation harmonique*

$u(t)$ décrit l'état du système à l'instant t, son expression dépend du système considéré.

■ Pour un pendule, $u(t)$ représente généralement l'angle par rapport à la verticale. Pour une masse attachée au bout d'un ressort à boudin, $u(t)$ représente l'élongation linéaire (déplacement par rapport à la position de repos). Dans un circuit électrique oscillant, $u(t)$ représente par exemple la tension électrique aux bornes d'un des éléments. La dimension de $u(t)$ dépend ainsi du système étudié.

5. Amplitude et phase

Amplitude : valeur maximum de l'élongation $u(t)$.
Phase ou **angle de phase** : argument de la fonction sinus décrivant les oscillations du système : $\omega t + \phi$.
Déphasage ou **phase à l'origine** ϕ : valeur de la phase à $t = 0$.

6. Fréquence, pulsation et période

Pulsation = $2\pi\cdot$ fréquence			T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\omega = 2\pi f$	f	Hz	fréquence
	ω	rad/s	pulsation

Une oscillation harmonique se met alors sous la forme :

$$u(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

Les relations entre période, fréquence et pulsation sont :

Période = 1/fréquence				**T**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$T = 1/f = 2\pi/\omega$	T	s	période, durée d'une oscillation complète	
	f	Hz	fréquence	
	ω	rad/s	pulsation	

▷ Dans des situations réelles, il y a toujours des forces dissipatives (frottement) et l'énergie de l'oscillateur n'est pas conservée. L'amplitude des oscillations d'une balançoire, du balancier d'une horloge ou des cordes d'un violon décroit graduellement sauf si on fournit de l'énergie pour compenser les pertes. L'équation de l'oscillateur harmonique simple ne peut pas rendre compte de ces systèmes réels, car elle correspond à une répétition infinie dans le temps.

▷ Dans la réalité, une oscillation commence à un instant donné qui correspond à l'**instant initial** où l'équilibre du système est rompu dans des **conditions initiales** de **vitesse initiale** ou d'**énergie** par exemple.

7. Genre d'oscillations

Les oscillations peuvent être subdivisées en :

- **Oscillations libres** : l'oscillateur "idéal" sans frottement est mis en mouvement et oscille indéfiniment sans apport d'énergie. La fréquence est déterminée de façon unique par les paramètres du système.
- **Oscillations amorties** : l'oscillateur "réel" est soumis à des forces de frottements qui dissipent de l'énergie ; les oscillations s'amortissent et finissent par s'arrêter.
- **Oscillations forcées** : une excitation périodique extérieure force les oscillations de l'oscillateur. L'oscillateur oscille avec la fréquence de l'excitation. Lorsque celle-ci est égale à la **fréquence propre** de l'oscillateur, on observe le phénomène **de résonance**.
- **Oscillations forcées amorties** ou **oscillations entretenues** : la force périodique extérieure (excitation), compense les pertes d'énergie par frottement ; les oscillations ainsi entretenues ne s'amortissent pas.

La **fréquence propre** d'un oscillateur ne dépend que de ses paramètres. C'est la fréquence à laquelle oscillerait un système libre "idéal" sans frottements.

Oscillation	libre	forcée
non amortie	sans frottement sans excitation externe énergie constante	sans frottement excitation externe gain d'énergie résonance
amortie	frottement sans excitation externe perte d'énergie	frottement excitation externe gain et perte d'énergie équilibre

■ Une antenne est un exemple d'oscillateur forcé amorti. De l'énergie est dissipée par l'émission de rayonnement électromagnétique (onde). L'émetteur apporte de l'énergie et compense cette perte.

9.1 Oscillations libres non amorties

Les **oscillations libres non amorties**, ont lieu sans excitation externe ni frottement. Leur mouvement est décrit par les équations de l'oscillateur harmonique et ne dépend que des paramètres de l'oscillateur et de ses conditions initiales.

9.1.1 Pendule élastique, ressort à boudin

1. Définition d'un pendule élastique

Un **pendule élastique** est, par exemple, constitué d'un **ressort à boudin**, de masse négligeable, fixé en un point O par une de ses extrémités. Une masse ponctuelle m, pouvant se déplacer sans frottement, est fixée à l'autre extrémité.
Les déplacements peuvent s'effectuer soit dans le plan horizontal, soit dans le plan vertical.

Équipage mobile, oscillateur : désigne l'objet pesant fixé à l'extrémité du ressort.

- Mobile pouvant se déplacer sans frottement sur un plan horizontal et attaché à une extrémité d'un ressort. (Fig. 9.2).

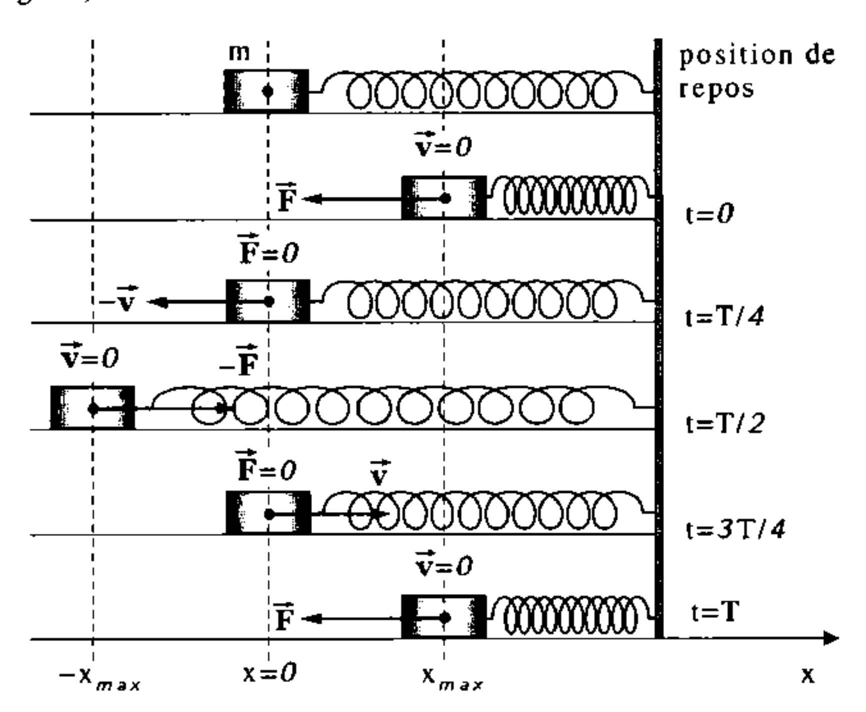


Fig. 9.2 : *Élongation d'un pendule élastique ; force de rappel* $\vec{\mathbf{F}}$ *et vitesse* $\vec{\mathbf{v}}$

Position de repos : généralement désignée par x_0, le ressort ne subit aucune force (figure du haut).

Perturbation : une force extérieure comprime ou allonge le ressort de la longueur x, l'équilibre mécanique du système est rompu.

Élongation : x dans cet exemple de façon générale, c'est la différence entre la position $X(t)$ à l'instant t et la position de repos X_0 ($x = X(t) - X_0$).

▷ Pour la mise en équation du système, l'origine du système de coordonnées peut être choisie arbitrairement. Cependant, la résolution mathématique est plus simple si l'origine est choisie à la position de repos du mobile.

2. Force de rappel

La **force de rappel**, dans un système possédant un point d'équilibre stable, tend à ramener le système vers ce point.

Loi de Hooke ou **force élastique** : la force de rappel est directement proportionnelle à l'élongation et opposée en sens ($\vec{\mathbf{F}} = -k\vec{\mathbf{x}}$). Cette loi linéaire est valable pour de petites élongation (→ *Élasticité*) et caractérise tout **oscillateur harmonique**.

Force de rappel = constante du ressort×élongation			**MLT^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$F = -kx$	F	kg m/s^2	force de rappel
	k	kg/s^2	constante du ressort (dureté)
	x	m	élongation

▷ La force élastique n'est linéaire que dans certaines limites d'élongations. De ce fait, les équations suivantes ne sont valables que dans ces limites et ne constituent que des approximations en dehors.

- Initialement, le ressort est comprimé ; si on abandonne le mobile à lui-même, la force de rappel lui communique une accélération. Il dépasse la position de repos et le ressort subi un allongement.
- La force de rappel communique une accélération de sens contraire au mobile qui se déplace en sens inverse.

3. Équation du mouvement du pendule

Les **équations du mouvement** peuvent être obtenues soit à partir de la conservation de l'énergie :

$$\frac{\mathrm{d}(E_c + E_p)}{\mathrm{d}t} = 0$$

soit en appliquant le principe fondamental de la dynamique au bilan des forces, $F = ma = m\ddot{x}$.

Équation de l'oscillateur libre			
	Symbole	Unité	Dénomination
$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$ $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,,\quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$x(t)$	m	élongation
	$\ddot{x}$	m/s^2	accélération
	k	kg/s^2	constante de rappel
	m	kg	masse du mobile
	t	s	temps
	A	m	amplitude
	ω	rad/s	pulsation
	f	Hz	fréquence
	ϕ	rad	déphasage
	T	s	période

Les mêmes équations peuvent s'appliquer au cas d'un mobile suspendu à l'extrémité d'un ressort à boudin vertical. Il faut alors tenir compte de la pesanteur qui, à l'équilibre, communique un allongement initial

au ressort. Les équations ci-dessus restent valables à condition de choisir pour origine le point d'équilibre atteint sous la force de pesanteur.

4. Énergie du système masse-ressort

Énergie de l'oscillateur libre :

Les deux formes d'énergie d'un oscillateur libre sont :

- l'énergie cinétique E_{cin} : c'est l'énergie de mouvement du mobile.
- l'énergie potentielle E_{pot} : c'est l'énergie emmagasinée par le ressort à la compression ou à l'extension.

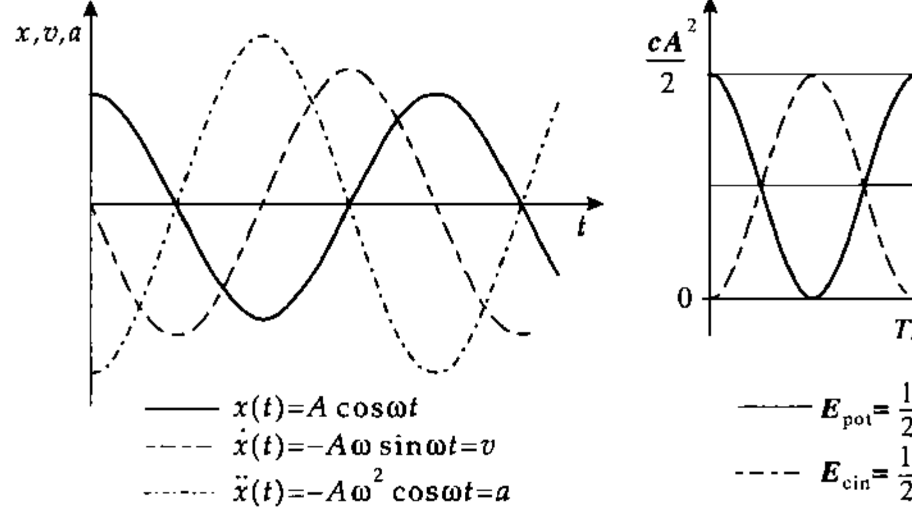


Fig. 9.3 : *Élongation $x(t)$, vitesse $v = \dot{x}(t)$ et accélération $a = \ddot{x}(t)$ d'un pendule*

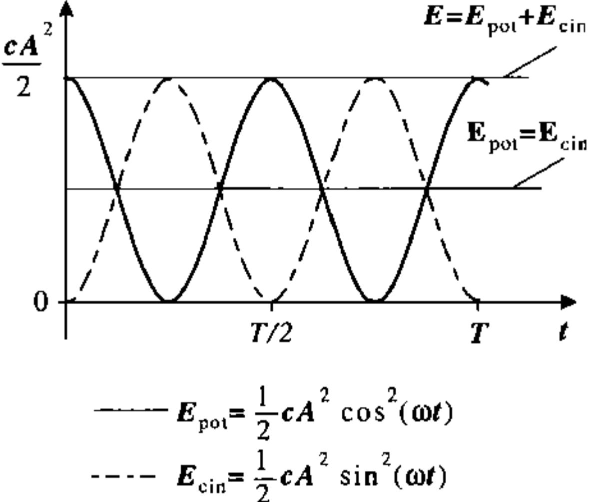


Fig. 9.4 : *Énergie cinétique $E_{\text{cin}}(t)$, énergie potentielle $E_{\text{pot}}(t)$ et énergie mécanique E d'un pendule*

Énergie d'un système à ressort			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$E_{\text{cin}} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\phi)}{2}$$ $$E_{\text{pot}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\phi)}{2}$$ $$E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \text{const.}$$	E_{cin}	J	énergie cinétique
	E_{pot}	J	énergie potentielle
	m	kg	masse
	x	m	élongation
	A	m	amplitude
	ω	rad/s	pulsation
	t	s	temps
	ϕ	rad	déphasage
	k	kg/s²	constante du ressort

L'énergie mécanique du système est constante et est définie par l'amplitude et la pulsation des oscillations.

9.1.2 Pendule simple

Pendule simple : pendule idéal, constitué d'un point matériel suspendu à un point fixe par un fil inextensible sans masse, oscillant autour de ce point fixe sous l'action de la pesanteur.

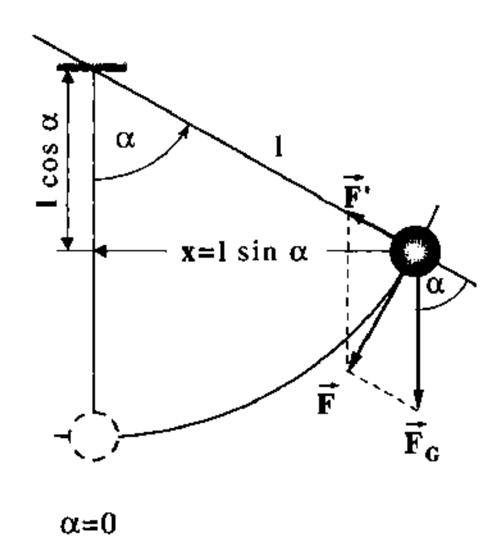


Fig. 9.5 : *Pendule simple de longueur l. α : élongation angulaire, x : élongation horizontale,* $\vec{F}$ *: tension du fil,* $\vec{F}'$ *: force de rappel* $F = mg\sin\alpha$

I. Approximations pour l'étude du pendule simple

- La masse du fil est négligeable.
- La masse du pendule est concentrée en son centre de gravité (point matériel).
- Les élongations sont de faible amplitude $\alpha \leq 10°$.
- Le mouvement du pendule se fait sans frottement.

On écarte le pendule de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale (élongation angulaire initiale α_0).

Paramètres du pendule simple (L'origine du système de coordonnées est choisi au point de suspension fixe O du pendule) :

- Élongation angulaire $\alpha(t)$: angle que fait le pendule à l'instant t avec la verticale.
- Longueur l et masse m du pendule.
- Élongation horizontale $x(t)$ du centre de gravité du pendule à l'instant t.

Élongation horizontale du pendule simple			**L**
	Symbole	Unité	Dénomination
$x = l\sin\alpha$	$x(t)$	m	élongation linéaire
	l	m	longueur
	α	rad	élongation angulaire

La **force de rappel** F tend à ramener le pendule vers sa position d'équilibre :

Force de rappel			**MLT−2**
	Symbole	Unité	Dénomination
$F = -mg\sin\alpha$	F	N	force de rappel
	m	kg	masse du pendule
	g	m/s²	pesanteur
	l	m	longueur du pendule
	α	rad	élongation angulaire

2. Approximation des petits mouvements

En limitant l'amplitude des élongations angulaires à des valeurs faibles, on peut faire l'approximation $\sin\alpha = \alpha$, d'où :

Équations du mouvement du pendule simple	Symbole	Unité	Dénomination
$$\begin{aligned} x &\approx l\alpha \\ v &= \dot{x} = l\dot{\alpha} \\ a &= \dot{v} = l\ddot{\alpha} \\ F &= ma = ml\ddot{\alpha} = -mg\alpha \\ \ddot{\alpha} &= -\tfrac{g}{l}\alpha \end{aligned}$$	F	N	force
	m	kg	masse
	l	m	longueur
	$\ddot{\alpha}$	rad/s^2	accélération angulaire
	a	m/s^2	accélération
	g	m/s^2	pesanteur
	α	rad	élongation angulaire

▷ L'approximation de la fonction sinus au premier membre de son développement limité est souvent utilisée pour la description de divers oscillateurs. Ainsi, des solutions analytiques peuvent être obtenues pour les équations de leur mouvement.

3. Solution de l'équation des petits mouvements

Solution des équations du pendule	Symbole	Unité	Dénomination
$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin(\omega t + \phi) \\ \omega &= \sqrt{\tfrac{g}{l}} \\ f &= \tfrac{1}{2\pi}\sqrt{\tfrac{g}{l}} \\ T &= 2\pi\sqrt{\tfrac{l}{g}} \end{aligned}$$	$x(t)$	m	élongation
	t	s	temps
	A	m	amplitude, élongation max.
	m	kg	masse
	l	m	longueur
	ω	rad/s	pulsation
	g	m/s^2	pesanteur
	f	Hz	fréquence
	ϕ	rad	déphasage
	T	s	période

▷ Dans l'approximation $x \approx l\alpha$, il faut exprimer α en radians. En particulier, lors de l'utilisation de calculettes, vérifier que le mode angulaire "radian" est choisi à la place du mode par défaut : "degré".

▷ Pour des élongations de plus grandes amplitude, on peut appliquer des facteurs correctifs aux valeurs des périodes (voir Table 13.1/1).

■ À 3° correspondent $3° \cdot (2\pi/360°) = 0,052$ rad. Pour une longueur de 0,5 m, l'élongation horizontale est $x \approx l\alpha = 0,5$ m $\cdot$ $0,052$ rad = 0,026 m.

▷ Cette équation différentielle est caractéristique de tout oscillateur harmonique libre. La valeur de ω^2 est fixée par les paramètres du système.

● Pour des oscillations de faible amplitude, la période d'un pendule simple est constante et indépendante de sa masse et de son amplitude (isochronisme des petites oscillations).

9.1.2.1 Mouvement circulaire et oscillations

- Les mouvements périodiques sont en rapport étroit avec les mouvements circulaires.

La projection d'un mouvement circulaire uniforme, de vitesse angulaire ω, sur un axe parallèle à un de ses diamètres, est un mouvement rectiligne sinusoïdal de même pulsation.
Une aiguille de longueur R, tournant autour d'une de ses extrémités, met le temps T pour effectuer un tour complet avec une vitesse angulaire constante. En projetant, sur un axe y, le mouvement de l'autre extrémité de l'aiguille en fonction du temps sur un axe x perpendiculaire à y, on obtient la représentation d'une oscillation harmonique :

$$y(t) = R\sin(\omega t + \phi) \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

où ϕ est l'angle formé, à l'instant $t = 0$, par l'aiguille et l'axe x.
La projection du mouvement de l'extrémité de l'aiguille sur l'axe x est aussi une oscillation harmonique.

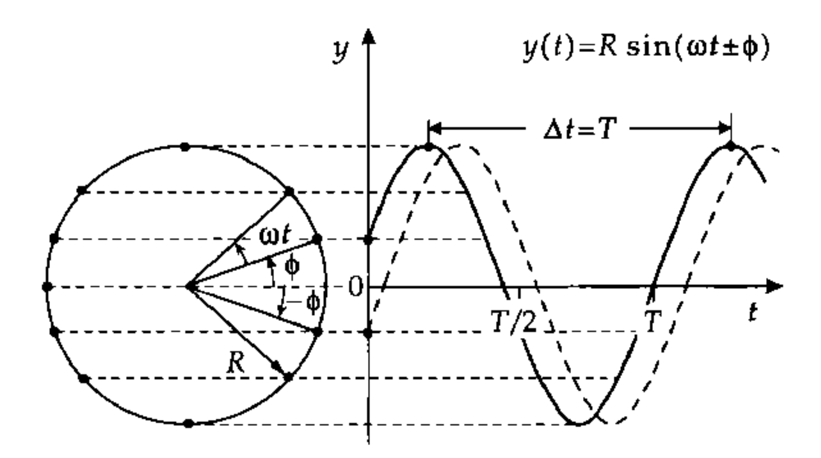


Fig. 9.6 : *Projection d'un mouvement circulaire sur l'axe y*

$$x(t) = R\cos(\omega t + \phi) \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Représentation complexe d'un oscillateur :

$$x(t) + \mathrm{j}y(t) = R(\cos(\omega t + \phi) + \mathrm{j}\sin(\omega t + \phi)) = Re^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}$$

On utilise souvent la représentation complexe pour résoudre les équations du mouvement d'un oscillateur. Ces équations étant linéaires, les parties réelles et imaginaires sont indépendantes ; seule la partie réelle des solutions a une signification physique. Le rapport de la partie imaginaire à la partie réelle donne le déphasage. Il est parfois utile de représenter des oscillations ou des mouvements circulaires dans le plan complexe (Fig. 9.7).

$$x(t) + \mathrm{j}y(t) = R[\cos(\omega t + \phi) + \mathrm{j}\sin(\omega t + \phi)] = Re^{\mathrm{j}(\omega t+\phi)}$$

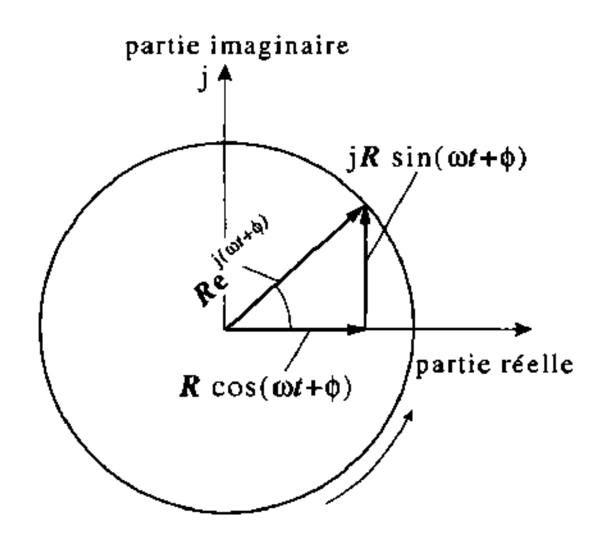


Fig. 9.7 : *Représentation complexe d'un mouvement circulaire*

9.1.3 Pendule pesant composé

1. Définition du pendule composé

Pour le **pendule pesant composé** ou **pendule physique**, les approximations utilisées dans le cas du pendule simple ne sont plus valables (Fig. 9.8) :

- masse répartie et non ponctuelle,
- masse du "fil" de suspension non négligeable.

Les solides réels ont des dimensions finies, et par conséquent sont caractérisés par un **moment d'inertie**.

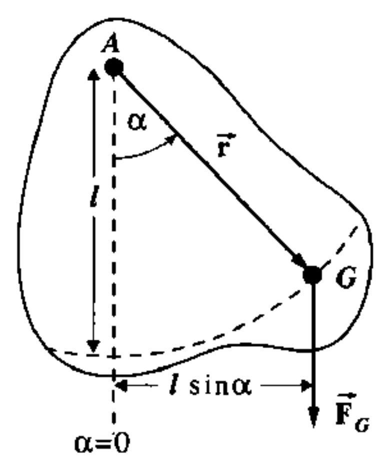


Fig. 9.8 : *Pendule composé*

■ Un marteau pouvant tourner librement autour d'un axe ne passant pas par son centre de gravité, par exemple, peut effectuer des oscillations harmoniques de faible amplitude autour de cet axe.

Le couple $\vec{M}$ et le moment cinétique $\vec{L}$ d'un pendule sont perpendiculaires au plan des oscillations.

2. Équation du mouvement d'un pendule composé

L'**équation du mouvement du pendule composé** est déduite du principe fondamental de la dynamique des rotations : le moment de la force de poids par rapport au point de rotation A est égal au produit du

moment d'inertie J_A par l'accélération angumlaire $\ddot{\alpha}$ (théorème du moment cinétique).

Couple et moment cinétique par rapport à l'axe A

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$$
$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$
$$M = -lmg \sin\alpha$$
$$M = J_A \ddot{\alpha}$$

Symbole	Unité	Dénomination
L	Nms	moment cinétique
M	Nm	couple
l	m	distance axe-c.d. gravité
m	kg	masse du pendule
g	m/s^2	pesanteur
α	rad	élongation angulaire
J_A	$kg\,m^2$	moment d'inertie
$\vec{r}$	m	vecteur axe-c.d. gravité
$\vec{p}$	kg m/s	quantité de mouvement

Pour de petits angles α ($\sin\alpha \approx \alpha$) on a les équations :

Équations du mouvement et solutions du pendule composé

$$\ddot{\alpha} = -\frac{lmg}{J_A}\alpha$$
$$\alpha(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{J_A}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mgl}}$$

Symbole	Unité	Dénomination
α	rad	élongation angulaire
$\ddot{\alpha}$	rad/s^2	accélération angulaire
l	m	distance axe-c.d. gravité
m	kg	masse
g	m/s^2	pesanteur
J_A	$kg\,m^2$	moment d'inertie
A	rad	amplitude
ω	rad/s	pulsation
f	Hz	fréquence
t	s	temps
ϕ	rad	déphasage
T	s	période

M Le **moment d'inertie** J_A d'un corps quelconque peut être déterminé à partir des équations ci-dessus, après mesure de m, l et T .

3. Longueur synchrone

La **longueur synchrone** d'un pendule composé est la longueur que devrait avoir un pendule simple de même masse pour que son mouvement sinusoïdal soit de même période.

Longueur synchrone **L**

$$l' = \frac{J_A}{ml}$$

Symbole	Unité	Dénomination
l	m	distance axe-centre de gravité
l'	m	longueur synchrone
m	kg	masse
J_A	$kg\,m^2$	moment d'inertie

4. Exemple : pendule composé homogène

Le centre de gravité d'une tige homogène de longueur L se trouve en son milieu $l = L/2$. Le moment d'inertie de la tige de masse m, par rapport à une de ses extrémités est :

$$J_A = \frac{1}{3}mL^2$$

La longueur synchrone l' est alors :

$$l' = \frac{1}{3}mL^2\frac{2}{mL} = \frac{2}{3}L$$

9.1.4 Pendule de torsion

1. Définition de l'oscillation de torsion

Un fil élastique (acier, bronze, quartz, ...), dont une extrémité O est fixe et dont l'autre a subi une **torsion** α autour de l'axe du fil, est rappelé vers sa position de repos par un couple Γ. Pour de petits angles de torsion, ce couple de rappel leur est proportionnel : $\Gamma = -C\alpha$ (Fig. 9.9).

La constante de proportionnalité C entre le couple appliqué Γ et l'angle de torsion α qui en résulte est appelée **constante de torsion** ; elle dépend de la géométrie du fil élastique et de son module de rigidité G.

- Pour un fil de forme cylindrique de diamètre d, de longueur l et de module de rigidité G, la constante de torsion vaut :
  $$\Gamma = \frac{\pi}{32}\frac{d^4}{l}G = \frac{J_A}{l}G$$
  où J_A est le moment d'inertie de section droite du fil.

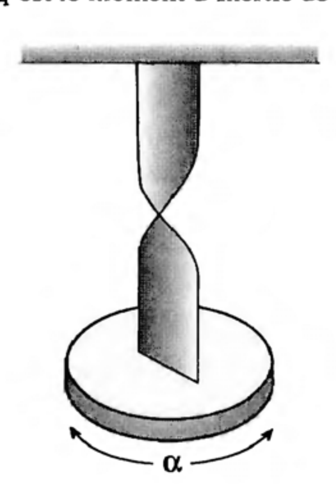


Fig. 9.9 : *Pendule de torsion : un disque de masse m est suspendu par un fil de torsion*

2. Équation du mouvement d'un pendule de torsion

Les **équations du mouvement** d'un pendule de torsion peuvent se déduire du théorème du moment cinétique :

$$M = \frac{\mathrm{dL}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(J_A\omega) = J_A\ddot{\alpha} = -C\alpha$$

Équations du pendule de torsion

$$\ddot{\alpha} = -\frac{C}{J_A}\alpha$$
$$\alpha(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{C}{J_A}}$$
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{C}{J_A}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{C}}$$

Symbole	Unité	Dénomination
α	rad	angle de torsion
$\ddot{\alpha}$	rad/s^2	accélération angulaire
c	Nm/rad	constante de torsion
J_A	kg m^2	moment d'inertie
A	rad	amplitude
ω	rad/s	pulsation
f	Hz	fréquence
t	s	temps
ϕ	rad	déphasage
T	s	période

3. Énergie du pendule de torsion

$$E_{cin} = \tfrac{1}{2}J_A \cdot \dot{\alpha}^2$$
$$E_{pot} = \tfrac{1}{2}C\alpha^2$$

M On peut déterminer le **moment d'inertie** par la mesure de la période d'oscillation :

$$J_A = -C\frac{\alpha}{\ddot{\alpha}} = \frac{T^2}{4\pi^2}k$$

La constante de torsion peut être déduite de la mesure de l'angle de torsion α et du couple Γ correspondant.

9.1.5 Pendule liquide

1. Défnition du pendule liquide

Un **pendule liquide** est constitué d'un tube en U maintenu verticalement et contenant un liquide (Fig. 9.10). Au repos, le niveau est le même dans les deux branches du tube. Lorsque l'équilibre est rompu, le liquide oscille.

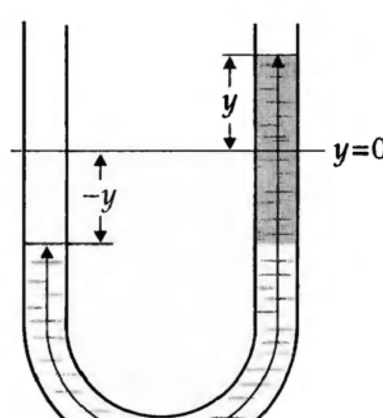


Fig. 9.10 : *Pendule liquide dans un tube en U. Le poids de la colonne de liquide (grisée) produit la force de rappel*

La **force de rappel** résulte de la force de gravitation. Si, pour un tube d'aire de section droite A, les niveaux

sont déplacés de y ($-y$ dans une branche et $+y$ dans l'autre), on a :

Force de rappel d'un pendule liquide			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$F = -2yA\rho g$	F	N	force de rappel
	y	m	élongation de la colonne de liquide
	A	m^2	aire de la section droite
	ρ	kg/m^3	masse volumique du liquide
	g	m/s^2	pesanteur

2. Équation du mouvement d'un pendule liquide

On en déduit les équations du mouvement du pendule liquide :

Équations du mouvement du pendule liquide			
	Symbole	Unité	Dénomination
$m\ddot{y} = -2A\rho g y$	y	m	élongation
$y(t) = B\cos(\omega t + \phi)$	$\ddot{y}$	m/s^2	accélération
$\omega = \sqrt{\frac{2A\rho g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$	m	kg	masse du liquide
$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{l}}$	A	m^2	aire de la section de droite
$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$	ρ	kg/m^3	masse volumique du liquide
$m = lA\rho$	B	m	amplitude
	ω	rad/s	pulsation
	f	Hz	fréquence
	ϕ	rad	déphasage
	t	s	temps
	T	s	période
	l	m	longueur de la colonne de liquide

- m est la masse totale du liquide dans les branches du tube en U, soit $m = lA\rho$, où l est la longueur totale de la colonne de liquide. y décrit le mouvement de la surface libre de liquide dans une des branches alors que le niveau dans l'autre branche est $-y$.

9.1.6 Circuit électrique oscillant

Un **circuit oscillant** est constitué d'une inductance L et d'un condensateur C associés en série ou en parallèle. La charge du condensateur peut être considérée comme la quantité variable. Sa variation en fonction du temps produit un courant électrique qui induit un champ magnétique dans l'inductance. L'énergie est alternativement emmagasinée dans le condensateur ($1/C$=élastance, analogue à un ressort) et dans l'inductance (analogue à la masse d'inertie) (Fig. 9.11).

Le circuit oscillant étant fermé sur lui-même, la somme des différences de potentiels aux bornes du condensateur U_C et de l'inductance U_L est nulle :

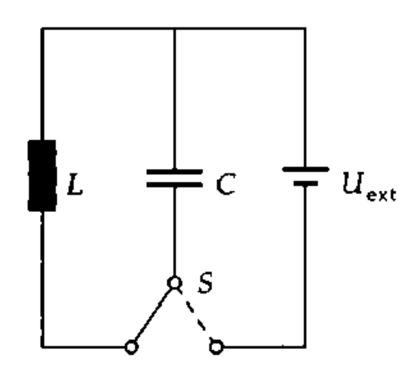


Fig. 9.11 : *Circuit oscillant parallèle, constitué d'une inductance L et d'une capacité C. La tension U_{ext} sert à l'excitation du système*

Circuit oscillant non amorti

$$\begin{aligned}
0 &= L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{Q}{C}\\
0 &= U_L+U_C\\
U_L &= L(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t)\\
U_C &= (Q/C)\\
\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= I\\
Q(t) &= A\sin(\omega t+\phi)\\
\omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}}\\
f &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}}\\
T &= 2\pi\sqrt{LC}
\end{aligned}$$

Symbole	Unité	Dénomination
$Q(t)$	C	charge du condensateur
t	s	temps
A	C	amplitude, charge max. du condensateur
ω	rad/s	pulsation
f	Hz	fréquence
ϕ	rad	déphasage
L	Vs/A	inductance
C	As/V	capacité
T	s	période
I	A	courant
U_L	V	d.d.p. aux bornes de L
Q	C	charge du condensateur

Énergie électrique $E_{él}$ et **magnétique** E_{magn} du circuit oscillant :

$$\begin{aligned}
E_{él} &= \frac{1}{2C}Q^2\\
E_{magn} &= \tfrac{1}{2}LI^2=\tfrac{1}{2}L\dot{Q}^2
\end{aligned}$$

▷ Le circuit oscillant est un élément de base en électronique. Associé à une antenne, il est notamment utilisé pour la production de rayonnements électromagnétiques.

9.2 Oscillations amorties

Oscillation amortie : une partie de l'énergie de l'oscillateur est cédée au milieu ambiant, dissipée par frottement ou rayonnement.

■ Dans le cas d'un oscillateur mécanique, la dissipation d'énergie est due aux frottements. L'amplitude des oscillations diminue au cours du temps et l'oscillateur finit par être au repos (Fig. 9.12).

■ Le point de suspension d'un pendule est toujours le siège de frottements. Si minimes soient-ils, il y a échauffement, une partie de l'énergie mécanique du système est dissipée sous forme de chaleur.

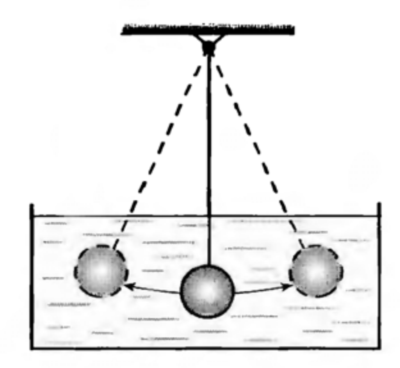


Fig. 9.12 : *Oscillations amorties d'un pendule dans un bain fluide*

Les **équations du mouvement** de l'oscillateur amorti tiennent compte de la force de frottement F_f

Oscillateur amorti			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$F = m\ddot{x} = -kx - F_f$	F	N	résultante des forces
	m	kg	masse
	x	m	élongation
	$\ddot{x}$	m/s^2	accélération
	k	kg/s^2	constante du ressort
	F_f	N	frottement

9.2.1 Frottements

Les équations du mouvement dépendent de la nature du frottement (→ *Mécanique, frottements*), les solutions analytiques ne sont possibles que dans certains cas.

9.2.1.1 Glissement et roulement

1. Frottement de Coulomb

Le **frottement de Coulomb** ou **frottement solide** F_f, produit une force proportionnelle à la réaction normale du support, opposée en sens mais indépendante de la vitesse :

$$F_f = -\text{sgn}(v)\mu F_N$$

Équation des oscillations :

$$m\ddot{x} + kx - \text{sgn}(v)\mu F_N = 0$$

2. Caractéristiques des solutions

- Fréquence et période sont identiques à celles de l'oscillateur non amorti et constantes.
- L'amplitude diminue **linéairement** en fonction du temps (Fig. 9.13).
- La position finale d'arrêt peut être différente de la position d'équilibre initial.
- La durée des oscillations est **finie.**
- L'amplitude des oscillations diminue de $4x_0$ par période T.
- Les oscillations s'arrêtent dès que l'amplitude devient plus petite que x_0.

Des solutions analytiques ne peuvent être trouvées que sur des intervalles de temps définis, par exemple :

Oscillateur amorti par frottement solide			L
	Symbole	Unité	Dénomination
$x(t) = -(\Delta x - x_0)\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - x_0$ pour $0 \le t \le \frac{T}{2}$	x	m	élongation
$x(t) = -(\Delta x - 3x_0)\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + x_0$ pour $\frac{T}{2} \le t \le T$	Δx	m	élongation initiale
$x_0 = \frac{\mu F_N}{c}$	x_0	m	élongation finale
	ω	rad/s	pulsation
	t	s	temps
	T	s	période
	k	kg/s^2	constante du ressort
	F_N	N	réaction normale
	μ	1	coefficient de frottement

x_0 est l'élongation pour laquelle la force de rappel équilibre la force de frottement. Par conséquent, l'élongation initiale du système doit être supérieure à cette valeur pour que le système puisse se mettre en mouvement.

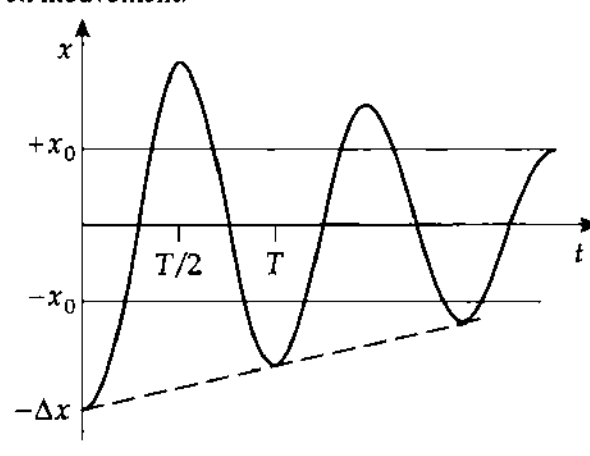


Fig. 9.13 : *Oscillation amortie par un frottement sec, ne dépendant pas de la vitesse. L'amplitude diminue linéairement avec le temps*

9.2.1.2 Frottement fluide ou visqueux

1. Équation du mouvement

Le **frottement visqueux** (ou frottement fluide ou de Stokes) est proportionnel et opposé en sens à la vitesse :

$$F_f = \lambda v = \lambda \dot{x}$$

Le coefficient de frottement λ est la constante de proportionalité entre la force de frottement visqueux et la vitesse.

Équation différentielle d'un oscillateur amorti :

Oscillateur amorti par frottement fluide			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$	m	kg	masse
	x	m	élongation
	$\dot{x}$	m/s	vitesse
	$\ddot{x}$	m/s^2	accélération
	k	kg/s^2	constante du ressort
	λ	kg/s	coeff. de frottement

2. Solution de l'oscillateur amorti par frottement fluide

Oscillations avec frottement fluide	Symbole	Unité	Dénomination
$x(t) = Ae^{-\delta t} e^{\pm j\sqrt{\omega^2-\delta^2}\,t}$	x	m	élongation
$= e^{\pm j\omega\sqrt{1-D^2}\,t}$	A	m	amplitude
	ω	1/s	pulsation
$\delta = \frac{\lambda}{2m}$	t	s	temps
	δ	1/s	coeff. d'amortissement
$D = \frac{\delta}{\omega} = \frac{\lambda}{2m\omega}$	λ	kg/s	coeff. de frottement
	m	kg	masse

Fréquence propre de l'oscillateur non amorti :

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Suivant la valeur de D, on distingue trois cas particuliers :

- **régime oscillatoire** : $D > 1$, amortissement faible :

  $$\omega' = \sqrt{\omega^2-\delta^2} = \omega\sqrt{1-D^2} \quad , \quad \omega' \text{ réel}$$

  $$x(t) = Ae^{-\delta t}\sin\left(\sqrt{\omega^2-\delta^2}\,t+\phi\right)$$

  L'amplitude des oscillations décroît exponentiellement avec le temps, l'enveloppe des oscillations est une fonction exponentielle. La nouvelle période T' (pseudo-période) est constante.

  $$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-D^2}} = T\,\frac{1}{\omega\sqrt{1-D^2}}$$

- **régime apériodique** : $D > 1$ ($\omega < \delta$), pulsation amortie :

  $$\omega' = j\sqrt{\delta^2-\omega^2}, \quad \omega' \text{ imaginaire}$$

  $$x(t) = A_1 e^{(-\delta+\sqrt{\delta^2-\omega^2})t} + A_2 e^{(-\delta-\sqrt{\delta^2-\omega^2})t}$$

  Il n'y a plus d'oscillation. Le système, écarté de sa position d'équilibre, retourne vers sa position de repos sans la dépasser.

- **régime critique** : $D = 1$ ($\omega = \delta$) :

  $$\omega' = \omega = \delta$$

  $$x(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\delta t}$$

  Ce cas, limite entre le régime oscillatoire et le régime apériodique, ne donne pas non plus lieu à oscillation. Le système, mis en mouvement, retourne à sa position de repos sans la dépasser. L'équation caractéristique a une racine double.

M Le régime critique joue un rôle important dans certaines applications pratiques car, après une perturbation, le système retourne le plus rapidement à sa position de repos sans la dépasser. Des appareils de mesure sont règlés de cette façon, par exemple le **galvanomètre ballistique** .

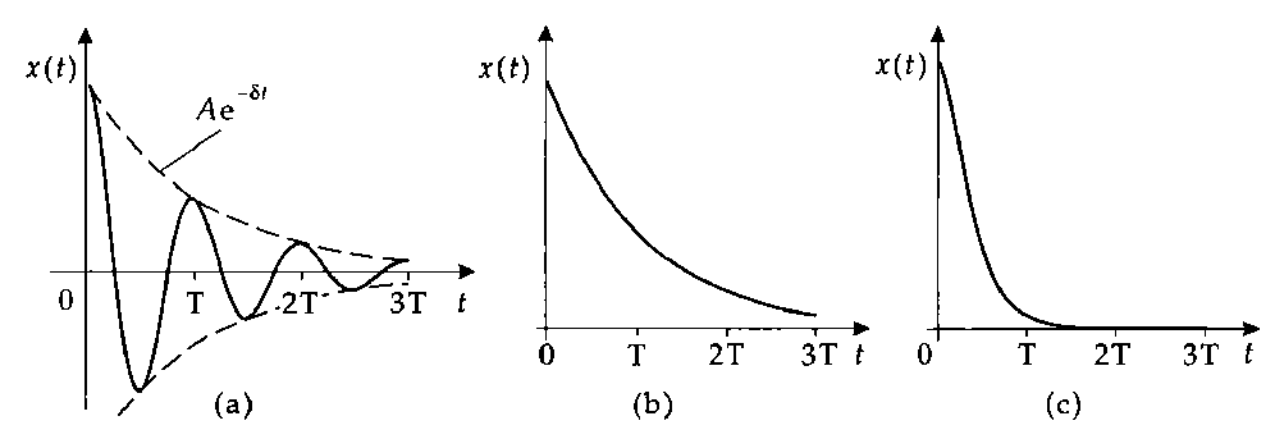


Fig. 9.14 : *Oscillations amorties : (a) : régime oscillatoire, (b) : régime critique, (c) : régime apériodique*

Paramètres de l'amortissement fluide			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	ω_0	1/s	pulsation propre
$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{\lambda}{2m})^2}$	δ	1/s	coeff. d'amortissement
$\delta = \frac{\lambda}{2m}$	ω'	1/s	pulsation amortie
$Q = \frac{1}{2D}$	Q	1	facteur de qualité
$\Lambda = \ln\left[\frac{x(t)}{x(t+T)}\right] = \delta T$	λ	kg/s	coefficient de frottement
	Λ	1	décrément logarithmique
	m	kg	masse

Le **décrément logarithmique** Λ, est le logarithme naturel du rapport des amplitudes $x(t)$ et $x(t+T)$ de deux périodes consécutives :

$$\Lambda = \ln\left[\frac{x(t)}{x(t+T)}\right] = \delta T$$

9.2.1.3 Frottement de Newton

Le **frottement de Newton** intervient dans des milieux très visqueux, cette force F_f est proportionelle au carré de la vitesse. On obtient une **équation différentielle non linéaire** en x, qui n'a généralement pas de solution analytique :

$$F_f = dv^2$$

$$m\ddot{x} + kx + \lambda\dot{x}^2 = 0$$

- Une petite bille qui est abandonnée dans un pot de miel ou un récipient contenant une huile très visqueuse, obéit à une telle équation différentielle.

9.2.2 Circuit électrique oscillant amorti

1. Circuit électrique oscillant amorti

Le circuit oscillant, en plus de l'inductance L et de la capacité C, comprend une résistance ohmique R (Fig. 9.15).

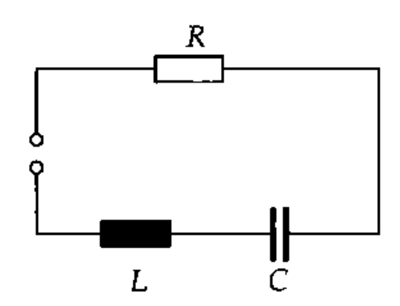


Fig. 9.15 : *Circuit électrique oscillant*

Circuit oscillant électrique amorti

$$\begin{aligned} 0 &= U_L + U_C + U_R \\ U_L &= L\dot{I} \\ U_C &= Q/C \\ U_R &= RI \\ I &= \dot{Q} \\ 0 &= L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\ \omega' &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \\ \delta &= \frac{R}{2L} \\ D &= \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \end{aligned}$$

Symbole	Unité	Dénomination
Q	C	charge du condensateur
U_L	V	tension aux bornes de la self
U_C	V	tension aux bornes du condensateur
U_R	V	tension aux bornes de la résistance
I	A	courant
t	s	temps
R	Ω	résistance
L	Vs/A	inductance
C	As/V	capacité
ω_0	rad/s	pulsation propre
ω'	rad/s	pseudo-pulsation
δ	1/s	coefficient d'amortissement

2. Analogie entre oscillations amorties mécaniques et électriques

Caractéristique	Oscillation mécanique	Oscillation électrique
équation du mouvement	$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$	$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0$
pulsation propre ω_0	$\sqrt{\frac{c}{m}}$	$\sqrt{\frac{1}{LC}}$
pulsation amortie ω'	$\sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$	$\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$
coeff. d'amortissement δ	$\frac{b}{2m}$	$\frac{R}{2L}$
degré d'amortissement $D = \delta/\omega_0$	$\frac{b}{2}\sqrt{\frac{1}{mc}}$	$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$
facteur de qualité Q	$\frac{\sqrt{mc}}{b}$	$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

m : masse, L : inductance, c : constante de rappel, C : capacité, R : résistance.

9.3 Oscillations forcées

1. Définition d'une oscillation forcée

Une force excitatrice extérieure F_{ext} agit sur l'oscillateur. Après une période transitoire de courte durée, le système oscille à la même fréquence que la force excitatrice.
En supposant une force excitatrice de forme sinusoïdale $F_{ext} = B\cos(\omega_{ext}t)$ d'amplitude B et un oscillateur avec frottement visqueux :

Oscillations forcées amorties

$$\begin{aligned} F &= m\ddot{x} \\ &= -kx - \lambda\dot{x} + B\cos(\omega_{ext}t) \\ \textit{soit :} & \\ m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx &= B\cos(\omega_{ext}t) \\ x(t) &= A(\omega_{ext})\sin(\omega_{ext}t + \phi(\omega_{ext})) \\ A(\omega_{ext}) &= \frac{B}{\sqrt{\left(m\omega_{ext}^2 - k\right)^2 + \lambda^2\omega_{ext}^2}} \\ \phi(\omega_{ext}) &= \arctan\frac{\lambda\omega_{ext}}{\left(m\omega_{ext}^2 - k\right)} \end{aligned}$$

Symbole	Unité	Dénomination
F	N	résultante
m	kg	masse
$\ddot{x}$	m/s^2	accélération
x		élongation
A		amplitude
k	kg/s^2	const. de rappel
λ	kg/s	coeff. de frott.
B	N	ampl. excitation
ω_{ext}	rad/s	fréquence excit.
ϕ	rad	déphasage
t	s	temps

2. Propriétés de la solution

La solution de cette équation différentielle résulte de la superposition de la solution générale de l'équation homogène (sans second membre, terme inhomogène F_{ext}) et d'une solution particulière de l'équation inhomogène (avec second membre).

- L'amplitude des oscillations est proportionnelle à l'amplitude de la force excitatrice et dépend de sa fréquence. Pour des fréquences élevées l'amplitude est indépendante du frottement et tend à s'annuler, $A\omega \rightarrow \infty) = 0$ (Fig. 9.16).

La **pulsation de résonance** $\omega_{rés}$ est la pulsation de la force excitatrice pour laquelle l'amplitude des oscillations devient maximale. C'est la valeur de ω_{ext} qui correspond au minimum du dénominateur de $A(\omega_{ext})$.

Amplitude de résonance A_{max} : amplitude des oscillations à la fréquence de résonance. Sa valeur s'obtient en remplaçant ω par $\omega_{rés}$ dans l'expression de l'amplitude $A(\omega_{ext})$.

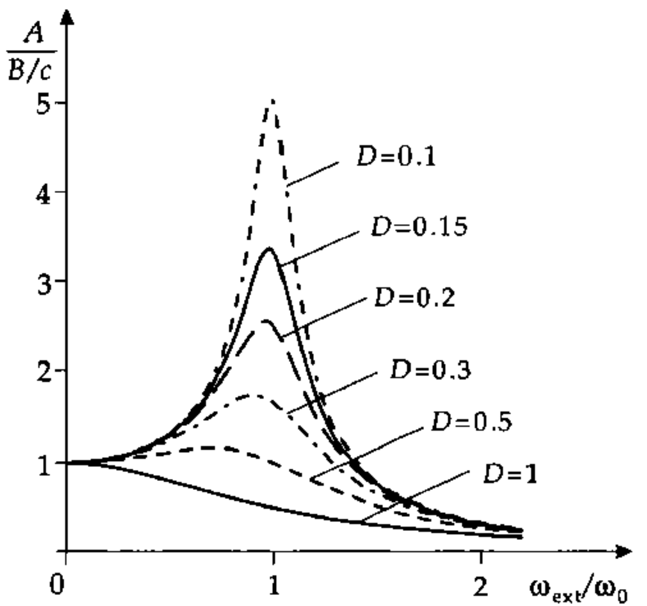


Fig. 9.16 : *Résonance pour différentes valeurs de l'amortissement*

Déphasage ϕ : différence de phase entre excitation et mouvement résultant(Fig. 9.17).

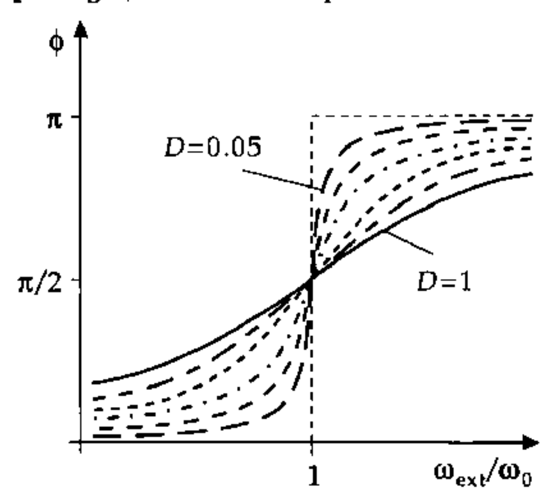


Fig. 9.17 : *Dépahasage ϕ en fonction de ω_{ext}/ω_0 pour différentes valeurs de l'amortissement D*

- Pour $\omega_{ext} = \omega$ le déphasage est $\phi = \pi/2$.

Cette propriété peut être utilisée pour définir la résonance.

3. Résonance d'une oscillation forcée

Lorsque le frottement est très faible ($\lambda \approx 0$), à la résonance ($\omega_{ext} \to \omega$), l'amplitude de l'oscilation tend vers l'infini.

- La fréquence correspondant à la résonance d'amplitude se déplace vers les basses fréquences lorsque l'amortissement augmente (Fig. 9.16).

▷ En pratique, on évite les résonances car elles peuvent conduire à la détérioration ou à la destruction des appareils qui les produisent. On fait travailler les machines qui produisent des vibrations à des fréquences plus basses que leur fréquence de résonance. Si la machine doit fonctionner à une fréquence supérieure à sa fréquence de résonance, on s'arrange pour qu'au démarrage la résonance soit dépassée rapidement. Lors de la construction de ponts ou d'immeubles, dans des régions à forte probabilité de secousses telluriques, on veille à éviter les résonances ou à les amortir le plus possible.

Paramètres de la résonance

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{\lambda^2}{2m^2}} = \omega\sqrt{1-2D^2}$$

$$A_{max} = \frac{B}{\lambda\sqrt{\frac{c}{m} - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2}} = \frac{B}{2kD\sqrt{1-D^2}}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{2\delta\omega_{ext}}{\omega_{ext}^2 - \omega^2}\right)$$

$$D = \frac{\lambda}{2m\omega}$$

Symbole	Unité	Dénomination
ω_{res}	rad/s	pulsation de résonance
A		amplitude de résonance
B		amplitude excitation
k	kg/s^2	const. de rappel
m	kg	masse
λ	kg/s	coeff. frottement
δ	1/s	coeff. d'amortissement
D	1	amortissement
ω	rad/s	pulsation propre

4. Paramètres d'une résonance

a) **Surtension à la résonance** : amplitude normalisée à la résonance (Fig. 9.18) :

$$\frac{A(\omega_{rés})}{B/c} = \frac{A_{max}}{B/c}$$

b) **Largeur à mi-hauteur** : largeur de la résonance, intervalle de pulsations $\Delta\omega_{ext}$ défini par l'amplitude $A_{max}/\sqrt{2}$ (Fig. 9.18) :

$$\Delta\omega_{ext}/\omega_0$$

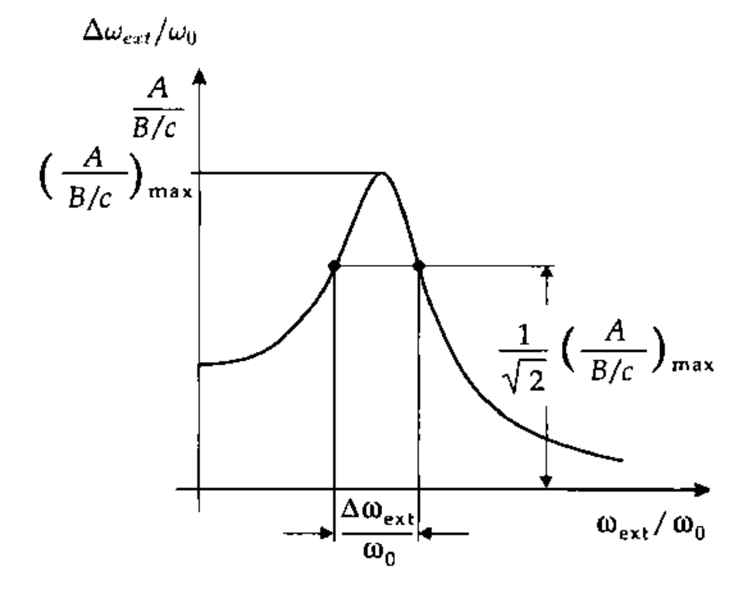


Fig. 9.18 : *Oscillation forcée. Largeur à mi-hauteur $\Delta\omega_{ext}/\omega_0$ et surtension $\frac{A_{max}}{B/c}$*

9.4 Superposition de vibrations

- Les équations du mouvement des oscillateurs harmoniques sont des équations linéaires ; de ce fait, des oscillations harmoniques peuvent se superposer sans s'influencer mutuellement.

Si un système est soumis simultanément à plusieurs oscillations différentes, on peut résoudre séparément les équations correspondant à chacune des oscillations. L'élongation de l'oscillateur est alors obtenue en

additionnant les élongations solution de chaque équation.

9.4.1 Superposition de vibrations de même fréquence

À partir des deux oscillations harmoniques :

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \quad , \quad x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \phi_2)$$

on obtient l'oscillation harmonique résultante (Fig. 9.19) :

Superposition de vibrations de même fréquence

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \sin(\omega t + \phi_1) \\ x_2(t) &= A_2 \sin(\omega t + \phi_2) \\ x_{1+2} &= A \sin(\omega t + \phi) \\ A_{1+2} &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_1 - \phi_2)} \\ \phi &= \arctan\left(\frac{A_1 \sin\phi_1 + A_2 \sin\phi_2}{A_1 \cos\phi_1 + A_2 \cos\phi_2}\right) \end{aligned}$$

Symbole	Unité	Dénomination
$x_{1,2}(t)$		vibrations 1,2
$x_{1+2}(t)$		oscill. résultante
$A_{1,2}$		amplitudes 1,2
A_{1+2}		ampl. résultante
ω	rad/s	pulsation
t	s	temps
$\phi_{1,2}$	rad	déphasages 1,2
ϕ	rad	déphasage résult.

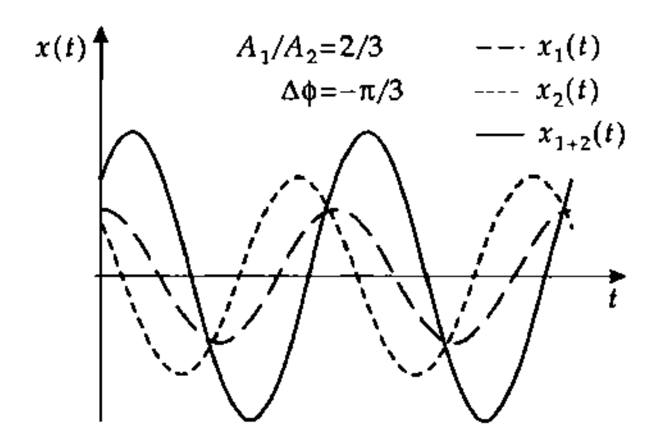


Fig. 9.19 : *Superposition de deux oscillations $x_1(t), x_2(t)$ de même fréquence ω, pour des valeurs particulières de leur déphasage $\Delta\phi$ et de leur rapport d'amplitude A_1/A_2*

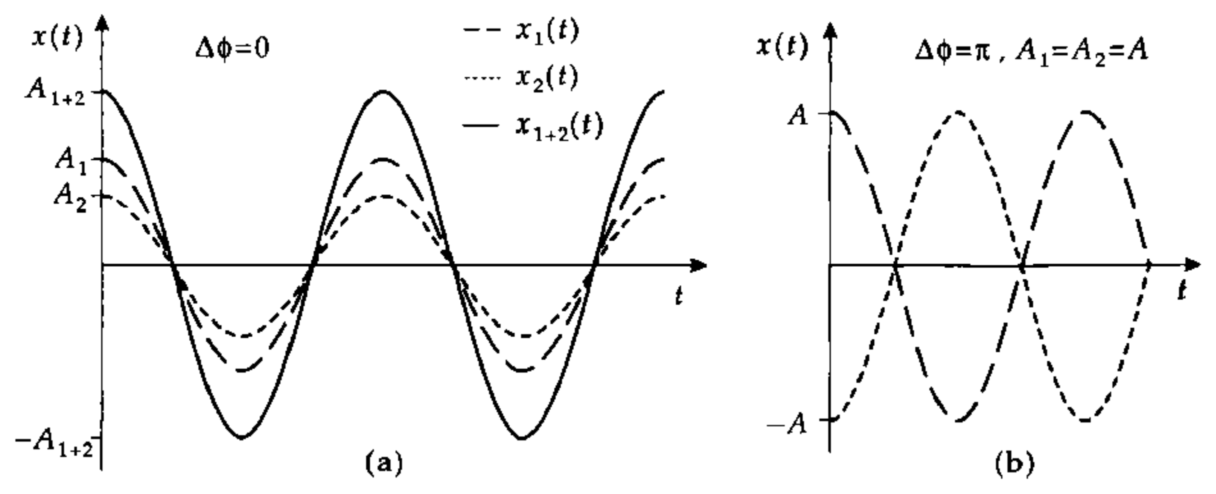


Fig. 9.20 : *Superposition de deux oscillations $x_1(t), x_2(t)$ de même fréquence ω, (a) : superposition constructive $\Delta\phi = 0$, (b) : superposition destructive $\Delta\phi = \pi$*

9.4.2 Superposition de vibrations de fréquences différentes

Soient deux oscillateurs harmoniques de fréquences ω_1 et ω_2 différentes :

$$x_1(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \quad , \quad x_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

Avec l'hypothèse simplificatrice $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $A_1 = A_2 = A$, on obtient :

Superposition de vibrations de fréquences différentes	Symbole	Unité	Dénomination
$x_1(t) = A\sin(\omega t + \phi_1)$	$x_{1,2}$		élongations 1,2
$x_2(t) = A\sin(\omega t + \phi_2)$	x_{1+2}		élongation
$x_{1+2}(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$	A		amplitude
	$\omega_{1,2}$	rad/s	pulsations
	t	s	temps

1. Battement

Un **battement** apparaît lorsque les fréquences de deux vibrations qui se superposent sont voisines. Le résultat peut s'interpréter comme une vibration de fréquence $(\omega_1 + \omega_2)/2$ dont l'amplitude varie périodiquement avec la fréquence $(\omega_1 - \omega_2)/2$ (Fig. 9.21).

■ En musique, les battements sont indésirables ; ils apparaîssent lorsque deux sons de fréquences fondamentales et d'amplitudes voisines sont émis et tenus simultanément. L'oreille humaine perçoit alors un son dissonant d'amplitude oscillante avec la fréquence des battements.

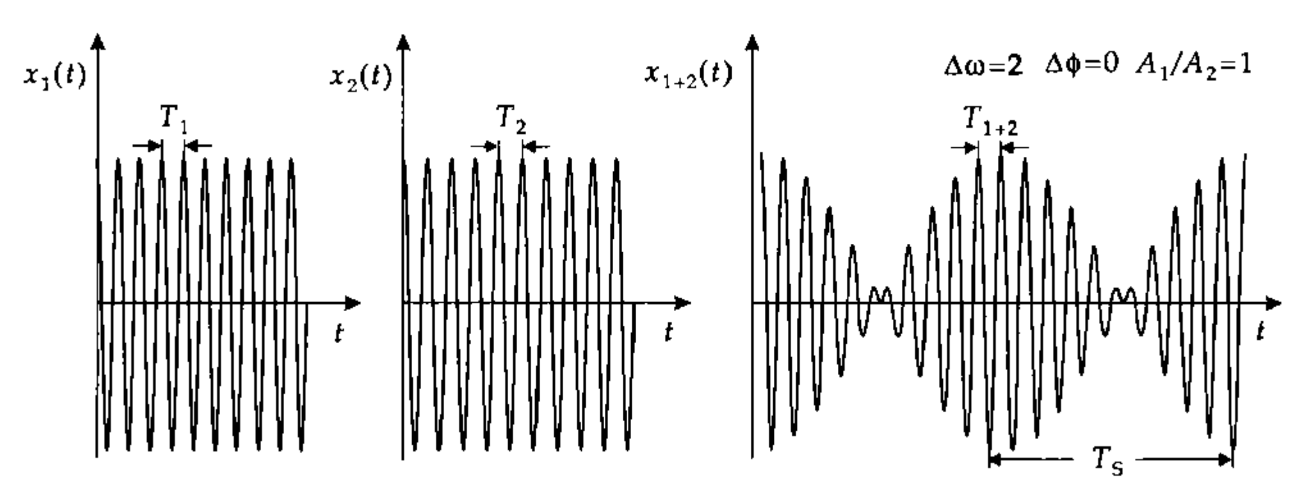


Fig. 9.21 : *Battement de deux oscillations $x_1(t), x_2(t)$. T_S : période des battements, T_{1+2} : période de l'oscillation résultante*

2. Fréquence et période des battements

Période de battement T_S : intervalle de temps qui sépare deux passages par zéro consécutifs de l'amplitude des battements. Elle est :

Période de battement = 2π/différence de fréquence			T
	Symbole	Unité	Dénomination
$T_b = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$	T_S	s	période de battement
	$\omega_1 - \omega_2$	rad/s	différence des pulsations

Période des battements			T
	Symbole	Unité	Dénomination
$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$	ω	rad/s	pulsation des battements
$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}$	ω_1	rad/s	pulsation 1
	ω_2	rad/s	pulsation 2
$= \frac{2\pi}{\frac{\pi}{T_1} + \frac{\pi}{T_2}} = 2\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$	T	s	période des battements
	T_1	s	période vibration 1
	T_1	s	période vibration 2

▷ Pour de grandes différences de fréquences $\Delta\omega$, l'oscillation résultante n'est généralement pas harmonique (Fig9.22).

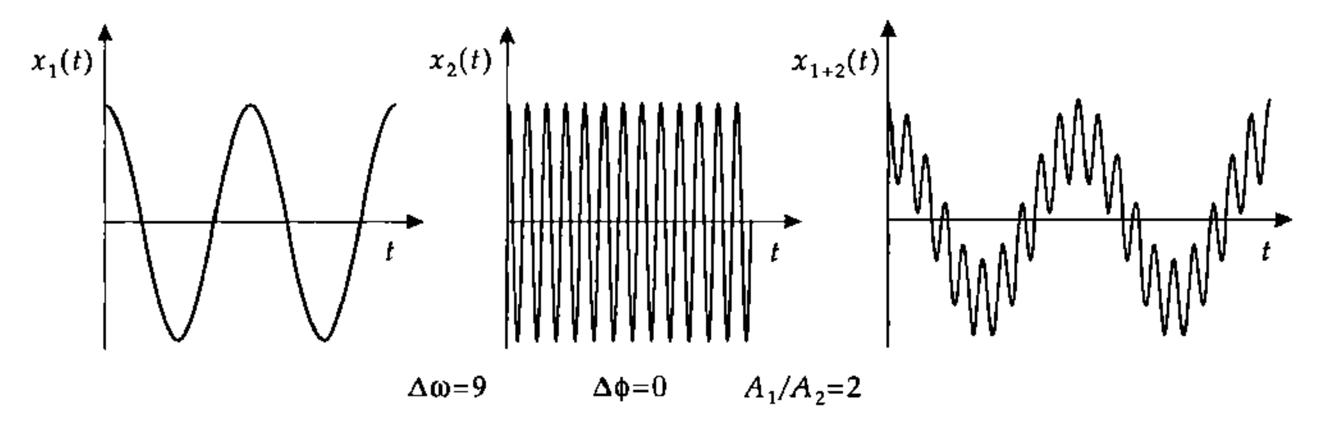


Fig. 9.22 : *Superposition de deux oscillations $x_1(t), x_2(t)$ de fréquences très différentes ($\Delta\omega = 9$)*

9.4.3 Addition d'oscillations de fréquences et directions différentes

1. Figures de Lissajous

Lorsque deux oscillations de directions différentes (par exemple : x pour l'une, y pour l'autre) se superposent, on peut partir de la description de leurs mouvements indépendants en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x \sin(\omega_x t + \phi_x) \\ y(t) &= A_y \sin(\omega_y t + \phi_y) \end{aligned}$$

pour donner une représentation en coordonnées polaires de l'oscillation résultante :

$$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \quad , \quad \alpha(t) = \arctan\frac{y(t)}{x(t)}$$

où r est la longueur du vecteur résultant et α son angle polaire avec l'axe x.
L'extrémité du vecteur $\vec{r} = (x(t), y(t))$ décrit une courbe dite **figure de Lissajous** dont le dessin dépend du rapport des amplitudes $\frac{A_x}{A_y}$, des fréquences $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ et la différence de phase $\Delta\phi = \phi_x - \phi_y$.

Propriétés : structure périodique, une courbe plane définie est parcourue périodiquement.

■ $x(t) = A\cos(\omega t) \quad , \quad y(t) = A\cos(\omega t)$

Soit l'équation d'un cercle $\mathbf{r}(\vec{\mathbf{t}})$:

$$r(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2 = A^2\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right) = A^2$$

L'extrémité de $\mathbf{r}(\vec{\mathbf{t}})$ décrit un cercle.

■ $x(t) = A_x\cos(\omega t) \quad , \quad y(t) = A_y\cos(\omega t)$

L'extrémité de $\mathbf{r}(\vec{\mathbf{t}})$ décrit une droite :

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{A_x}{A_y} \quad , \quad y = \frac{A_y}{A_x}x$$

▷ On peut visualiser des figures de Lissajous à l'aide d'un oscilloscope à entrées horizontale x et verticale y indépendantes et de deux générateurs de tensions sinusoïdales (Fig. 9.23).

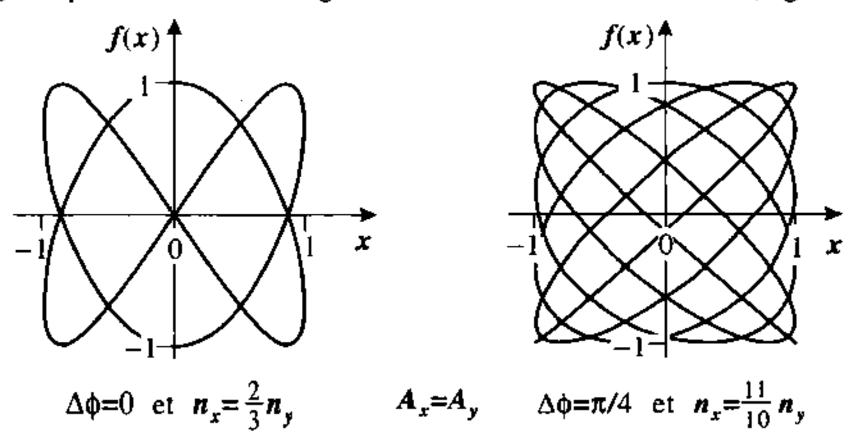


Fig. 9.23 : *Figures de Lissajous*

2. Oscillateur harmonique à deux dimensions

Équations du mouvement de l'oscillateur à deux dimensions :

$$m\ddot{x} = -cx\,, \quad m\ddot{y} = -cy\,, \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Solution :

$$x(t) = A_x\cos(\omega t + \phi_1)\,, \quad y(t) = A_y\cos(\omega t + \phi_2)$$

Les amplitudes A_x, A_y et les phases ϕ_1, ϕ_2 sont déterminés par les conditions initiales.
On obtient la trajectoire en éliminant le temps t :

$$\frac{x^2}{A_x^2} - xy\frac{2\cos\phi}{A_xA_y} + \frac{y^2}{A_y^2} = \sin^2\phi\,, \quad \phi = \phi_2 - \phi_1$$

La trajectoire est une ellipse. Pour $\phi = \pi/2$, ses axes principaux sont confondus avec les axes de coordonnées :

$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1$$

9.4.4 Analyse de Fourier, décomposition en oscillations simples

L'analyse de Fourier a notamment permis de décomposer le mouvement d'une corde vibrante en ses harmoniques.

- **Décomposition en série de Fourier** : un signal périodique non sinusoïdal peut être représenté par une somme de fonctions trigonométriques appelée **série de Fourier**. Elle comporte un terme constant et des fonctions sinusoïdales d'amplitudes diverse dont les fréquences sont des multiples entiers (**harmoniques**) de la fréquence du signal original.

1. Série de Fourier

Une **série de Fourier** est une représentation mathématique d'une fonction périodique $x(t)$ de période T par une somme de sinus et de cosinus :

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k \cdot \omega t) + b_k \cdot \sin(k \cdot \omega t))$$

Avec les **coefficients de Fourier** :

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \cos(k\omega t) \mathrm{d}t \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

et :

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cdot \sin(k\omega t) \mathrm{d}t \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

avec $\omega = 2\pi/T$. Les coefficients de Fourier sont proportionnels à l'amplitude de chaque composante.

2. Analyse de Fourier

L'**analyse de Fourier** permet de connaître les harmoniques qui composent une forme d'onde de période donnée.
Elle détermine les fréquences et leurs amplitudes qui interviennent dans la série qui décrit la fonction périodique étudiée.

Le **spectre de Fourier** est la représentation des résultats d'une analyse de Fourier sous forme d'histogramme amplitude/fréquence. L'axe des abscisses porte les fréquences qui composent le signal analysé et leur amplitude est proportionnelle à un segment vertical (Fig. 9.24).

Synthèse de Fourier :reconstruction d'un signal périodique complexe par une somme de fonctions sinus et cosinus d'amplitude et de fréquences harmoniques diverses.

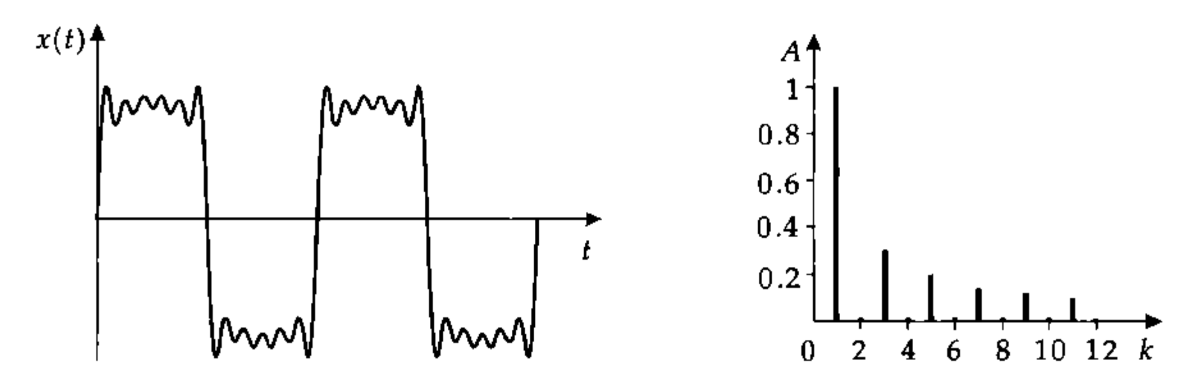


Fig. 9.24 : *Analyse de Fourier d'une fonction périodique*

3. Représentation complexe de la série de Fourier

Dans le plan complexe, la représentation de Fourier est :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j\omega \cdot k \cdot t}$$

avec les coefficients :

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-j\omega \cdot k \cdot t} dt \quad , \quad k = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$$

où T est la période du signal analysé.

▷ En acoustique on étudie la forme des ondes sonores par l'analyse de Fourier. Les ondes acoustiques qui ne comportent qu'un coefficient de Fourier rendent un son "synthétique". Une sonorité riche est déterminée par le nombre et l'amplitude des coefficients de Fourier.
Pratiquement tous les instruments et voix peuvent être "synthétisés" par recomposition de Fourier à l'aide d'ordinateurs (synthétiseurs).

9.5 Oscillateurs couplés

1. Oscillations de systèmes couplés

Les **oscillateurs couplés** sont constitués de deux ou plusieurs oscillateurs s'influençant mutuellement par l'intermédiaire d'un organe de couplage. Les divers oscillateurs échangent leur énergie.

Dans l'exemple suivant, nous considérons deux pendules simples reliés entre eux par un ressort à boudin (Fig. 9.25), en admettant que :

- les deux pendules simples isolés ont même masse m et même longueur l, et par conséquent la même période T
- la force de couplage des oscillateurs est plus faible que leurs forces de rappel (**couplage faible**).

▷ Un oscillateur isolé a une fréquence d'oscillation propre déterminée par ses caractéristiques. Lorsque plusieurs oscillateurs sont couplés, ils ont plusieurs façons d'osciller appelées **modes propres**.

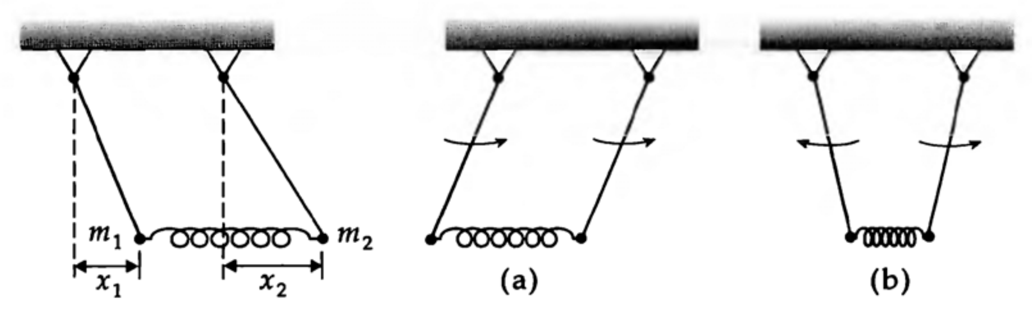


Fig. 9.25 : *Pendules couplés : (a) : oscillations en phase, (b) : oscillations en opposition de phase (modes propres)*

2. Modes propres

Les **modes propres** désignent les modes d'oscillations de deux oscillateurs couplés lors desquels les oscillateurs n'échangent pas d'énergie.

- Deux pendules couplés, dont les mouvements sont constamment parallèles, effectuent des oscillations **parallèles** ou de **même phase**.
- Deux pendules couplés, dont les mouvements sont constamment en opposition, effectuent des oscillations **anti-parallèles** ou de **phases opposées**. Les élongations initiales des deux pendules doivent être de valeurs égales, mais de signes opposés.

3. Équations du mouvement de deux pendules couplés

Les **équations du mouvement** de deux oscillateurs couplés de mêmes masses $m = m_1 = m_2$, de mêmes constantes de ressort $k = k_1 = k_2$) et dont k_{12} est la constante du ressort qui relie les deux pendules (constante de couplage) peuvent être résumées par :

Équations du mouvement de deux pendules couplés

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_1(t) &= -kx_1 - k_{12}(x_1 - x_2)\\
m\ddot{x}_2(t) &= -kx_2 - k_{12}(x_2 - x_1)\\
m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -(k + 2k_{12})(x_1 - x_2)\\
m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= -k(x_1 + x_2)\\
x_1(t) &= A\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\\
x_2(t) &= A\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\\
\omega_1 &= \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}\\
\omega_2 &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega
\end{aligned}
$$

Symbole	Unité	Dénomination
F_1	N	force du pendule 1
F_2	N	force du pendule 2
m	kg	masses des pendules
k	kg/s²	constante
k_{12}	kg/s²	constante de couplage
$x_{1.2}$	m	positions
$\ddot{x}_{1.2}$	m	accélérations
A	m	amplitude
$\omega_{1.2}$	1/s	pulsations
t	s	temps

- La solution s'obtient en résolvant les équations $(F_1 - F_2)/m$ et $(F_1 + F_2)/m$ pour les nouvelles variables $x_1 - x_2$ et $x_1 + x_2$ pour en déduire x_1 et x_2. Chacun des oscillateurs effectue des oscillations qui se superposent avec un certain déphasage.

Les pulsations propres sont contenues dans les expressions $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

- Les oscillations propres de même sens (parallèles), $x_1(t) = x_2(t)$:
  Les équations pour F_1 et F_2 se réduisent à deux équations non couplées de deux oscillateurs indépendants. De leur résolution, on dérive la même pulsation propre $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ des oscillations libres des deux pendules.
- Oscillations propres de sens contraires (anti-parallèles), $x_1(t) = -x_2(t)$:
  La résolution des équations différentielles conduit à la pulsation $\omega_2 = \sqrt{(k + 2k_{12})/m}$ pour chacun des deux pendules.

4. Pulsation des modes propres

La pulsation propre du mode parallèle ω_1 est la même que celle qu'aurait chacun des pendules s'ils n'étaient pas couplés (dans ce mode, le ressort de couplage ne subit ni allongement ni compression).

$$\omega_1 = \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Dans le cas du mode propre anti-parallèle, le ressort qui relie les deux pendules subit alternativement des extensions et des compressions. De façon approchée, les oscillations de chacun des pendules peuvent être décrites en utilisant une expression linéaire de la force de rappel tenant compte d'une constante de rappel modifiée :

$$F = k'x \quad \text{avec} \quad k' \neq k = \frac{mg}{l}$$

On obtient alors :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}$$

La constante de rappel modifiée a, par conséquent, la valeur $k' = k + 2k_{12}$.

Un **battement** apparaît lorsque le système n'oscille pas dans l'un ou l'autre des modes propres. Si un des pendules est écarté de sa position d'équilibre puis abandonné sans vitesse initiale tandis que l'autre est laissé au repos, le premier pendule va exciter les oscillations du deuxième dont les amplitudes vont aller en augmentant. L'énergie du premier pendule est peu à peu transférée sur le deuxième, puis le processus s'inverse à nouveau et ainsi de suite.

Ce mode d'oscillation général est la superposition des deux modes propres. De fréquences voisines, ceux-ci donnent lieu à battement.

Le **couplage** K d'un système d'oscillateurs couplés est défini par :

$$K = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

où ω_1 et ω_2 sont les pulsations propres. $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2.\pi}$ et f_2 sont les fréquences propres.

10 Ondes

Onde : propagation d'une grandeur physique dont les variations au cours du temps en un point de l'espace sont reliées à ses variations à un instant donné en tout autre point de l'espace par une équation aux dérivées partielles. Lors de cette propagation il y a transport d'énergie sans transport de matière. Toute onde peut être considérée comme la superposition d'un nombre plus ou moins grand d'ondes sinusoïdales.

Ondes libres ou **ondes harmoniques** : se produisent lorsqu'aucune force extérieure n'agit sur un système et qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie (par exemple : par frottement).
Modélisation mécanique d'une onde : par exemple par un grand nombre de pendules faiblement couplés à leur proches voisins par des ressorts. Mis à part ses élongations, chaque pendule occupe une position fixe dans l'espace, seule l'énergie est transportée d'un pendule à l'autre ($\rightarrow$ *pendules couplés*). Les ondes sont décrites par une fonction de la forme $f(\vec{\mathbf{r}}, t)$ qui définit l'amplitude de l'oscillation en $\vec{\mathbf{r}}$ à l'instant t.

▷ **Ondes de choc** : ondes non périodiques de grande amplitude qui peuvent s'accompagner de transport d'énergie. Leur vitesse de propagation dépend de leur amplitude (**onde non linéaire**). Le principe de superposition ne s'applique pas aux ondes de choc.

10.1 Propriétés fondamentales des ondes

1. Description d'une onde par son équation d'onde

Équation d'onde : équation linéaire aux dérivées partielles du deuxième ordre par rapport au temps et à l'espace de la fonction $f(\vec{\mathbf{r}}, t)$. Elle décrit la propagation de l'onde dans l'espace et le temps :

$$\triangle f(\vec{\mathbf{r}}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f(\vec{\mathbf{r}}, t)}{\partial t^2} = 0$$

La solution générale de l'équation d'onde est une superposition d'ondes qui se propagent à la même vitesse c dans des directions $\vec{\mathbf{e}}_i$ quelconques :

$$F(\vec{\mathbf{r}}, t) = \sum_i f_i(t - \frac{\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{r}}}{c})$$

▷ Pour la description mathématique, il est généralement plus simple de considérer des ondes libres se propageant dans un espace infini (non limité). Cependant, dans la pratique, les ondes se propagent dans un espace limité. Cette limitation apparaît dans la forme des solutions puisqu'elles celles-ci doivent tenir compte des conditions aux limites.

2. Phase et front d'ondes d'une onde

Phase de l'onde : argument de la fonction f, écrit sous la forme $\omega t - \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{r}} + \varphi$. Grandeur qui décrit l'état de vibration de l'onde.
Front d'ondes, plan d'onde : les positions $\vec{\mathbf{r}}$ de l'espace qui, à un instant donné ont même phase (Fig. 10.1) : tous les points d'un plan d'onde vibrent en phase.

▷ Puisque une onde est périodique dans l'espace, il y a toujours une infinité de fronts d'ondes.

D'après la forme du front d'ondes, on distingue :

- onde plane
- onde cylindrique
- onde sphérique

▷ À l'intérieur d'un volume élémentaire ΔV, tout front d'ondes peut être approximé par son plan tangent : le plan d'onde.

3. Vecteur d'onde et nombre d'onde

Vecteur d'onde $\vec{k}$: vecteur constant qui apparaît dans les solutions de l'équation d'onde. On peut comprendre sa signification en considérant la fonction $f(\vec{r}, t)$ pour $t = 0$. Alors f prend la même valeur pour tous les points $\vec{r}$ avec $\vec{k}\vec{r} = \text{const.}$, c'est à dire pour les points $\vec{r}$ situés dans un plan perpendiculaire à $\vec{k}$. Les plans de même phase se déplacent parallèlement entre eux avec la même vitesse c dans la direction $\vec{k}$. Par conséquent $\vec{k} = k \cdot \vec{e}$ indique la **direction de propagation** de l'onde (Fig. 10.1).

$$\vec{k} = k \cdot \vec{n} \quad \vec{n} : \text{ vecteur unitaire de la normale au front d'ondes.}$$

À une onde qui se propage dans la direction opposée, correspond le vecteur d'onde $-\vec{k}$.

Vecteur propagation, $\vec{e}$, $\hat{\vec{k}}$: vecteur d'onde normalisé à 1 :

$$\vec{e} = \hat{\vec{k}} = \vec{k}/k$$

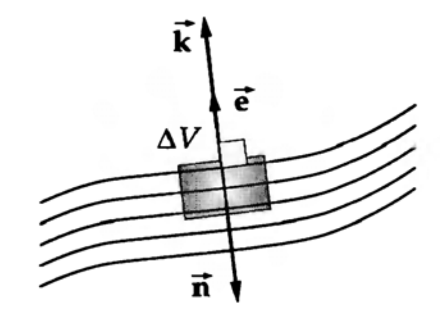


Fig. 10.1 : *front d'ondes, normale $\vec{n}$, vecteur d'onde $\vec{k}$, vecteur propagation $\vec{e}$, ΔV : élément de volume*

Nombre d'onde, k : norme du vecteur d'onde $|\vec{k}|$.

4. Vitesse de phase, fréquence et longueur d'une onde

Vitesse de phase, c : vitesse à laquelle se propagent les fronts d'ondes. Cette vitesse dépend du milieu dans lequel l'onde se propage ; elle peut aussi dépendre de la fréquence (milieu dispersif).

Période, T : temps au bout duquel, en un point donné, l'état de vibration se reproduit identiquement.

Fréquence, f : nombre de fois par seconde qu'en un point donné, l'état de vibration se reproduit identiquement. C'est la valeur réciproque de la période.

Pulsation, ω : définie de façon analogue aux vibrations : $\omega = 2\pi f$.

Longueur d'onde, λ : distance entre deux fronts d'ondes successifs de même phase. C'est une caractéristique de la périodicité spatiale de l'onde. Relation entre nombre d'onde et longueur d'onde :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Périodicité temporelle : $\omega \cdot T = 2\pi$
Périodicité spatiale : $k \cdot \lambda = 2\pi$

Vitesse de phase				LT^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$c = \frac{\omega}{\lvert\vec{\mathbf{k}}\rvert} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$	c	m/s	vitesse de phase	
	ω	rad/s	pulsation	
	$\vec{\mathbf{k}}$	1/m	vecteur d'onde	
	T	s	période	
	f	Hz	fréquence	
	λ	m	longueur d'onde	

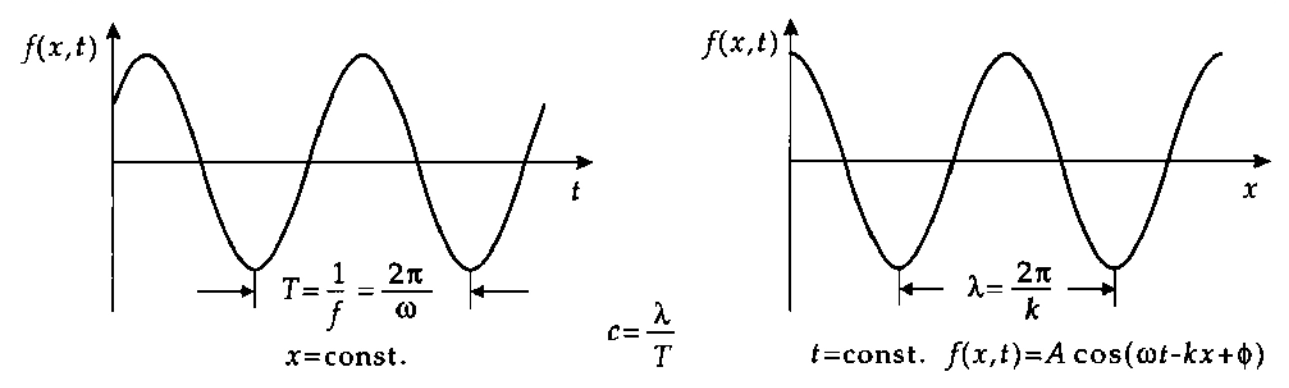


Fig. 10.2 : *Fréquence f et longueur d'onde λ d'une onde harmonique. c : vitesse de phase*

5. Vitesse de phase de diverses ondes

a) Ondes longitudinales dans les liquides

$c = \sqrt{K/\rho}$ K module de compressibilité, ρ masse volumique .

b) Ondes longitudinales dans les gaz

$c = \sqrt{\kappa p/\rho}$ p pression, ρ masse volumique .

c) Ondes de torsion dans une tige (de section circulaire)

$c = \sqrt{G/\rho}$ G module de cisaillementl, ρ masse volumique .

d) Onde transversale sur une corde

$c = \sqrt{\frac{F}{A\rho}}$ F tension, A section de la corde, ρ masse volumique .

e) Ondes électromagnétiques dans le vide

$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$ ε_0 permittivité du vide, μ_0 perméabilité magnétique .

f) Ondes électromagnétiques dans la matière

$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \mu_r \cdot \mu_0}}$ ε_0 permittivité du vide, μ_0 perméabilité magnétique du vide,

ε_r permittivité relative, μ_r perméabilité relative.

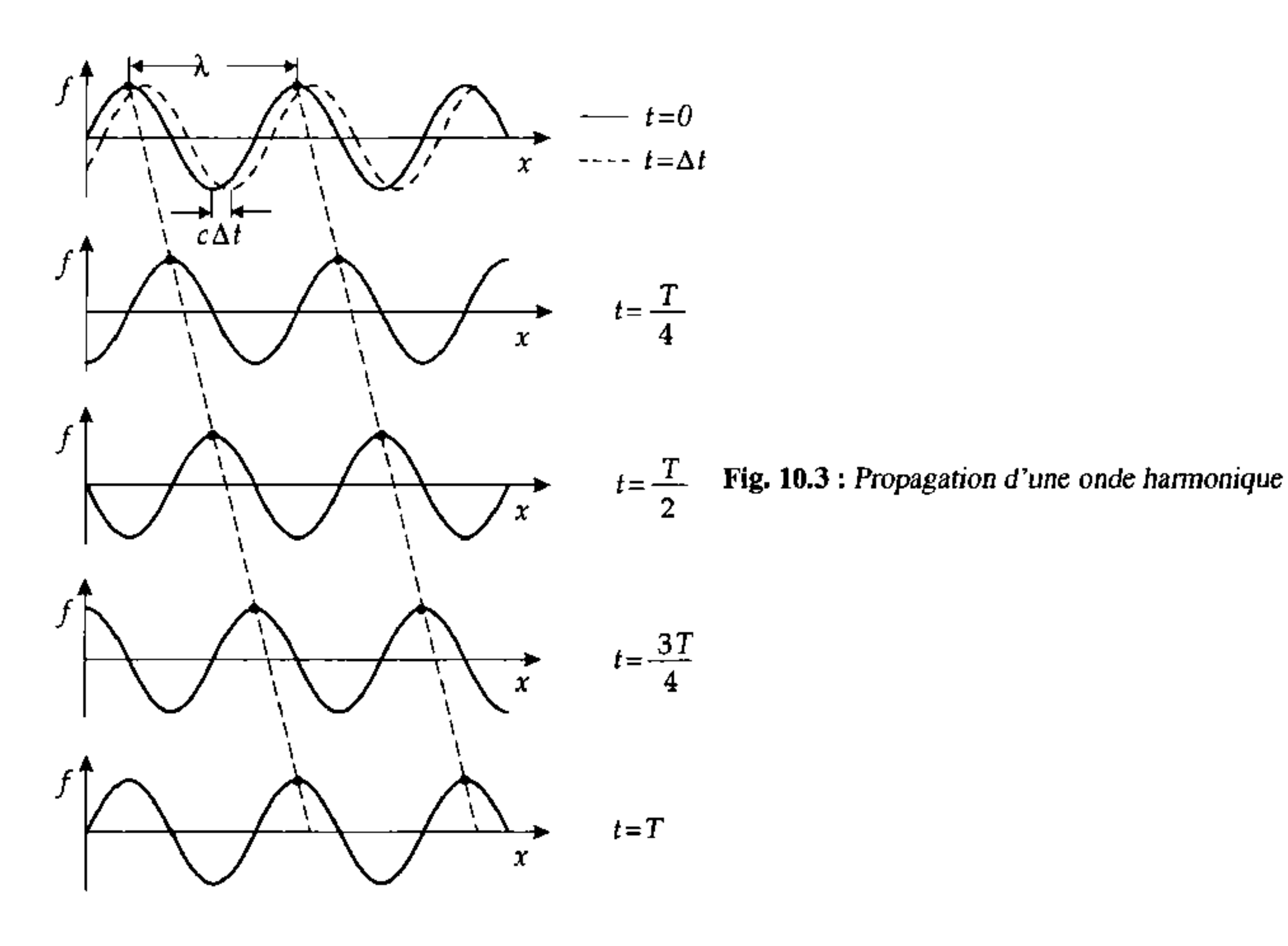


Fig. 10.3 : *Propagation d'une onde harmonique*

6. Onde plane et onde sphérique

a) Onde plane : les fronts d'ondes sont des plans perpendiculaires à la direction de propagation de l'onde (Fig. 10.2).

Onde plane	Symbole	Unité	Dénomination
$f(\vec{\mathbf{r}},t) = A\sin(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} + \varphi)$	$f(\vec{\mathbf{r}},t)$		amplitude de l'onde en $\vec{\mathbf{r}}$ à l'instant t
	A		amplitude
avecE $\vec{\mathbf{k}}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$	ω	rad/s	pulsation
	t	s	temps
	$\vec{\mathbf{k}}$	1/m	vecteur d'onde
$\lambda = \frac{2\pi}{\lvert\vec{\mathbf{k}}\rvert}$	$\vec{\mathbf{r}}$	m	rayon vecteur
	φ	rad	déphasage
	c	m/s	vitesse de phase
	λ	m	longueur d'onde

b) Onde sphérique : les fronts d'ondes sont des surfaces sphériques concentriques à la source de l'onde placée en $r = 0$ (Fig. 10.3). Ce sont des solutions à symétrie sphérique de l'équation d'onde :

Onde sphérique, progressive, sinusoïdale	Symbole	Unité	Dénomination
$$f(\vec{r},t) = \frac{A}{\lvert\vec{r}\rvert}\sin(k\lvert\vec{r}\rvert - \omega t + \varphi)$$	$f(\vec{r},t)$		fonction d'onde
	A		amplitude
	ω	rad/s	pulsation
	t	s	temps
	$\vec{k}$	1/m	vecteur d'onde
	$\vec{r}$	m	rayon vecteur
	φ	rad	déphasage

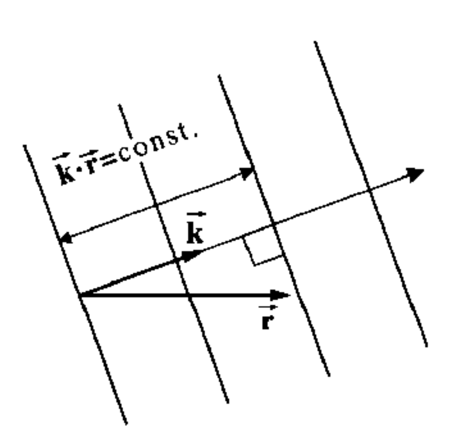


Fig. 10.4 : *Fronts d'ondes d'une onde plane*

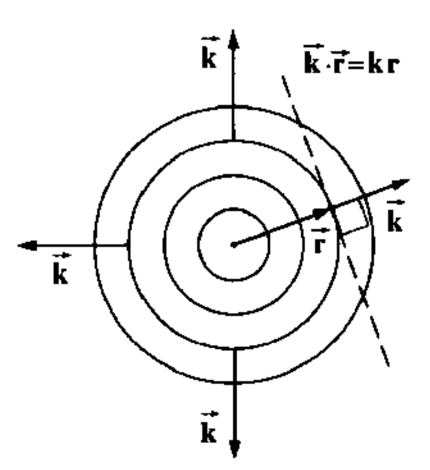


Fig. 10.5 : *Fronts d'ondes d'une onde sphérique*

7. Représentation complexe des ondes

Onde plane :

$$f(\vec{r},t) = f_0 e^{-j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

Onde sphérique :

- issue du point $r = 0$
  $$f(\vec{r},t) = \frac{f_0}{|r|}e^{-j(\omega t - kr)}$$
- se propageant vers le point $r = 0$
  $$f(\vec{r},t) = \frac{f_0}{|r|}e^{-j(\omega t + kr)}$$

8. Principe de superposition et principe d'Huygens

Principe de superposition : les ondes linéaires se superposent sans influence mutuelle, l'amplitude des oscillations en un point $\vec{r}$ à l'instant t est la somme des amplitudes des ondes individuelles.

☞ Le principe de superposition ne s'applique pas aux ondes non linéaires.

Principe d'Huygens : principe de construction des fronts d'ondes lors de la propagation des ondes (Fig. 10.6), décrit la propagation des fronts d'ondes.

- Chaque point d'un front d'ondes est le point de départ d'une onde sphérique. Un nouveau front d'ondes se déduit de la superposition de toutes ces ondes sphériques. Le nouveau front d'ondes est constitué de l'enveloppe de toutes les ondes sphériques élémentaires issues d'un front d'ondes donné.

- Toutes les ondes peuvent être constituées à partir d'ondes sphériques dites **ondes élémentaires**. Si une onde élémentaire est émise à l'instant t, son front d'ondes, après un temps Δt, aura le rayon $r = c \cdot \Delta t$. À l'exception de la direction de la normale au front d'ondes global, toutes les ondes élémentaires se détruisent par interférence destructive.

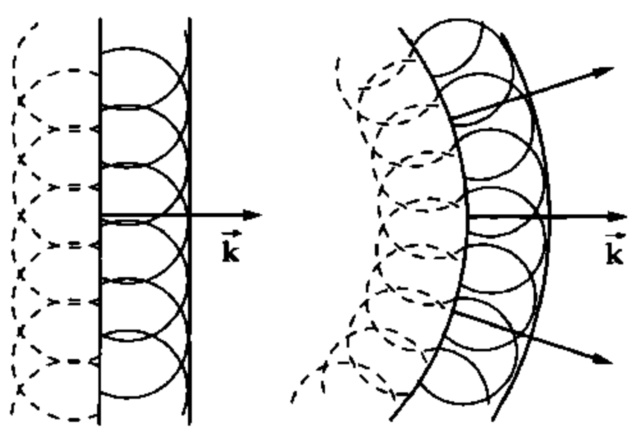


Fig. 10.6 : *Propagation d'un front d'ondes d'après le principe d'Huygens. À gauche : onde plane, à droite : onde sphérique*

9. Ondes vectorielles

Beaucoup de grandeurs physiques, comme par exemple les champs électrique et magnétique, sont des grandeurs vectorielles et sont décrites par une équation d'onde vectorielle,

$$\triangle \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}},t)}{\partial t^2} = 0$$

avec la grandeur vectorielle $\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}},t)$. La fonction $\vec{\mathbf{g}}$, et par conséquent aussi l'équationd'onde, peut se décomposer en ses composantes $g_x(\vec{\mathbf{r}},t)$, $g_y(\vec{\mathbf{r}},t)$, $g_z(\vec{\mathbf{r}},t)$ dont les solutions sont celles indiquées ci-dessus.

- ■ En électrodynamique, on peut établir une équation d'onde vectorielle pour le vecteur champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ ou le vecteur champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$.

Onde vectorielle : solution de l'équation d'onde vectorielle, par exemple une onde plane :

$$\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{A}}\cos(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} + \varphi) \quad \text{avec} \quad \vec{\mathbf{k}}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

Par rapport à la solution scalaire d'une onde plane, nous avons ici la direction du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$. Le vecteur A, en plus de l'**amplitude de l'onde** $|A|$, indique aussi la **direction de l'élongation** des oscillations, $\hat{\vec{\mathbf{A}}}$.

▷ Les vecteurs $\vec{\mathbf{g}}(\vec{\mathbf{r}},t)$ et $\vec{\mathbf{A}}$ peuvent être décomposés en leurs composantes par rapport à un système de coordonnées cartésiennes g_x, g_y, g_z et A_x, A_y, A_z. Chaque composante est alors solution de l'équation d'onde scalaire.

10. Onde longitudinale

Onde longitudinale : onde pour laquelle le vecteur propagation $\hat{\vec{\mathbf{k}}}$ et l'élongation des oscillateurs individuels $\vec{\mathbf{A}}$ sont parallèles.

$$\vec{\mathbf{A}} = |\vec{\mathbf{A}}|\hat{\vec{\mathbf{k}}}$$

■ Si on donne un choc dans la direction longitudinale d'un ressort à boudin reposant sans frottement sur une surface horizontale, la compression produite par le choc se propage de proche en proche le long du ressort. Les sections élémentaires du ressort oscillent alors dans la même direction longitudinale dans laquelle se propage la compression.

▷ Le son est un exemple d'une onde longitudinale. Une succession de compression et de dilatation du milieu se produit le long de la direction de propagation du son.

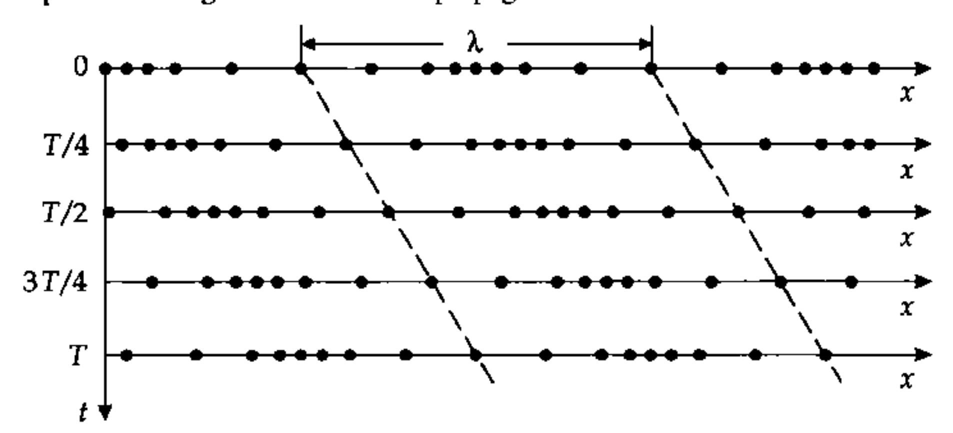


Fig. 10.7 : *Propagation d'une onde longitudinale*

11. Onde transversale

Onde pour laquelle l'élongation $\vec{\mathbf{A}}$ des oscillations est perpendiculaire à la direction de propagation $\vec{\mathbf{k}}$.

$$\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = 0$$

■ Si on secoue verticalement le bout d'une corde tendue horizontalement, une succession de ventres et de nœuds de vibration verticaux se propagent le long de la corde. Les sections élémentaires de la corde oscillent perpendiculairement à la direction de la corde, les nœuds et les ventres se propagent le long de la corde.

▷ Les ondes électromagnétiques, par exemple la lumière, sont des ondes transversales. Les champs magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ et électrique $\vec{\mathbf{E}}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation (et perpendiculaire entre eux).

10.2 Polarisation

Polarisation : orientation du vecteur d'onde $\vec{\mathbf{k}}$ par rapport à la direction de l'élongation des oscillations $\vec{\mathbf{A}}$ d'une onde.

Polarisation longitudinale : le vecteur d'onde $\vec{\mathbf{k}}$ est parallèle à la direction de l'élongation des oscillations de l'onde.

Polarisation transversale : le vecteur d'onde $\vec{\mathbf{k}}$ est perpendiculaire à la direction des oscillations.

Parmi les états de polarisation d'une onde transversale, on distingue :

- **Polarisation linéaire** : le vecteur élongation $\vec{\mathbf{A}}$, situé dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation $\vec{\mathbf{k}}$, garde une direction fixe dans ce plan (Fig .10.8 (a)).
- **Polarisation elliptique** : le vecteur vibration $\vec{\mathbf{A}}$ tourne dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation $\vec{\mathbf{k}}$. L'extrémité du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ décrit une ellipse dans le plan perpendiculaire à $\vec{\mathbf{k}}$. (Fig .10.8 (b)).

- **Polarisation circulaire** : cas particulier de la polarisation elliptique. L'extrémité du vecteur $\vec{A}$ décrit un cercle dans le plan perpendiculaire à $\vec{k}$.

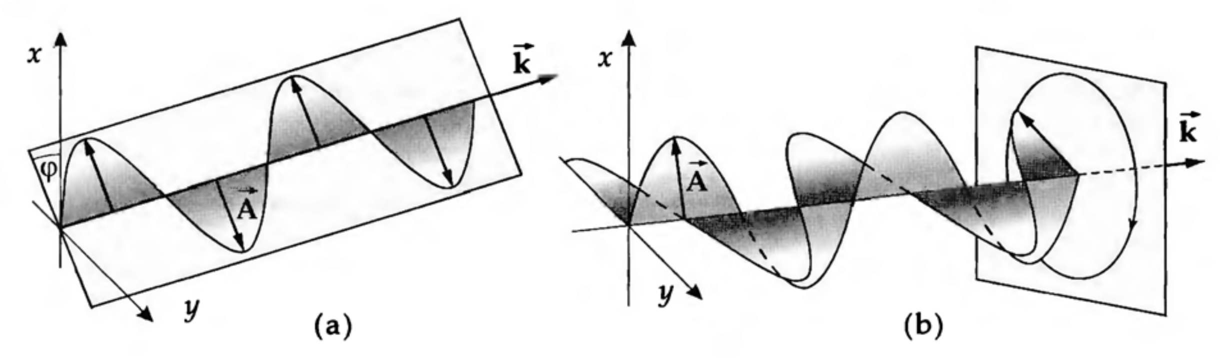


Fig. 10.8 : *Polarisation d'ondes transversales. (a) : polarisation linéaire, (b) : polarisation circulaire (droite)*

Si $\vec{k}$ est porté par la direction z d'un système de coordonnées cartésiennes, le vecteur $\vec{A}$ se trouve dans le plan xOy. La rotation de $\vec{A}$ peut alors être représentée par la superposition de deux vibrations respectivement dans les directions x et y, avec $x(t) = A\sin(\omega t - \varphi_x)$ et $y(t) = B\sin(\omega t - \varphi_y)$.

10.3 Interférences

Interférences : désignation de l'ensemble des phénomènes qui se manifestent lors de la superposition de deux ou plusieurs ondes différentes. Plus strictement, on parle d'interférences lorsque les ondes sont synchrones et **cohérentes**.

10.3.1 Cohérence

Ondes cohérentes, ondes dont la différence de phase est constante dans le temps (ne dépend pas du temps).

■ Deux ondes de fréquences différentes ne sont pas cohérentes. Deux ondes de même fréquence (synchrones), ne sont pas forcément cohérentes.

■ Par réflexion d'un faisceau de lumière sur un miroir semi-réfléchissant, on peut obtenir deux faisceaux cohérents.

■ Deux faisceaux de lumière, issus de la même source, mais polarisés linéairement à 90° l'un de l'autre, ne sont pas cohérents.

Train d'onde : onde limitée dans le temps et l'espace, qui est constituée de la superposition d'une infinité d'ondes de fréquences et de déphasages différents. (→ *Analyse de Fourier*)

Cohérence : la lumière naturelle (Soleil) ou celle de lampes ordinaires (incandescence ou à décharges) est constituée d'une succession de trains d'ondes qui n'ont entre eux aucun lien de de phase. La lumière émise par des lasers présente une **cohérence spatiale** (tous les atomes de la source entrent en vibration simultanément) et une **cohérence temporelle** (la durée du train d'onde est grande de l'ordre de $10^{-2}s$ alors que celle de la lumière naturelle n'est que de l'ordre de $10^{-8}s$).

Le phénomène d'interférences ne peut se produire que pour des trains d'onde cohérents dans l'espace et le temps.

Longueur de cohérence l : la plus grande distance de deux trains d'onde qui peuvent encore donner lieu au phénomène d'interférences. Ceci correspond en fait à la longueur d'un train d'onde. Si la durée d'émission

d'un train d'onde (durée de vie) est τ, on a :

Longueur de cohérence				**L**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$l = c\tau$	l	m	longueur de cohérence	
	c	m/s	vitesse de propagation	
	τ	s	durée d'émission	

10.3.2 Interférences

Pour des ondes linéaires, le principe de superposition s'applique.

- L'élongation instantanée de l'onde résultante, en un point donné de l'espace, est égale à la somme des élongations instantanées de toutes les ondes partielles qui se superposent en ce point.

Les caractéristiques d'une onde partielle sont son amplitude A et sa phase φ.

1. Exemple d'interférences

Superposition de deux ondes de mêmes amplitudes A et pulsations ω, mais de phases différentes, se propageant dans la même direction :
Onde 1 :

$$y_1(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi_1)$$

Onde 2 :

$$y_2(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi_2)$$

L'addition des deux sinus donne l'onde résultante :

$$\begin{aligned} y_{\text{som}}(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ y_{\text{som}}(x,t) &= 2A\sin(\omega t + kx + \varphi_1 + \varphi_2)\cdot\cos(\Delta\varphi) \end{aligned}$$

avec le **déphasage** :

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

2. Différence de marche

δ, différence de chemin parcouru par les deux ondes pendant une période, définie à partir du déphasage $\Delta\varphi$ par :

Calcul de la différence de marche				**L**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\delta = \dfrac{\Delta\varphi}{2\pi}\lambda$	δ	m	différence de marche	
	$\Delta\varphi$	rad	déphasage	
	λ	m	longueur d'onde	

Intensité I : mesure de la perception de l'onde. Elle est égale au carré de l'amplitude de l'onde en un point donné.

L'intensité de l'onde résultante est :

$$\begin{aligned} I &= 2A^2\left(1 + \cos(\Phi_1 - \Phi_2)\right) \\ \Phi_1 &= \omega_1 t + \varphi_1 \\ \Phi_2 &= \omega_2 t + \varphi_2 \end{aligned}$$

L'intensité de deux ondes de fréquences respectives f_1 et f_2 qui se superposent à une période T (→ *période des battements*) :

$$T = \left| \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} \right|$$

Si la durée d'observation est grande devant T, on ne peut mesurer que la valeur moyenne de l'intensité :

$$I = 2A^2 = I_1 + I_2$$

Le **terme d'interférence** $2A\cos(\Phi_1 - \Phi_2)$ s'élimine. La même conclusion vaut pour la superposition de deux ondes non cohérentes.

● Lors de la superposition d'ondes non cohérentes, il ne se produit pas d'interférences, les intensités des ondes s'additionnent simplement.

Dans la suite, nous considérons la superposition d'ondes cohérentes, c'est à dire d'ondes ayant une relation de phase constante et qui donnent lieu à des interférences.

3. Cas particuliers d'interférences

- **Interférence constructive** : a lieu lorsque $\delta = n\lambda$, n entier. Les ondes se superposent en additionnant leurs amplitudes, l'amplitude de l'onde résultante est maximale. On dit qu'il y a une **frange brillante**.
- **Interférence destructive** : a lieu lorsque $\delta = (2n+1)\lambda/2$, n entier. Les amplitudes des ondes se soustraient l'une de l'autre, il y a extinction. L'amplitude de l'onde résultante est minimale (nulle si les deux ondes avaient même amplitude avant superposition). On dit qu'il y a une **frange sombre**.
- Lorsque $\delta = (n + 1/4)\lambda$, n entier, l'amplitude résultante est $\sqrt{2}A$. La phase de l'onde résultante est telle que ses passages par zéro se situent entre ceux des deux ondes initiales.

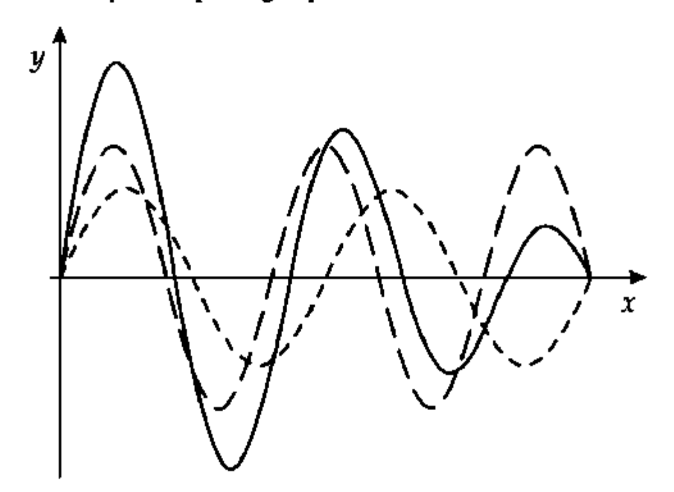


Fig. 10.9 : *Interférences. Superposition de deux ondes y_1 et y_2 (tirets) de fréquences et d'amplitudes différentes en fonction de la position x. L'onde résultante est représentée par un trait plein*

10.3.3 Ondes stationnaires

Ondes stationnaires : se produisent lors de la superposition de deux ondes de mêmes fréquences et amplitudes, mais se propageant dans des directions opposées. Les nombres d'onde k ont même valeur absolue pour ces deux ondes, mais des signes opposés.

Description mathématique:

$$\begin{aligned} y_1(\vec{r}, t) &= A\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ y_2(\vec{r}, t) &= A\cos(-\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \\ y_{\text{som}}(\vec{r}, t) &= y_1(\vec{r}, t) + y_2(\vec{r}, t) = -2A\cos(\omega t)\cos(\vec{k} \cdot \vec{r}) \end{aligned}$$

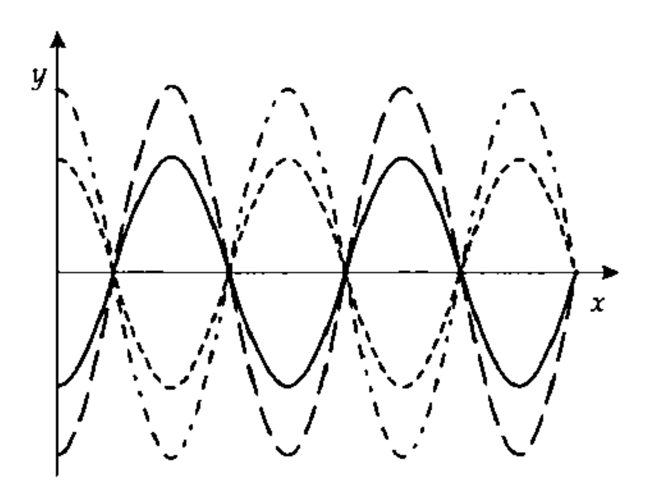


Fig. 10.10 : *Onde stationnaire. Élongation y aux points x à différents instants*

- Les maxima et les minima d'amplitude de l'onde stationnaire se produisent à des positions fixes.

Nœuds de vibration : désignent les minima de vibration de l'onde stationnaire, qui se produisent en des points fixes.

Ventres de vibration : désignent les maxima de vibration qui se produisent en des points fixes de l'espace.

10.3.3.1 Ondes stationnaires sur une tige à une extrémité fixe

Lorsqu'une onde longitudinale se propage le long d'une tige de longueur l, elle est réfléchie à ses extrémités. Il y a superposition des ondes progressives (de la gauche vers la droite, par exemple) et des ondes régressives (se propageant en sens inverse). Une des extrémités étant fixée (Fig. 10.10), il y aura formation d'ondes stationnaires pour les longueurs d'ondes λ_n telles que :

Ondes stationnaires : une extrémité libre, l'autre étant fixée			L
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\lambda_n = \frac{4l}{2n+1}$$	λ_n	m	longueur d'onde
	l	m	longueur de la tige
	n	1	entier positif

Ces ondes stationnaires sont appelées les **vibrations propres** ou **modes propres** de la tige. Le même type d'ondes stationnaires se produit dans une flûte ou un tuyau ouvert à une extrémité et fermé à l'autre.

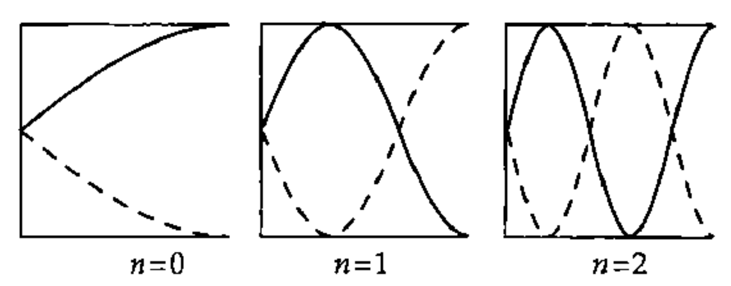


Fig. 10.11 : *Vibrations propres d'une tige à une extrémité fixe, l'autre étant libre*

Vibration fondamentale ou **fondamental** : onde stationnaire correspondant au cas $n = 0$, sa longueur d'onde est :

$$\lambda_0 = 4l$$

Fréquence fondamentale, f_0 : la fréquence correspondante au fondamental :

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{4l}$$

où c est la vitesse de phase de l'onde dans la tige (ou le tuyau d'orgue).

Harmonique : onde stationnaire qui se produit pour les cas $n > 0$.

[M] Une tige est mise en vibration lorsqu'on la frappe longitudinalement ou transversalement (à la manière d'un **diapason**). Le fait de frapper constitue une excitation complexe qui se compose de nombreuses fréquences. Les fréquences qui ne correspondent pas aux vibrations propres de la tige s'atténuent rapidement (période transitoire), la tige continue de vibrer sur sa **fréquence propre**.

10.3.3.2 Ondes stationnaires sur des cordes

Corde : fil d'une matière flexible, élastique, dont le diamètre est petit devant sa longueur.

Sur une corde tendue entre ses deux extrémités (fixes), on peut produire des ondes transversales. Aux extrémités fixes se produisent des réflexions. Pour des longueurs d'ondes appropriées, se produisent alors des ondes stationnaires qui sont les **vibrations propres** de la corde (Fig. 10.12).

Ondes stationnaires : corde fixée à ses deux extrémités			**L**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\lambda_n = \frac{2l}{n+1}$	λ_n	m	longueur d'onde
	l	m	longueur de la corde
	n	1	entier positif

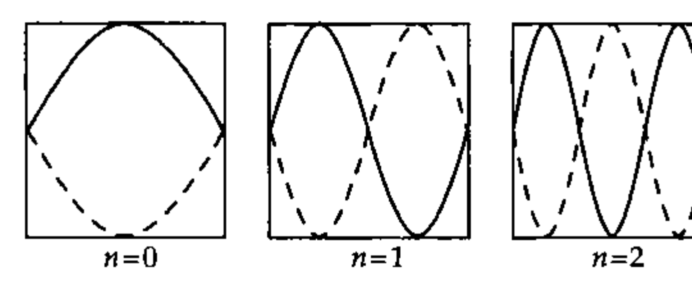


Fig. 10.12 : *Vibrations propres d'une corde à deux extrémités fixes*

Vibration fondamentale : onde stationnaire pour le cas $n = 0$, sa longueur d'onde est :

$$\lambda_0 = 2l$$

Fréquence fondamentale, f_0, fréquence correspondante à la vibration fondamentale,

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{2l}$$

où c est la vitesse de phase de l'onde sur la corde. Elle dépend de la masse par unité de longueur et de la tension de la corde.

▷ La hauteur de ton, c'est à dire la fréquence fondamentale, décroît lorsque le diamètre (masse par unité de longueur) de la corde augmente.

10.3.3.3 Ondes stationnaires dans un tube de Kundt

[M] **Tube de Kundt** : appareil qui permet de mettre en évidence des ondes stationnaires longitudinales dans un gaz. Il est constitué d'un tube en verre transparent fermé à une extrémité par un piston mobile

et couplé à l'autre extrémité à un haut-parleur. Le tube, tenu horizontalement, contient une petite quantité de poudre de liège uniformément répartie sur sa longueur.

Le haut-parleur, alimenté par une tension sinusoïdale, permet de faire vibrer la colonne de gaz contenue dans le tube à une fréquence donnée. Les ondes se réfléchissent sur les extrémités. Le piston mobile permet de modifier la longueur de la colonne de gaz et d'obtenir des ondes stationnaires dans le tube. Aux endroits correspondant aux ventres de vibration, la poudre de liège oscille perpendiculairement à l'axe du tube, tandis qu'aux nœuds de vibration, elle reste immobile. Des petits amas de poudre de liège régulièrement espacés se forment, dont les centres sont espacés de $\lambda/2$.

Condition pour la longueur d'onde λ :

Onde stationnaire : cas d'un tube aux deux extrémités ouvertes			**L**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\lambda_n = \dfrac{2l}{n+1}$	λ_n	m	longueur d'onde
	l	m	longueur de la colonne de gaz
	n	1	entier positif

Fig. 10.13 : *Oscillations propres dans un tube aux deux extrémités ouvertes*

Fondamentale : onde stationnaire dans le cas $n = 0$, de longueur d'onde :

$$\lambda_0 = 2l$$

Fréquence fondamentale, f_0 : fréquence correspondante à la vibration fondamentale :

$$f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{2l}$$

où c est la vitesse de phase de l'onde dans le gaz (vitesse du son).

10.3.4 Ondes de fréquences différentes

1. Superposition de deux ondes harmoniques

Soient deux ondes de fréquences et nombres d'onde différents, mais de mêmes amplitudes :

$$y_1(x,t) = A\cos(\omega_1 t - k_1 x)$$
$$y_2(x,t) = A\cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

Leur superposition donne l'onde résultante :

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2A\cos(\omega t - kx)\cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$$

avec

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \qquad k = \frac{k_1 + k_2}{2} \qquad \Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \qquad \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

Ceci correspond à une onde de pulsation ω dont l'amplitude est modulée à la fréquence $\Delta\omega$. Cette modulation "enveloppe" les oscillations de pulsation ω.

Enveloppe de l'onde :

$$\cos(\Delta\omega t - \Delta k x)$$

Groupe d'ondes : désigne les maxima et les minima qui apparaissent à l'intérieur d'une période de l'enveloppe.

Vitesse de groupe, v_{gr} : vitesse à laquelle se déplace l'enveloppe. Pour les deux ondes ci-dessus, on a

$$v_{gr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

2. Paquet d'ondes

Groupe d'ondes, ondes limitées dans l'espace, formées par la superposition d'un ensemble d'ondes sinusoïdales ayant un spectre de pulsations continu dans un domaine limité entourant une pulsation ω_0 (**synthèse de Fourier**).

Vitesse de groupe d'un paquet d'ondes, v_{gr}, définie par :

Vitesse de groupe et vitesse de phase			LT^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$v_{gr} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}$	v_{gr}	m/s	vitesse de groupe
$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$	v	m/s	vitesse de phase
	λ	m	longueur d'onde
	k	1/m	nombre d'onde
	ω	1/s	pulsation

La vitesse de groupe et la vitesse de phase diffèrent l'une de l'autre, si la vitesse de propagation des ondes dans un milieu dépend de la longueur d'onde ($\rightarrow$ *Dispersion*).

10.4 Effet Doppler

Effet Doppler : lorsque une source d'onde et un observateur sont en mouvement l'un par rapport à l'autre, la fréquence perçue par l'observateur diffère de celle émise par la source. Lorsque l'observateur s'approche de la source, la fréquence perçue est supérieure à celle émise, inférieure lorsqu'il s'en éloigne.

■ Le son d'une sirène perçu par l'observateur qui s'en approche est plus aigu que lorsqu'il est au repos.

Le nombre de fronts d'ondes qui atteignent l'observateur pendant un intervalle de temps donné change si l'observateur s'approche ou s'éloigne de la source d'ondes (Fig. 10.14).

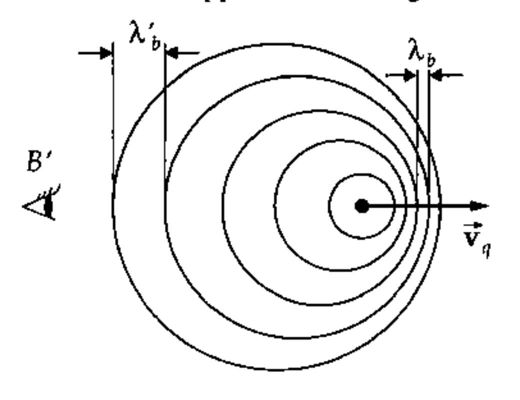


Fig. 10.14 : *Effet Doppler. Fronts d'ondes d'une source en mouvement par rapport aux observateurs B et B'.*
λ_B et $\lambda_{B'}$: longueurs d'ondes mesurées par les observateurs B et B'

1. Différents cas d'effet Doppler

La relation entre la fréquence f_0 et la longueur d'onde λ_0 de la source au repos, et la fréquence f_b et la longueur d'onde λ_b perçues par l'observateur, est différente si l'observateur ou la source ou les deux sont en mouvement :

Effet Doppler : source en mouvement, observateur au repos

$$f_b = \frac{f_0}{\left(1 \pm \frac{v_0}{c}\right)}$$

$$\lambda_b = \left(\frac{c}{f_0}\right)\left(1 \pm \frac{v_0}{c}\right)$$

Symbole	Unité	Dénomination
f_b	Hz	fréquence perçue par l'observateur
f_0	Hz	fréquence émise par la source
λ_b	m	longueur d'onde mesurée par l'observateur
λ_0	m	longueur d'onde émise par la source
v_0	m/s	vitesse de la source
c	m/s	vitesse de phase de l'onde

▹ Dans les formules ci-dessus, le signe *plus* vaut lorsque la source *s'éloigne* de l'observateur, le signe *moins* lorsqu'elle s'en *approche*.

Effet Doppler : source au repos, observateur en mouvement

$$f_b = f_0\left(1 \pm \frac{v_b}{c}\right)$$

$$\lambda_b = \frac{c}{f_0}\frac{1}{\left(1 \pm \frac{v_b}{c}\right)}$$

Symbole	Unité	Dénomination
f_0	Hz	fréquence émise par la source
f_b	Hz	fréquence perçue par l'observateur
λ_0	Hz	longueur d'onde émise par la source
λ_b	m	longueur d'onde mesurée par l'observateur
v_b	m/s	vitesse de l'observateur

▹ Dans les formules ci-dessus, le signe *plus* vaut lorsque l'observateur *s'approche* de la source, le signe *moins* lorsqu'il s'en *éloigne*.

2. Effet Doppler dans le cas d'ondes électromagnétiques

Pour des ondes électromagnétiques se propageant dans un milieu non dispersif, la fréquence f' mesurée dans le **référentiel en mouvement** dépend de :

a) **l'effet Doppler transversal :** l'observateur se déplace avec la **vitesse relative** v par rapport à la source dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde :

$$f' = f\sqrt{1-(v/c)^2}$$

b) **l'effet Doppler longitudinal :** l'observateur se déplace avec la **vitesse relative** v dans la direction de propagation de l'onde :

- en s'éloignant de la source
$$f' = f\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$
- en s'approchant de la source
$$f' = f\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

▹ Dans le cas des ondes électromagnétiques, seule la vitesse relative entre source et observateur intervient pour l'effet Doppler. L'effet est le même que ce soit la source qui se déplace ou que ce soit l'observateur ou les deux.

M L'effet Doppler est utilisé pour les **contrôles Radar** : l'onde électromagnétique est réfléchie par le véhicule en mouvement, qui se comporte alors comme une source en mouvement par rapport au récepteur.

10.4.1 Ondes de Mach et ondes de choc

Ondes de Mach ou cône de Mach : front d'ondes conique, lieu des maxima successifs d'une onde lorsque la source d'ondes se déplace avec une vitesse v_S supérieure à la vitesse c de propagation des ondes dans le milieu considéré. La source est située au sommet du cône de Mach. Le demi-angle au sommet du cône α est donné par la **relation de Mach**:

Cône de Mach			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{c}{v_S}$	α	rad	demi-angle au sommet du cône de Mach
	c	m/s	vitesse de propagation de l'onde
	v_S	m/s	vitesse de déplacement de la source

■ **Double bang** : s'observe lorsqu'une source se déplace avec une vitesse supérieure à celle de la propagation du son dans l'air. Dans son déplacement, la source (avion, projectile) entraîne le cône de Mach, lorsque le cône atteint l'observateur, celui-ci entend un claquement qui semble provenir de l'axe du cône. Il est dû aux brusques variations de pression de l'air au passage du front d'ondes.
Effet Cerenkov : rayonnement électromagnétique principalement visible, émis dans un milieu liquide ou solide par le passage d'une particule chargée dont la vitesse v est supérieure à la vitesse de phase c/n de la lumière dans le milieu. Les surfaces d'ondes lumineuses ont pour enveloppe un cône ayant pour sommet la particule et dont le demi-angle au sommet α est donné par la relation de Mach. Ce rayonnement est **polarisé** rectilignement, le champ électrique étant dans le plan passant par v. Cet effet est utilisé en physique des particules pour la mesure de la vitesse v de particules.

Nombre de Mach M : rapport de la vitesse de la source v_S à la vitesse du son c.

■ Les avions de ligne volent à des vitesses $v < 1000$ km/h, $M \leq 1$. Concorde atteint $M > 2$.

Ondes de choc de Mach : se produisent lorsque la vitesse du son dans le milieu dans lequel la source se déplace est fonction de la densité de ce milieu. La vitesse du son augmente avec la densité du milieu, elle est par conséquent plus grande près de la source puisqu'il y a compression de l'air dans cette région. Les fronts d'ondes sont alors déformés par rapport à leur forme conique initiale.

10.5 Réfraction

1. Définition

Réfraction : changement de la direction de propagation d'une onde à l'interface entre deux milieux dans lesquels les vitesses de propagation de l'onde sont différentes.

La réfraction peut être interprétée à l'aide du concept des ondes élémentaires d'Huygens : à partir de chaque point de l'interface touché par le front d'ondes incident du milieu 1 se propage une onde élémentaire avec la vitesse apropriée du milieu 2. Ces ondes élémentaires créent alors un nouveau front d'onde (Fig. 10.15).

▷ La réfraction peut aussi être interprétée par le principe de Fermat, selon lequel la propagation de la lumière entre deux points s'effectue suivant le chemin le plus rapide (le plus court en temps). Il faut tenir compte de la variation de la vitesse de propagation en fonction du milieu. La détermination de la trajectoire de la lumière devient alors un **problème variationel**.

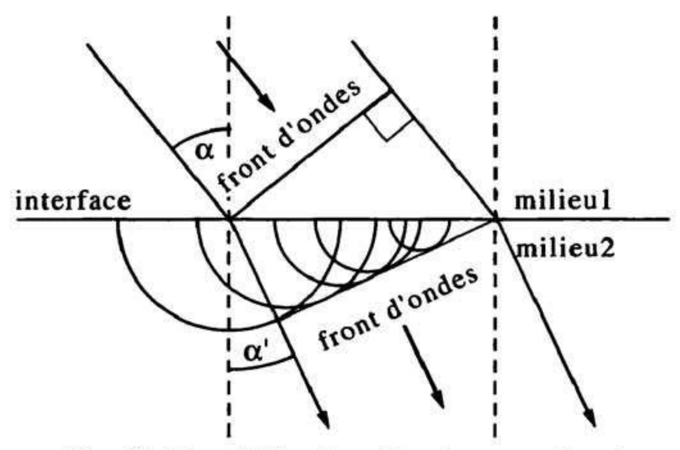


Fig. 10.15 : *Réfraction. De chaque point de l'interface touché par le front d'ondes incident, part un ensemble d'ondes élémentaires qui forment un nouveau front d'ondes*

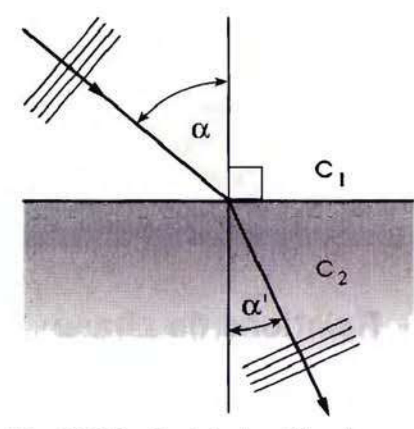


Fig. 10.16 : *Loi de la réfraction. α : angle d'incidence, α' : angle du rayon réfracté, c_1 et c_2 : vitesses de propagation dans les milieux respectifs*

- Si la vitesse de propagation de l'onde est v_1 dans le milieu 1 et v_2 dans le milieu 2 et si l'angle d'incidence est α, alors on a pour l'angle β du rayon réfracté :

Loi de la réfraction			
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$$	α	rad	angle d'incidence
	β	rad	angle du rayon réfracté
	v_1	m/s	vitesse de l'onde milieu 1
	v_2	m/s	vitesse de l'onde milieu 2

▹ Les ondes élémentaires générées à l'interface se propagent aussi dans les deux milieux. Par conséquent, lorsqu'une onde rencontre une interface entre deux milieux, une partie est réfractée et pénètre dans le milieu 2, tandis que l'autre partie est réfléchie par l'interface et se propage dans le milieu 1.

10.6 Réflexion

Loi de la réflexion

- L'angle que fait le rayon réfléchi avec la normale à la surface réfléchissante est égal à l'angle d'incidence.
- Le rayon réfléchi est situé dans le plan défini par le rayon incident et la normale à la surface réfléchissante : **plan d'incidence.**

Angle de réflexion = angle d'incidence			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\alpha = \alpha'$$	α	rad	angle d'incidence
	α'	rad	angle du rayon réfléchi

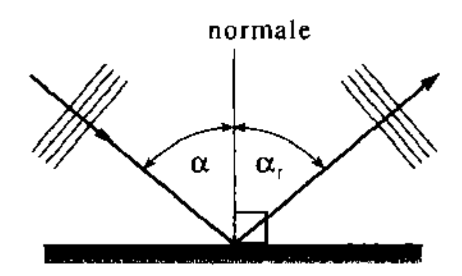


Fig. 10.17 : *Loi de la réflexion. α : angle d'incidence, α' : angle de réflexion*

10.6.1 Relations de phase

Lors de la réflexion, la phase de l'onde réfléchie est modifiée en fonction de l'interface sur laquelle la réflexion à lieu :

- Lors de la réflexion d'une onde venant d'un milieu où la vitesse de propagation est plus faible que dans le milieu situé derrière l'interface, la phase de l'onde n'est pas modifiée.

- Si l'onde se réfléchit sur une interface derrière laquelle le milieu 2 est caractérisé par une vitesse de propagation plus faible que dans le milieu 1, sa phase subit un changement de π.

■ La lumière qui se propage dans le vide (ou l'air) et qui se réfléchit sur une surface vitreuse, subit un déphasage de π.

1. Relations de phase dans le cas d'ondes mécaniques

- **Réflexion à une extrémité libre (ouverte)** : le point où la réflexion a lieu est libre de se déplacer par rapport au reste du système : la réflexion a lieu sans changement de phase.
- **Réflexion à une extrémité fixe (fermée)** : le point où la réflexion a lieu reste immobile, l'amplitude de la vibration y est nulle. La réflexion se fait avec changement de signe de l'amplitude, ce qui correspond à un déphasage de π.

■ L'extrémité d'un ressort à boudin serrée dans un étau constitue une extrémité fixe.
Si l'extrémité est suspendue par l'intermédiaire d'un fil souple, on réalise une extrémité approximativement libre (Fig. 10.18).

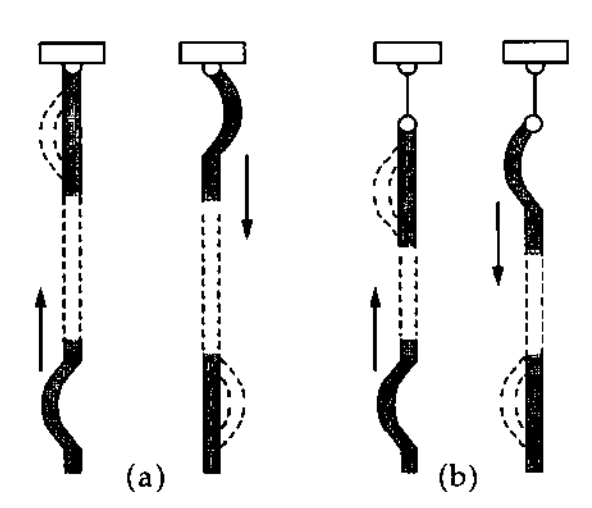


Fig. 10.18 : *Changement de phase lors d'une réflexion. (a) : réflexion à une extrémité fixe, (b) : réflexion à une extrémité libre*

10.7 Dispersion

Dispersion : a lieu dans un milieu dans lequel les ondes qui se propagent ont une vitesse de phase qui dépend de leur fréquence (**milieu dispersif**).

1. Dispersion normale

La dispersion normale est caractérisée par l'augmentation de la vitesse de phase v_φ lorsque la longueur d'onde λ augmente. Ceci revient à dire que l'indice de réfraction diminue lorsque la fréquence de l'onde diminue.

$$\frac{dv_\varphi}{d\lambda} > 0 \qquad v_{\text{gr}} < v_\varphi$$

La vitesse de groupe $v_{\text{gr}} = v_\varphi - \lambda\frac{dv_\varphi}{d\lambda}$ est plus petite que la vitesse de phase v_φ.

2. Dispersion anormale

La dispersion anormale est caractérisée par la diminution de la vitesse de phase v_φ lorsque la longueur d'onde λ augmente. Ceci revient à dire que l'indice de réfraction augmente lorsque la fréquence de l'onde diminue.

$$\frac{dv_\varphi}{d\lambda} < 0 \qquad v_{\text{gr}} < v_\varphi$$

3. Pas de dispersion

la vitesse de phase ne dépend pas de la longueur d'onde.

$$\frac{dv_\varphi}{d\lambda} = 0 \qquad v_{\text{gr}} = v_\varphi$$

10.8 Diffraction

Diffraction : se produit lorsque des ondes rencontrent un obstacle dont les dimensions sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde et qui produit des perturbations dans la propagation de ces ondes. Les ondes ne se propagent plus uniquement en ligne droite, mais peuvent contourner l'obstacle. Ce phénomène est expliqué par les ondes élémentaires d'Huygens qui sont émises à partir de chaque point de l'obstacle touché par les ondes incidentes.

Ombre : domaine derrière l'obstacle qui, d'après les lois de l'optique géométrique, ne peut être touché par les ondes incidentes.

10.8.1 Diffraction par une fente rectangulaire

1. Diffraction d'une onde plane par une fente rectangulaire

Une onde plane tombe perpendiculairement sur une fente de largeur d. Les fronts d'ondes sont des plans parallèles au plan de la fente, tous les points de la fente sont alors touchés au même instant. D'après le principe d'Huygens, chaque point de la fente est la source d'une onde élémentaire (Fig. 10.20).

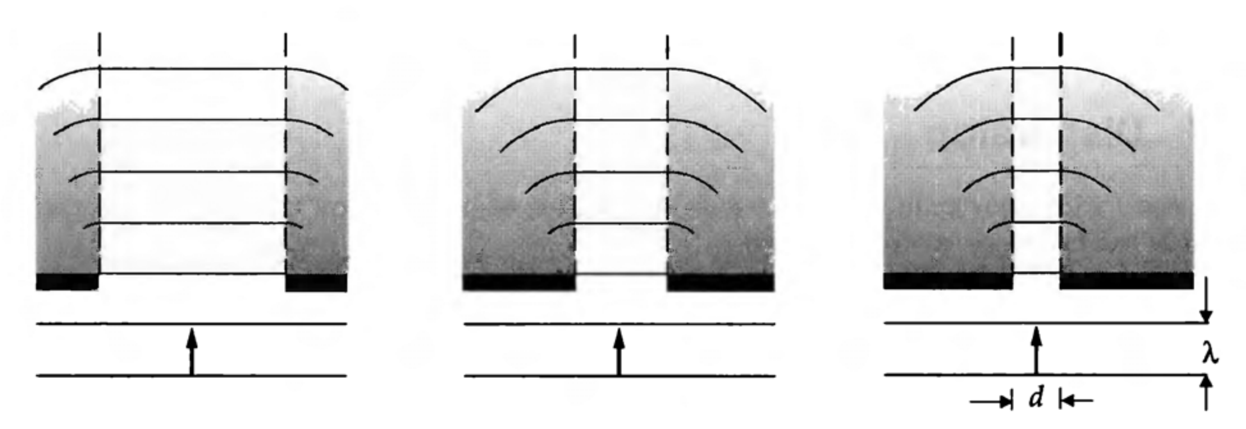


Fig. 10.19 : *Pénétration d'une onde plane de longueur d'onde λ dans la zone d'ombre située derrière une fente de largeur d. La diffraction est d'autant plus prononcée que la fente est étroite*

Sur un écran placé derrière la fente, la distribution de l'intensité I_α de l'onde est une fonction de l'angle de diffraction α que fait le rayon diffracté avec la normale au plan de la fente :

Intensité après diffraction par une fente			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$I_\alpha = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi d \sin\alpha}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi d \sin\alpha}{\lambda}\right)^2}$$	α	rad	angle de diffraction
	I_α	-	intensité dans la direction α
	I_0	-	intensité incidente ($\alpha = 0$)
	d	m	largeur de la fente
	λ	m	longueur d'onde

▷ Cette relation ne s'applique que dans le cas où la distance du plan de la fente à l'éçran est grande devant la largeur de la fente.

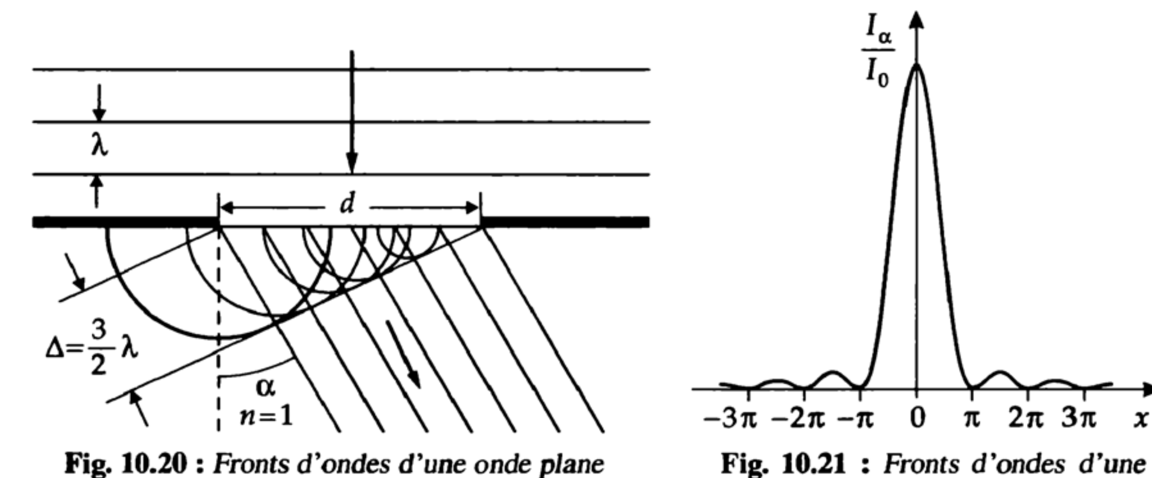


Fig. 10.20 : *Fronts d'ondes d'une onde plane*

Fig. 10.21 : *Fronts d'ondes d'une onde sphérique*

La forme de la distribution d'intensité s'explique par le fait que les ondes élémentaires, issues des différents points du plan de la fente, ont des différences de marche qui, en fonction de l'angle α s'annulent **ou** s'amplifient mutuellement. Il y a **interférences** entre ces ondes (Fig. 10.21).

Position des minima d'intensité : correspondent aux angles α_n qui satisfont à la relation :

$$\sin\alpha_n = \pm n\frac{\lambda}{d} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Position des maxima d'intensité : correspondent aux angles α_n qui satisfont à la relation

$$\sin\alpha_n = \pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d} \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

▷ On appelle **maximum principal** la raie qui se produit pour $\alpha_n = 0$. C'est la raie la plus intense.

● Dans le cas de la diffraction par une ouverture circulaire de diamètre d, le premier minimum d'interférences correspond à :

$$\sin\alpha = 1,22\frac{\lambda}{d}$$

Du fait de la diffraction par les bords du diaphragme ou de la monture de l'objectif de diamètre d, les instruments d'optique ne peuvent distinguer deux points que si l'angle d'observation ε qui les sépare est au moins égal à :

$$\varepsilon = 1,22\frac{\lambda}{d}$$

Cette limitation est appelée le **pouvoir séparateur**.

10.8.2 Diffraction par un réseau plan

Une onde plane tombe sur un réseau plan dont les fentes ont une largeur d et une distance entre fentes consécutives (pas) p. Le nombre de fentes est N.

Constante de réseau, p : désigne la distance entre deux fentes consécutives d'un réseau (Fig. 10.22).

La distribution de l'intensité sur un écran placé derrière le réseau est encore expliquée par la superposition d'ondes élémentaires issues des fentes du réseau. Ces ondes interfèrent de manière constructive ou destructive suivant leur différence de marche qui est fonction de l'angle de diffraction α.

Distribution d'intensité : diffraction par un réseau plan — 1

$$I_\alpha = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi d \sin\alpha}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi d\sin\alpha}{\lambda}\right)^2} \times \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi p\sin\alpha}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi p \sin\alpha}{\lambda}\right)}$$

Symbole	Unité	Dénomination
α	rad	angle de diffraction
I_α	-	intensité pour α
I_0	-	intensité incidente ($\alpha = 0$)
d	m	largeur d'une fente
p	m	constante de réseau
N	1	nombre de fentes du réseau
λ	m	longueur d'onde

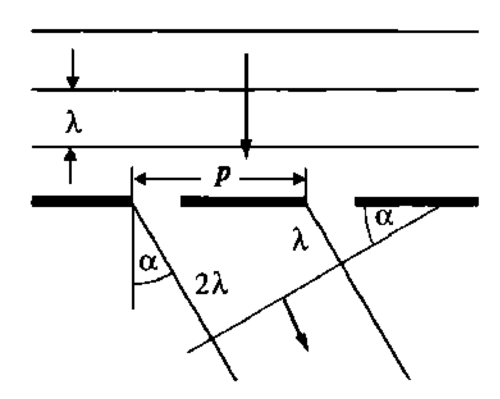


Fig. 10.22 : *Diffraction par un réseau plan de pas p*

Position des maxima d'intensité : correspond aux angles α_n qui remplissent la condition :

$$\sin\alpha_n = \pm n\frac{\lambda}{p} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

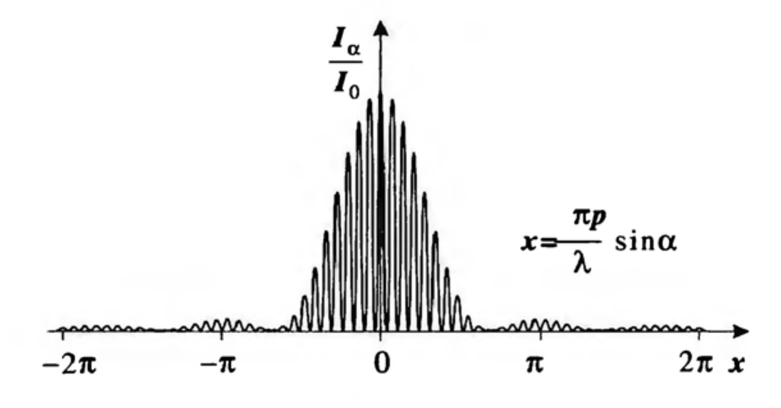


Fig. 10.23 : *Distribution d'intensité dans le cas de la diffraction par un réseau en fonction de $x = \pi p \sin(\alpha)/\lambda$. p : pas du réseau, λ : longueur d'onde de la lumière diffractée*

10.9 Modulation

Des ondes peuvent être utilisées pour le transport d'informations, si on peut leur superposer ces informations lors de leur production et les extraires à leur réception.

Modulation : procédé de superposition d'informations à une onde lors de son émission.

Démodulation : procédé d'extraction de l'information lors de la réception des ondes.

Adressage : sélection du récepteur d'un signal, réalisé le plus souvent par le choix d'une fréquence particulière de l'onde porteuse de l'information.

La modulation pour la transmission d'informations est surtout utilisée avec les ondes électromagnétiques.

Il y a différentes façon de moduler une onde.

1. Modulation d'amplitude

La **modulation d'amplitude** AM, modifie l'amplitude d'une onde porteuse à haute fréquence au rythme du signal de plus basse fréquence à transmettre (Fig. 10.24). Si, par exemple, le signal à transmettre est sinusoïdal de pulsation Ω et d'amplitude a : $a\sin(\Omega t)$ et que l'onde porteuse a la pulsation ω et l'amplitude A, l'onde modulée $y(t)$ s'écrira :

$$y(t) = [A + a\sin(\Omega t)]\sin(\omega t) \qquad \text{pour } x \text{ fixé}$$

■ La modulation d'amplitude est utilisée pour la transmission des informations radiodiffusées dans les bandes des ondes longues (OL), des ondes moyennes (OM), des ondes courtes (OC) ainsi que pour la transmission d'images.

2. Modulation de fréquence

La **modulation de fréquence** FM, modifie la fréquence de l'onde porteuse de haute fréquence au rythme du signal $a(t)$ de basse fréquence à transmettre. La pulsation de l'onde porteuse varie autour de sa valeur ω_0 proportionnellement à la fonction de modulation (Fig. 10.25).

À une position donnée de l'espace, l'amplitude $y(t)$ de l'onde modulée en fréquence est :

$$y(t) = A\cos\left(\omega_0 t + k\int a(t)dt\right)$$

Si la modulation est sinusoïdale, soit $a(t) = a\cos(\omega t)$, il vient :

$$y(t) = A\cos\left(\omega_0 t + k\frac{a}{\omega}\sin(\omega t)\right)$$

où $\Delta\omega = ka$ est l'**excursion de pulsation** et la quantité ka/ω est l'**indice de modulation**.

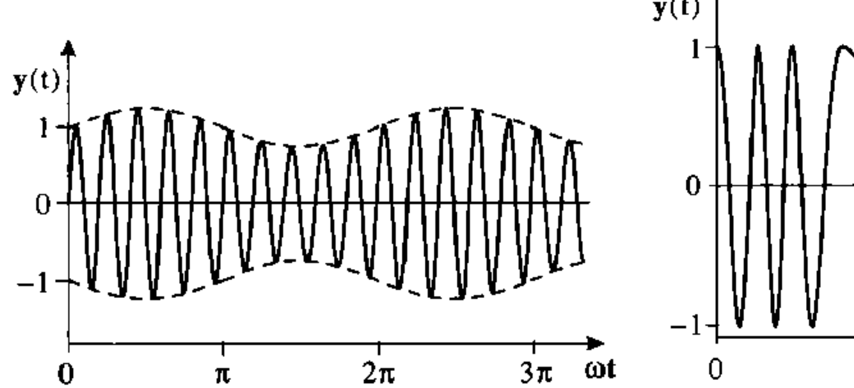


Fig. 10.24 : *Modulation d'amplitude.*
Exemple : $a = 0,25A, \Omega = 0,1\omega$ $(A = 1)$

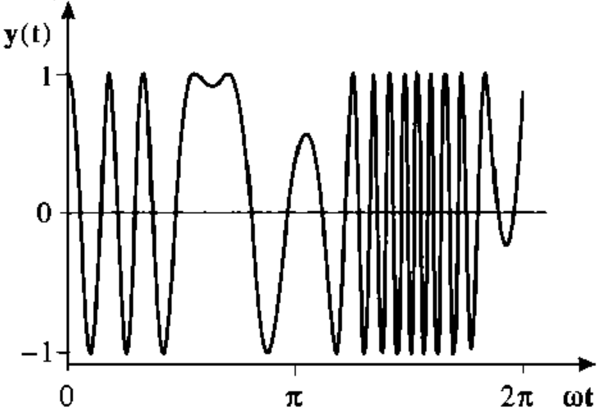


Fig. 10.25 : *Modulation de fréquence.*
Exemple : $\Delta\omega = 0,5\omega$

■ La bande de radiodiffusion FM ainsi que certains systèmes de télévision utilisent la modulation de fréquence. L'amplitude d'un signal modulé en fréquence est constante, c'est la fréquence qui varie. De ce fait ces signaux sont insensibles aux parasites créés par des moteurs par exemple.

3. Modulation d'impulsion

La **modulation d'impulsion** consiste à faire varier :

- l'amplitude, la fréquence ou la phase d'une onde porteuse par des impulsions
- la durée des impulsions

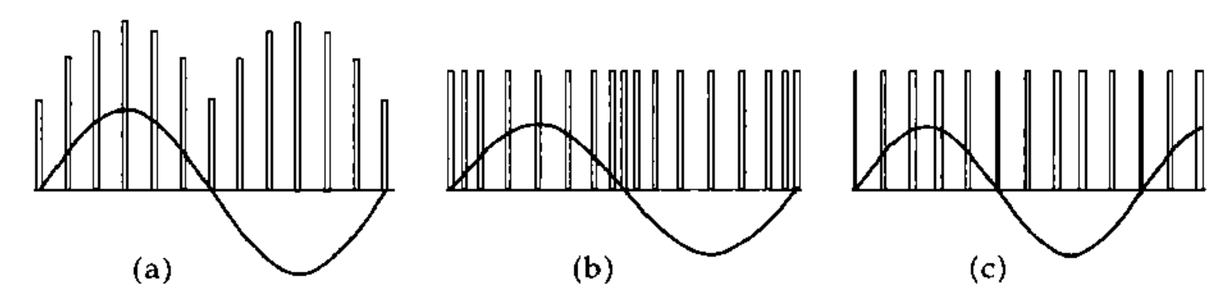


Fig. 10.26 : *Procédé de la modulation d'impulsion. (a) : modulation de l'amplitude de l'onde porteuse par des impulsions, (b) : modulation de la fréquence, (c) : modulation de la durée des impulsions*

10.10 Ondes de surface et ondes de gravitation

Ondes de surface : ondes se propageant sur la surface libre d'un liquide.

● Les ondes de surface ne sont ni transversales ni longitudinales.

Les particules de liquide près de la surface effectuent des mouvements complexes. La vitesse de propagation des ondes à l'interface liquide–gaz dépend fortement de leur longueur d'onde (**dispersion**) :

Vitesse de phase des ondes de surface				LT^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$v_o = \sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi} + \dfrac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}}$	v_o	m/s	vitesse de phase	
	g	m/s^2	accélération de la pesanteur	
	λ	m	longueur d'onde	
	σ	N/m	tension superficielle du liquide	
	ρ	kg/m^3	masse volumique du liquide	

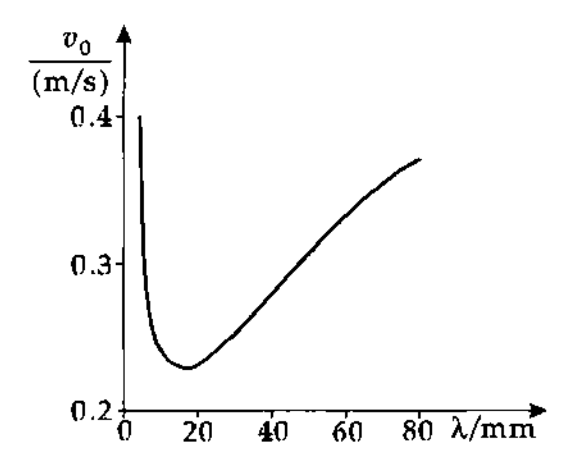


Fig. 10.27 : *Dispersion d'une onde de surface*

▷ La masse volumique du liquide doit être grande devant celle du gaz. La profondeur h du liquide doit être supérieure à $0,5\lambda$.

Pour des profondeurs de liquide plus faibles $h < 0,5\lambda$, on a :

$$v_o = \sqrt{gh}$$

Le tableau suivant résume quelques formes particulières d'ondes de surface à l'interface eau–air :

Nom	Période	Origine
Onde capillaire	jusqu'à 1 s	vent
Ondes de gravitation	1..... ≈ 12s	vent
Houle, ressac	0,5 . . . 5 min	vent
Raz de marée, Tsunami	5 min jusqu'à plusieurs heures	tremblement de Terre, vent
Ondes de marées	12, 24 heures	Lune, Soleil
Ondes de marées longues	¿24 h	Lune, Soleil, tempête

11 Acoustique

Acoustique : étude des vibrations et des ondes dans des milieux élastiques. Au sens restreint, l'acoustique est la partie de la physique qui étudie les sons, leur propagation et leur perception dans leur spectre audible (entre 16 Hz et 20 kHz). Les problèmes physiologiques et psychologiques, liés à l'audition, font aussi partie de l'acoustique.

■ Les milieux élastiques sont, par exemple, l'air, l'eau ainsi que les métaux, le béton, le bois et les matériaux de construction de façon générale.

11.1 Ondes sonores

Ondes sonores : propagation de variations de pression dans des milieux élastiques. Elles sont susceptibles de subir des réflexions (écho), des réfractions (à leur passage à travers une paroi) et des interférences.

- Dans les milieux élastiques **solides**, les ondes sonores peuvent être aussi bien **longitudinales** que **transversales**.

- Dans le cas des ondes longitudinales, l'élongation des vibrations des particules matérielles est parallèle à la direction de propagation de l'onde acoustique.

- Dans les gaz et dans la plupart des liquides, il n'y a pas de cisaillement. De ce fait, il ne s'y produit que des ondes longitudinales **non polarisées**.

Dans les milieux élastiques, les ondes acoustiques se propagent en produisant des fronts d'ondes successifs de dilatation et de compression.

Front de dilatation : ensemble de tous les points voisins où règne un minimum de pression.

Front de compression : ensemble de tous les points voisins où règne un maximum de pression.

- Les ondes acoustiques ne se propagent pas dans le vide. Les ondes acoustiques ne peuvent se propager que dans des milieux matériels.

11.1.1 Vitesse du son

À partir d'une source ponctuelle, dans un milieu isotrope et homogène, le son se propage sous forme d'ondes sphériques concentriques à la source.

Vitesse du son ou **célérité** c : vitesse de propagation des ondes acoustiques dans un milieu homogène.

Mètre/seconde, m/s : unité SI de la vitesse du son.

$$[c] = \mathrm{m/s}$$

La vitesse du son dépend des propriété du milieu dans lequel il se propage.

- Pour de grandes amplitudes d'une onde acoustique, la vitesse de propagation dépend de cette amplitude (propriétés élastiques non linéaires des matériaux).

1. Vitesse du son dans les gaz

La **vitesse du son dans un gaz** dépend du coefficient adiabatique γ (→ *coefficient adiabatique*) de la température T ou de la pression p du gaz :

Vitesse du son dans les gaz parfaits				LT^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$c_{gaz} = \sqrt{\frac{p \cdot \gamma}{\rho}} = \sqrt{\gamma R_i T}$	c_{gaz}	m/s	vitesse du son	
	p	Pa	pression	
	γ	1	coefficient adiabatique	
	ρ	kg/m³	masse volumique du gaz	
	T	K	température	
	R_i	J/(K kg)	constante des gaz parfaits	

■ La vitesse du son dans la plupart des gaz se situe dans le domaine $c \approx 200 - 1300$ m/s, c'est à dire la valeur moyenne des vitesses d'agitation moléculaires.

● La vitesse du son dans les gaz dépend fortement de la pression ou de la température et de leur masse volumique.

Dans l'air, entre -20 °C et 40 °C, la dépendance en fonction de la température peut être représentée par l'approximation linéaire :

$$c_{\text{air}} = (331,6 + 0,6 \cdot t)\,\text{m/s} \qquad (t \text{ en } °C)$$

→ *Tab. 13.1/2 et 13.1/3*, vitesse du son dans divers gaz.

2. Vitesse du son dans les liquides

La **vitesse du son dans les liquides** dépend du module de compressibilité K (→ *module de compressibilité*) du liquide et de sa masse volumique ρ :

Vitesse du son dans un liquide				LT^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$c_{\text{liq}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\chi\rho}}$	c_{liq}	m/s	vitesse du son	
	ρ	kg/m³	masse volumique	
	K	N/m²	module de compressibilité	
	χ	m²/N	coefficient de compressibilité	

■ c_{liq} prend des valeurs dans le domaine 1100-2000 m/s (eau à 20°C : $c_e au$=1470 m/s)

→ *Tab. 13.1/6* et 13.1/7, célérité du son dans les liquides.

3. Vitesse du son dans les solides

La **vitesse du son dans les solides** est fonction du module d'élasticité E (→ *module d'élasticité*) et de la masse volumique du solide :

Vitesse du son dans un solide (tige)				LT^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$c_{\text{sol}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	c_{sol}	m/s	vitesse du son	
	E	N/m²	module d'élasticité	
	ρ	kg/m³	masse volumique	

▷ Les ondes acoustiques dans les solides peuvent être longitudinales ou transversales.

▷ Pour des solides anisotropes, la vitesse du son dépend de la direction de propagation.

■ c_{sol} prend des valeurs comprises entre 1200 et 6000 m/s (Béton : $c = 3100$m/s, fer : $c = 5100$m/s, étain : $c = 2490$m/s, plomb : $c = 1200$m/s, liège : $c = 500$m/s.

▷ La propagation des ondes ultrasonores dans les solides est limitée latéralement dans un petit domaine du solide. La vitesse de propagation est alors :

$$c = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

ν est le coefficient de striction.

→ *Tab. 13.1/9, 13.1/10, 13.1/11* des vitesses du son c_{sol} dans les solides.

11.1.2 Caractéristiques du son

1. Pression acoustique

La **pression acoustique** p, liée aux compressions et dilatations lors de la propagation du son, est superposée à la pression hydrostatique ou à la pression atmosphérique p_0. La pression acoustique est généralement une fonction sinusoïdale de la position et du temps. Dans l'espace à une dimension, avec une vibration de fréquence f, p prend la forme :

Pression acoustique d'une vibration harmonique			**$ML^{-1}T^{-2}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$p(x,t) = p_0 + \hat{p}\cos\left[2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$	p	Pa	pression
	p_0	Pa	pression statique
	$\hat{p}$	Pa	amplitude de variation de la pression
	f	1/s	fréquence de la vibration acoustique
	t	s	temps
	x	m	position
	c	m/s	vitesse de propagation du son

Pression acoustique efficace p_{eff} : analogue à la valeur efficace d'un courant alternatif :

$$p_{eff} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{2}}$$

▷ Dans l'espace à trois dimensions, la pression acoustique décroît avec la distance r de la manière suivante (Fig. 11.1) :

- $\hat{p} = \hat{p}(r_0)\,\frac{r_0}{r}$: source ponctuelle
- $\hat{p} = \hat{p}(r_0)\sqrt{\frac{r_0}{r}}$: source linéaire

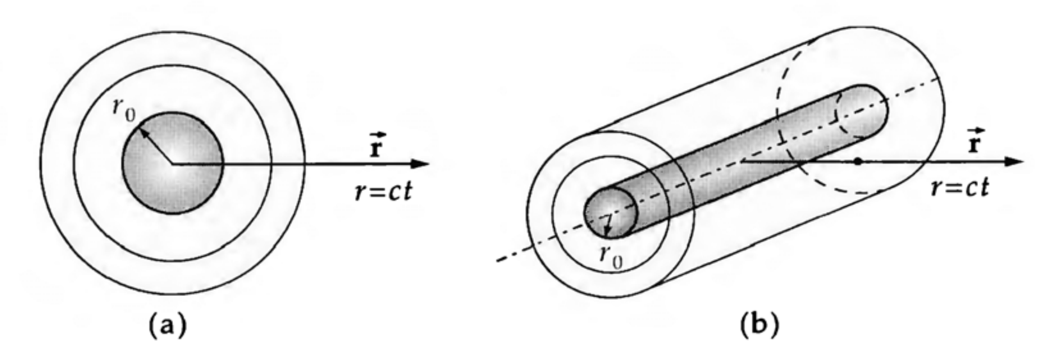


Fig. 11.1 : *La pression acoustique dépend de la distance et de la forme de propagation de l'onde sphérique ou cylindrique. (a) : onde sphérique issue d'une source ponctuelle, (b) : onde cylindrique issue d'une source linéaire*

2. Longueur d'onde du son

λ : distance entre deux passages par zéro (de mêmes sens) de la fonction cosinus ou sinus représentant l'onde à un instant donné. La longueur d'onde est inversement proportionnelle à la fréquence :

Longueur d'onde = vitesse du son/fréquence			L
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\lambda = \frac{c}{f}$$	λ	m	longueur d'onde du son
	c	m/s	vitesse du son
	f	Hz	fréquence du son

■ Pour une fréquence de vibration $f = 300$ Hz, la longueur d'onde dans l'air est $\lambda \simeq 1$ m.

3. Fréquences sonores

Domaines de fréquences :

Son : vibrations et ondes dans les milieux élastiques.

Son audible : onde dans le domaine des fréquences perceptibles par l'oreille humaine : 16 Hz<f<20 kHz.

Infrason : onde acoustique de fréquence $f < 16$ Hz.

Ultrason : onde acoustique de fréquence $f > 20$ kHz.

■ Les chauve-souris émettent des sons dans le domaine des ultrasons.

■ **Sifflet de Galton** : sifflet émettant des sons et ultrasons de fréquences règlables. Un jet d'air frappe le biseau formant le bord d'un tube cylindrique court de longueur règlable et met en vibration l'air que contient ce tube.

[M] Les ultrasons sont utilisés pour la télémètrie et la transmission de signaux. Dans l'industrie, ils sont utilisés pour le contrôle de pièces (défauts d'homogénéïté, pailles, ruptures) et le nettoyage de pièces. Dans la marine, les ultrasons sont utilisés pour la localisation sous-marine (sonar).

Hypersons : ondes acoustiques de fréquence $f > 10$ GHz, produits à l'aide de cristaux de quartz piézoélectriques.

[M] Application à la spectroscopie de phonons et à la dynamique moléculaire.

Fréquence de Debye : limite supérieure des vibrations acoustiques. Elle est atteinte lorsque la longueur d'onde est de l'ordre du double de la distance intermoléculaire.

▷ Dans le fer, la distance atomique est de $2,9 \cdot 10^{-10}$m. Avec une vitesse du son dans le fer de $c \approx 5 \cdot 10^3$ m/s, la fréquence de Debye est $f = c/\lambda \approx 10^{13}$ Hz.

11.1.2.1 Élongation sonore

Élongation $y(x,t)$: excursion des particules de matière autour de leur position d'équilibre :

$$y(x,t) = \frac{1}{2\pi f}\frac{1}{\rho c}\hat{p}\sin\left\{2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\}$$

● L'élongation y, pour des ondes planes progressives, est déphasée de $\pi/2$ par rapport à la pression acoustique p.

11.1.2.2 Vitesse d'élongation

1. Vitesse d'élongation

v : vitesse avec laquelle les particules matérielles du milieu oscillent autour de leur position d'équilibre :

$$v(x,t) = \frac{\mathrm{d}s(x,t)}{\mathrm{d}t}$$

La dépendance en position et en temps de la vitesse d'élongation est :

$$v(x,t) = \frac{\hat{p}}{\rho \cdot c}\cos\left[2\pi f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] .$$

L'amplitude de la vitesse d'élongation $\hat{v}$ est proportionnelle à l'amplitude de la pression $\hat{p}$ et inversement proportionnelle à l'impédance acoustique $Z = \rho c$:

Vitesse d'élongation			**LT^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\hat{v} = \frac{1}{Z}\hat{p} = \frac{1}{\rho \cdot c}\hat{p}$	$\hat{v}$	m/s	amplitude de la vitesse d'élongation
	$\hat{p}$	Pa	amplitude de la pression acoustique
	ρ	kg/m^3	masse volumique
	c	m/s	vitesse de propagation du son
	Z	kg/(m^{2}s)	impédance acoustique

▷ Dans la pratique on utilise couramment la valeur efficace de la vitesse d'élongation $v_{\text{eff}} = \hat{v}/\sqrt{2}$ à la place de l'amplitude $\hat{v}$.

2. Impédance acoustique

Z : caractéristique du milieu concernant la propagation des ondes acoustiques, produit de la masse volumique du milieu ρ par la vitesse de propagation c :

$$Z = \frac{\hat{p}}{\hat{v}} = \rho c$$

$|Z| = \text{kg}/(\text{m}^2\text{s})$: unité SI de l'impédance acoustique Z.

▷ Impédance acoustique de quelques milieux dans les conditions TPN :

Matériau	Z en kg/(m^{2}s)
Air	427
Eau	$1,4 \cdot 10^6$
Béton	$8 \cdot 10^6$
Verre	$13 \cdot 10^6$
Acier	$39 \cdot 10^6$

Pour des ondes planes, l'impédance acoustique Z est proportionnelle au rapport de la pression acoustique à la vitesse d'élongation v :

▷ Si deux milieux adjacents ont même impédance acoustique, lors du passage d'une onde acoustique, il n'y a pas de → *réflexion*.

Seuil d'audibilité : valeur de la pression acoustique (ou de l'intensité acoustique) au-dessous de laquelle un son n'est pas audible par l'oreille humaine. Ce seuil est déterminé à la fréquence $f = 1000$ Hz.

Pression acoustique de référence $p_{\text{eff.0}}$: pression acoustique efficace au **seuil d'audibilité**. D'après la norme DIN 45630, elle a pour valeur :

$$p_{\text{eff.0}} = 2 \cdot 10^{-5}\,\text{Pa}$$

11.1.2.3 Densité d'énergie

Densité d'énergie d'une onde acoustique w : l'énergie ΔW transportée par élément de volume ΔV :

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta V}$$

La densité d'énergie w d'une onde acoustique est proportionnelle au carré de l'amplitude de la vitesse d'élongation $\hat{v}$, c'est à dire au carré de l'amplitude de la pression acoustique :

Densité d'énergie d'une onde acoustique			MT^{-2}L^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$w = \frac{1}{2}\frac{\hat{p}^2}{\rho c^2}$	w	J/m^3	densité d'énergie
$= \frac{1}{2}\hat{v}^2 \cdot \rho$	$\hat{p}$	Pa	amplitude de la pression acoustique
	ρ	kg/m^3	masse volumique
	c	m/s	vitesse de propagation du son
	$\hat{v}$		amplitude de la vitesse d'élongation

L'énergie acoustique W dans le volume V se calcule en intégrant la densité d'énergie w sur le volume V :

$$W = \int_V w \,\mathrm{d}V$$

11.1.2.4 Intensité du son et puissance acoustique

1. Intensité du son

I : flux d'énergie W par unité de surface A et par unité de temps. C'est le produit de la densité d'énergie w par la vitesse de propagation du son c.

Intensité du son			MT^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$I = wc = \frac{1}{A}\frac{dW}{dt}$$	I	W/m^2	intensité du son
	w	J/m^3	densité d'énergie
	c	m/s	vitesse du son
	dW	J	énergie
	dt	s	intervalle de temps
	A	m^2	surface

Watt/(mètre carré), W/m^2 : unité SI de l'intensité I du son.

$[I] = W/m^2$

L'intensité du son peut s'exprimer par l'amplitude de la vitesse d'élongation $\hat{v}$ et la pression acoustique $\hat{p}$:

$$I = \frac{1}{2}\hat{v}\hat{p} = \frac{1}{2}\rho c\hat{v}^2 = \frac{1}{2}\frac{\hat{p}^2}{\rho c}$$

ou encore par les valeurs efficaces de la pression acoustique p_{eff} et de la vitesse d'élongation v_{eff} :

$$I = p_{\text{eff}} \cdot v_{\text{eff}} = \frac{p_{\text{eff}}^2}{Z}$$

▷ Caractéristiques d'une source sonore ponctuelle, distante de 3 m qui, à 20°C, émet un son de fréquence $f = 440$ Hz et de puissance $P = 1 \cdot 10^{-3}$ W . Intensité :$I = P/4\pi r^2 = 8.85 \cdot 10^{-6}$ W/m^2, impédance : $\rho c = 408$ $kg/(m^2s)$, élongation : $\hat{y} = \hat{v}/(2\pi f) = 0.75 \cdot 10^{-7}$ m, vitesse d'élongation : $\hat{v} = \sqrt{2I/(\rho c)} = 2.08 \cdot 10^{-4}$ m/s, pression acoustique : $\hat{p} = \sqrt{2I\rho c} = 0.85 \cdot 10^{-2}$ Pa, variations relatives de pression : $\hat{p}/p_0 = 10^{-7}$.

2. Puissance acoustique

La puissance acoustique P est égale à l'intensité du son intégrée sur une surface fermée A entourant la source :

Puissance acoustique= intensité du son × surface			ML^2T^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$P = \oint_A I dA$$	P	W	puissance acoustique
	I	W/m^2	intensité du son
	dA	m^2	élément de surface
	A	m^2	surface

Watt, W : unité SI de la puissance acoustique P.

$[P] = W$

■ Puissances acoustiques de quelques sources sonores :

conversation :	10^{-5} W	trompette :	0,1 W
cri :	10^{-3} W	orgue :	jusqu'à 10 W

11.1.3 Grandeurs relatives

En acoustique et en technique de l'information, on utilise souvent des **grandeurs relatives sans dimensions**, ce sont :

- **des facteurs** qui désignent des rapports de grandeurs linéaires, par exexemple **facteur** de réflexion
- **des indices** qui désignent souvent des rapports de grandeurs, quadratiques par exemple **indice de** puissance
- **des niveaux** qui désignent des logarithmes de rapports de grandeurs par exemple **niveau** de puissance acoustique, **niveau** d'intensité acoustique

Décibel : en abrégé **dB**, du nom du physicien américain Graham Bell, grandeur sans dimension, expression du rapport de deux puissances P_1 et P_2 par le logarithme décimal de ce rapport. Par extension, quantité M proportionnelle au logarithme décimal du rapport de deux grandeurs physiques X_0, X_1 de mêmes dimensions.

- Dans le cas de deux grandeurs linéaires x_1, x_2 :

$$M = 20 \log \frac{x_1}{x_2} \text{ dB}$$

- Dans le cas de deux grandeurs quadratiques X_1, X_2 :

$$M = 10 \log \frac{X_1}{X_2} \text{ dB}$$

1. Grandeurs relatives en acoustique

Niveau de pression acoustique, L_p : nombre de décibels correspondant au rapport de pressions acoustiques efficaces :

$$L_p = 10 \log \frac{p_{\text{eff}}^2}{p_{\text{eff},0}^2} \text{dB} = 20 \log \frac{p_{\text{eff}}}{p_{\text{eff},0}} \text{dB}$$

Pression acoustique de référence :

$$p_{\text{eff},0} = 2 \cdot 10^{-5}\,\text{Pa}$$

Niveau de puissance acoustique, L_p : puissance acoustique relative :

$$L_p = 10 \log \frac{P}{P_0} \text{ dB}$$

Puissance acoustique de référence :

$$P_0 = 10^{-12}\,\text{W}$$

Niveau d'intensité acoustique

$$L_I = 10 \log \frac{I}{I_0} \text{ dB}$$

Intensité acoustique de référence :

$$I_0 = 10^{-12}\,\text{W/m}^2$$

- Une pression acoustique efficace de $p_{\text{eff}} = 3 \cdot 10^{-3}$ Pa correspond à un niveau de pression acoustique de :

  $$L_p = 20 \log \frac{3 \cdot 10^{-3}\text{Pa}}{2 \cdot 10^{-5}\text{Pa}} \text{dB} = 20 \log (1,5 \cdot 10^2)\text{dB} = 43,5\,\text{dB}$$

2. Addition de niveaux acoustiques

Les intensités relatives de n sources sonores peuvent s'additionner pour obtenir l'**intensité relative totale** L_{tot} :

$$\frac{I}{I_0} = \sum_{k=1}^{n} \frac{I_k}{I_0} = \sum_{k=1}^{n} 10^{0.1\,L_{Ik}}$$

L_{Ik} : niveau d'intensité acoustique de la source k.

Intensité relative totale L_{tot} :

$$L_{\text{tot}} = 10 \log \frac{I}{I_0} \,\text{dB} = 10 \log \left(\sum_{i=1}^{n} 10^{L_i/10} \right) \text{dB}$$

- Deux niveaux acoustiques **ne s'additionnent pas** linéairement !

- Pour L_1 =70 dB et L_2 =80 dB, on a :

  $L_{\text{tot}} = 10 \log(10^7 + 10^8)\,\text{dB} = 80,4\,\text{dB}$

  $L_1 = 0\,\text{dB}$ et $L_2 = 0\,\text{dB}$ donne $L_{tot} = 3\,\text{dB}$!

- On ne peut entendre le gazouillis d'oiseaux à côté d'un camion en marche.

- Deux sources sonores de mêmes intensités 100 dB ont, ensemble, un niveau d'intensité acoustique total augmenté seulement de 3 dB L_{tot}=103 dB. Deux sources d'intensités égales à 0 dB, ont ensemble une intensité totale égale à 0 dB + 0 dB = 3 dB.

- Les **niveaux acoustiques** L_{tot} sont calculés à partir du plus grand des niveaux L_1 en y ajoutant successivement l'**additif de niveau** L_Z des différentes sources en tenant compte de leur **différence de niveau** :

  $$\Delta L = L_1 - L_2$$

  $$L_{tot} = L_1 + L_Z$$

  avec les valeurs correspondantes :

$\Delta L = 0\,\text{dB}$	$L_Z = 3\,\text{dB}$
$\Delta L = 3\,\text{dB}$	$L_Z = 1,8\,\text{dB}$
$\Delta L = 5\,\text{dB}$	$L_Z = 1,2\,\text{dB}$
$\Delta L = 7\,\text{dB}$	$L_Z = 0,8\,\text{dB}$
$\Delta L = 10\,\text{dB}$	$L_Z = 0,4\,\text{dB}$
$\Delta L \geq 20\,\text{dB}$	$L_Z = 0\,\text{db}$

11.2 Sources et récepteurs de sons

Source de sons : corps vibrant dans un milieu élastique qui émet des fronts de compression et de dilatation, c'est à dire des ondes.

11.2.1 Émetteur d'ondes mécaniques

1. Cordes

Les **cordes** et les **tiges** sont des sources linéaires de sons. Leurs **vibrations propres** sont excitées par des réflexions à leurs extrémités. Des ondes stationnaires s'établissent, selon la longueur l de la corde ou de la tige fixe aux deux extrémités, on a :

Longueur d'onde des ondes stationnaires sur une corde (2 extrémités fixes)				L
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\lambda_n = \frac{c_s}{f_n} = \frac{2l}{n+1}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$	λ	m	longueur d'onde	
	n	1	ordre harmonique	
	f_n	Hz	fréquence	
	c_s	m/s	vitesse de propagation du son	

- Instruments à cordes (piano, violon, guitare). La hauteur du son, pour une longueur de corde donnée, dépend de la tension de la corde. C'est par la tension de la corde que l'on accorde l'instrument.

Vibration fondamentale : harmonique 1, de fréquence f_0 correspondant à $(n = 0)$ dans la relation ci-dessus.

Vibrations harmoniques : vibrations de fréquences f_n correspondant à des entiers $n > 1$.

- **Harmonique 2 :** vibration de fréquence $f_1 = 2f_0$
  Harmonique 3 : vibration de fréquence $f_2 = 3f_0$

2. Membranes

Les **membranes vibrantes** sont souvent constituées de plaques ou de feuilles circulaires minces, homogènes, de masse m par unité de surface, soumises à une tension superficielle uniforme σ_F et fixées sur leur bord. On peut les comparer à une extension à 2 dimensions d'une corde vibrante.
Leurs vibrations propres sont exprimées par deux entiers n et m.

- Tambour, cymbale, grosse caisse, timbale.

Longueurs d'ondes $\lambda_{m,n}$ des vibrations propres d'une membrane circulaire de rayon R :

Longueur d'onde des vibrations propres d'une membrane (circulaire)				L
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\lambda_{m,n} = \frac{2\pi Rc}{B_{m,n}}\sqrt{\frac{\rho}{\sigma_F}}$	λ	m	longueur d'onde	
	R	m	rayon de la membrane	
	c	m/s	vitesse de propagation du son	
	$B_{m,n}$	1	zéro des fonctions cylindriques de Bessel	
	σ_F	N/m^2	tension superficielle de la membrane	
	ρ	kg/m^3	masse volumique de la membrane	

▷ σ_F est mesurée lorsque la membrane est au repos (ne vibre pas).

Vibration fondamentale : tous les points de la surface de la membrane vibrent en phase.

Vibration harmonique : aux modes de vibration plus élevés, des lignes de nœuds, comparables aux nœuds sur une corde, se forment. Des oscillations de phases opposées ont lieu dans les segments de la membrane délimités par les lignes de nœuds.

Les modes de vibrations sont fonction de la position des lignes de nœuds, par exemple :

- Lignes de nœuds qui coïncident avec un diamètre de la membrane.
- Lignes de nœuds circulaires concentriques au centre de la membrane.
- Combinaison des lignes de nœuds des deux cas précédents.

- **Membrane** et **cloche** sont les correspondants, respectivement à deux et à trois dimensions, de la corde vibrante.

M **Figures de Chladni** : ensemble des lignes de nœuds (**lignes nodales**) d'une membrane vibrante où s'accumule du sable dont on a saupoudré la membrane (analogue au tube de Kundt). Le sable (ou la poudre de liège) qui s'accumule le long des lignes nodales, permet de visualiser les **modes de vibration** de la membrane.

3. Colonnes d'air vibrantes

a) **Sirène** : instrument de production de sons par interruption périodique d'un jet continu d'air comprimé. Un disque rigide, percé de n trous équidistants sur sa circonférence de rayon R, tourne avec une vitesse uniforme de p tours par seconde. Le jet d'air est dirigé normalement au disque près de sa circonférence et subit $f = n \times p$ perturbations par seconde. La fréquence des sons émis est égale à f.
La sirène turbine comprend deux disques concentriques l'un fixe, l'autre mis en mouvement par un jet de fluide.

b) **Sifflet** : constitué d'une arête aiguë ou d'un fil fin sur lesquels souffle un jet d'air issu d'une "buse". Sur l'arête, coupée en biseau, se forment des tourbillons d'air qui décrochent périodiquement et provoquent des vibrations périodiques.

La fréquence f des sons produits dépend de la distance d entre la buse et l'arête ou le fil et de la vitesse v_S du jet d'air.

Fréquence d'un sifflet $\propto$ vitesse du jet d'air			T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$f = \gamma \frac{v_S}{d}$	f	Hz	fréquence
	γ	1	constante de proportionalité
	v_S	m/s	vitesse du jet d'air
	d	m	distance buse–arête

■ Les "sifflements" du vent sont produits par le vent qui souffle sur les arêtes vives des maisons, de poteaux ou de fils.

■ Le bruit produit par les pales d'un hélicoptère est dû au flux d'air sur les arêtes des pales.

Le couplage de l'arête ou du fil avec un résonateur, détermine la fréquence de décrochage des turbulences et par conséquent, la fréquence des sons produits. Le résonateur est souvent formé d'un tuyau dans lequel s'établissent des ondes stationnaires.

- Dans une bouteille ou un capuchon de stylo, se forment des ondes stationnaires qui déterminent la fréquence des sons produits lorsqu'on souffle dedans.
- Les sifflets et les flûtes fonctionnent d'après ce principe.

c) **Instruments à vent à embouchure** : instruments de musique constitués d'une embouchure et d'un tuyau droit ou replié, de longueur l fixe ou variable. Les lèvres du musicien sont fermées près de l'embouchure de l'instrument. L'air comprimé à l'aide des muscles abdominaux, en remontant dans la bouche, entrouvre les lèvres et provoque une chute de pression dans la bouche. Suivant la tension avec laquelle le musicien serre les lèvres, celles-ci se referment plus ou moins rapidement. Le processus, en se renouvelant périodiquement produit des vibrations qui donnent lieu à des ondes stationnaires dans le résonateur formé par le tuyau.

- Parmi les instruments à vent de l'orchestre, tous les cuivres.

d) **Instruments à vent à anche** : ces instruments comportent à leur embouchure une fine lamelle élastique de bois ou de métal qu'un souffle d'air peut faire vibrer. Le résonateur est souvent formé d'un tuyau en bois (clarinette, hautbois) dont la longueur de résonance est variée par un jeu de trous qui peuvent être ouverts ou fermés soit directement par les doigts soit par un jeu de clapets.

- Parmi les instruments à vent de l'orchestre, tous les bois à l'exception des flûtes et des pipeaux.

11.2.2 Transducteurs électroacoustiques

Convertisseur ou **transducteur électroacoustique** : appareil ou dispositif qui convertit l'énergie électrique en énergie acoustique ou réciproquement.

Émetteur acoustique : système mécanique mis en vibration par des forces mécaniques, électriques ou magnétiques.

- **Haut-parleur** : généralement constitué d'une membrane solidaire d'une bobine mobile parcourue par un courant alternatif et plongée dans un champ magnétique constant. La bobine, soumise à la force électromagnétique, transmet ses mouvements à la membrane qui convertit en ondes acoustiques les courants électriques circulant dans la bobine mobile.
- **Microphone électrodynamique** : fonctionne sur le principe inverse du haut-parleur : une membrane légère, mise en mouvement par des variations de pression acoustique, entraîne une bobine mobile plongée dans un champ magnétique constant. Les courants induits dans la bobine sont l'image des sons qui ont produit les variations de pression acoustique.

1. Émetteurs électroacoustiques

a) **Émetteur électromagnétique** : membrane en fer doux placée au voisinage d'un électro-aimant parcouru par les courants variables correspondants aux sons à reproduire.

- Haut–parleur (électromagnétique), écouteur téléphonique, avertisseur de voiture.

b) **Émetteur électrodynamique** : une bobine mobile cylindrique, parcourue par un courant variable et solidaire d'une membrane, se déplace dans l'entrefer d'un aimant permanent annulaire. Les mouvements de la bobine sont transmis à la membrane et convertissent les signaux électriques en onde acoustique.

- Haut-parleur électrodynamique : haut-parleur le plus utilisé en électroacoustique, fonctionne suivant ce principe. Leurs distorsions sont nettement inférieures à celles des reproducteurs électromagnétiques. Leur rendement acoustique peut être augmenté par l'utilisation d'une membrane de forme exponentielle.

c) Magnétostriction

■ Les émetteurs d'ultrasons sont parfois fondés sur l'utilisation du phénomène de magnétostriction

d) Émetteur électrostatique : le fonctionnement de certains haut-parleurs (fréquences aiguës) est basé sur la force électrostatique entre deux minces films conducteurs plans parallèles alimentés par une différence de potentiel alternative correspondant aux sons à reproduire. La force de Coulomb qui s'exerce entre les deux films les mets en vibration au rythme de la tension alternative.
Réciproquement, ce sont les vibrations relatives de deux films conducteurs qui produisent des variations de capacité du condensateur qu'ils forment. La charge constante (grâce à un électret) qu'ils portent, produit une différence de potentiel variable au rythme des variations de capacité.

■ Microphone à condensateur, microphone à électrets.

e) Émetteurs piézoélectriques : la dilatation et la contraction d'un cristal piézoélectrique sont commandés par une différence de potentiel appliquée entre deux de ses faces. En appliquant une différence de potentiel alternative, le cristal vibre au rythme de sa fréquence et émet les sons correspondants. Ils sont souvent utilisés comme hauts-parleurs d'appoint dans les systèmes informatiques par exemple.

▷ **Cristaux piézeoélectriques** : les cristaux de quartz, de sel de Seignette peuvent se dilater ou se contracter dans une direction privilégiée lorsque les charge électriques portées par les faces perpendiculaires à cette direction se modifient.

2. Rendement électroacoustique

Le rendement acoustique B_S d'un transducteur électroacoustique (haut-parleur) est le rapport de la pression acoustique p_r de l'onde rayonnée à une distance de 1 m, à la tension U appliquée au transducteur (parfois à la puissance électrique fournie au transducteur). Le rendement peut varier avec la fréquence à convertir.

Rendement électroacoustique			**$L^{-3}T^{1}I$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$B_S = \frac{p_r}{U}$$	B_S	Pa/V	rendement électroacoustique
	p_r	Pa	pression acoustique à 1 m
	U	V	tension appliquée au transducteur

Rendement acoustique de référence, B_{S0} : défini par $B_{S0} = 0,1\,\mathrm{Pa/V}$.

3. Rendement électroacoustique des émetteurs

Le rendement est souvent exprimé par G_S, quantité proportionnelle au logarithme décimal du rapport du rendement électroacoustique B_S au rendement acoustique de référence B_{S0} :

Rendement électroacoustique			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$G_S = 20 \cdot \log \frac{B_S}{B_{S0}}$$	G_S	dB	rendement acoustique relatif
	B_S	Pa/V	rendement électroacoustique
	B_{S0}	Pa/V	rendement électroacoustique de référence

G_S est exprimé en dB. ($B_{S0} = 10^{-1}$ Pa/V)

4. Sensibilité d'un haut-parleur

La sensibilité E_k d'un haut-parleur est exprimée par le produit de la moyenne du rendement acoustique $\overline{B_S}$ dans le domaine de fréquence $f \in$ [0,25-4 kHz], de la racine carré de l'impédance Z du haut–parleur et de la distance relative r/r_0 :

Sensibilité d'un haut-parleur			
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\overline{E}_k = \overline{B}_s \cdot \sqrt{Z} \cdot \frac{r}{r_0}$$	G_S	dB	rendement électroacoustique relatif
	$\overline{E}_k$	Pa $\sqrt{\text{VA}}$	sensibilité d'un haut-parleur
	$\overline{B}_S$	Pa/V	valeur moyenne du rendement
	Z	Ω	impédance
	r	m	distance au haut-parleur
	r_0	m	distance de référence

5. Portée d'un haut-parleur

La portée d'un haut-parleur r est définie par le produit de la sensibilité E_k et de la racine carré de la puissance électrique absorbée P, divisé par la pression acoustique p souhaitée :

Portée d'un haut-parleur			**L**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$r = \frac{E_k}{B_S \cdot \sqrt{Z}} = \frac{E_k \cdot \sqrt{P}}{p}$$	r	m	portée
	E_k	Pa$\sqrt{\text{VA}}$	sensibilité
	B_S	Pa/V	rendement acoutique
	Z	Ω	impédance
	P	VA	puissance électrique absorbée
	p	Pa	pression acoustique

11.2.2.1 Récepteurs acoustique ou microphones

Les **récepteurs acoustiques**, ou **microphones**, convertissent l'énergie acoustique en énergie électrique.

1. Genres de microphones

a) **Transducteur piézo-électrique** : constitué d'un élément piézo–électrique, les variations de pression de l'onde acoustique qui s'exercent sur sa surface y créent des charges électriques variables. Une différence de potentiel alternative s'établit entre deux faces opposées.

■ Applications : **microphones sous-marins** et certains **sthétoscopes**.

b) **Transducteur piézo-résistif** : basé sur les changements de résistance électrique d'un élément piézo-électrique sous l'action de variations de pression.

■ Applications aux appareils de **télécommunication** (combinés téléphoniques).

c) **Transducteur magnétostrictif** : constitué d'un matériau ferromagnétique qui se déforme sous l'action d'un champ magnétique. On peut produire des ondes acoustiques en appliquant un champ magnétique alternatif.

- Application à la production d'**ultrasons**.

d) Transducteur électrostatique : condensateur plan parallèle dont une des armatures est une membrane conductrice. Les sons provoquent une déformation de la membrane, donc une variation de la capacité du condensateur et de la différence de potentiel à ses bornes.

- Application aux microphones à condensateurs pour l'enregistrement sonore de qualité. Dans leur fonctionnement inverse, les transducteurs électrostatiques sont aussi utilisés pour convertir l'énergie électrique en énergie acoustique, par exemple dans les écouteurs ou les haut-parleurs d'aiguës.

e) Transducteur électrodynamique : la pression acoustique fait vibrer une membrane solidaire d'une bobine mobile dans l'entrefer d'un aimant permanent ; un courant alternatif, image des sons, est induit dans la bobine.

- Application aux microphones et, dans leur fonctionnement inverse, aux écouteurs.

f) Transducteur bio-acoustique : l'énergie acoustique induit des phénomènes biologiques. L'exemple le plus important est l'appareil auditif humain : un ensemble de processus mécaniques et chimiques, convertit les sons en courants électriques dans le cerveau.

2. Facteur de conversion électroacoustique des récepteurs

Pour un récepteur de sons, le facteur de conversion électroacoustique B_r est le rapport de la pression acoustique p reçue à la tension électrique U qu'elle produit.

Facteur de conversion électroacoustique			
	Symbole	Unité	Dénomination
$B_r = \frac{U}{p}$	B_r	V/Pa	facteur de conversion d'un récepteur
	p	Pa	pression acoustique reçue
	U	V	tension produite

Facteur de conversion électroacoustique de référence des récepteurs : défini comme $B_{r0} = 10\,\text{V/Pa}$.

3. Facteur de conversion électroacoustique relatif des récepteurs

Le facteur de conversion d'un récepteur est souvent exprimé par G_r, quantité proportionnelle au logarithme décimal du rapport du facteur de conversion électroacoustique B_r au facteur de conversion de référence B_{r0}.

Facteur de conversion relatif			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$G_r = 20 \cdot \log \frac{B_r}{B_{r0}}$	G_r	1	facteur de conversion relatif d'un récepteur
	B_r	V/Pa	facteur de conversion d'un récepteurr
	B_{r0}	V/Pa	facteur de conversion de référence

4. Sensibilité d'un microphone

S_m : analogue à l'expression de la sensibilité d'un haut–parleur :

Sensibilité d'un microphone			**dB**
	Symbole	Unité	Dénomination
$S_m = \frac{\sqrt{P}}{p}$	S_m	$\sqrt{\text{VA}}/\text{Pa}$	sensibilité du microphone
	P	VA	puissance électrique
	p	Pa	pression acoustique

5. Signaux stéréophoniques

Signal différence : $D = L - R$
Signal somme : $S = L + R$
Signal gauche (L) : $S + D = L + R + L - R = 2L$
Signal droite (R) : $S - D = L + R - L + R = 2R$

Fréquences utilisées dans la **radiodiffusion stéréophonique**,

Signal composite (somme,mono) : $f_m = 30$ Hz ... 15 kHz
Porteuse auxiliaire : $f_a = 38$ kHz
Porteuse stéréo : $f_s = f_a \pm f_m$
Bande latérale supérieure : $f_{ls} = f_a + f_m = 38,03 - 53$ kHz
Bande latérale inférieure : $f_{li} = f_a - f_m = 23 - 37,97$ kHz

11.2.3 Absorption des sons

1. Perturbations de la propagation des sons

Se produisent par (→ *Ondes*) :

- réflexion
- réfraction
- diffraction
- interférence
- absorption

2. Absorption des sons

Absorption ou **atténuation** des sons : perte d'énergie lors de la propagation des sons dans un milieu par suite de :

- frottements internes
- compression isentropique
- excitation de degrés de libertés internes (rotation et vibration des molécules) du milieu

● L'atténuation de l'intensité acoustique I par absorption se produit en fonction de la distance r suivant une loi exponentielle :

$$I(r) = I(r_0)\mathrm{e}^{-\alpha(r - r_0)}$$

où $I(r_0)$ est l'intensité du son à la distance de référence r_0.

3. Coefficient d'absorption des sons

α : dépend de la fréquence du son et des propriétés d'absorption du milieu dans lequel le son se propage. → *Tab. 13.1/4 et Tab. 13.1/8*.

$[\alpha]=\mathrm{m}^{-1}$: unité SI des coefficients d'absorption du son.

Matériau insonorisant, matériau absorbant les sons.

Réalisation technique :

- Matériau homogène ou poreux. Agit par conversion de l'énergie acoustique en travail de déformation ou de frottement dans le matériau absorbant.

- Résonateurs : dissipent l'énergie acoustique des sons de fréquences voisines aux fréquences propres du résonateur sous forme de chaleur par frottements internes.

4. Indice de réflexion des sons

ρ, $[\rho] = 1$: rapport de l'intensité acoustique réfléchie I_r à l'intensité incidente I_i :

Indice de réflexion des sons				**1**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\rho = \frac{I_r}{I_i}$	ρ	1	indice de réflexion	
	I_i	W/m²	intensité acoustique incidente	
	I_r	W/m²	intensité acoustique réfléchie	

5. Indice d'absorption des sons

α, $[\alpha] = 1$: grandeur caractérisant la capacité d'absorption d'un matériau. α donne la différence normalisée de l'énergie acoustique incidente et réfléchie :

Indice d'absorption des sons				**1**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\alpha = \frac{I_i - I_r}{I_i}$	α	1	indice d'absorption des sons	
	I_i	W/m²	intensité acoustique incidente	
	I_r	W/m²	intensité acoustique réfléchie	

▷ Il ne faut pas confondre l'indice d'absorption α, $[\alpha] = 1$, avec le coefficient d'absorption α, $[\alpha]$ =1/m ! (→ *Tab. 13.1/16*) défini plus haut.

■ Indice d'absorption de quelques matériaux pour diverses fréquences de son :
béton léger 0.07 (125 Hz), 0.22 (500 Hz), 0.10 (2000 Hz)
portes en bois 0.14 (125 Hz), 0.06 (500 Hz), 0.10 (2000 Hz)
panneaux en bois 0.25 (125 Hz), 0.25 (500 Hz), 0.08 (2000 Hz) (voir **Tab. 13.1/16**)

M La mesure des indices d'absorption des sons peut être effectuée à l'aide d'un tube de Kundt.

6. Indice de transmission des sons

τ : défini comme le rapport de l'intensité acoustique transmise I_t à l'intensité incidente I_i, ou le carré du rapport des pressions acoustiques correspondantes :

$$\tau = \frac{I_t}{I_i} = \frac{p_t^2}{p_i^2}$$

Indice de dissipation du son, δ : le rapport de l'intensité acoustique I_a absorbée dans un mur à l'intensité incidente I_i :

$$\delta = \frac{I_a}{I_i} = \frac{I_i - I_r - I_t}{I_e} = \alpha - \tau = 1 - \rho - \tau$$

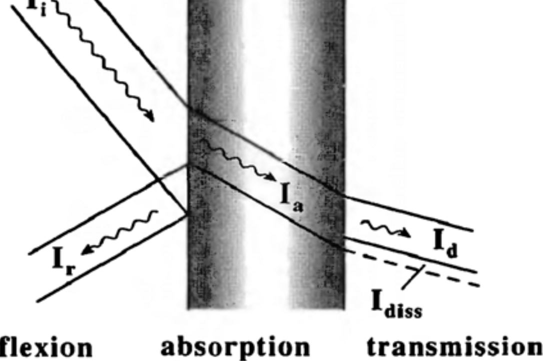


Fig. 11.2 : *Réflexion, absorption, dissipation et transmission d'onde acoustique*

- À l'interface de deux milieux, la conservation de l'énergie acoustique impose :

$$\rho + \tau + \delta = 1$$
$$\rho + \alpha = 1$$

11.2.4 Insonorisation

Insonorisation : action d'empêcher la propagation du son par réflexion sur des obstacles, en particulier par réflexion à l'interface de deux milieux de propriétés de propagation différentes.

Coefficient de réflexion r : grandeur sans dimensions, définie par le rapport de l'amplitude de la pression acoustique de l'onde réfléchie p_r et de celle de l'onde incidente p_i.

Coefficient de réflexion			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$r = \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$	r	1	coeficient de réflexion
	Z_1	kg/(m^{2}s)	impédance acoustique du milieu 1
	Z_2	kg/(m^{2}s)	impédance acoustique du milieu 2
	p_e	kg/(ms^2)	pression acoustique de l'onde incidente
	p_r	kg/(ms^2)	pression acoustique de l'onde réfléchie

$r = 0$: pas de réflexion.

$r = \pm 1$: réflexion totale.

Relation entre l'**indice de réflexion** ρ et le **coefficient de réflexion** r :

$$\rho = \frac{I_r}{I_i} = \frac{p_r^2}{p_e^2} = r^2$$

- L'insonorisation la plus grande est obtenue par réflexion sur un matériau d'impédance acoustique Z_2 la plus grande possible par rapport à celle Z_1 du milieu dans lequel l'onde incidente se propage.

Coefficient d'insonorisation R d'un mur			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$R = 10 \log \frac{I_i}{I_\tau} = L_1 - L_2$	R	dB	coefficient d'insonorisation
	I_i	W/m^2	intensité acoustique incidente
	I_τ	W/m^2	intensité acoustique transmise à travers le mur

Réalisation technique :

- La propagation du **son dans l'air** est généralement atténuée en utilisant une paroi de séparation en matériaux lourds et durs.
- La propagation du **son dans les solides** peut être atténuée en interposant des couches de matériau mous de faible impédance acoustique.
- Les bruits occasionnés par la **marche** dans les immeubles se transmettent par les dalles en béton entre les étages. On peut les atténuer par l'utilisation de **planchers flottants**, qui ne reposent pas directement sur les dalles en béton, mais sur une couche intermédiaire de matériau mou. On peut aussi utiliser des plafonds suspendus.

11.2.4.1 Écho

Écho ou **réverbération** : répétition d'un son due à sa réflexion sur des obstacles. Son intensité décroît généralement de façon exponentielle dans le temps.

Temps de réverbération T : le temps au bout duquel l'énergie acoustique à diminué de 60 dB (c'est dire 1 ppm=10^{-6}) par rapport à sa valeur initiale (Fig. 11.3).

Temps de réverbération (formule de Sabine)			**T**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$T = 0,163\,\text{s/m}\frac{V}{\alpha A}$$	T	s	temps de réverbération
	V	m^3	volume de l'espace libre
	A	m^2	surface absorbante
	α	1	indice d'absorption

■ Une salle de volume $V = 500\ m^3$ a un temps caractéristique de réverbération de 1 s.

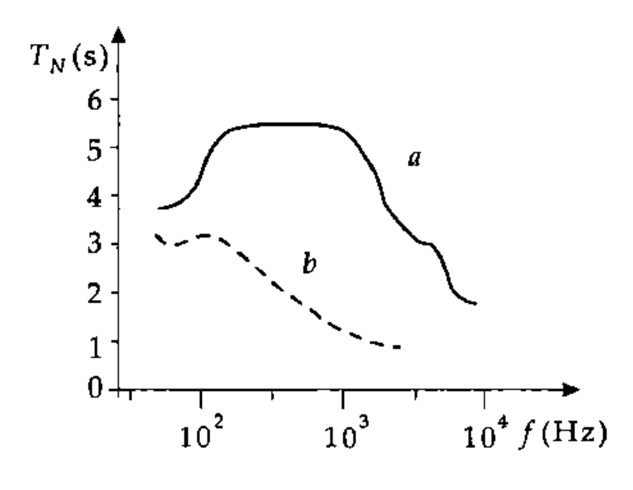


Fig. 11.3 : *Temps de réverbération dans une église en fonction de la fréquence du son (déterminé par prise de son). (a) : église vide, (b) : église occupée*

11.2.5 Bruits d'écoulement

Les fluides, en s'écoulant dans les conduites ou autour d'obstacles, produisent un bruit d'écoulement à large bande de fréquences dû à des variations de pression dans les tourbillons. Les bruits d'écoulement peuvent être évités ou leur intensité atténuée par :

- enrobage des tuyauteries à l'aide d'un matériau insonorisant
- des buses d'écoulement à aérateur
- des filtres acoustiques (filtres passe-bas)

11.3 Ultrason

1. Propriétés des ultrasons

Ultrason : fréquences $f > 20\text{kHz}$

Hyperson : fréquences $f > 10\text{GHz} = 10^{10}\text{Hz}$
Longueur d'onde des ultrasons dans l'air :

$$\lambda_{\text{air}} < 1,5\text{cm}$$

Les ultrasons peuvent être focalisés et permettent la formation de faisceaux parallèles d'ondes acoustiques ultrasonores. Ils se propagent en ligne droite et donnent lieu à de faibles effets de diffraction.

Production d'ultrasons : par magnétostriction, à l'aide de cavités résonantes excités par des jets fluides à grande vitesse ou par effet piézo-électrique.

[M] Mesure de la vitesse de propagation des ultrasons et de leur atténuation par :

- impulsion-écho
- réverbération

2. Applications des ultrasons

a) **diagnostic par ultrasons :** en médecine (échographie), thérapie, microchirurgie

b) **analyse de matériaux** et de corps solides : détermination des propriétés élastiques, localisation de défauts de structure, détermination des coefficients d'atténuation

c) **électronique :** soudure par ultrasons en microélectronique, filtres à ondes de surface, microscope à ultrasons

d) **hydroacoustique :** sondage acoustique sous l'eau, SONAR (Sound Navigation and Range), mesure de profondeurs, communication sousmarine

e) **pilotage de processus de fabrication** par ultrasons : mesure de niveau de remplissage, mesure de débits d'écoulement, suivi de réactions chimiques, détermination de concentration, contrôle de qualité (contrôle de matériaux avec une précision de 10^{-4}m)

f) **Ultrasons de puissance** dans le domaine $\approx 20 - 40\text{kHz}$: **cavitation** aux interfaces fixes, perçage de trous, nettoyage par ultrasons, soudure par ultrasons

11.4 Acoustique physiologique et appareil auditif

Ouïe : sens par lequel sont perçus les sons. L'appareil auditif enrgistre les sons et analyse leur intensité et leur fréquence, on peut le considérer comme un **transducteur bio-acoustique**.

- **Pavillon de l'oreille** : en forme d'entonnoir plat, collecte les sons et les véhicule vers l'oreille interne.
- **Conduit auditif** : liaison entre le pavillon de l'oreille et le tympan (trompe d'Eustache).
- **Tympan** : membrane d'environ 0,5 cm^2 de surface, mise en vibration par les ondes acoustiques.
- **Oreille moyenne** : emplie d'air, elle contient trois osselets, le **marteau**, l'**enclume** et l'**étrier**, formant un système de leviers articulé qui transmet, en les amplifiant, les vibrations du tympan jusqu'à la fenêtre ovale. Ce système joue également le rôle d'adaptateur d'impédance entre l'oreille externe (air) et l'oreille interne (essentiellement liquide).

- **Fenêtre ovale** et **fenêtre ronde** : deux membranes situées entre l'oreille moyenne et l'oreille interne. L'étrier transmet les vibrations à ces membranes en les amplifiant encore d'un facteur 20 à 30.
- **Oreille interne** ou labyrinthe : chambre subdivisée en deux parties qui contient des liquides incompressibles riches en ions sodium (périlymphe, endolymphe) d'impédance acoustique beaucoup plus grande que l'air.
- **Limaçon** ou cochléa : forme un tube parcouru par le canal cochléaire, dont une paroi est constituée par la membrane basilaire. Une différence de potentiel existe entre les liquides contenus dans le limaçon et dans l'oreille interne.
- **Membrane basilaire** : membrane fixée au limaçon, d'élasticité variant d'une extrémité à l'autre ; les déplacements qui lui sont transmis par la fenêtre ovale la font vibrer transversalement. Un son de fréquence donnée ne fait vibrer qu'une petite partie de sa surface. Ces vibrations sont transmises aux cellules nerveuses de l'organe de Corti.
- **Organe de Corti** : cellules nerveuses situées sur la membrane basilaire, transmettent des influx vers le nerf auditif et de là vers le cerveau.

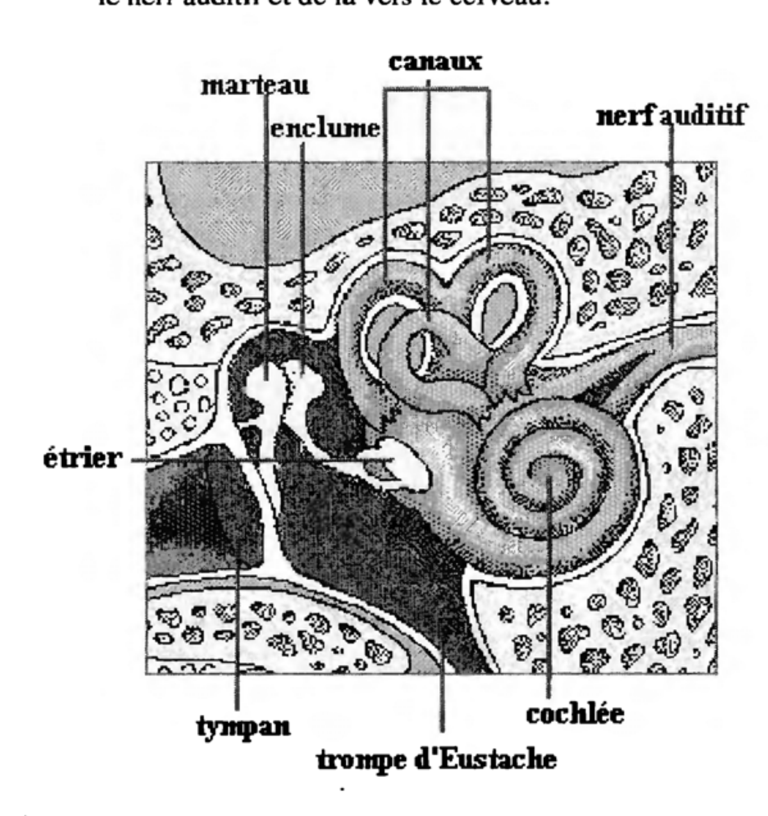


Fig. 11.4 : *Vue schématique de l'oreille moyenne et interne*

11.4.1 Audiométrie

1. Domaine audible

Fréquences comprises entre 16 Hz et 20 000 Hz, dont les vibrations et les ondes dans les milieux élastiques sont perçues par l'oreille humaine (Fig. 11.5).

▷ Avec l'âge, le domaine audible se restreint. À tout âge, les bruits et les sons trop intenses peuvent durablement endommager l'appareil auditif humain et limiter le domaine audible.

- **Domaine de fréquence** de la **parole** $\approx$ 10Hz-10kHz.

- **Parole compréhensible** ≈ 300Hz -3kHz.

- Les intensités perçues de niveaux sonores identiques mais de fréquences différentes ne sont pas égales.

2. Niveau d'intensité sonore

- Loi de Weber-Fechner : la sensation auditive varie comme le logarithme de l'excitation. La variation de la sensation auditive ΔL est proportionnelle au logarithme du rapport des intensités sonores.

Niveau d'intensité des sons L_S : mesure de l'intensité de la perception subjective des sons, dépend de la fréquence.

$$L_S = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) = 20 \log \frac{P}{P_0} \text{ dB}$$

Intensité acoustique de référence :

$$I_0 = 10^{-12} W/m^2$$

correspond au seuil d'audibilité de l'oreille à 1kHz.

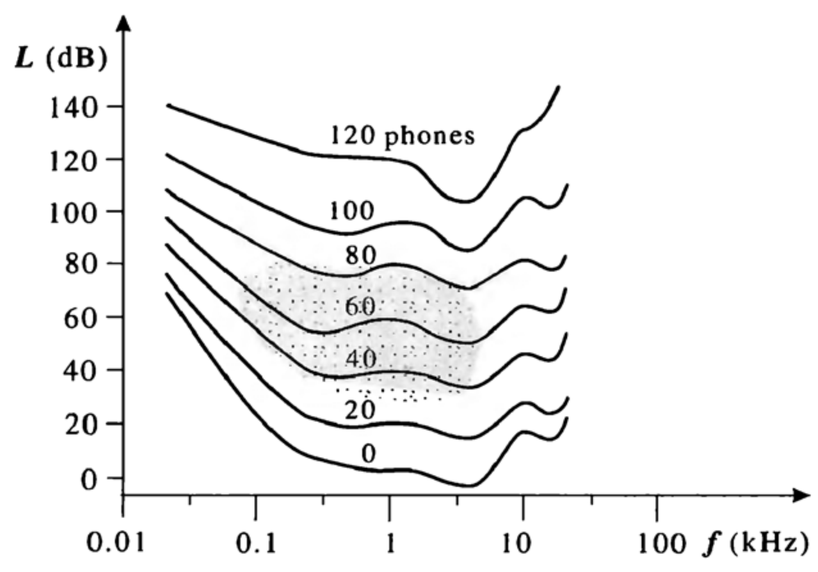


Fig. 11.5 : *Courbe d'égale sensation auditive (isophones). Domaine d'audition humaine*

Phone : unité de niveau acoustique L_s. Le phone est une unité sans dimensions.

- Le seuil d'audibilité se situe à 4 phones (correspond à $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2).

▹ La **dynamique** de l'oreille humaine est extrêmement étendue : la capacité auditive s'étend sur plus de 12 ordres de grandeurs d'intensité acoustique et correspond à des amplitudes de vibrations allant de 10^{-11}m (1/10 de rayon atomique) à 10 micromètres !

▹ Une différence de $\Delta L_s = 1$ phone est tout juste perceptible par l'oreille humaine.

- Le **seuil de sensation auditive douloureuse** se situe à 120 phones (correspond à $I \approx 1$ W/(m^2)).

- À la fréquence $f = 1000$Hz le niveau de pression acoustique est égal au niveau d'intensité acoustique.
  $L_p = L_s$ à $f = 1$ kHz

■ À f = 1000Hz on a par conséquent : les **niveaux de pression acoustique** de 40, 80, 120 dB correspondent aux **niveaux d'intensité sonore** de 40, 80, 120 phones.

● Les **intensités** I s'additionnent, $I_{tot} = I_1 + I_2 + I_3$.

● Les **niveaux** sonores s'additionnent à l'aide de → *l'additif de niveau.*

11.4.2 Évaluation de niveaux acoustiques

La **courbe d'évaluation** tient compte de la relation complexe entre le spectre sonore physique et la perception humaine.

M Aux niveaux acoustiques mesurés L_i, on ajoute un facteur d'évaluation Δ_i^* (en dB) dépendant de la fréquence. Le niveau acoustique évalué L_A est alors :

$$L_A = 10 \log \left(\sum_{i=1}^{n} 10^{(L_i+\Delta_i^*)/10} \right) \text{dB}$$

avec :

f/Hz	90	220	400	1000	3000	60000
Δ_i^*/dB	-20	-10	-5	0	+2	0

Volume sonore ou intensité du son, S : grandeur physiologique pour la comparaison subjective de sources sonores. Le volume sonore est défini de manière à ce que le doublement de sa valeur corresponde à une **sensation subjective** double.

$$S = 2^{0.1(L_S-40)} \text{ sone}$$

Échelle de sonie : échelle de sensation subjective d'intensité sonore, susceptible de mesure dans des conditions déterminées. L'unité de sonie, le **sone**, correspond à 40 phones.

▷ Un rapport de sonies égal à 2 correspond à une variation du niveau acoustique $\Delta L_s = 8 - 10$ phones.

■ Un volume sonore $S = 1$ sone correspond à un niveau acoustique $L_s = 40$ dB

11.5 Acoustique musicale

L'oreille humaine juge les sons d'après leur **volume** et leur **spectre de fréquence**.

Tout son peut être représenté par une superposition de fonctions sinusoïdales de différentes fréquences et amplitudes (**spectre de Fourier**).

Domaine de fréquence de la musique : $\approx 16\,\text{Hz} - 16\,\text{kHz}$

Classement des perceptions auditives :

- **Ton** : variation purement sinusoïdale à fréquence unique de la pression acoustique. Peut être produit par des générateurs électroniques. Aucun instrument de musique ne peut produire un ton pur, leurs sons sont composés d'harmoniques qui définissent le **timbre** de l'instrument.
- **Timbre** : superposition de plusieurs tons d'amplitudes et de fréquences différentes, mais multiples entiers du ton fondamental (harmoniques).
- **Bruit** : superposition de plusieurs tons ayant un spectre de fréquence continu.
- **Bruit blanc** : superposition de plusieurs tons ayant un spectre de fréquence continu et dont les amplitudes aux différentes fréquences sont égales.

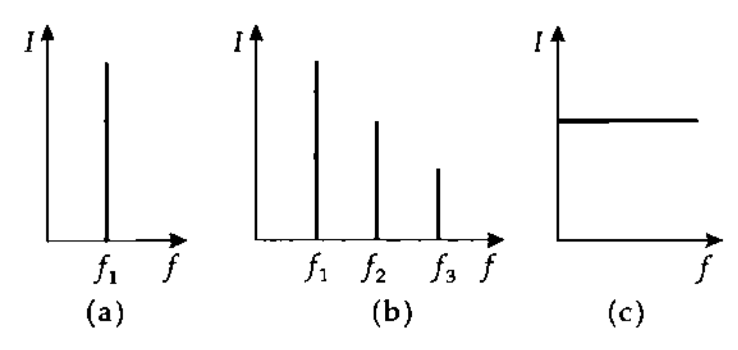


Fig. 11.6 : *Spectres de fréquences (schématique). (a) : ton, (b) : timbre, (c) : bruit blanc*

1. Gamme diatonique

Gamme : série conjointe de tons, ascendants ou descendants, disposés à des intervalles convenus dans un système musical donné. **Gamme diatonique, gamme chromatique**.

Les timbres sont classés en :

- **Sons consonant** : le rapport des fréquences des tons f_2/f_1 est exprimé par des valeurs entières N_1, N_2, mais qui restent inférieures à 8
- **Sons dissonant** : dans les cas contraires

▷ Cette définition des sons consonants et dissonants est purement subjective et dépend de l'appréciation personnelle. Elles correspondent aux goûts de la culture occidentale.

Intervalle : rapport des fréquences de deux tons purs.

Tableau des intervalles musicaux :

Rapport de fréquence	Intervalle	Sensation
1:1	prime	consonant
16:15	petite seconde	dissonant
10:9 ; 9:8	grande seconde	dissonant
6:5	petite tierce	consonant
5:4	grande tierce	consonant
4:3	quarte	consonant
3:2	quinte	consonant
8:5	petite sexte	consonant
5:3	grande sexte	consonant
9:5 ; 16:9	petite septime	dissonant
15:8	grande septime	dissonant
2:1	octave	consonant

● L'octave correspond à un doublement de fréquence.

■ $\text{La}_1(A) = 110\,\text{Hz}$, $\text{la}_2\ a = 220\,\text{Hz}$, $\text{la}_3\ a^1 = 440\,\text{Hz}$, $\text{la}_4\ a^2 = 880\,\text{Hz}$, $\text{la}_5\ a^3 = 1760\,\text{Hz}$.

● L'octave est divisée en 12 **demi-tons** (petite seconde).

Ton entier : désigne une seconde.

Désignation des tons :
La succession des tons do, do dièse ou ré bémol, ré, ré dièse ou mi bémol, mi, fa, fa dièse ou sol bémol, sol, sol dièse ou la bémol, la, la dièse ou si bémol, si et do correspond à la succession en notation anglo-saxone :

c, cis ou des, d, dis ou es, e, f, fis ou ges, g, gis ou as, a, ais ou b, h et c.

La du diapason (la_3, a^1) : normalisé à $f = 440$Hz.

2. Gamme chromatique

Gamme chromatique : l'octave est divisée en intervalles égaux de 12 demi-tons. Cette gamme **bien tempérée** a été imaginée par le musicien **Jean-Sébastien Bach**.

- Rapport de fréquence de deux demi-tons successifs de la gamme chromatique :
  $1 : {}^{12}\sqrt{2} = 1 : 1,059463$

- Rapport de fréquence entre deux **tons entiers** :
  $1 : {}^{6}\sqrt{2} = 1 : 1,222462$

Hauteur de ton : désigne la fréquence d'un ton.

Intensité d'un ton : désigne l'amplitude d'un ton.

Ton fondamental : les instruments de musique acoustique ne produisent jamais un son pur sinusoïdal, mais une superposition de fréquences multiples entier d'une fréquence fondamentale. Lorsqu'on parle du ton joué par un instrument, on fait référence à la plus petite fréquence composant ce ton (**fondamental**). Le fondamental d'un instrument a généralement la plus grande amplitude.

Harmoniques : les tons qui composent le timbre d'un instrument. Ce sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale, d'amplitudes diverses. Un analyseur de sons peut déterminer toutes les composantes du timbre d'un instrument (**décomposition en série de Fourier**).

Oscillation harmonique :

Fondamental	f_1	harmonique 1
1er harmonique	$f_2 = 2f_1$	harmonique 2
2ème harmonique	$f_3 = 3f_1$	harmonique 3

Coloration du timbre : désignation du rapport des amplitudes des tons composant le timbre d'un instrument.

■ Différents instruments d'une même famille se distinguent par la couleur de leur timbre.

Registre d'un instrument ou d'une voix : désigne l'étendue des hauteurs (fréquences) des sons émis par une même source (instrument ou voix humaine). Domaine de fréquence entre le fondamental le plus bas et le plus élevé donné par un instrument.

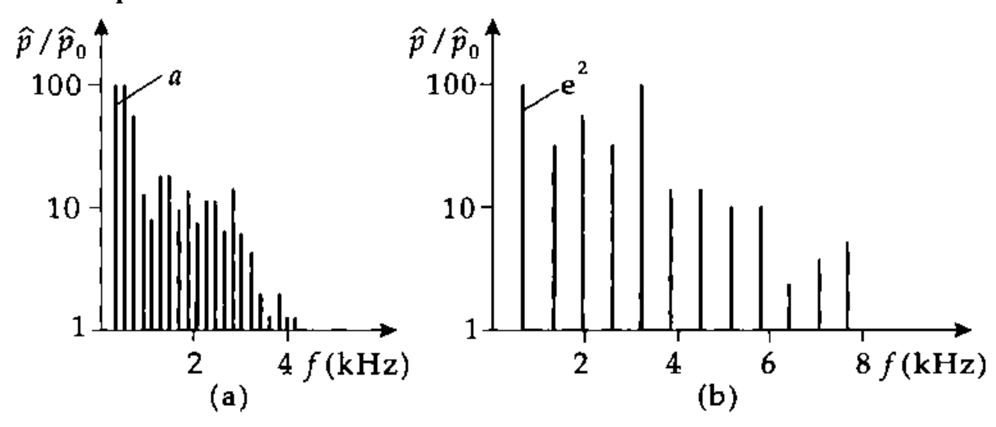


Fig. 11.7 : *Spectre de fréquence d'instruments à cordes. (a) : violoncelle, (b) : violon*

■ Le registre d'un instrument et particulièrement de la voix humaine, dépend beaucoup du savoir faire de l'artiste.

Registre de divers instruments et voix humaines :

Instrument ou voix	Fréquence basse (Hz)	Fréquence haute (Hz)
violon	200	3000
piano	30	4000
flûte	250	2500
violoncelle	70	800
contrebasse	40	300
tuba	50	400
trompette	200	1000
orgue	16	1600
basse	100	350
bariton	150	400
ténor	150	500
alto	200	800
soprano	250	1200

12 Optique

Optique : étude des caractéristiques et des propriétés de la lumière, dans le domaine des ondes életromagnétiques perceptibles par l'œil humain. Ce domaine s'étend entre les longueurs d'onde λ = 380 nm et $\lambda = 780$ nm (1 nm=10^{-9} m). Les ondes électromagnétiques, en général, couvrent un domaine de longueur d'onde plus vaste situé en-deçà et au-delà du spectre visible.

L'optique traîte des effets qui se produisent lorsque la lumière interagit avec divers milieux.

3. Caractéristiques principales de la lumière

Vitesse de propagation de la lumière (célérité) : dépend du milieu dans lequel la lumière se propage (dans certains milieux dits dispersifs, la célérité dépend aussi de la longueur d'onde).

Vitesse de la lumière dans le vide : sa valeur c est une constante fondamentale :

$$c = 299.792.458 \text{ m/s}$$

● La vitesse de propagation de la lumière dans tous les milieux est inférieure à celle dans le vide.

■ La vitesse de propagation de la lumière dans l'eau vaut $2,24 \cdot 10^8$ m/s, dans le verre $(1,85 \pm 0,25) \cdot 10^8$ m/s, dans le diamant $1,22 \cdot 10^8$ m/s.

La **longueur d'onde** λ et la **fréquence** f sont liées par la vitesse de propagation c :

Célérité de la lumière = fréquence×longueur d'onde	Symbole	Unité	Dénomination
$c = f\lambda$	k	1/m	nombre d'onde
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	λ	m	longueur d'onde
$f = \frac{1}{T}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$	ω	rad/s	pulsation
	c	m/s	vitesse de propagation
	f	1/s	fréquence
	T	s	période

4. Ondes életromagnétiques

fréquence f/Hz	longueur d'onde λ/m	dénomination
$> 10^{19}$	$< 3 \cdot 10^{-11}$	rayonnement γ
$> 10^{17}$	$< 3 \cdot 10^{-9}$	rayons X
$10^{15} \dots 10^{17}$	$3 \cdot 10^{-7} \dots 3 \cdot 10^{-9}$	ultraviolet
$\sim 0,5 \cdot 10^{15}$	$\sim 6 \cdot 10^{-7}$	lumière visible
$10^{13} \dots 10^{14}$	$3 \cdot 10^{-5} \dots 3 \cdot 10^{-6}$	infrarouge
$10^{9} \dots 10^{13}$	$0,3 \dots 3 \cdot 10^{-5}$	micro-ondes
$\sim 10^8$	3	ondes ultra-courtes
$\sim 10^7$	30	ondes courtes
$\sim 10^6$	300	ondes moyennes
$\sim 10^5$	3000	grandes ondes

Pour la subdivision des ondes ultraviolettes, voir le tableau 13.2/4.

5. Couleur spectrale

Couleur spectrale : perception sensorielle de l'œil humain en fonction de la longueur d'onde de la lumière.

Domaines de couleur

couleur	fréquence (10^{12} Hz)	longueur d'onde (10^{-9} m)
Violet	659-769	455-390
Bleu	610-659	492-455
Vert	520-610	577-492
Jaune	503-520	597-577
Orange	482-503	622-597
Rouge	384-482	780-622

6. Modèle théorique de la lumière

Théorie ondulatoire : modèle qui explique certains phénomènes optiques par la nature ondulatoire de la lumière.

Théorie corpusculaire : modèle qui explique certains phénomènes optiques en supposant que la lumière est constituée de **corpuscules** qui se propagent en ligne droite et sans interagir avec la matière.

Dualité onde-corpuscule : certaines expériences d'optique ne peuvent être expliquées que par la théorie ondulatoire, d'autres uniquement par la théorie corpusculaire. Puisqu'on a besoin de deux modèles contradictoires pour la description des phénomènes optiques, on parle de dualité onde-corpuscule. Les ondes électromagnétiques, dans certains cas, se manifestent soit par leur comportement ondulatoire, soit par leur caractère corpusculaire.

▷ La théorie ondulatoire classique échoue chaque fois que l'on cherche à expliquer des expériences lors desquelles la lumière interagit avec des particules atomiques ou subatomiques. L'effet photoélectrique et l'effet Compton en sont des exemples. En revanche, des phénomènes comme le rayonnement thermique (rayonnement du corps noir, loi de Planck) ne peuvent s'expliquer que par le modèle ondulatoire.

7. Domaines de l'optique

- **Optique classique** : décrit les phénomènes optiques dans le cadre de la physique classique.
- **Optique géométrique** : fait partie de l'optique classique. Décrit l'interaction de la lumière avec des objets dont les dimensions sont considérablement plus grande que celle de sa longueur d'onde.
- **Optique ondulatoire** : fait partie de l'optique classique. Décrit l'interaction de la lumière avec des objets de dimensions comparables à celles de sa longueur d'onde.
- **Optique quantique** : décrit les phénomènes optiques avec les méthodes de la mécanique quantique. Dans ces cas, l'interaction rayonnement-matière est décrite par l'aspect corpusculaire de la lumière.
- **Optique électronique, optique ionique** : production d'images à l'aide de faisceaux d'électrons ou d'ions réfractés à l'aide de champs électriques et/ou magnétiques (lentilles électromagnétiques). L'avantage réside dans la petitesse des longueurs d'ondes associées à ces faisceaux, qui permettent ainsi d'obtenir des pouvoirs de résolution très supérieurs à ceux obtenus avec des instruments utilisant la lumière visible.

12.1 Optique géométrique

Optique géométrique : décrit l'interaction de la lumière avec des objets dont les dimensions sont considérablement plus grande que celle de sa longueur d'onde.

■ Interaction de la lumière avec des dioptres, des prismes, des lentilles et des diaphragmes.

Chemin optique, δ : produit du trajet géométrique d d'un rayon de lumière et de l'indice de réfraction n du milieu dans lequel il se propage. Le chemin optique tient compte du fait que dans un milieu autre que le vide, la lumière se propage plus lentement et que de ce fait, le temps mis pour traverser une épaisseur d donnée de matière est plus long que celui mis pour parcourir la même distance d dans le vide.

$$\delta = d \cdot n = d \cdot \frac{c}{v}$$

1. Principe de Fermat

Du principe de Fermat on peut déduire toute l'optique géométrique :

- Le chemin optique parcouru par un rayon lumineux entre deux points quelconques A et B est stationnaire par comparaison avec les chemins optiques infiniment voisins ayant les mêmes extrémités. Compte tenu de la définition du chemin optique ceci signifie qu'un rayon lumineux suit le chemin dont le temps de parcours est le plus court ; ceci peut ne pas correspondre à la distance la plus courte.

2. Propriétés des rayons lumineux

Le principe de Fermat repose sur le concept de rayon lumineux (Fig. 12.1)

- La lumière peut être décrite par des rayons lumineux, similaires à des trajectoires de particules matérielles isolées qui, dans un milieu homogène, se propagent en ligne droite.
- Dans chaque milieu traversé, les rayons se propagent toujours perpendiculairement au plan d'onde de l'onde correspondante.
- Des rayons lumineux peuvent se croiser, mais n'interagissent pas entre eux.
- Le sens de parcours d'un rayon lumineux peut être inversé.
- À l'interface de deux milieux différents (dioptre), dans lesquels les vitesses de propagation sont différentes, la direction d'un rayon lumineux peut s'infléchir (réfraction).

▷ La règle selon laquelle deux rayons lumineux ne s'influencent pas mutuellement correspond au **principe de superposition** de la théorie ondulatoire.

▷ Les rayons lumineux sont une aide commode qui, dans certains cas, permet de prévoir de façon simple le comportement de la lumière, mais ne correspond pas à une réalité.

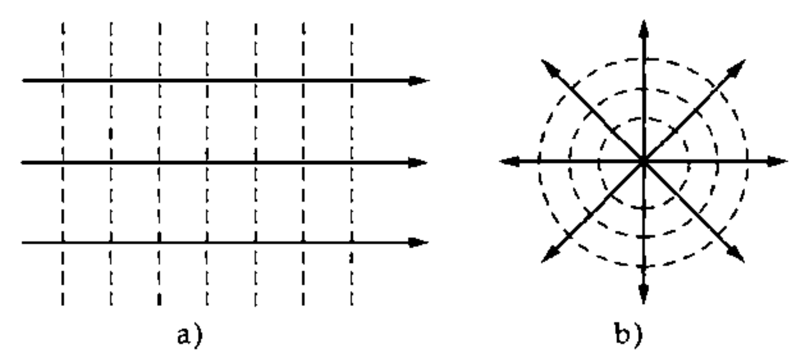


Fig. 12.1 : *Fronts d'onde (traits tiretés) et rayons lumineux (flèches) dans le cas a) : d'une onde plane, b) : d'une onde sphérique*

3. Faisceaux de rayons

Un faisceau est un ensemble de rayons lumineux (ou de particules) délimités dans l'espace, par exemple par des diaphragmes. Un faisceau peut être :

- **divergent** : faisceau dont les rayons s'écartent (divergent) à partir d'un point source
- **convergent** : faisceau dont les rayons concourent (convergent) vers un point donné de l'espace
- **parallèle** : tous les rayons constituant le faisceau se propagent parallèlement les uns aux autres
- **homocentrique** : les rayons convergent ou divergent vers un même centre (terme générique pour les faisceaux convergents et divergents)
- **diffus** : les rayons se propagent dans des directions aléatoires (terme opposé à homocentrique).

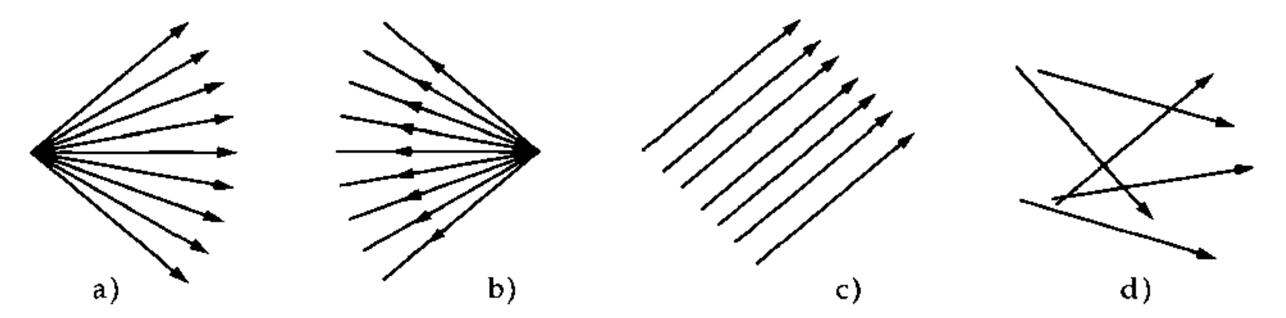


Fig. 12.2 : *Faisceaux de lumière a) : divergent, b) : convergent, c) : parallèle, d) : diffus*

12.1.1 Images optiques

Image optique d'un point A : donnée par un système optique, c'est le point de rencontre A' des rayons issus de A (image réelle) ou de leurs prolongements (image virtuelle). Le point *objet* A et le point *image* A' sont les points conjugués.

Point objet A : tout point d'où est issue la lumière.

Espace objet : ensemble de tous les points objets.

Point image A' : point vers lequel converge la lumière issue du point objet.

Espace image : ensemble de tous les points images. L'espace objet et l'espace image sont les parties de l'espace dont les points se correspondent par les constructions de l'optique géométrique.

1. Images réelles et images virtuelles

Image réelle : les rayons sont convergents vers le point objet. Une image réelle peut être projetée sur un écran. (Fig. 12.3 e))

Image virtuelle : les rayons sont divergents vers le point image. Ce sont les prolongements des rayons qui convergent vers le point image et non pas les rayons eux-mêmes. Une image virtuelle n'est pas projetable sur un écran, elle peut être observée à l'œil. Un miroir plan reflète une image virtuelle d'un objet réel placé devant lui. (Fig. 12.3 a)- d))

Point image virtuel, A' : point de rencontre des prolongements des rayons issus de l'objet et transmis par le système optique.

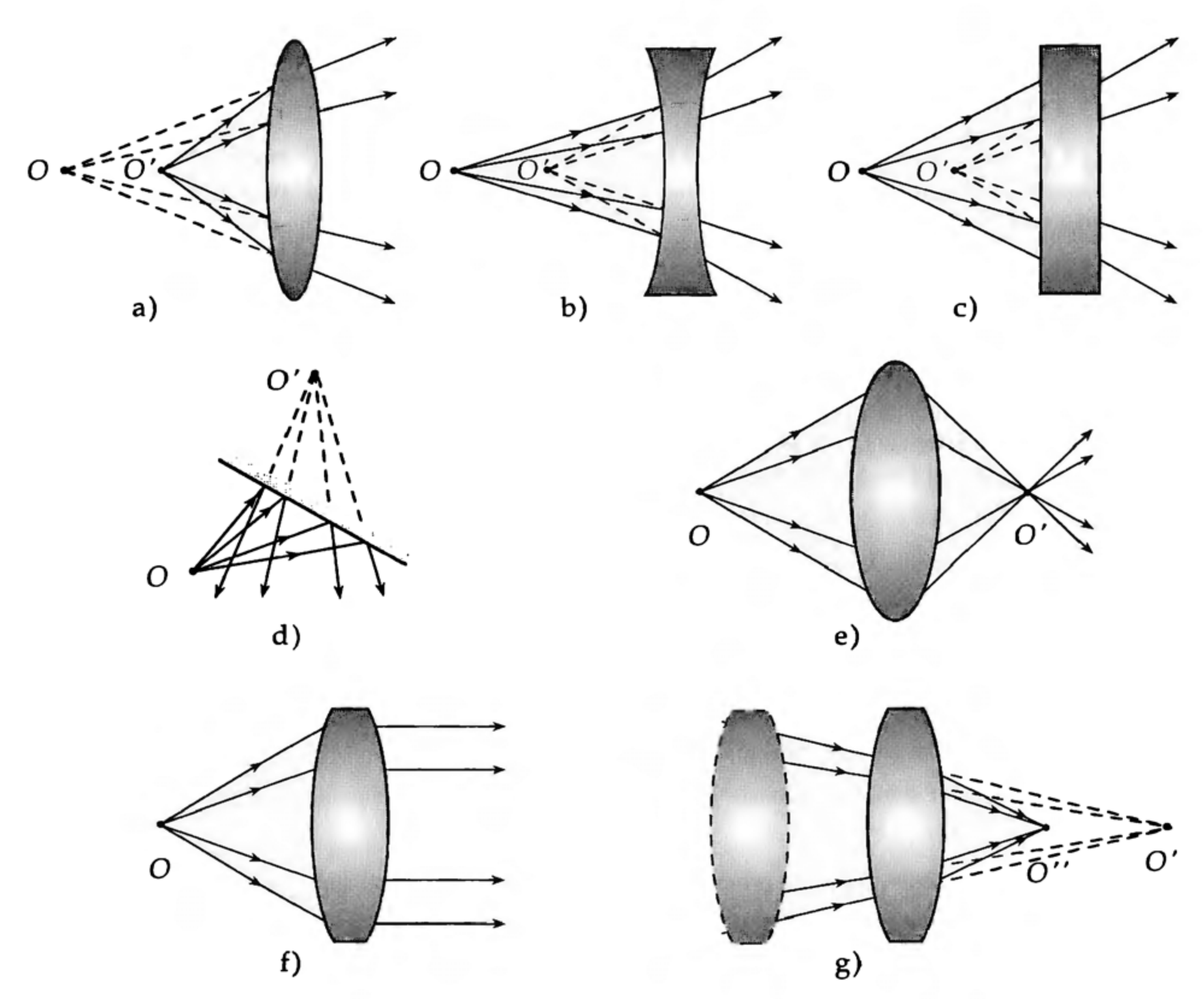


Fig. 12.3 : *Images optiques. a)-d) : images virtuelles, e) : image réelle, f) : image se formant à l'infini, g) : image O″ d'un objet virtuel O′*

2. Éléments optiques et leurs caractéristiques

Élements optiques : lentilles, miroirs, dioptres, prismes, diaphragmes et leurs combinaisons pour former un groupe fonctionnel.

■ Objectif, Oculaire, Condenseur.

Axe optique : axe de symétrie des éléments optiques d'un système par rapport à une rotation ; par exemple la ligne joignant les centres des éléments d'un système optique.

Système centré : système pour lequel les axes optiques de tous ses éléments sont confondus. Système composé de surfaces de révolution autour du même axe, **l'axe optique**, séparant des milieux d'indice de réfraction différents. Si le dernier élément du système est réfléchissant, on a un **système catadioptrique**.

■ Les centres de courbure de toutes les surfaces réfringentes se situent sur une même droite : l'axe optique.

3. Foyers d'éléments optiques

Foyer objet $\bar{F}$: point de l'axe optique dont l'image, donnée par le système optique, se forme à l'infini. Réciproquement, le foyer image est le point de l'axe optique du système vers lequel convergent tous les rayons venant de l'infini.

Foyer image F' : point de l'axe optique du système vers lequel convergent tous les rayons venant de l'infini. Tous les rayons incidents au système, parallèles à l'axe optique, convergent au foyer image.

Plans principaux : plans (objet et image) conjugués d'un système optique pour lesquels le grandissement transversal est égal à $+1$. Pour la construction des images, à la place des surfaces réfringentes réelles (dioptres) souvent courbes, on introduit des surfaces planes fictives sur lesquelles à lieu le changement de direction des rayons lumineux. Ces surfaces sont perpendiculaires à l'axe optique ; leurs positions doivent être déterminée de façon à ce que les images construites à l'aide de ces plans principaux coïncident avec la réalité des images.

▷ Les plans principaux constituent une aide pour la construction des images, qui permettent de simplifier le calcul ou la représentation graphique de la position de l'image donnée par un système optique complexe. Le changement de direction des rayons, dans la réalité, n'a pas lieu sur les plans principaux, mais à la surface de séparation des milieux optiques (dioptres).

Points principaux : intersections des plans principaux (objet et image) et de l'axe optique d'un système. Le grandissement transversal y est égal à 1.

Les lentilles comportent deux surfaces réfractantes (dioptres). Il leur correspond deux plans et deux points principaux :

- **point principal objet** P : point principal situé le plus près de l'objet, dans l'espace objet.
- **point principal image** P' : point principal situé dans l'espace image (le plus près de l'image).

4. Distances focales et distances objet

Distance ou longueur focale objet ou **focale** $\bar{f}$: distance entre le point principal objet et le foyer objet.

Distance focale image f' : distance entre le point principal image et le foyer image.

▷ Dans la plupart des cas, une petite partie seulement des rayons issus de l'objet participent à la formation de l'image. Généralement, ce sont les rayons dont l'angle d'inclinaison par rapport à l'axe optique du système est faible (rayons paraxiaux). Les calculs peuvent alors être considérablement simplifiés.

Rayons paraxiaux : rayons issus de l'objet dont l'angle α avec l'axe optique est suffisamment faible pour que l'approximation $\alpha \approx \tan\alpha$ puisse être utilisée sans nuire à la précision des calculs.

▷ Le domaine des rayons paraxiaux peut ne pas être défini de façon précise, puisque son étendue dépend de la précision souhaitée dans les calculs.

Approximation de Gauss : concerne le domaine des rayons paraxiaux. Elle admet qu'un système optique centré établit une correspondance homographique entre les espaces objet et image. Elle est valable pour des rayons proches de l'axe optique et dont l'angle d'inclinaison reste faible.

▷ Dans la suite, nous considérerons essentiellement des systèmes centrés dans l'approximation de Gauss.

12.1.1.1 Règles et conventions

- **Sens de propagation** : par convention nous désignons le sens gauche - droite comme sens positif de propagation de la lumière.
- Les segments orientés de la gauche vers la droite seront comptés positivement, négativement dans le sens contraire.
- La direction y est comptée positivement vers le haut.
- Les rayons de courbure (d'une lentille ou d'une surface réfléchissante) sont comptés positivement si leur centre de courbure C est à droite du sommet S, et négativement si C est à gauche de S.
- Les grandeurs conjuguées (grandeurs correspondantes dans les espaces objet et image), sont désignées par une lettre dans l'espace objet et par la même lettre primée dans l'espace image.
- Les grandeurs qui interviennent par paire, mais ne sont pas l'image l'une de l'autre (non conjuguées), sont désignées par une lettre surmontée d'un trait dans l'espace objet et la même lettre primée dans l'espace image : par exemple, $\bar{F}$ et F'
- Les angles sont comptés positivement dans le sens trigonométrique (inverse des aiguilles d'une montre).

1. Dénomination des grandeurs usuelles

■ Un système optique donne d'un objet de taille y une image de taille y'. y et y' sont des grandeurs conjuguées.

symbole	signification
C, C'	centre de courbure
S, S'	sommets de la lentille
d	épaisseur de la lentille
n	indice de réfraction
a (ou p),a' (ou p')	distances objet et image
$\bar{f}$,f'	distances focales objet et image
y	grandeur de l'objet
y'	grandeur de l'image
$\bar{F}$, F'	foyer objet, foyer image
H, H'	point principal objet, image
O	point de l'axe optique
s, s'	distances aux plans principaux
i	distance des plans prinipaux
β'	grossissement
Γ'	grandissement

12.1.2 Réflexion

Miroir : surface plane ou gauche, dont la rugosité est faible comparée à la longueur d'onde des rayons incidents.

Pour décrire géométriquement la réflexion d'un rayon lumineux par un miroir, il faut définir la normale à la surface du miroir au point d'incidence du rayon.

Normale : la normale à la surface réfléchissante au point d'incidence.

Angle d'incidence ou **incidence** α : angle que forme le rayon incident et la normale à la surface réfléhissante.

Angle de réflexion α' : angle formé par le rayon réfléchi et la normale à la surface réfléchissante.

Lois de la réflexion :

- L'angle d'incidence et l'angle de réflexion sont égaux : $\alpha = \alpha'$.
- Le rayon incident, le rayon réfléchi et la normale à la surface réfléchissante sont dans un même plan.

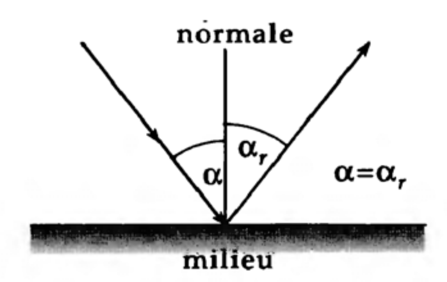


Fig. 12.4 : *Lois de la réflexion, $\alpha = \alpha'$, rayon incident, rayon réfléchi et normale sont dans un même plan*

▹ Dans la majorité des applications, la réflexion est indépendante de la longueur d'onde. De ce fait, au contraire de la réfraction, il n'y a pas d'aberrations chromatiques. Cependant, pour des applications particulières, on peut construire des miroirs qui ne réfléchissent qu'une partie du spectre visible.

12.1.2.1 Miroir plan

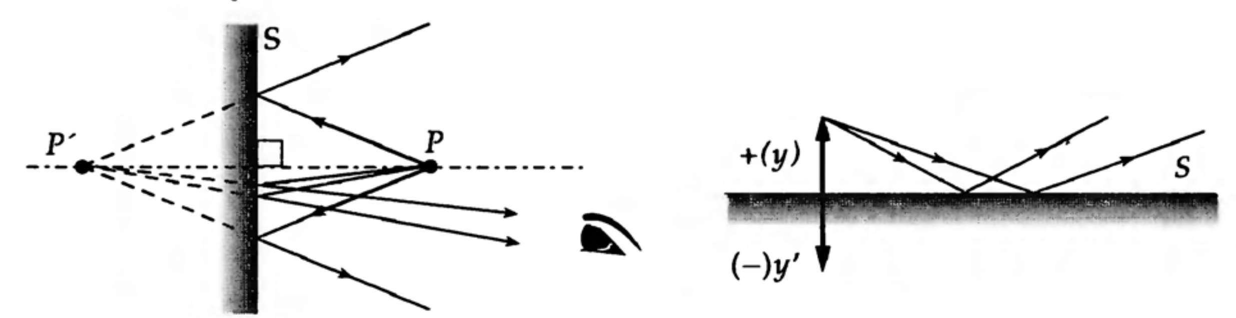


Fig. 12.5 : *Construction de l'image formée par un miroir plan : point objet P et point image virtuelle P'. L'image est formée à partir de deux faisceaux homocentriques, correspondants aux lois de la réflexion. Suivant sa position, l'œil intercepte une partie de ce faisceau et perçoit alors l'image.*

Correspondance entre point objet et point image :

- Les points objet et image (virtuelle) se trouvent à des distances égales de la surface réfléchissante et sur la même normale.

▹ Puisque les rayons ne constituent qu'un moyen de construire l'image, on peut tracer un nombre arbitraire de rayons issus de l'objet dans des directions quelconques. Tous les rayons tombant sur le miroir forment néanmoins le même point image (virtuelle).

12.1.2.2 Miroir concave

Ils font partie des miroirs à surface gauche : miroirs sphériques, miroirs paraboliques, etc.

Miroir concave : désigne un miroir qui focalise un faisceau de rayons incidents parallèles en un point unique appelé foyer.

■ Les principaux miroirs concaves ont une forme de calotte sphérique, certains peuvent être constitués d'une surface paraboloïde obtenue par la rotation d'une parabole autour de son axe de symétrie.

1. Caractéristiques des miroirs concaves

Sommet ou **pôle** S d'un miroir : point de rencontre de l'axe optique (axe de symétrie) et de la surface du miroir.

Foyer d'un miroir concave : par définition le point de rencontre des rayons réfléchis correspondant à un faisceau de rayons incidents parallèles.

Distance focale f : distance du foyer au sommet du miroir.

▷ Les plans principaux H et H' d'un miroir sont confondus avec son sommet S.

Distance focale d'un miroir concave sphérique = −demi-rayon			L
	Symbole	Unité	Dénomination
$\bar{f} = -\frac{r}{2}$	$\bar{f}$	m	distance focale
	r	m	rayon de courbure

● Pour les miroirs concaves, les distances focales objet et image sont égales : $\bar{f} = f'$.

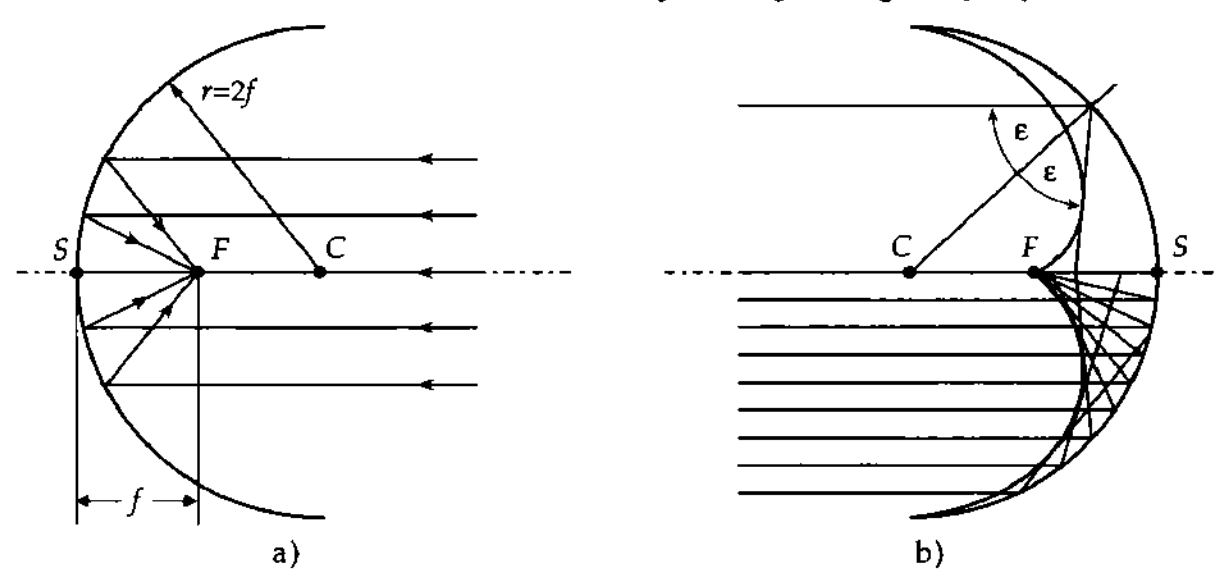


Fig. 12.6 : *Miroir concave sphérique. C : centre de la surface sphérique, F : foyer. a) : rayon de courbure r et distance focale f, b) : surface caustique (enveloppe des rayons réfléchis) et aberration géométrique pour les rayons loins de l'axe*

▷ En réalité, la réflexion ne se produit pas au plan principal, mais à la surface du miroir. Pour des rayons paraxiaux, la différence est négligeable.

2. Construction de l'image formée par un miroir concave

● **Construction de l'image** à l'aide de deux rayons particuliers (Fig. 12.7) :

- **Rayon focal** : tombe sur le miroir en passant par le foyer, il est réfléchi parallèlement à l'axe optique.
- **Rayon parallèle** à l'axe optique, après réflexion il passe par le foyer.

- Les rayons passant par le centre de courbure du miroir sphérique (**rayons centraux**) se réfléchissent en eux-mêmes.

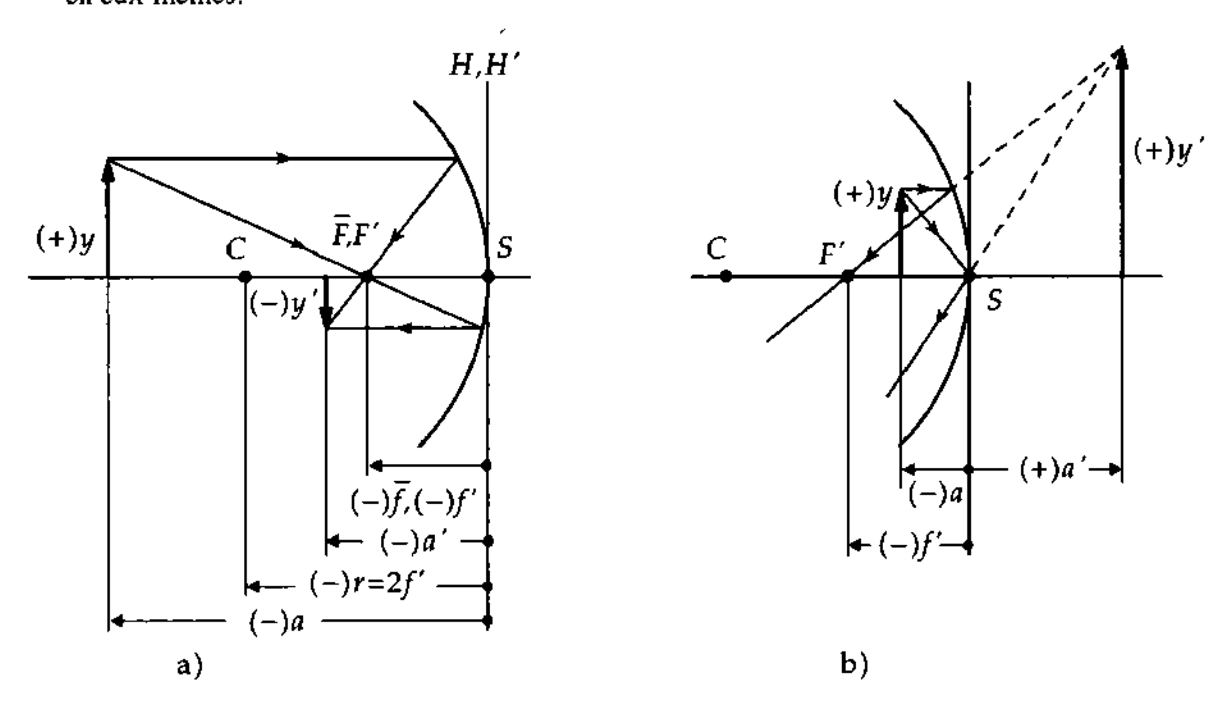


Fig. 12.7 : *Construction de l'image formée par un miroir sphérique concave (a) : objet situé à une distance du sommet S plus grande que deux fois la distance focale, (b) : objet située à une distance plus petite que la distance focale*

Relation de conjugaison : établit la correspondance entre les distances au sommet de l'objet a et de l'image a' en fonction de la distance focale f.

Relation de conjugaison pour un miroir concave			L^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\frac{1}{a'} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f'}$	a	m	distance de l'objet au sommet
	a'	m	distance de l'image au sommet
	f'	m	distance focale

Grandissement Γ' du miroir concave :

Grandissement = taille de l'image/taille de l'objet			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Gamma' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$	Γ'	1	grandissement
	y'	m	taille de l'image
	y	m	taille de l'objet
	a	m	distance objet - sommet
	a'	m	distance image - sommet

- À cause de la convention de signe, le grandissement est positif lorsque l'image est de même sens que l'objet et négatif quand l'image est inversée par rapport à l'objet.

position objet a	position image a'	image	grandissement Γ
$-\infty < a < 2f'$	$2f' < a' \leq f'$	réelle, renversée	$-1 < \Gamma < 0$
$2f'$	$2f'$	réelle, renversée	-1
$2f' < a < f'$	$-\infty < a' \leq 2f'$	réelle, renversée	$-\infty < \Gamma < 1$
$f' < a < 0$	$0 < a' < \infty$	virtuelle, droite	$1 < \Gamma < \infty$

3. **Rayons non paraxiaux**

- **Miroir concave sphérique** ou **miroir sphérique** : plus les rayons incidents sont éloignés de l'axe optique, plus l'intersection des rayons réfléchis avec l'axe optique s'éloigne du foyer. Au sens de l'approximation de Gauss ceci constitue une aberration (aberration sphérique). Les rayons émergents ne convergent plus en un point, mais sont tangents aux deux nappes d'une **caustique** (Fig. 12.6 b)).
- **Miroir parabolique** : miroir concave, dont la surface est décrite par la rotation d'une parabole d'équation $y^2 = 2cx$ autour de l'axe x (axe optique). Le coefficient parabolique c est le rayon de courbure au voisinage du sommet de la parabole (Fig. 12.8).

▷ Dans l'approximation de Gauss un miroir parabolique de coefficient parabolique c et un miroir sphérique de rayon $r = c$ sont équivalents. En particulier, les mêmes relations de conjugaison s'appliquent.

▷ Tous les rayons parallèles à l'axe optique d'un miroir parabolique se coupent au foyer, il n'y a pas d'aberration sphérique. En revanche, des rayons parallèles, mais même faiblement inclinés par rapport à l'axe optique, subissent une forte aberration de **coma**.

12.1.2.3 Miroir convexe

Miroir convexe : constitué de la surface externe d'un miroir sphérique ou de la partie externe de toute surface de révolution (Fig. 12.9).

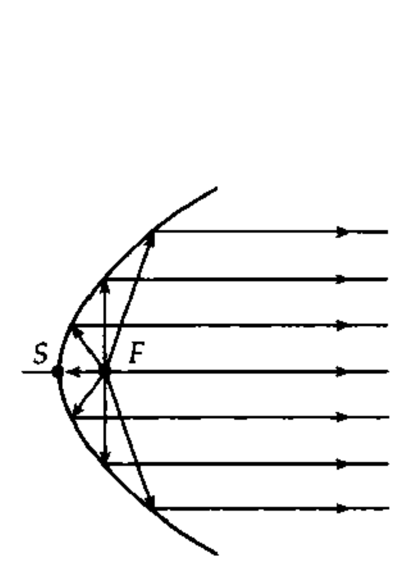


Fig. 12.8 : *Production d'un faisceau parallèle avec un miroir parabolique*

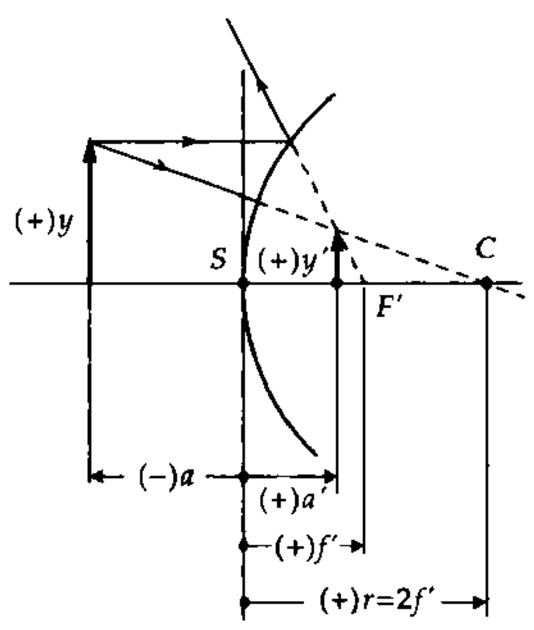


Fig. 12.9 : *Construction de l'image donnée par un miroir convexe à l'aide du rayon central et du rayon focal*

- Une lumière incidente parallèle n'est pas focalisée, mais diverge.
- La distance focale d'un miroir convexe est **positive**.
  $f = +\frac{r}{2}$
- Avec un miroir convexe, on n'obtient que des images virtuelles, droites et plus petites que l'objet.

12.1.3 Réfraction

Réfraction : transmission d'une onde ou d'un corpuscule d'un milieu 1 dans un autre milieu 2. La direction des rayons est modifiée lors du passage à l'interface des deux milieux.

▹ En général, une partie seulement de la lumière pénètre dans le milieu 2 ; une certaine partie est réfléchie à l'interface. (→ *Réflexion totale*)

12.1.3.1 Indice de réfraction

L'**indice de réfraction** (absolu) n, caractérise la réfraction de la lumière lors de son passage du vide vers le matériau considéré. C'est le rapport de la vitesse de la lumière dans le milieu à celle dans le vide.

■ L'indice de réfraction du vide est égal à 1, celui de l'air à 1,0003, de l'eau à 1,333 et du diamant à 2,417. Les indices des verres se situent entre 1,4 et 1,9.

Pour d'autres valeurs d'indices voir le tableau 13.2/1.

Indice de réfraction et vitesse de propagation			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$n_{\text{milieu}} = \frac{c_{\text{vide}}}{c_{\text{milieu}}}$	n_{milieu}	1	indice
	c_{vide}	m/s	vitesse de phase dans le vide
	c_{milieu}	m/s	vitesse de phase dans le milieu

▹ L'indice de réfraction dépend généralement de la longueur d'onde de la lumière (loi de Cauchy) (→ *Dispersion*)

Angle de réfraction α' : angle formé par le rayon réfracté et la normale à la surface de séparation des deux milieux.

Angle d'incidence α : angle formé par le rayon incident et la normale à la surface de séparation des deux milieux.

1. Loi de la réfraction

La **loi de la réfraction**, ou **loi de Descartes** (parfois loi de Snell), définit le comportement angulaire des rayons lors de la réfraction (Fig. 12.10) :

Loi de Descartes			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
	α	rad	angle d'incidence
	α'	rad	angle de réfraction
$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$	n_1	1	indice du milieu 1
	n_2	1	indice du milieu 2
	c_1	m/s	vitesse de phase du milieu 1
	c_2	m/s	vitesse de phase du milieu 2

- Le rapport du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction est une constante, qui ne dépend que des propriétés des deux milieux.
- Le rayon incident, le rayon réfracté et la normale à la surface de séparation sont dans un même plan ; le rayon réfléchi se trouve dans ce même plan.

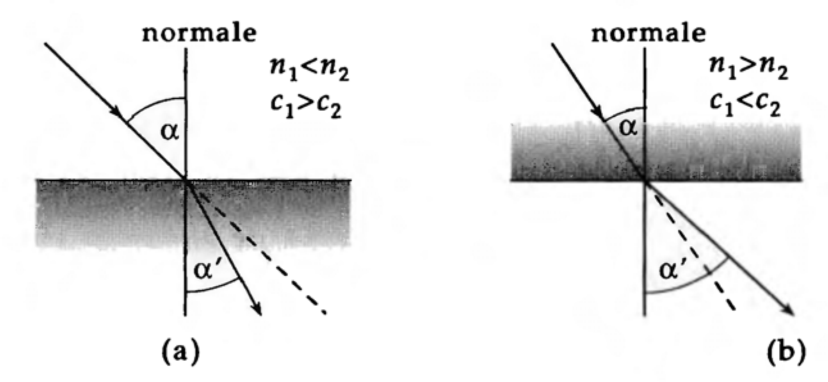


Fig. 12.10 : *Loi de la réfraction de Descartes. Le rayon incident est réfracté à la surface de séparation de deux milieux différents*

- Lors du passage vers un milieu 2 optiquement plus dense ($n_1 < n_2, v_1 > v_2$), le rayon réfracté se rapproche de la normale ; lors du passage vers un milieu optiquement moins dense, le rayon s'écarte de la normale.

Indice relatif : rapport des indices de réfraction de deux milieux n_2/n_1.

12.1.3.2 Formules de Fresnel

Toute réflexion diminue l'intensité du faisceau réfléchi :

- dans le cas des métaux, par absorption dans les couches métalliques superficielles.
- dans le cas de milieux vitreux (diéletriques), à cause des différences d'indice de réfraction, une partie de la lumière est transmise.

I. Formules générales pour l'intensité de lumière

Les formules de Fresnel sont relatives à la *réflexion vitreuse*, elles donnent les rapports entre les amplitudes du champ électrique de l'onde réfléchie ou transmise et celle du champ électrique de l'onde incidente. Il faut distinguer les composantes polarisées parallèlement et perpendiculairement au plan d'incidence (Fig. 12.11). Les intensités sont proportionnelles au carré des amplitudes. Ces formules sont déduites des équations de Maxwell.

Formules de Fresnel pour l'intensité de la lumière				1
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$R_\parallel = \frac{\tan^2(\theta_i-\theta_r)}{\tan^2(\theta_i+\theta_r)}$$ $$R_\perp = \frac{\sin^2(\theta_i-\theta_r)}{\sin^2(\theta_i+\theta_r)}$$	θ_i	rad	angle d'incidence	
	θ_r	rad	angle de réfraction	
	$R_\parallel$	1	coeff. de réflexion, polarisation parallèle au plan d'incidence	
	$R_\perp$	1	coeff. de réflexion, polarisation perpendiculaire au plan d'incidence	

Les intensités transmises sont alors :

$$T_{\|} = 1 - R_{\|} T_{\perp} = 1 - R_{\perp}$$

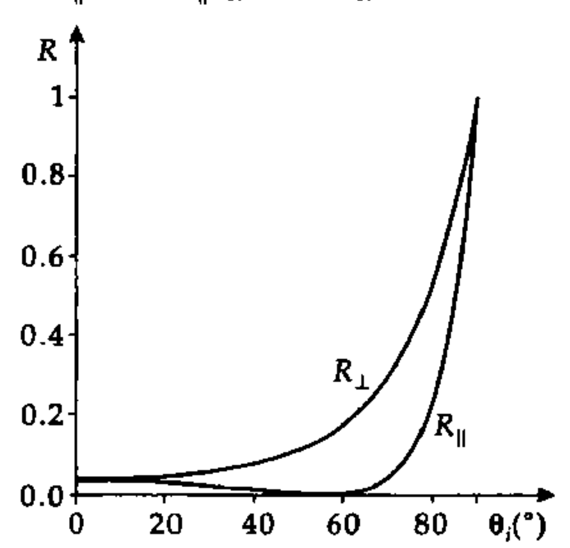


Fig. 12.11 : *Coefficients de réflexion en fonction de l'état de polarisation de la lumière, de l'angle d'incidence à une interface air- verre*

2. Formules de Fresnel en incidence normale

Lorsque l'incidence est normale ($\theta_i = 0$), on a :

$$R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2, \quad T = \frac{4n}{(n+1)^2}, \quad n = n_2/n_1$$

▷ Parce que la courbe (Fig. 12.11) est relativement plate pour un grand domaine angulaire, cette approximation est souvent utilisée.

■ À une interface air-verre, au moins 4 % de l'intensité de la lumière est perdue par réflexion. C'est pourquoi les lentilles de la plupart des instruments d'optique sont traitées et comportent des couches minces antireflet. Exemple : dans un objectif photographique courant à trois lentilles, sans traitement antireflet, 25 % de l'intensité serait perdue par réflexion.

▷ Pour un angle d'incidence déterminé, **l'angle de Brewster** θ_B, la composante $R_{\|} = 0$. De ce fait la lumière réfléchie est polarisée linéairement perpendiculairement au plan d'incidence. **Angle de Brewster :** $\tan\theta_B = n_2/n_1$.

12.1.3.3 Arc en ciel

Arc en ciel : phénomène d'optique atmosphérique dû à la réfraction avec dispersion et à la réflexion totale de la lumière sur des gouttes d'eau. En première approximation, l'arc en ciel est une concentration de la lumière du Soleil par la réfraction, la réflexion et la dispersion sur la surface sphérique de gouttes d'eau. L'arc en ciel principal est formé par une réflexion unique à l'intérieur de la goutte d'eau, la double réflexion donne lieu à un arc en ciel secondaire, de plus faible intensité. La décomposition de la lumière blanche est due à la dispersion des différentes longueurs d'onde ; la suite des couleurs va du rouge, orange, jaune, vert, indigo et violet de l'intérieur de l'arc principal vers l'extérieur. Dans l'arc secondaire, produit par double réflexion totale, la séquence des couleurs est inversée.

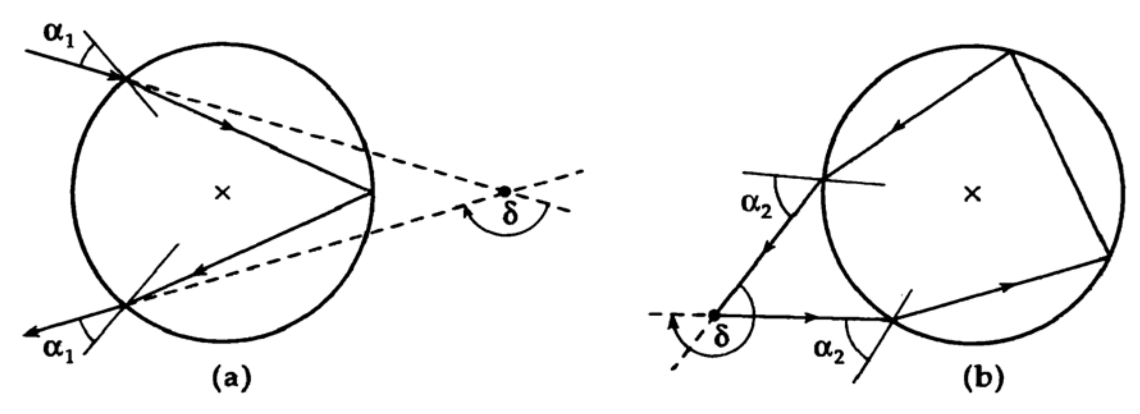


Fig. 12.12 : *Marche des rayons dans une goutte d'eau (sphérique). (a) : arc en ciel principal, (b) : arc en ciel secondaire*

L'**arc en ciel principal** a un rayon d'environ 42° autour d'une ligne joignant le Soleil à l'observateur, sa largeur est de 1,5°.

L'**arc en ciel secondaire** a un rayon d'environ 52° et une largeur de 3°.

12.1.3.4 Réflexion totale

Angle limite de réflexion totale α_l : l'angle d'incidence auquel correspond l'angle de réfraction $\pi/2$.

Réflexion totale : se produit lorsque le rayon passe d'un milieu optiquement dense vers un milieu optiquement moins dense et que son angle d'incidence est au moins égal à l'angle limite de réflexion totale.

Angle limite de réflexion totale			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\sin \alpha_l = \frac{n_{\text{milieu2}}}{n_{\text{milieu1}}}$	α_g	rad	angle de réflexion totale
	n_{milieu1}	1	indice du milieu 1
	n_{milieu2}	1	indice du milieu 2

Angle limite de réflexion totale de quelques milieux, le milieu extérieur étant l'air :

Milieu	Angle limite α_l	Milieu	Angle limite α_l
diamant	23°	verre Crown léger	40°
verre Flint lourd	34°	glycérine	43°
sulfure de carbone	38°	eau	49°

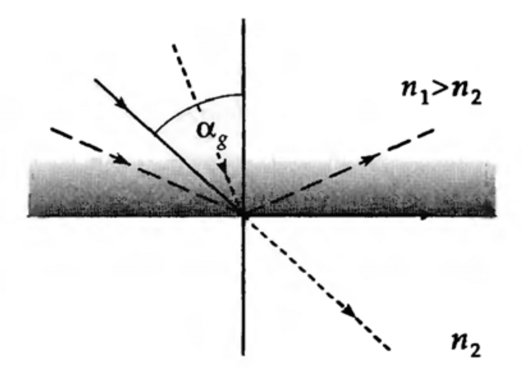


Fig. 12.13 : *Angle limite de réflexion totale θ_l dans le cas ($n_1 > n_2$). Le trait tireté correspond à une incidence $\theta > \theta_l$, les pointillés à $\theta < \theta_l$*

▷ Les angles limites de réflexion totale peuvent être calculés à partir des valeurs des indices de réfraction (Tab. 13.2/1).

■ L'indice de l'air est 1,0003, celui de la glace 1,310 ; un rayon de lumière venant de la glace et rencontrant l'interface glace-air, sera totalement réfléchi dans la glace si son angle d'incidence est supérieur à :
$\theta_l = \arcsin \frac{n_{air}}{n_{glace}} = \arcsin \frac{1,0003}{1,310} = 0,868851\, rad = 49,78°$

▷ La réflexion totale est utilisée dans des systèmes optiques pour modifier la direction de la lumière. Les **prismes à réflexion** font subir aux rayons de 1 à 4 réflexions totales. On les utilise soit pour imposer une déviation constante, soit pour changer l'orientation des images sans déviation (prisme redresseur).

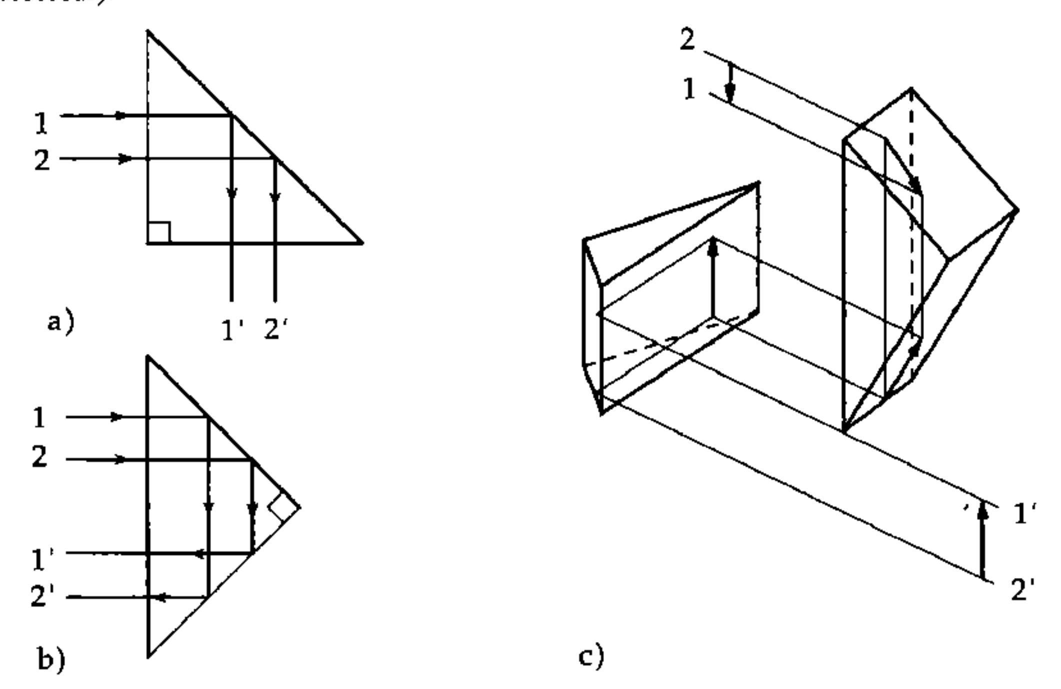


Fig. 12.14 : *Déviation des rayons par réflexion totale dans des prismes. a) : déviation de $\pi/2$, b) : déviation de π, c) : prisme de Porro (redressement de l'image)*

12.1.3.5 Guide de lumière

Les guides de lumière sont constitués de surfaces réfléchissantes arrangées de façon à diriger la lumière dans une direction donnée (le long de l'axe de symétrie du dispositif).

■ Tube dont la paroi intérieur est réfléchissante.

■ Les **fibres optiques** constituent l'application la plus importante des guides de lumière et sont utilisées pour le transport de l'information.

1. Mode de fonctionnement des guides de lumière

a) Constitution d'une fibre optique : on peut assimiler une fibre optique à une tige cylindrique transparente, à l'intérieur de laquelle la lumière, entrant par une section droite, chemine par une suite de réflexions totales sur la paroi interne. Les conditions de réflexion totale peuvent être modifiée par l'adjonction d'une gaine d'indice de réfraction convenable (Fig. 12.15). Le facteur de transmission τ d'une

fibre optique dépend de son indice de réfraction n, de sa constante d'absorption μ et de sa longueur l. Pour un rayon d'angle d'incidence ϑ_0 on a :

$$\tau(\vartheta_0) = \exp(-\mu n l/\sqrt{n^2 - \sin^2\vartheta_0})$$

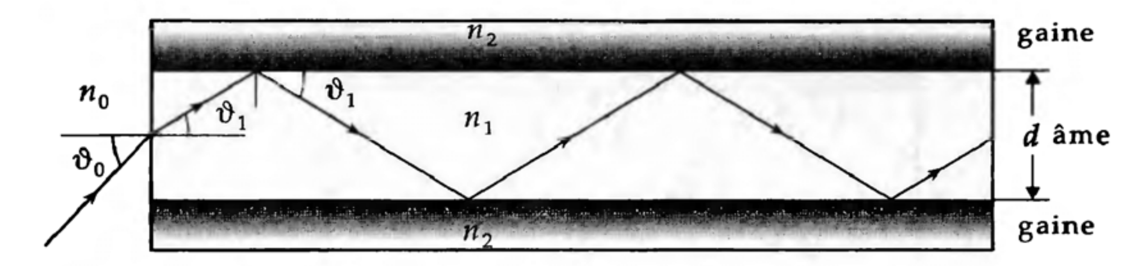


Fig. 12.15 : *Fibre optique d'indice de réfraction n_1, revêtue d'une gaine d'indice $n_2 < n_1$*

Si l'angle d'incidence ϑ_1 sur l'interface fibre-gaine est suffisamment petit, il y a réflexion totale et la lumière ne peut ressortir qu'à l'autre extrémité de la fibre.

L'**angle limite de réflexion totale**, ϑ_1 à l'interface fibre-gaine est donné par l'équation :

$$n_1 \sin(90° - \vartheta_1) = n_2 \quad \Rightarrow \quad \cos\vartheta_1 = n_2/n_1.$$

À la section droite d'entrée de la fibre, la loi de réfraction s'écrit $n_0 \sin\vartheta_0 = n_1 \sin\vartheta_1$. La combinaison de ces deux relations conduit à la définition de l'**ouverture numérique** $A.N._F$ de la fibre :

$$A.N._F = n_0 \sin\vartheta_0 = n_1\sqrt{1-\cos^2\vartheta_1} = n_1\sqrt{1-(n_2/n_1)^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = \sqrt{n_{\text{fibre}}^2 - n_{\text{gaine}}^2}$$

▷ Seuls les rayons pour lesquels $n_0 \sin\vartheta_0$ est plus petit ou égal à $A.N._F$ sont guidés par la fibre. Pour des angles d'incidence ϑ_0 plus grand, la condition de réflexion totale n'est pas remplie.

▷ Cette remarque ne vaut que dans l'approximation des faisceaux, c'est à dire pour des dimensions de la fibre nettement plus grandes que la longueur d'onde de la lumière utilisée. Dans le cas important des fibres en *single-mode* cette condition n'est pas remplie ; dans ce cas, l'indication d'une ouverture numérique n'a pas de sens et devrait être remplacée par les caractéristiques du **mode propre** du guide de lumière (par exemple, par la largeur à $1/e$ de l'approximation de Gauss).

■ Le principe des guides de lumière fut démontré dès 1870 par John Tyndall à Londres. Le guide de lumière était constitué d'un jet d'eau assimilable à une fibre optique (fibre, $n = 1.33$) dans l'air (gaine, $n = 1.00$).

▷ Si un guide de lumière est tordu, la condition de réflexion totale peut ne plus être remplie pour une partie des rayons. Il s'ensuit une perte de lumière (une partie de la lumière s'échappe vers la gaine). Plus la différence entre les indices de la fibre et de la gaine est grande, plus le guide de lumière sera insensible aux pertes de lumière par déformation.

b) Conditions aux limites de l'optique ondulatoire : si la longueur de cohérence de la lumière utilisée est plus grande que le diamètre de la fibre, la **condition aux limites de l'optique ondulatoire** doit être satisfaite.

▷ Après deux réflexions à l'interface, le front d'onde doit interférer constructivement avec la partie non réfléchie (Fig. 12.16), c'est à dire que leur différence de marche doit être un multiple entier $m \cdot \lambda$ de la longueur d'onde λ (polarisation et déphasage sont négligés).

Alors on a :

$$n_1 \sin \vartheta_1 = \frac{m\lambda}{2d} \leq A.N._{\text{F}} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{2d}{\lambda}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

L'entier N le plus grand qui satisfait à cette condition est le nombre des directions possibles des rayons. Si seul $N = 0$ est possible, on a affaire à un guide de lumière en **single-mode**.

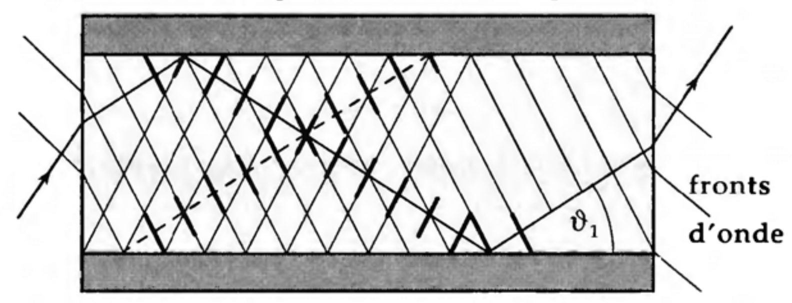


Fig. 12.16 : *Quantification de l'angle de propagation : la partie réfléchie de l'onde doit interférer constructivement avec la partie non réfléchie*

▷ La description quantitative des guides de lumière (aussi guides d'ondes) avec un nombre limité d'angles de propagation, particulièrement des guides *single-mode*, découle de la résolution des équations de Maxwell avec les conditions aux limites données. Au lieu des angles de propagation de l'optique géométrique, on obtient les **modes propres** du guide d'ondes. Ceux-ci sont les distributions possibles des champs électriques et magnétiques. Il y a une analogie avec les fonctions de probabilités d'une particule dans un puits de potentiel en mécanique quantique.

▷ La distribution d'intensité calculée à l'aide des équations de Maxwell, pour un guide d'onde en *single-mode*, peut être décrit en bonne approximation par une gaussienne (Fig. 12.17).

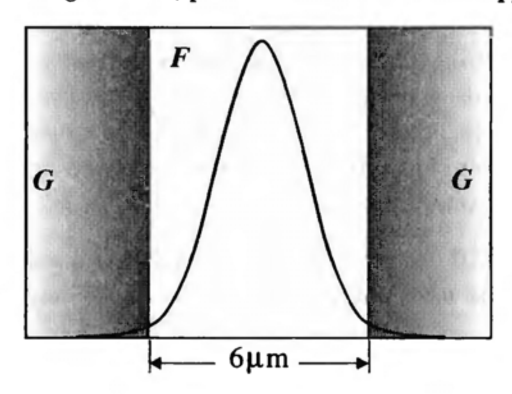


Fig. 12.17 : *Coupe transversale et distribution d'intensité pour un guide d'ondes en single-mode. G : gaine ($n = 1,455$), F : fibre ($n = 1,46$)*

2. Applications des guides de lumière

■ Le guide lumière le plus simple : un tuyau souple de quelques millimètres de diamètre, dont la paroi intérieure est argentée. Ce type de guide lumière est utilisé pour diriger, par exemple, des rayons ultra violets vers des point difficilement accessibles (utilisé par les dentistes).

Applications importantes : endoscope, dispositif limitateurs d'angle de vision d'écrans (distributeurs automatiques de billets), capteurs optiques, fibres optiques pour la transmission de l'information (son et images, données informatiques) etc.

a) Transmission optique de l'information : c'est l'application principale des réseaux de fibres optiques, ses avantages sont :

- plus grande capacité de transmission (plus grande densité) et plus faible atténuation.
- plus grande sécurité et confidentialité.
- insensible aux parasites et interférences életromagnétiques.

▷ Depuis 1988, les transmissions transatlantiques (TAT-8) et transpacifiques (TP-3), sont assurées par des fibres optiques à la place des câbles électriques sous-marins.

Dispersion du signal : caractéristique importante : plus la dispersion est faible, plus vite on peut transmettre des impulsions consécutives. La dispersion du signal est produite à la fois par la dispersion du milieu et celle du mode opératoire du guide de lumière.

Dispersion du milieu : décrit la variation de la vitesse de propagation, donc de l'indice de réfraction en fonction de la longueur d'onde.

▷ La dispersion du milieu **ne peut pas** être contournée par l'utilisation de lumière "monochromatique". Puisque la largeur de ligne spectrale et la longueur de cohérence sont liés par la relation d'incertitude (énergie-temps), la longueur de cohérence devrait tendre vers ∞. Pour la transmission de signaux dans le domaine du GHz (GBits/s), les impulsions devraient avoir une durée $\leq$ 1ns, soit une longueur maximale des trains d'ondes de 20 cm (pour $n = 1,5$) et une dispersion correspondante de la fréquence.

Pour cette raison, on cherche à diminuer la dispersion du milieu par l'utilisation de géométries et de matériaux et spéciaux (*dispersion-shifted-fibre, dispersion-flattened-fibre*).

▷ La **dispersion de mode**, se produit parce que les rayons lumineux se propagent dans différentes directions et de ce fait ont des temps de parcours différents dans la fibre optique.

La dispersion de mode est la principale caractéristique de distinction des différents types de fibres optiques.

Les **fibres multi-modes** sont exclusivement utilisées pour les liaisons à courte distance, car la dispersion de mode prend rapidement des valeurs rédibitoires.

Les fibres **single-mode (mono-mode)** ne présentent en principe pas de dispersion de mode, leur capacité de "transmission" est limitée par la dispersion du milieu. Cependant, à cause de leur faible diamètre, elles néccessitent des techniques de montage complexes (ajustement à mieux que le μm).

b) Fibres à gradient d'indice : la fibre est constituée d'un matériau dont l'indice de réfraction diminue de façon continue, dans la direction transversale, du centre vers la périphérie. Les **différences de chemins optiques** sont minimales pour une variation de l'indice n en fonction du rayon r de la fibre selon la relation :

$$n(r) = n_1(1 - \alpha r^2)$$

Par rapport à leur capacité de transmission, les fibres à gradient d'indice se placent entre les fibres multi-modes et les fibres mono-mode à saut d'indice.

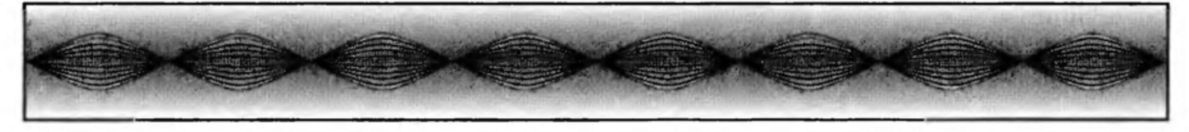


Fig. 12.18 : *Fibre à gradient d'indice, considérée comme une succession de lentilles à gradient d'indice*

c) Capteurs à fibres optiques, capteurs de niveau : une fibre sans gaine, fixée dans un réservoir vide (sa gaine est alors constituée de l'air ($n = 1,0003$)) ne subit que peu de perte de lumière, même fortement

recourbée (Fig. 12.19). Si le récipient se remplit d'un liquide qui va servir de gaine à la fibre et dont l'indice de réfraction est supérieur à celui de l'air, les pertes de lumière augmentent et le détecteur (photodiode) à la sortie de la fibre mesure une intensité transmise plus faible.

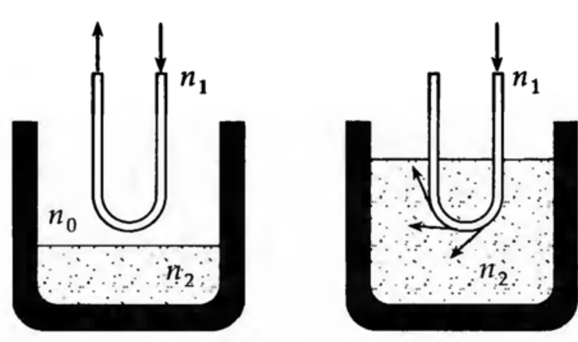


Fig. 12.19 : *Exemple simple d'un capteur de niveau utilisant une fibre optique*

Par une structure appropriée de l'interface (réseau de Bragg) entre âme et gaine, on peut augmenter considérablement la sensibilité de ce genre de dispositif. On peut, par exemple, différencier des types de molécules. Par ailleurs, à l'aide de tels réseaux, on peut mesurer des dilatations de la fibre dues à des causes extérieures (traction, pression, température). Les grandeurs mesurées ne sont alors plus les variations de l'intensité transmise, mais les modifications de phase ou de l'état de polarisation de la lumière transmise ainsi que les absorptions/réflexions dans des domaines très limités de longueur d'onde.

d) Couplage de la lumière au guide : coefficient de couplage : rapport de la puissance lumineuse effectivement couplée à la fibre à celle émise par la source.

La **figure 12.20** montre que dans le cas du couplage idéal on doit avoir :

$$B = D\frac{b}{g} < d \qquad \textbf{et} \qquad \vartheta_{\text{WL}} < \text{A.N.}_{\text{F}}$$

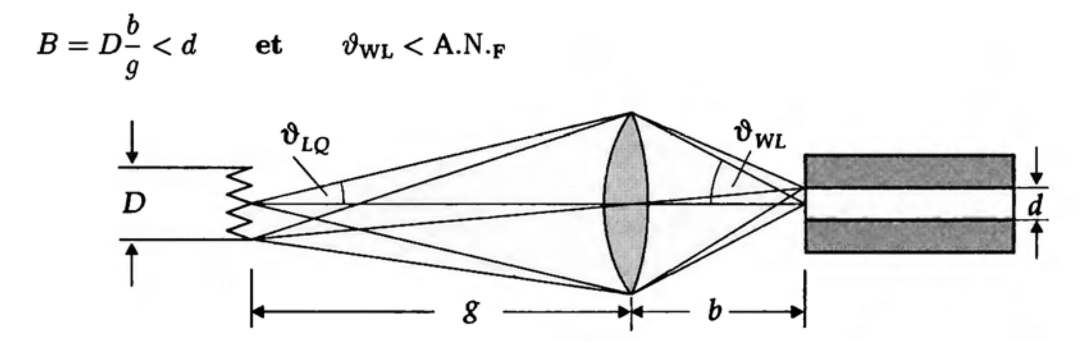


Fig. 12.20 : *Couplage de la lumière d'une lampe halogène LQ à un guide de lumière WL*

Pour une source de lumière qui émet dans toutes les directions de l'espace, (lampe à halogène, lampe à arc, diode émettrice de lumière DEL), il n'est pas possible de remplir la condition ci-dessus. De plus, le produit de l'aire de la surface rayonnante et de l'angle solide que sous-tend la lentille est une constante de la formation de l'image (théorème de Liouville). Il s'ensuit que dans la formation de l'image, si la surface lumineuse **diminue**, l'angle solide **augmente**.

▷ De ce fait, un couplage hautement efficace n'est possible qu'en utilisant un faisceau laser comme source car, par définition, cette lumière occupe la plus petite cellule possible de l'espace de phase.

▷ Le couplage de diodes laser à une fibre d'indice $n = 1,5$ est effectuée par **agrandissement** de la surface lumineuse et par conséquent par la **diminution** de l'angle solide. De plus, on utilise un système optique **anamorphotique**, pour obtenir une image de section droite circulaire à partir du profil elliptique du faisceau incident.

Estimation de l'efficacité du couplage :

$$\eta = \left(\frac{d \cdot \vartheta_{WL}}{D \cdot \vartheta_{LQ}}\right)^2$$

Pour une étude plus précise, l'intégrale de recouvrement entre mode propre $A(x, y)$ du guide de lumière et l'amplitude complexe $B(x, y)$ de la lumière à la surface de sortie de la fibre doit être calculée :

$$\eta = \frac{\left[\int\int A(x,y)B^*(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]^2}{\int\int A(x,y)A^*(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \int\int B(x,y)B^*(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

▷ Pour la plupart des applications pratiques, les fonctions $A(x, y)$ et $B(x, y)$ peuvent être approximées par des fonctions gaussiennes $\exp\left(\frac{-x^2}{\sigma^2}\right)$.

Estimation de l'ordre de grandeur de l'efficacité de couplage de différentes combinaisons de sources et de guide de lumière :

	lampe halogène	lampe à arc	diode DEL	laser
guide creux 10 mm	1	1	1	1
fibre synthétique 1 mm	0.001	0.01	1	1
fibre multimode 50 μm	10^{-5}	10^{-4}	0.01	1
fibre monomode 6 μm	10^{-8}	10^{-7}	10^{-5}	1

e) Optique intégrée : structures de guides de lumière remplissant des fonctions déterminées : distribuer (fan-out), rassembler (fan-in), commuter, etc. de la lumière (Fig. 12.21).

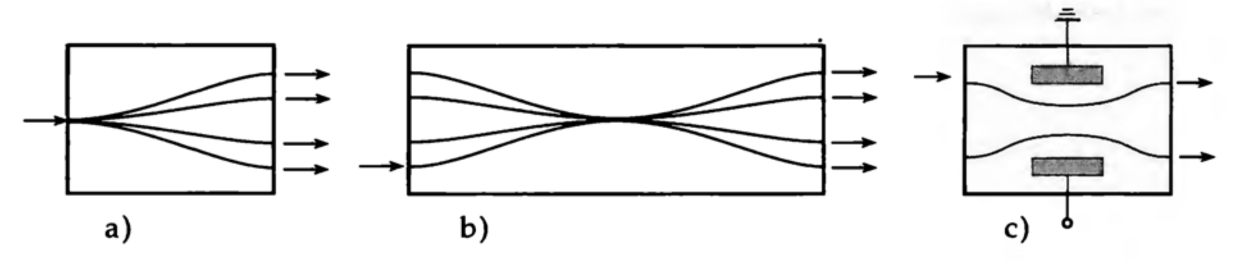


Fig. 12.21 : *Exemples de fonctions optiques intégrées. a) : distributeur* 1×4, *b) : coupleur en étoile* 4×4, *c) : commutateur opto-électronique*

- Les guides de lumière sont implantés sur des substrats (Wafer, par analogie avec les circuits intégrés en micro-électronique) par des procédés photolithographiques (Vgl lithographie). Les substrats peuvent être constitués de verre, de niobiure de lithium ou d'un polymère.
  Des électrodes, des éléments chauffant et autres peuvent être ajoutés.

■ Commutation de la lumière entre deux guides de lumière par modification de l'indice de réfraction (à l'aide de champs électriques ou des variations de température).

On distingue :
Les **composants actifs** comme les commutateurs, les modulateurs.

Les **composants passifs** comme les coupleurs en étoile, les distributeurs.

12.1.3.6 Réfraction dans le prisme

Prisme : constitué de matières transparentes comportant au moins deux faces planes concourantes. L'intersection de ces faces est appelée **arête** du prisme et leur angle est appelé **angle du prisme**.

Dans un prisme à trois arêtes (voir figure), la lumière traverse généralement deux interfaces. Un rayon de lumière est réfracté à chacune de ces interfaces. L'indice de réfraction du prisme est n_1, celui du milieu environnant n_2.

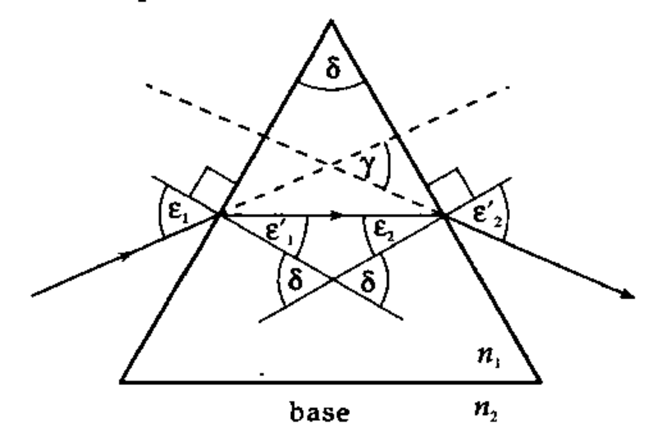


Fig. 12.22 : *Réfraction dans un prisme. Le rayon incident sous l'angle α_1 émerge du prisme sous l'angle β_2. Le rayon incident a été dévié de l'angle de déviation γ*

1. Angle de déviation

γ, ou déviation est l'angle formé par le rayon émergeant du prisme et le rayon incident. C'est l'angle dont est dévié le rayon incident.

Angle de déviation du prisme			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\gamma = \alpha_1 - \delta + \arcsin\left\{\sin\delta\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - \sin^2\alpha_1} - \cos\delta\sin\alpha_1\right\}$$ $$\gamma_{min} = 2\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\frac{\delta}{2}\right) - \delta$$	γ	rad	déviation
	γ_{min}	rad	min. déviation
	α_1	rad	angle incidence
	α_2	rad	angle réfracté
	n_1	1	indice prisme
	n_2	1	indice milieu
	δ	rad	angle prisme

- L'angle de déviation γ prend sa plus petite valeur (**minimum de déviation**), lorsque la marche des rayons dans le prisme est symétrique, c'est à dire lorsque l'angle du rayon émergeant est égal à l'angle d'incidence, $\alpha_1 = \beta_2$, $\alpha_2 = \beta_1$.

▷ Si on tient compte du fait que l'indice de réfraction n_1 est fonction de la longueur d'onde, l'angle de déviation γ va aussi dépendre de la longueur d'onde (il y a dispersion de la lumière). À chaque longueur d'onde (couleur) correspond un angle de déviation donné, la lumière blanche est décomposée en ses **composantes spectrales** (Fif. 12.23). Comme l'indice de réfraction diminue lorsque la longueur d'onde augmente, les longueurs d'ondes les plus courtes (violet) seront davantage déviées que les grandes longueurs d'ondes (rouge).

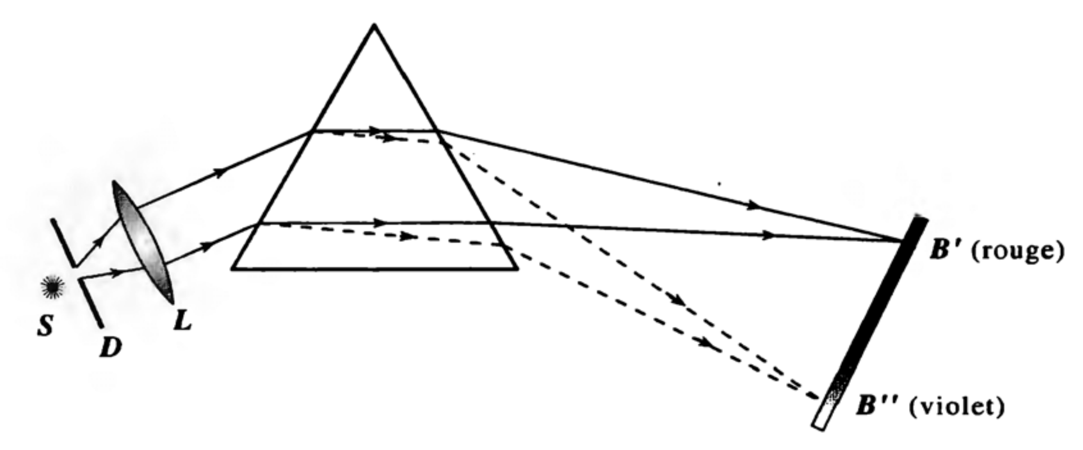


Fig. 12.23 : *Dcomposition spectrale de la lumiŁre blanche par un prisme. S : source de lumiŁre blanche, D : diaphragme, L : lentille*

M La mesure du minimum de déviation $\gamma_{\min}$ permet de déterminer l'indice de réfracction du prisme.

$$n_2 = \frac{n_1 \sin(\delta/2)}{\sin\left(\frac{\gamma_{\min} + \delta}{2}\right)}$$

Puisque cette méthode permet la détermination précise de l'indice de réfraction, elle permet également de déterminer la fonction de variation de l'indice de réfraction par rapport à la longueur d'onde (formule de Cauchy) ($\rightarrow$ *Dispersion*).

2. Raies de Fraunhofer

Raies d'absorption dans le spectre de la lumière solaire, elles sont dues à l'absorption de certaines longueurs d'onde par des éléments de la photosphère **raies chromosphériques** (et dans quelques cas de l'atmosphère terrestre **raies telluriques**). Les raies les plus intenses sont désignées par des lettres majuscules (voir aussi la table 13.2/8).

▷ Puisque le spectre de Fraunhofer est dû à l'absorption, il est formé de raies sombres se détachant sur le spectre continu émis par la photosphère solaire. Il y a quelques cent raies de Fraunhofer, elles s'étendent de l'ultraviolet au proche infrarouge. .

Nombre d'Abbe ν : caractérise la dispersion d'un milieu optique donné.

$$\nu = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C}$$

où n_d est l'indice du milieu pour la raie-d de l'Hélium, n_F et n_C les indices pour les raies F et C de Fraunhofer. ($\rightarrow$ *table 13.2/8*). Une autre définition utilise respectivement la raies-e du Mercure ($\lambda = 546,1nm$) et les raies F' ($\lambda = 480,0nm$) et C' ($\lambda = 643,8nm$) du Cadmium.

12.1.3.7 Lames à faces parallèles

- Lors du passage à travers une lame à faces parallèles, un rayon lumineux est déplacé parallèlement à lui-même de la distance δ (Fig. 12.24).
- Lors du passage d'un faisceau divergent, le centre du faisceau subit un déplacement axial de Δ. Pour l'observateur, l'objet paraît plus près (Fig. 12.25).

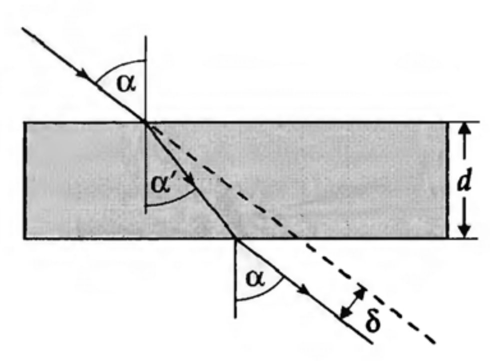


Fig. 12.24 : *Déplacement d'un rayon lors de son passage à travers une lame à faces parallèles*

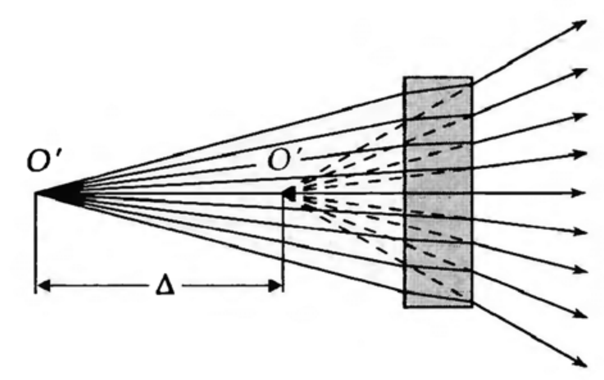


Fig. 12.25 : *Déplacement d'un faisceau lors de son passage à travers une lame à faces parallèles*

Déplacements produits par une lame à faces parallèles

	Symbole	Unité	Dénomination
$\delta = d\dfrac{\sin(\alpha - \alpha')}{\cos\alpha'}$	α	rad	angle d'incidence
$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \dfrac{n_2}{n_1}$	α'	rad	angle de réfraction
$\Delta = d\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$	δ	m	déplacement latéral d'un rayon
	d	m	épaisseur de la lame
	n_1	1	indice du milieu extérieur
	n_2	1	indice de la lame
	Δ	m	déplacement axial du faisceau

▷ Pour δ on calcule d'abord l'angle α' à partir de l'angle d'incidence α donné et l'indice de réfraction. Le report de cette valeur dans la formule, donne le résultat cherché.

▷ La valeur Δ est particulièrement importante dans le cas des prismes redresseurs, il faut en tenir compte pour la construction de l'image.

12.1.3.8 Réfraction à la surface d'une sphère (dioptre sphérique)

La plupart des lentilles comportent une surface sphérique. Par conséquent, la réfraction sur un dioptre sphérique est une notion importante de l'optique géométrique.

Soit une surface sphérique de rayon R, de centre C, qui délimite deux régions de l'espace d'indices de réfraction respectifs n_2 et n_1.

Considérons, dans la région d'indice n_1, un rayon incident en A sur la surface de la sphère et provenant d'un point quelconque O. Nous cherchons à déterminer le point d'intersection O' de ce rayon avec l'axe optique $\overline{OC}$ après sa réfraction dans la région d'indice n_2.

Normale $\overline{AC}$: perpendiculaire au plan tangent en A (point d'incidence) à la surface du dioptre.

Sommet S : point d'intersection de l'axe optique $\overline{OC}$ avec la surface du dioptre.

Distances objet et image s et s' : distances respectives du point objet O et image O' au sommet S. Ces distances sont comptées **positivement** vers la droite du sommet et **négativement** vers sa gauche.

l et l' désignent respectivement les distances des points O et O' au point d'incidence A. La même convention de signe (positif à droite, négatif à gauche est utilisée).

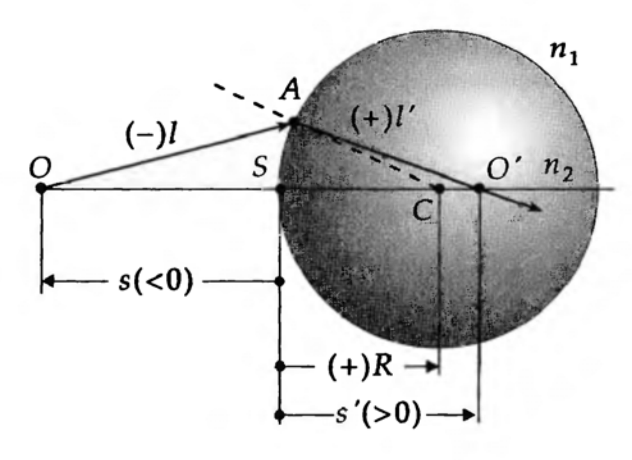


Fig. 12.26 : *Réfraction sur un dioptre sphérique de rayon R*

Relations entre les distances image et objet				**1**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$n_1 \frac{s-R}{l} = n_2 \frac{s'-R}{l'}$$	n_1	1	indice du milieu extérieur (objet)	
	n_2	1	indice du milieu intérieur à la sphère	
	R	m	rayon du dioptre sphérique	
	s	m	distance objet $\overline{OS}$	
	s'	m	distance image $\overline{O'S}$	
	l	m	distance $\overline{OA}$	
	l'	m	distance $\overline{O'A}$	

12.2 Lentilles

Lentille : matériau transparent à la lumière limité par deux surfaces (dioptres) dont l'une au moins est gauche. Une lentille sert à la formation d'une image optique.

Lentille sphérique : lentille formée de deux dioptres sphériques.

■ Cas particuliers : lame à faces parallèles, ménisque (lentille limitée par un dioptre convexe et un dioptre concave).
Autres formes de lentilles : lentille asphérique, lentille cylindrique, lentille de Fresnel.

Les lentilles sont toujours constituées d'un matériau dont l'indice de réfraction est supérieur à celui du milieu extérieur (généralement l'air). Dans ce cas on distingue :

- **Lentille convergente** : fait converger un faisceau de lumière parallèle vers un point (point focal). Ces lentilles sont plus épaisses au centre que sur les bords. Elles peuvent être bi-convexes, plan-convexes ou concave-convexes.
- **Lentille divergente** : fait diverger un faisceau de lumière parallèle. Ces lentilles sont plus minces au centre que sur les bords. Elles peuvent être bi-concaves, plan-concaves ou encore convexe-concaves.

■ Les lunettes correctives de la myopie sont des lentilles divergentes convexe-concaves.

▷ Pour minimiser les abérrations, il faut choisir la forme et la disposition des lentilles convergentes et divergentes de façon à ce que les rayons subissent des réfraction similaires à la surface des divers dioptres.

● La surface la plus courbée doit être dirigée du côté du faisceau parallèle.

Un rayon incident sur une lentille subit deux réfractions, l'une à l'entrée, l'autre à la sortie de la lentille.

- Si l'indice du milieu extérieur à la lentille est plus grand que celui de la lentille, une lentille de forme convergente (convexe) devient divergente et réciproquement.

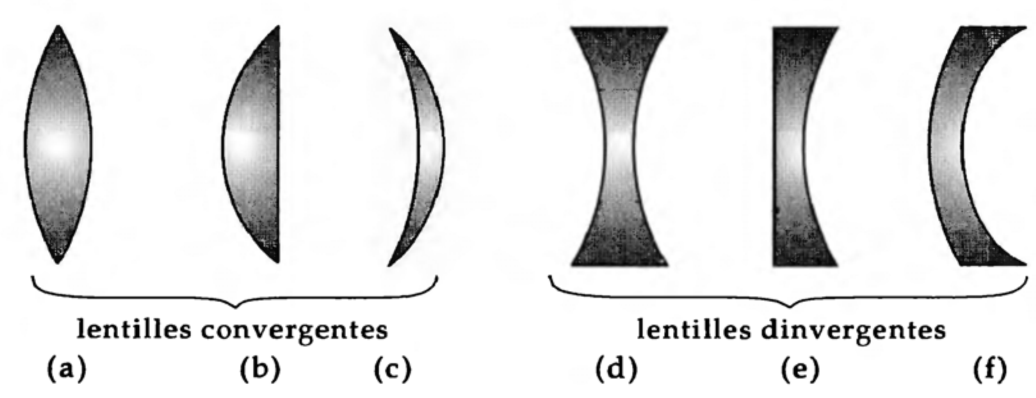


Fig. 12.27 : *Formes de lentilles. a) : bi-convexe ($r_1 > 0, r_2 < 0, f > 0$), b) : plan-convexe ($r_1 = \infty, r_2 < 0, f > 0$) c) : concave-convexe ($r_1 < r_2 < 0, f > 0$), d) : bi-concave ($r_1 < 0, r_2 > 0, f < 0$), e) : plan-concave ($r_1 = \infty, r_2 > 0, f < 0$), f) : convexe-concave ($0 < r_1 < r_2, f < 0$)*

12.2.1 Lentilles épaisses

Lentille épaisse : lentille dont la réfraction, dans le domaine paraxial, est décrite à partir de ses deux plans principaux objet et image distincts. Entre les plans principaux, les rayons se propagent parallèlement à l'axe optique de la lentille épaisse, par opposition aux **lentilles minces** dont les intersections des plans principaux avec l'axe optique (pôles) sont confondues et coïncident avec le sommet de la lentille.

1. Grandeurs caractéristiques des lentilles épaisses

Distance objet a : distance de l'objet au plan principal objet.

Distance image a' : distance entre le plan principal image et l'image.

Coupe méridionale : coupe d'un système optique selon un plan contenant l'axe optique, un point de l'objet hors de l'axe optique et un point de l'image correspondante (Fig. 12.28)

Rayons méridionaux : rayons qui se propagent dans le plan de la coupe méridionale.

Coupe sagittale : plan perpendiculaire au plan de coupe méridionale.

Foyer ou point focal F' ou $\bar{F}$, point de l'axe optique auquel se concentrent les rayons parallèles à l'axe optique après traversée de la lentille.

Distance focale ou focale $\bar{f}$ ou f' : distance du point focal respectivement objet et image au plan principal correspondant.

Plan focal : plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par le foyer objet ou image.

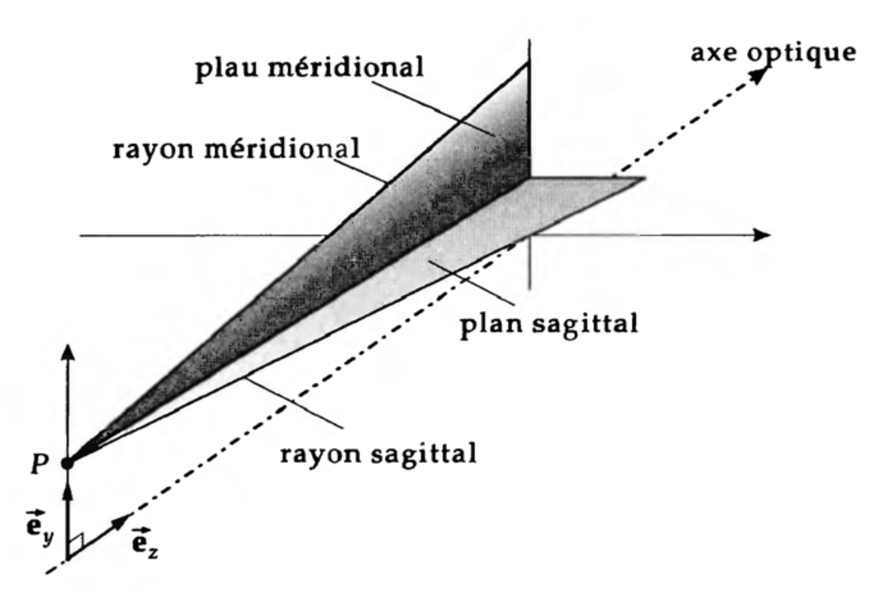


Fig. 12.28 : *Plan méridional et plan sagittal*

2. Lentille sphérique épaisse

Les lentilles sphériques sont constituées d'un matériau d'indice relatif n, limité par deux surfaces sphériques de rayons respectifs r_1 et r_2. Les distances caractéristiques sont toujours comptées positivement vers la droite et négativement vers la gauche à partir des plans principaux correspondants.

■ Pour une lentille bi-convexe on a $r_1 > 0$ et $r_2 < 0$, voir aussi la Figure 12.29.

● Les distances focales $\bar{f}$ et f', la distance image a' et la distance objet a sont toujours mesurées par rapport au plan principal le plus proche.

Épaisseur au centre d : distance des deux sommets d'une lentille.

● Si une lentille est entourée de même milieu des deux côtés, la valeur absolue de sa distance focale image $|f'|$ est égale à la valeur absolue de sa distance focale objet $|\bar{f}|$.

$$\bar{f} = -f'$$

Si les indices relatifs n et n' de la lentille par rapport aux milieux extérieurs de part et d'autre ne sont pas identiques, les valeurs des distances focales, sont :

$$\frac{\bar{f}}{f'} = -\frac{n}{n'}$$

3. Relation de conjugaison pour les lentilles épaisses

Pour des lentilles sphériques épaisses, entourée d'air, on a les relations suivantes pour la détermination de la distance focale image f', de la distance s_H entre le point principal objet H et les sommet objet S, des distances $s'_{H'}$ et H' correspondantes ainsi que la distance i des plans principaux (Fig. :12.29) :

Formules des lentilles épaisses			L
	Symbole	Unité	Dénomination
$f' = \dfrac{nr_1r_2}{(n-1)\left[n(r_2-r_1)+(n-1)d\right]}$	f'	m	distance focale image
$s_H = \dfrac{r_1 d}{n(r_1-r_2)-(n-1)d}$	n	1	indice
$s'_{H'} = \dfrac{r_2 d}{n(r_1-r_2)-(n-1)d}$	r_1, r_2	m	rayons des dioptres 1,2
$i = \dfrac{(r_1-r_2-d)(n-1)d}{n(r_1-r_2)-(n-1)d}$	d	m	épaisseur au centre
	s_H	m	distance $\overline{SH}$
	$s'_{H'}$	m	distance $\overline{S'H'}$
	i	m	distance $\overline{HH'}$

M Dans le cas de lentilles en verre ordinaire, placées dans l'air, la distance entre les plans principaux est d'environ un tiers de l'épaisseur au centre de la lentille (distance des sommets).

4. Construction de l'image pour une lentille épaisse

Pour la construction d'un **point image**, on utilise trois rayons particuliers :

Soit un point O de l'objet :

- Le **rayon parallèle** se propage parallèlement à l'axe optique du point objet jusqu'au plan principal image, puis passe par le foyer image de la lentille.
- Le **rayon central** va du point objet jusqu'au point d'intersection H du plan principal objet avec l'axe optique, continue parallèlement à l'axe optique jusqu'au point principal image H' puis continue dans la direction parallèle au rayon entre l'objet et H.
- Le **rayon focal** va du point objet jusqu'au plan principal en passant par le foyer objet, de ce point il continue parallèlement à l'axe optique.

Le point d'intersection O' de ces trois rayons constitue l'image donné par la lentille du point objet O.

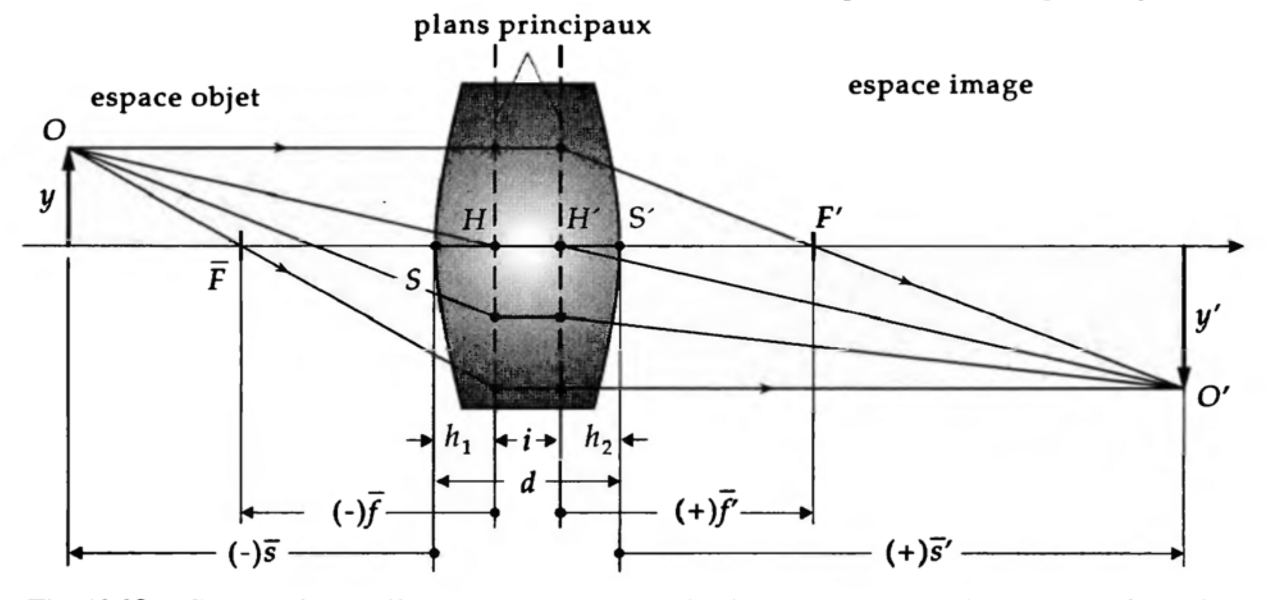


Fig. 12.29 : *Construction de l'image dans le cas d'une lentille convergente épaisse avec ses deux plans principaux distincts*

La relation entre f', a et a' est la relation de conjugaison.

Relation de conjugaison			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\frac{1}{f'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a}$	f' a a'	m m m	distance focale image distance de l'objet au plan principal objet distance de l'image au plan principal image

On a parfois avantage à utiliser une autre formulation de la relation de conjugaison :

Relation de Newton : en posant $z = a - \bar{f}$ et $z' = a' - f'$, on obtient :

$$z \cdot z' = \bar{f} f'$$

Dans le cas où $\bar{f} = -f'$, cette relation devient :

$$z \cdot z' = -f'^2 = \bar{f}^2$$

Puissance B d'une lentille ou d'un système optique, inverse de la distance focale, s'exprime en dioptries :

Puissance = 1/distance focale			$\mathbf{L^{-1}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$B = 1/f$	B f	1/m m	puissance distance focale

Dioptrie, dpt : unité usuelle de la puissance d'une lentille. 1 dpt = 1/m. Les lunettes correctives de la vision ont des puissances comprises entre 0,5 et 5 dioptries.

5. Lentille convergente

La figure 12.30 représente une lentille mince convergente dont les principales propriétés sont :

- Des rayons parallèles à l'axe optique dans l'espace objet convergent au foyer image de l'espace image.
- Des rayons qui, dans l'espace objet, passent par le foyer objet sortent parallèlement à l'axe optique dans l'espace image (réciprocité de la marche des rayons).
- Un faisceau de rayons parallèles, incliné par rapport à l'axe optique de la lentille dans l'espace objet, converge en un point du plan focal image.

La lentille convergente donne des images différentes d'un même objet, en fonction de la position a de l'objet dans l'espace objet.

- $a < f$, l'objet est situé entre le plan principal et le foyer. Son image est agrandie, virtuelle et droite. L'oculaire d'un **microscope** opère dans ce domaine.
- $f < a < 2f$, l'image est agrandie, réelle et renversée.
  Les appareils photographique, les rétroprojecteurs et les projecteurs de diapositives opèrent dans ce domaine.
- $a > 2f$, l'image est plus petite que l'objet, réelle et inversée.
  Les **longues vues, télescopes** opèrent dans ce domaine.

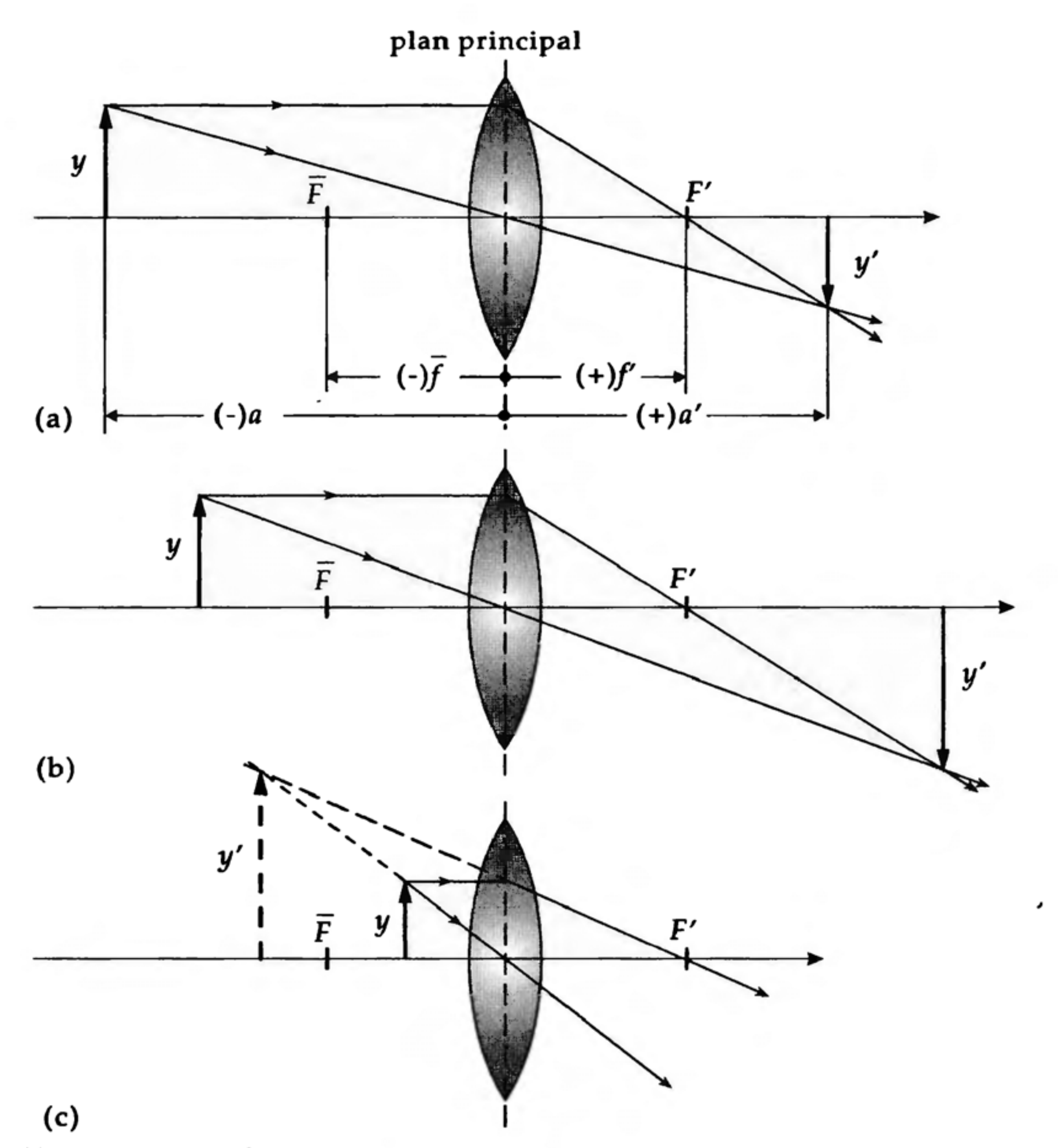


Fig. 12.30 : *Construction de l'image donnée par une lentille mince convergente. a) : objet situé à une distance $a > 2\bar{f}$, la taille de l'image est plus petite que celle de l'objet, l'image est réelle et est renversée, b) : l'objet est situé entre le foyer objet et la distance $2 \cdot f$, l'image est agrandie, réelle et inversée, c) : objet situé entre le sommet et le foyer objet de la lentille, l'image est agrandie, virtuelle et droite*

▹ Le grandissement maximal d'une lentille est déterminé par des limites techniques, car on ne peut pas diminuer la distance focale d'une lentille à volonté.

6. Lentille divergente

La figure 12.31 représente une lentille mince divergente, ses principales caractéristiques sont :

- Le foyer objet F se trouve dans l'espace image et le foyer image F' dans l'espace objet. Ce foyer image est parfois appelé **foyer virtuel**. La distance focale d'une lentille divergente est négative.
- Des rayons parallèles à l'axe optique dans l'espace objet convergent au foyer image F', de sorte que les rayons "paraissent" provenir du foyer image F' (image virtuelle).

- Les rayons dont la direction vise le foyer F, émergent de la lentille parallèlement à l'axe optique (réciprocité de la marche des rayons).
- La relation de conjugaison est la même que celle d'une lentille convergente, mais la distance focale f est **négative**. Ainsi, la puissance d'une lentille divergente est **négative**.

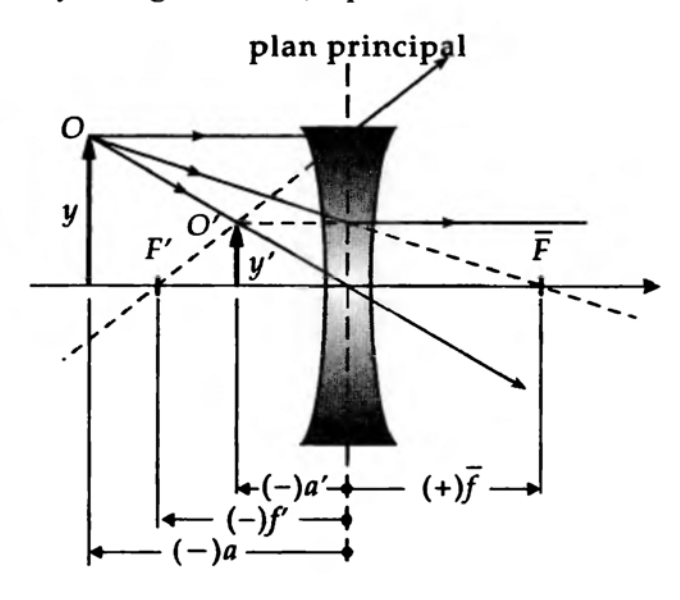


Fig. 12.31 : *Construction de l'image O' d'un objet réel O donnée par une lentille mince divergente. L'image est virtuelle (image située dans l'espace objet) et droite*

7. Ensemble de lentilles de même puissance

Un système optique peut être constitué d'une série de lentille de mêmes distances focales mais de structures différentes. Les opticiens, pour concevoir une lentille de distance focale f et d'indice n donné, peuvent utiliser des formes et des rayons de courbure variés. En se donnant un rayon de courbure du dioptre d'entrée r_1, on peut calculer le rayon de courbure r_2 du dioptre de sortie et l'épaisseur au centre de la lentille pour obtenir les caractéristiques voulues.

M Pour concevoir une lentille de distance focale et d'indice donné, on cherche à déterminer les valeurs (r_1, r_2, d) de sorte que les aberrations soient aussi faibles que possibles.

La figure 12.32 montre quelques exemples de lentilles convergentes et divergentes ayant les mêmes valeurs (absolues) de distances focales.

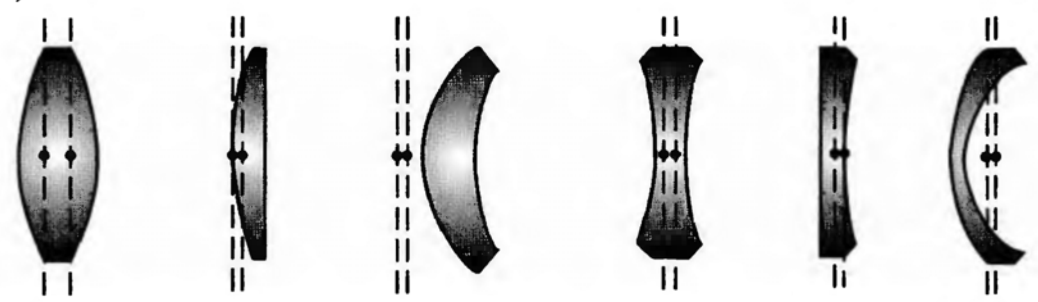


Fig. 12.32 : *Quelques exemples de conception de lentilles convergentes (à gauche) et divergentes (à droite), ayant des distances focales identiques*

8. Résumé des propriétés des lentilles épaisses

Distance image et taille de l'image en fonction de la position de l'objet :

distance objet a	distance image a'	image	taille de l'image β
Lentille convergente			
$-\infty < a < 2\bar{f}$	$f' \leq a' < 2f'$	réelle, plus petite, renversée	$0 < \beta < 1$
$2\bar{f} < a \leq \bar{f}$	$2f' < a' \leq \infty$	réelle, agrandie, renversée	$1 < \beta < \infty$
$f < a < 0$	$-\infty < a' < 0$	virtuelle, agrandie, droite	$-\infty < \beta < -1$
Lentille divergente			
$-\infty \leq a < 0$	$f' \leq a' < 0$	virtuelle, plus petite, droite	$-1 \leq \beta < 0$

12.2.1.1 Lentilles minces

Lentille mince : lentille pour laquelle l'épaisseur au centre d est petite par rapport aux rayons r_1 et r_2, de sorte que l'on a :

$$n(r_2 - r_1) + (n-1)d \approx n(r_2 - r_1)$$
$$r_1 - r_2 - d \approx r_1 - r_2$$

Les formules des lentilles se simplifient alors :

Formules des lentilles minces			L
	Symbole	Unité	Dénomination
$f' = \dfrac{r_1 r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)}$	f'	m	distance focale image
$s_H = \dfrac{r_1 d}{n(r_1 - r_2)}$	n	1	indice de la lentille
$s'_{H'} = \dfrac{r_2 d}{n(r_1 - r_2)}$	r_1, r_2	m	rayons de courbures 1,2
$i = \dfrac{n-1}{n} d$	d	m	épaisseur au centre
	s_H	m	distance $\overline{SH}$
	$s'_{H'}$	m	distance $\overline{S'H'}$
	i	m	distance $\overline{HH'}$

12.2.1.2 Lentilles infiniment minces

Lentille infiniment mince : l'épaisseur d est négligeable et négligée dans les calculs.

Les formules des lentilles se simplifient encore :

$$f' = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)}$$
$$s_H = s'_{H'} = i = 0$$

soit encore la "formule des opticiens"

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

12.3 Associations de lentilles

Association de lentilles : ensemble de plusieurs lentilles dont les axes optiques sont communs. Ces associations sont utilisées pour construire des **instruments d'optique**, ou pour corriger les aberrations de lentilles simples de caractéristiques équivalentes.

- L'image donnée par une association de lentilles peut être construite si les positions des plans principaux de chaque lentille et celle du foyer du système complet sont connues. Si seules les positions des plans principaux extrêmes sont connus, la construction de l'image s'effectue comme pour une lentille épaisse.

Pour un système de deux lentilles de distances focales f_1 et f_2 (de puissances respectives D_1 et D_2) et dont les plans principaux intermédiaires H_{12} et H_{21} sont distants de d, la distance focale globale du système est f', la puissance D et les plans principaux du système sont situés en H_1 et H_2 (voir Figure 12.33).

Calcul de la distance focale globale				L^{-1}
$$\begin{aligned}\frac{1}{f'} &= \frac{1}{f'_1}+\frac{1}{f'_2}-\frac{d}{f'_1 f'_2}\\ D &= D_1+D_2-dD_1D_2\\ \overline{H_{11}H_1} &= \frac{f'd}{f'_2}\\ \overline{H_{22}H_2} &= -\frac{f'd}{f'_1}\end{aligned}$$	Symbole	Unité	Dénomination	
	f'	m	distance focale du système	
	f'_1	m	distance focale de la lentille 1	
	f'_2	m	distance focale de la lentille 2	
	d	m	distance des plans principaux intermédiaires	

Pour des lentilles très proches les unes des autres (d petit), le dernier terme peut être négligé. Alors, les puissances de lentilles de même matériau s'ajoutent : $D = D_1 + D_2$.

▷ Ce calcul peut être appliqué à des systèmes de plus de deux lentilles. On réduit le système en associant d'abord deux lentilles, puis l'équivalent de cette association avec la troisième lentille et ainsi de suite.

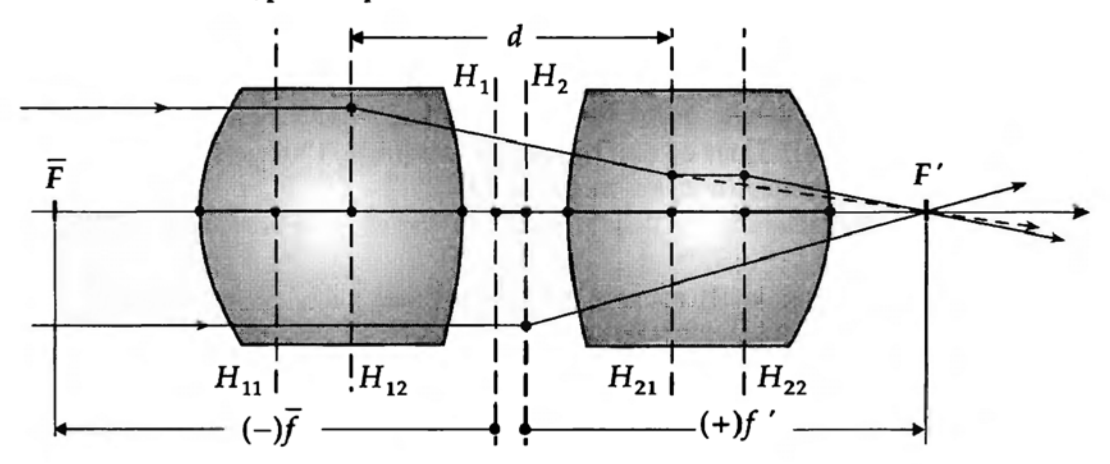


Fig. 12.33 : *Construction de l'image pour un système de deux lentilles épaisses*

12.3.1 Lentilles avec des diaphragmes

Diaphragme : écran percé d'une ouverture fixe ou réglable, délimitant un faisceau de rayons.

Pupille d'entrée : image du diaphragme d'un système optique vue à partir du point objet. Correspond à la limitation des rayons issus de l'objet qui peuvent atteindre le système optique.

Pupille de sortie : image du diaphragme d'un système optique vue à partir du point image. C'est l'image de la pupille d'entrée.

Diaphragme d'ouverture : limitation imposée aux rayons qui forment l'image.

Dans un instrument d'optique on choisit le diaphragme d'ouverture pour que la pupille de sortie ait la même dimension et la même position que la pupille de l'œil.

On veille à ce que :

- Tous les rayons passant par la pupille d'entrée doivent pouvoir passer par la pupille de sortie.
- Dans une expérience donnée, il y a toujours au moins un diaphragme, ne serait-ce que la monture des lentilles. Dans ce cas, le diamètre de la lentille détermine quels rayons issus de l'objet participent à la formation de l'image.
- D'une façon générale, l'ouverture du diaphragme définit quels rayons participent à l'image et détermine ainsi la luminosité de l'image.
- Le diaphragme de champ définit la taille de l'image.
- Lorsqu'on projette une image réelle sur un écran, les dimensions et le cadre de l'écran définissent la taille de l'image ; le cadre de l'écran est, dans ce cas, le diaphragme de champ.

12.3.2 Aberrations

Aberrations géométriques : défauts dans la formation des images par un système optique centré, dus à la marche des rayons lumineux.

a) Aberration sphérique ou **aberration d'ouverture** : se produit avec des faisceaux de grande ouverture (non paraxiaux), les rayons émergents ne convergent plus en un point. Le point image est dispersé sur un domaine plus ou moins grand, l'image n'est pas nette (Fig. 12.34 a)).

Correction : dans le cas d'une lentille convergente, on lui associe une lentille divergente et réciproquement. La correction n'est effective que pour une distance objet donnée.

b) Astigmatisme : aberration géométrique faisant correspondre à un point objet deux droites focales (sagittale et méridionale) dites focales de Sturm, lorsque le faisceau lumineux est étroit et incliné sur l'axe optique du système (Fig. 12.34 b)). Dans ce cas, l'image est déformée, l'image d'un cercle est un ovale, celle d'un point un segment de droite, l'image n'est pas nette.
Correction : modification de la position des diaphragmes et association de plusieurs lentilles de forme et matériaux différents.
Anastigmate : système optique qui ne présente pas d'agstigmatisme.

c) Coma ou défaut d'asymétrie : se produit pour des faisceaux parallèles, inclinés sur l'axe optique limité par un diaphragme. Le point image présente l'aspect d'une comète. Ce défaut dépend fortement de la position du diaphragme.
Correction : rechercher la position appropriée des diaphragmes.

d) Aberrations chromatiques : se produisent lorsqu'on utilise de la lumière comprenant un large spectre de longueurs d'onde et sont essentiellement dues à la dispersion de réfraction, c'est à dire la variation de l'indice de réfraction avec la longueur d'onde.
L'image de chaque composante de couleur différente de l'objet se forme en un point différent. L'image n'est pas nette et présente des bords irisés.
Correction : on associe une lentille convergente à une lentille divergente et de matériaux de dispersion différente (verre Crown pour l'une, Flint pour l'autre).

▷ Avec des systèmes à grand nombre de lentilles et de qualités de verre variées, la correction peut être parfaite.

e) Courbure de champ : aberration d'un système optique centré qui forme d'un objet situé dans un plan de front une image située sur une surface courbe. Le défaut est d'autant plus marqué que les rayons sont loins de l'axe optique.

Sur un écran plan, l'image est floue dans les régions éloignées de l'axe optique (les bords de l'image).
Correction : modification de la disposition des diaphragmes, et association de lentilles de formes et de matériaux différents, ou courbure de l'écran (ou du film).

f) Distorsion : généralement due à une mauvaise disposition des diaphragmes. L'image et l'objet ne sont plus homothétiques, l'image d'un segment de droite est non rectiligne. On distingue la distorsion en **coussinet** et la distorsion en **barillet**.
Correction : modification de la position des diaphragmes.

12.3.2.1 Lentilles à gradient d'indice

Lentille dont l'indice de réfraction varie en fonction du rayon r. Des gradients d'indice peuvent être obtenus facilement dans les gaz (variation de pression ou de température) de même que dans les liquides (différences de concentration ou de température). L'observation de "mirages" est due à un gradient d'indice de réfraction de l'air, plus chaud, donc moins dense, au niveau du sol chaud. À cause de ce gradient d'indice, les rayons ne se propagent plus en ligne droite. De même, il est courant, au coucher du Soleil, de continuer à voir son image alors qu'il est déjà sous l'horizon.

Les lentilles ou les fibres optiques à gradient d'indice sont utilisées dans la transmission de l'information par des réseaux de fibres optiques.

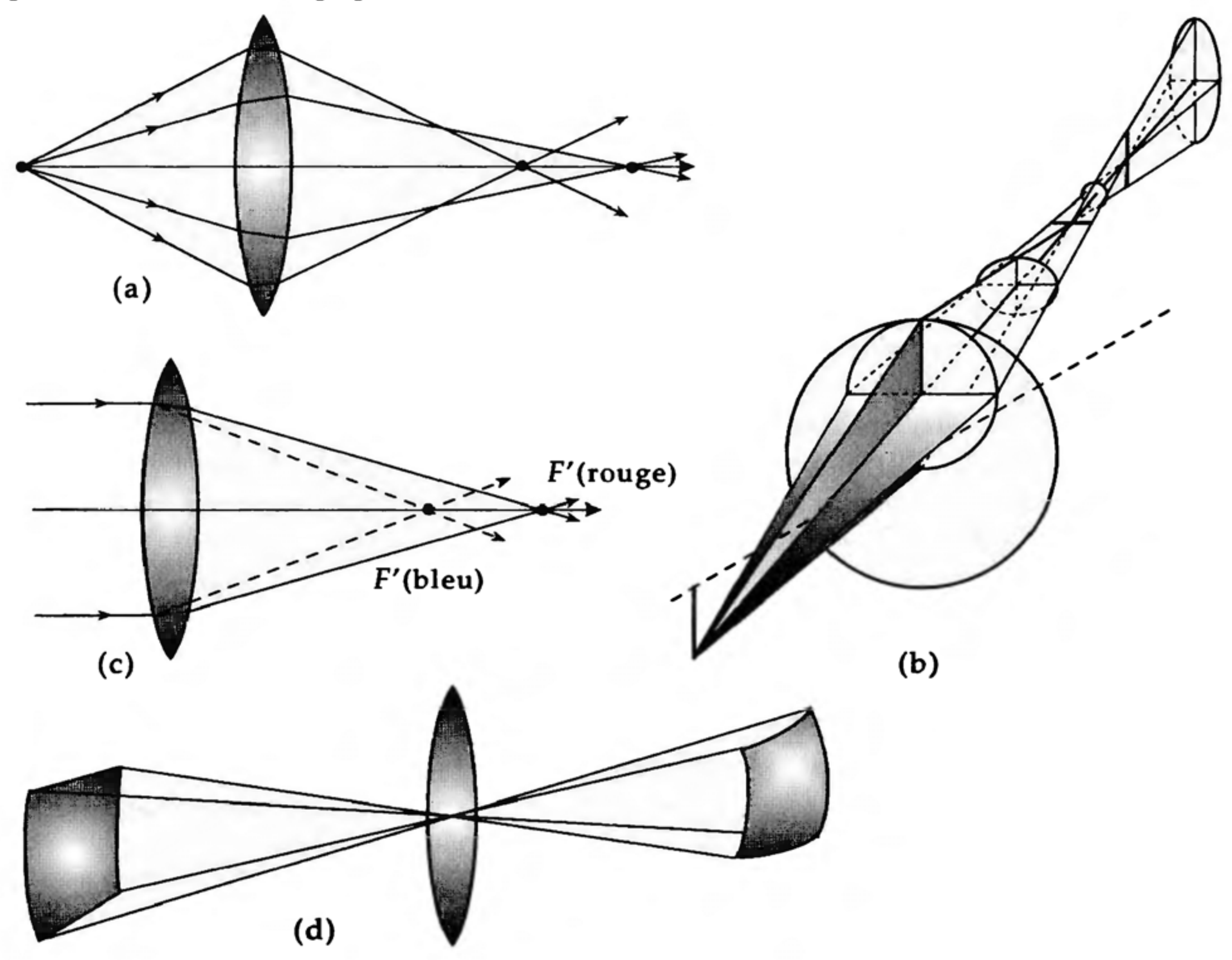


Fig. 12.34 : *Aberrations. a) : aberration sphérique, b) : astigmatisme, c) : aberration chromatique, d) : courbure de champ*

12.4 Instruments optiques

12.4.1 Chambre noire

Chambre noire : forme primitive de l'appareil photographique. Boîte opaque percée d'une très petite ouverture S (sténopé) permettant d'obtenir sur un écran une image réelle, renversée, formée par le faisceau de rayons traversant S et provenant d'un objet assez lumineux.

- Boîte munie d'un petit trou (ou une lentille) sur sa face avant
- La face arrière est un verre dépoli.

L'image donnée par la chambre noire sera d'autant plus nette que le diamètre du trou est petit, mais sa luminosité sera d'autant plus faible.

12.4.2 Appareil photographique

Appareil photo et Vidéocaméra : instruments optiques destinés à enregistrer des images sur support soit argentique (film), soit magnétique.

Pour la formation de l'image, ils utilisent une lentille convergente ou une association de plusieurs sortes de lentilles. Les appareils modernes comportent un nombre croissant de groupes de lentilles afin de corriger toutes les aberrations géométriques et chromatiques.

La mise au point s'effectue par déplacement de l'ensemble ou d'une partie de l'optique par rapport au support de l'image.

La taille de l'image ou le champ de vision peut être modifié par la modification de la distance focale de l'ensemble optique (zoom).
Suivant le champ ou l'angle de vision couvert on distingue :

- objectifs à focale fixe : grand angle, téléobjectif, objectif normal (champ de vision comparable à celui de la vision nette humaine).
- objectifs à focale variable : objectifs zoom, le domaine de variation possible de longueur d'onde peut être très grand (28 à 350 mm) pour des objectifs à grand nombre de groupes de lentilles.

Ouverture relative : mesure la quantité de lumière passant par l'objectif, définie par le rapport du diamètre de la pupille d'entrée D_E à la distance focale f de l'objectif.

Nombre d'ouverture ou diaphragme, k : grandeur très utilisée dans la pratique photographique pour désigner la quantité de lumière admise dans l'appareil. Elle est définie comme l'inverse de l'ouverture relative :

Nombre d'ouverture = distance focale/diamètre			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$k = \dfrac{f}{D_E}$	k	1	nombre d'ouverture ou “diaphragme”
	f	m	distance focale
	D_E	m	diamètre de la pupille d'entrée

▷ Plus le nombre d'ouverture est faible, plus la quantité de lumière admise est grande. L'échelle standard des nombres d'ouverture est la séquence : 1 ; 1,4 ; 2 ; 2,8 ; ... 16 ; 22 . Cette gradation correspond à une diminution d'un facteur 2 de la quantité de lumière admise en passant d'une valeur donnée à la suivante.

12.4.3 L'œil

Oeil : organe de la vision. L'œil forme sur la **rétine** une image réelle, renversée des objets regardés. L'influx nerveux transmis est interprété dans une zone du cerveau.

L'œil des vertébrés est essentiellement un instrument d'optique à une lentille (le cristallin). La plupart des invertébrés disposent d'yeux à facettes, composés d'un grand nombre d'éléments.

1. Caractéristiques de l'œil

Il se compose de :

- **sclérotique** : enveloppe externe dure.
- **cornée** : partie antérieure transparente, souple de la sclérotique, d'indice de réfraction $n \approx 1,38$.
- **cristallin** : lentille bi-convexe, déformable, composée de plusieurs couches d'indices de réfraction différents.
- **muscle ciliaire** : permet de contracter le cristallin et par là modifier sa distance focale.
- **pupille** : placée contre la face antérieure du cristallin, sert de diaphragme dont le diamètre est variable de 2 mm à 8 mm.
- **rétine** : membrane transparente tapissant le fond de l'œil et formée de l'épanouissement du nerf optique. C'est une mosaïque de cellules sensibles à la lumière. Ces cellules sont de deux sortes : les bâtonnets et les cônes dont les sensibilités sont fonction de la longueur d'onde (couleur).

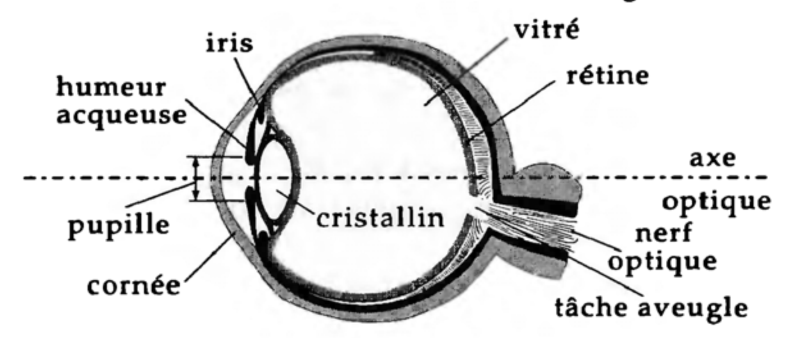


Fig. 12.35 : *Constitution de l'œil humain*

2. Propriétés de l'œil à vision normale

Au repos, le muscle ciliaire est totalement détendu, le cristallin est le moins bombé et ses rayons de courbures maximums. L'image d'objets situés à l'infini se forme **sur** la rétine.

Distance d'accomodation a_0 : la plus petite distance à laquelle l'œil peut observer un objet sans fatigue. Le point auquel se situe l'objet est alors appelé **punctum proximum.** Ce point, pour un observateur très jeune, peut se situer à $10cm$. En moyenne il se situe à $25cm$ de l'œil, cette distance augmente avec l'âge (*presbytie*).

Accommodation : modification (généralement inconsciente) du cristallin, dont la convergence augmente, à partir de celle correspondant à la meilleure vision, sans fatigue, d'objets éloignés (*punctum remotum*).

▷ La contribution principale à la réfraction de l'ensemble de l'œil est celle de l'interface air-cornée. C'est pourquoi il est difficile d'accomoder sous l'eau sans complément de vision. Le pouvoir d'accomodation du cristallin n'est pas suffisant pour compenser la diminution de réfraction due au remplacement de l'interface air-cornée par l'interface eau-cornée.

▷ L'œil perçoit des images réelles. Dans le cas de l'utilisation de loupes ou de miroirs, l'image virtuelle intermédiaire formée par ces instruments est reprise par l'œil pour en former une image réelle sur la rétine.

Angle de vision ε : angle sous lequel un objet est vu par l'œil.

Grossissement G (d'un instrument d'optique) : rapport de la tangente de l'angle de vision ε d'un objet à travers l'instrument à la tangente de l'angle de vision directe ε_0 du même objet placé au punctum proximum (25 cm).

Grossissement d'un instrument d'optique			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$G = \frac{\tan\varepsilon}{\tan\varepsilon_0} \approx \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$	G	1	grossissement
	ε	rad	angle de vision instrument
	ε_0	rad	angle de vision œil

▷ Pour des valeurs faibles des angles de vision, on peut utiliser l'approximation tangente → arc.

12.4.4 Défauts de la vision et leurs corrections

Les principaux défauts de la vision chez l'homme sont :

- La **myopie** : la puissance de l'œil est trop forte, l'oeil ne peut pas accommoder pour des objets situés à l'infini, leur point focal étant situé en avant de la rétine.
  Correction : on utilise une lentille divergente pour compenser la trop grande convergence de l'œil.
- L'**hypermétropie** : la puissance de l'œil est trop faible pour accommoder des objets situés près de l'œil. L'image se forme au-delà de la position de la rétine.
  Correction : les lunettes correctives sont constituées de lentilles convergentes qui augmentent la puissance optique globale.
- L'**astigmatisme** : la puissance optique dans le plan sagittal diffère de celle dans le plan méridional. L'image n'est pas uniformément nette. Si elle est nette pour des lignes verticales par exemple, elle peut ne pas être nette pour des lignes horizontales.
  Correction : on utilise des lentilles "cylindriques", c'est à dire des lentilles qui n'ont pas la même courbure dans deux directions perpendiculaires. Il est nécessaire d'ajuster l'angle entre le plan sagittal de la lunette et celui de l'œil.

12.4.4.1 L'œil et les instruments d'optique

La taille de l'image d'un objet perçue par un observateur dépend de l'angle sous lequel il est vu, et par conséquent de son éloignement de l'œil. L'image est la plus grande et la plus nette lorsque l'objet est placé au *punctum proximum*. Pour observer une image plus grande, il faut utiliser des instruments comme la loupe ou le microscope pour les objets qui peuvent être déplacés, ou des télescopes pour observer des objets lointains.

12.4.5 Loupe

Loupe : lentille convergente, de distance focale f, placée devant l'œil donnant d'un objet rapproché de hauteur y une image agrandie de taille y' et d'un diamètre apparent θ' (Fig. 12.36).

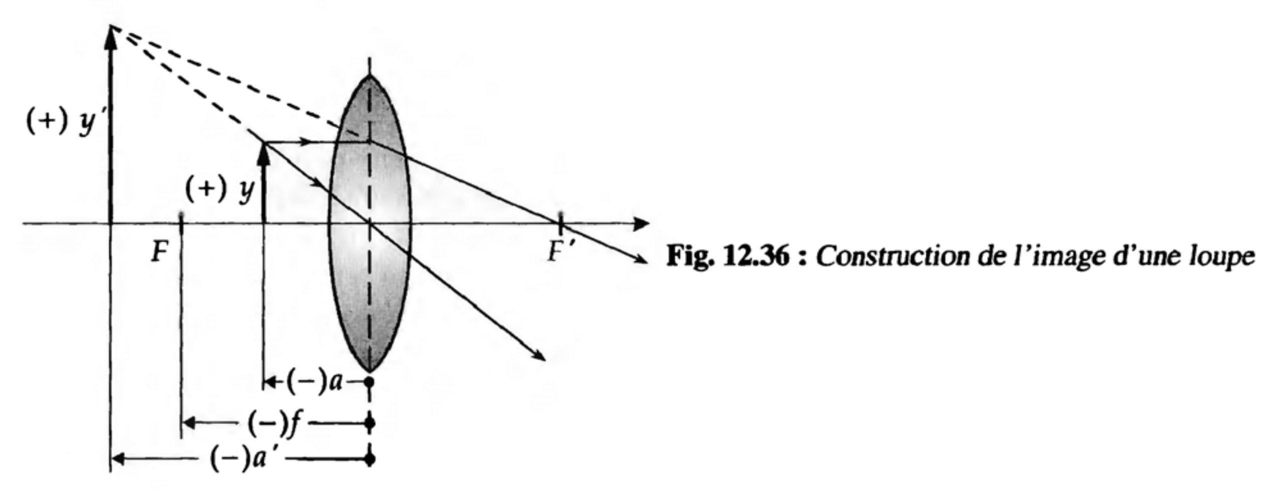


Fig. 12.36 : *Construction de l'image d'une loupe*

Grossissement commercial d'une loupe, G_L : défini comme le grossissement de la loupe lorsque l'objet est situé à $a_B = 25cm$ de l'œil. Dans ce cas on a :

Grossissement d'une loupe = −distance de vision nette/ distance focale			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$G_L = -\frac{a_B}{f}$	v_L	1	grossissement de la loupe
	a_B	m	distance objet–œil
	f	m	distance focale loupe

D'après nos conventions de signe, la distance de vision nette est $a_B = -25cm$.

12.4.6 Microscope

1. Construction du microscope

Microscope : permet d'obtenir des images de taille encore plus grande qu'avec la loupe (microscope simple). Il est composé de deux lentilles (ou groupes de lentilles) et forme une image virtuelle très agrandie et renversée (Fig. 12.37).

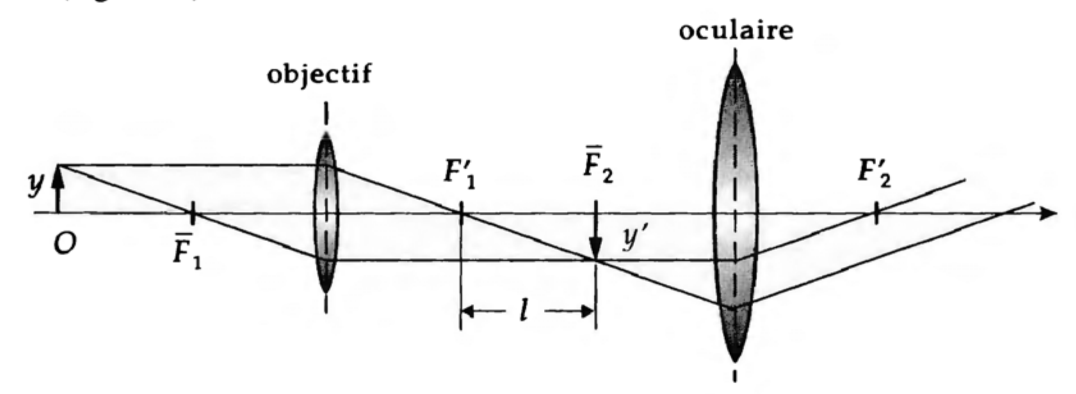


Fig. 12.37 : *Marche des rayons dans un microscope*

Le microscope se compose de :

- **Objectif** : lentille ou système de lentilles convergent, de très courte distance focale, placé près de l'objet. Il forme l'image intermédiaire, réelle et renversée.
- **Oculaire** : système convergent de lentilles placé près de l'œil ; permet d'agrandir et d'observer

l'image intermédiaire formée par l'objectif. Généralement, la disposition objectif-oculaire est telle que l'image intermédiaire se forme entre le foyer objet et le sommet de l'oculaire. L'image finale est alors virtuelle, agrandie et renversée.

- **Condenseur** : ensemble formé d'une lampe et d'un système optique pour éclairer l'objet ou la préparation à observer. Généralement, système convergent qui concentre la lumière sur l'objet. Son ouverture doit être au moins égale à celle de l'objectif du microscope.

Longueur du tube, tirage l : distance $\overline{F_1'F_2}$ entre le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire.

2. Grandissement du microscope

Le grandissement du microscope G_M est :

Grandissement du microscope			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$$G_M = G_{Ob} \times G_{Oc} = \frac{t}{f'_{Ob}} \frac{a_B}{f'_{Oc}}$$	G_M	1	grandissement du microscope
	G_{Ob}	1	grandissement de l'objectif
	G_{Oc}	1	grandissement de l'oculaire
	f'_{Ob}	m	distance focale de l'objectif
	f'_{Oc}	m	distance focale de l'oculaire
	t	m	tirage
	a_B	m	distance de vision nette

L'**Oculaire** est généralement constitué d'une :

- **lentille de champ** : fait converger les rayons issus de l'objectif,
- **lentille oculaire** : lentille convergente chargée de former l'image agrandie de l'image donnée par l'objectif et la lentille de champ.

12.4.7 Lunette astronomique

Lunette astronomique ou **longue vue** ou **téléscope** : instruments d'optique destinés à augmenter l'angle de vision d'objets très éloignés. Les lunettes utilisent des groupes de lentilles, les téléscopes utilisent généralement une association de lentilles et de miroirs.

Une lunette se compose d'un :

- **objectif** : lentille convergente dirigée vers l'objet à observer qui forme l'image de l'objet dans le plan focal image.
- **oculaire** : lentille convergente placée près de l'œil, qui permet d'observer l'image formée au foyer de l'objectif.

Caractéristiques de la lunette :

- **Grossissement** G_F :

Grossissement de la lunette			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$$G_F = -\frac{f'_{Ob}}{f'_{Ok}}$$	G_F	1	grossissement de la lunette
	f'_{Ob}	m	distance focale de l'objectif
	f'_{Ok}	m	distance focale de l'oculaire

▷ Le grossissement correspond au rapport des angles de visions avec (à travers la lunette) et sans lunette (à l'œil nu).

- **Champ de vision** : domaine dont la lunette forme l'image, il est donné par l'angle sous lequel ce domaine est vu soit en radian, soit en millièmes.
- **Diamètre utile de l'objectif** : détermine la quantité de lumière admise dans la lunette et par conséquent la luminosité de l'image.
- **Rapport d'ouverture** : rapport du diamètre de l'objectif à sa distance focale.
- **Intensité lumineuse** : rapport du diamètre de l'objectif à son grossissement.

1. Lunette astronomique

Lunette astronomique : forme une image virtuelle, renversée d'un objet éloigné (Planète) (Fig. 12.38).
Pouvoir séparateur, α : la plus petite distance angulaire de deux points vus distinctement dans la lunette.
Pour un objectif donné, le pouvoir séparateur est limité :

- pour les faibles grossissements, par le pouvoir séparateur de l'œil.
- pour les forts grossissements, par le pouvoir séparateur de l'objectif du fait de la diffraction. Le pouvoir séparateur est lié au rayon d'ouverture R de l'objectif par la relation :
  $$\alpha = \frac{1}{R}$$

Dans la lunette de Kepler, l'image finale se forme à l'infini, sa longueur L est alors égale à la somme des longueurs focales de l'objectif et de l'oculaire :

$$L = f'_{obj} + f'_{oc}$$

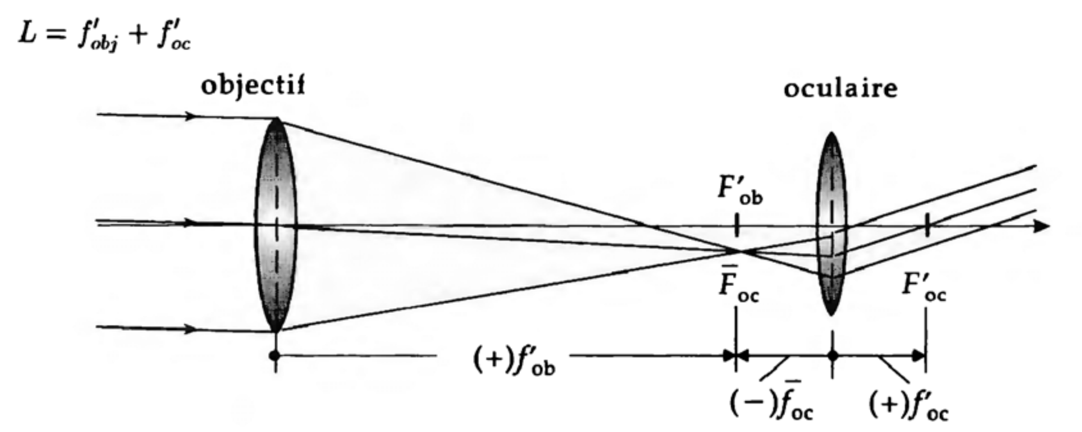


Fig. 12.38 : *Marche des rayons dans la lunette astronomiuqe (lunette de Kepler)*

2. Lunette terrestre

Lunette terrestre, ou **longue vue** : lunette dans laquelle une troisième lentille, placée entre l'objectif et l'oculaire, permet de redresser l'image finale. Celle-ci est virtuelle, droite et se forme à l'infini.

Fig. 12.39 : *Marche des rayons dans la lunette terrestre*

▹ Le redressement de l'image peut aussi être effectué à l'aide d'un prisme de redressement (prisme de Porro), comme dans les jumelles par exemple.

Télescope à miroir : parfois appelé télescope catadioptrique, lunette astronomique dans laquelle l'objectif est remplacé par un miroir concave parabolique. L'image finale, virtuelle et renversée, est observée à travers un oculaire.

L'utilisation d'un miroir à la place d'une lentille permet de disposer d'un plus grand angle d'ouverture et de bénéficier de l'absence d'aberrations chromatiques. Dans le montage de Cassegrain, un deuxième miroir (convexe) permet d'allonger la distance focale du miroir principal. L'image finale se forme derrière le miroir principal percé d'une ouverture, et est observée à l'aide d'un oculaire. (Fig. 12.40).

Miroir de Schmidt : télescope catadioptrique qui utilise des miroirs sphériques concaves dont la distance focale est égale à la moitié de son rayon de courbure. L'aberration sphérique est corrigée à l'aide de la **lame de Schmidt**, placée sur le diaphragme, dont une face est plane et l'autre légèrement creusée dans sa partie moyenne : le centre se comporte comme une lentille convergente, la périphérie comme une lentille divergente ; tous les rayons réfléchis viennent recouper l'axe au même point : il y a stigmatisme. Le télescope de Schmidt n'est affecté ni d'aberration sphérique, ni de coma, ni d'astigmatisme, ni de distorsion. Il ne lui reste qu'un résidu peu gênant d'aberration chromatique. Cependant, sa courbure de champ est importante et oblige à utiliser des films ou détecteurs courbes.

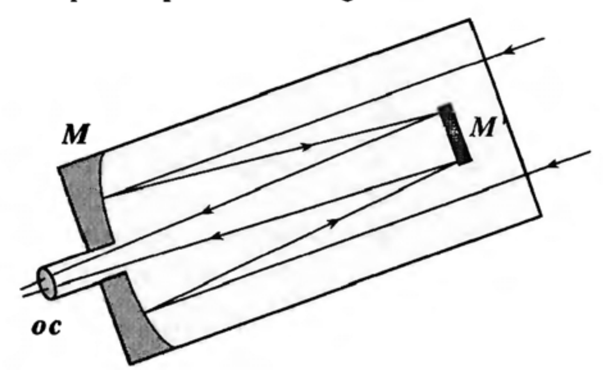


Fig. 12.40 : *Télescope de Cassegrain. Oc : lentille oculaire, M : miroir parabolique concave, M' : miroir convexe intermédiaire*

3. Lunette de Galilée

La lunette astronomique donne des images renversées ; en outre, si l'objet se déplace latéralement, son image se déplace dans le sens inverse. Ceci est un inconvénient pour observer des objets terrestres. Dans la lunette astronomique terrestre (jumelles), on place entre l'objectif et l'oculaire un système optique supplémentaire appelé redresseur (lentille ou prisme).

Lunette de Galilée : forme une image virtuelle, agrandie et redressée.

Dans la **lunette de Galilée**, l'oculaire est une lentille divergente qui assure simultanément le redressement et le grossissement de l'image objective. (voir Fig. 12.41).
La lunette de Galilée comprend :

- un **Objectif** : lentille convergente dirigée vers l'objet.
- un **Oculaire** : lentille divergente placée devant l'œil et dont le plan focal image $\bar{F}_{oc}$ coincide avec le plan focal image F'_{ob} de l'objectif. La lunette de Galilée ne permet pas d'atteindre de très forts grossissement ; du fait de sa faible longueur, elle est utilisée comme lunette de théâtre.

Le grossissement de la lunette de Galilée est positif, l'image finale est virtuelle et de même sens que l'objet. La longueur L de la lunette correspond à la **différence des distances focales** de l'objectif et de l'oculaire :

$$L = f'_{Ob} - \bar{f}_{Oc}$$

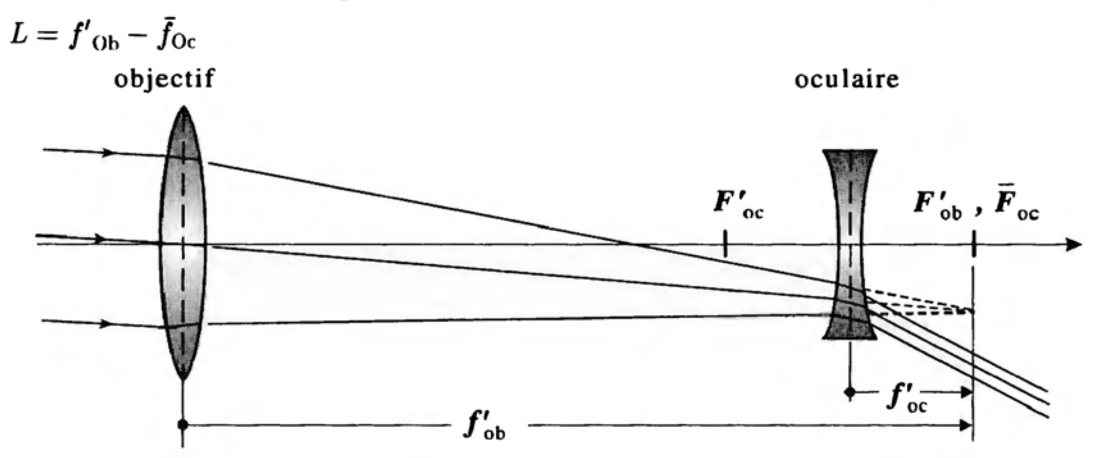


Fig. 12.41 : *Marche des rayons dans une lunette de Galilée*

12.5 Optique physique

Optique physique : étude des propriétés des ondes électromagnétiques de toutes fréquences : production, émission, diffusion, interférences, diffraction et polarisation.

12.5.1 Diffusion

Réflexion diffuse : se produit losque la lumière tombe sur une surface composée d'un grand nombre d'éléments de surface d'orientations diverses. La réflexion se produit alors dans de multiples directions ; d'un faisceau incident de rayons parallèles, on obtient un faisceau diffus (**lumière diffuse**).

Centre de diffusion : dans l'image d'Huygens, point duquel partent les ondes sphériques qui constituent la lumière diffusée.

Diffusion de Rayleigh : diffusion de la lumière visible par des molécules, sans changement de fréquence. D'une façon générale, diffusion par des particules dont le rayon est petit devant la longueur d'onde de la lumière. L'intensité de la lumière diffusée croît proportionnellement à la quatrième puissance de la fréquence. Ce qui revient à dire que l'intensité est plus grande pour les longueurs d'ondes les plus courtes.

■ Le ciel paraît bleu, car, dans le spectre visible, la lumière bleue a la plus courte longueur d'onde et par conséquent la plus grande intensité de diffusion par les molécules de l'air.

La perception humaine des objets dépend de la façon dont ils réflètent ou diffusent la lumière. Pour simuler cette perception, il existe diverses démarches dans le traitement de données (**traitement d'images, infographie**) :

Les méthodes les plus simples et les plus rapides supposent que les surfaces des objets sont mates, c'est à dire qu'elles produisent la réflexion diffuse. Leur aspect est indépendant du point d'observation. Les calculs sont alors relativement réduits.

Ray-Tracing ou lancer de rayons : méthode alternative pour la représentation d'images réalistes qui suppose les surfaces réfléchissantes. Ce procédé nécessite de recalculer les images à chaque changement de position du point d'observation et de ce fait exige une très grande puissance de calcul.

On imagine qu'un rayon lumineux passe tour à tour à tavers chaque pixel (*picture element*) de l'écran et les objets à représenter. Si le rayon aboutit à un objet, l'ordinateur étudie sa réflexion. Plus la forme de l'objet est complexe, plus grand sera le nombre de rayons à y "lancer", donc le nombre de calculs à effectuer. De même, si la position de l'observateur change (images animées).

12.5.2 Diffraction et limite du pouvoir séparateur

Diffraction (voir page 311) : lorsque des ondes rencontrent un obstacle dans leur propagation, elles ne se propagent pas uniquement en ligne droite, mais contournent l'obstacle et se propagent aussi dans la zone d'ombre géométrique de l'objet. Sur un écran placé derrière l'objet apparaissent des franges d'interférences dues aux ondes élémentaires d'Huygens émises par chaque point de l'objet touché par l'onde incidente.

1. Genres de diffraction

Diffraction de Fraunhofer ou diffraction à l'infini, produite par des faisceaux de lumière parallèles (Fig. 12.42). C'est le cas particulier où la source et le point d'observation sont très éloignés de l'obstacle sur lequel la lumière est diffractée.

Diffraction de Fresnel : produite par les faisceaux de lumière divergents. C'est le cas général, elle concerne la théorie des ombres ; la diffraction de Fraunhofer concerne la formation des images optiques.

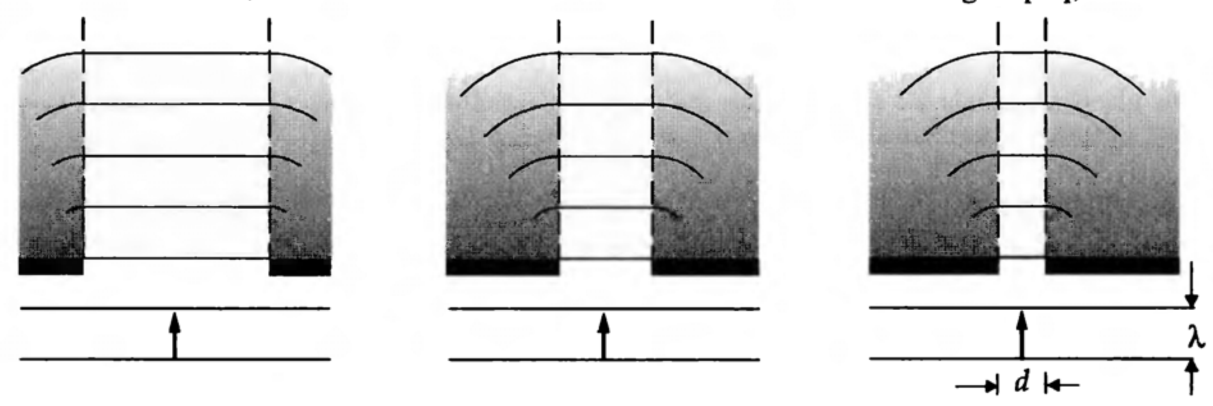


Fig. 12.42 : *Diffraction de Fraunhofer*

Diffraction par une fente (Fig. 12.43, Fig. 12.44) :

Intensité : $$I_\alpha = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi d \sin\alpha}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi d \sin\alpha}{\lambda}\right)^2}$$

minima d'intensité : $\sin\alpha_n = \pm\, n\frac{\lambda}{d}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

maxima d'intensité : $\sin\alpha_n = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

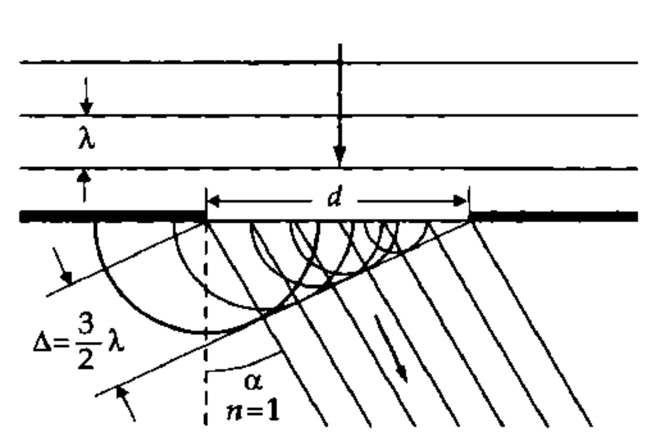


Fig. 12.43 : *Diffraction par une fente. λ : longueur d'onde, d : largeur de la fente*

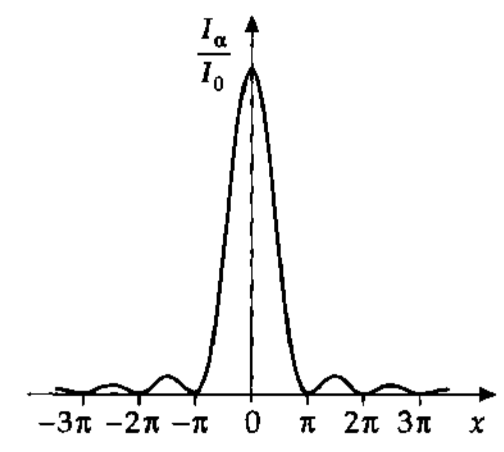


Fig. 12.44 : *Distribution d'intensité en fonction de $x = \pi d \sin(\alpha)/\lambda$*

Diffraction par un réseau de fentes (Fig. 12.45):

Intensité : $$I_\alpha = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi d \sin\alpha}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi d \sin\alpha}{\lambda}\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{q\pi g \sin\alpha}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi g \sin\alpha}{\lambda}\right)}$$

maxima d'intensité : $\sin\alpha_n = \pm n\,\frac{\lambda}{g}\,,\quad n = 1, 2, 3, \ldots.$

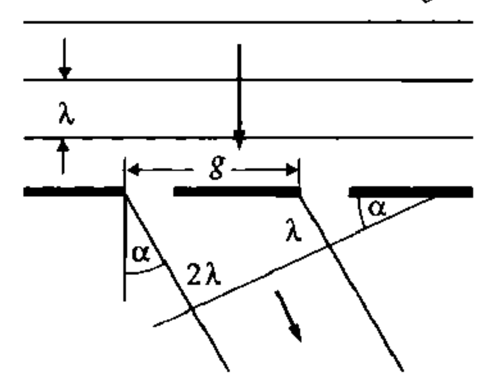


Fig. 12.45 : *Diffraction par un réseau.*

λ : longueur d'onde, d : largeur d'une fente,
α : angle de diffraction, p : pas du réseau,
I_0 : intensité pour α = 0, q : nombre de fentes,
I_α : intensité pour α

2. Diffraction par un réseau cristalin

La diffraction de rayons X par des cristaux peut être interprétée comme la réflexion sélective par les plans réticulaires du réseau cristalin.

Condition de Bragg : des maxima d'interférences se produisent lorsque l'angle d'incidence θ (**angle de Bragg**, angle de réflexion sélective) satisfait à la relation :

$$2d\,\sin\theta = k\cdot\lambda\,,\quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

d est la distance des plans réticulaires, λ la longueur d'onde des rayons X (Fig. 12.46). La différence de marche entre deux rayons réfléchis par des plans réticulaires adjacents est $\Delta = 2d\sin\theta$.

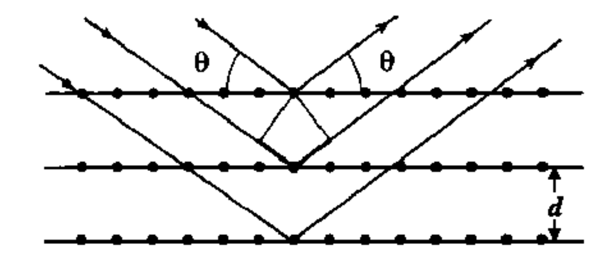


Fig. 12.46 : *Condition de réflexion sélective de Bragg. d : distance de deux plans réticulaires, Δ : différence de marche entre deux rayons voisins*

3. Influence de la diffraction sur la formation des images

Dans toute formation d'image, la monture de l'objectif ou son diaphragme constitue un obstacle pour les ondes électromagnétiques. L'image d'un point n'est alors pas uniquement formée selon les lois de l'optique géométrique, mais comporte une partie due à la diffraction. Elle est constituée d'un maximum d'intensité (disque brillant dont le centre correspond à l'image géométrique du point) et plusieurs maxima secondaires (Fig. 12.44). Lorsqu'on forme l'image de deux points voisins, les deux images de diffraction correspondantes se chevauchent. Si les deux points sont très proches, leurs maxima de diffraction ne sont plus discernables.

Disque d'Airy ou cercle d'Airy : tache lumineuse, image d'un point objet brillant. Image d'un point, due à la diffraction de Fraunhofer, formé d'un système optique que limite une ouverture de diamètre D.

4. Pouvoir de résolution, pouvoir séparateur

La plus petite distance de deux points objets, dont un système optique peut former deux images distinctes. Il n'existe pas de critère objectif qui permette de définir quand deux disques d'Airy adjacents sont perçus de façon distincte. On utilise souvent le **critère de Rayleigh** :

Critère de Rayleigh : les images de deux objets sont résolues, si la position du maximum principal du premier objet correspond à celle du premier minimum nul du deuxième. L'angle δ, sous lequel sont vus les deux objets, est alors donné par :

Critère de Rayleigh			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$\sin\delta \geq 1.22\,\dfrac{\lambda}{b}$	δ	rad	angle d'ouverture
	λ	m	longueur d'onde
	b	m	diamètre du diaphragme

Pour de petits angles δ, le sinus peut être remplacé par l'arc δ.

Pouvoir séparateur spectral d'un prisme : produit de la longueur de la base b du prisme par la dispersion $|\mathrm{dn}(\lambda)/\mathrm{d}\lambda|$:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b \cdot \left|\frac{\mathrm{dn}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|$$

■ Un prisme en verre Flint ($|\mathrm{dn}/\mathrm{d}\lambda| = 1500\ \mathrm{mm}^{-1}$) de longueur de base $b = 1$ cm est capable de séparer les raies du doublet du Sodium $\lambda_{\mathrm{D1}} = 589.6$ nm et $\lambda_{\mathrm{D2}} = 589.0$ nm. Un prisme, de même dimension de base, mais en verre Crown ($|\mathrm{dn}/\mathrm{d}\lambda| \approx 55\ \mathrm{mm}^{-1}$), n'atteint pas le pouvoir de résolution nécessaire.

Pouvoir séparateur spectral d'un réseau : le produit de l'ordre du maximum k et du nombre N des traits du réseau :

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = k \cdot N$$

- Un spectromètre à réseau de $N = 10^5$ traits (fentes), est capable de séparer des longueurs d'onde qui ne sont distinctes que de $\Delta\lambda = 10^{-5}\lambda$.

Pouvoir séparateur d'un microscope : défini par la plus petite distance $x_{\min}$ de deux points objets dont les images sont discernables .

$$x_{\min} = \frac{A}{\lambda} \quad A = n \cdot \sin\alpha$$

n est l'indice de réfraction du milieu qui se trouve en avant de la lentille frontale de l'objectif, α est le demi-angle d'ouverture du cône qui va du point objet et qui est sous-tendu par l'objectif. La quantité A est appelée **ouverture numérique** de l'objectif.

12.5.3 Réfraction des ondes

Réfraction : modification de la direction de propagation des ondes à l'interface de deux milieux d'indices de réfraction différents. Lors du passage d'un milieu à un autre de vitesse de propagation différent, la fréquence de l'onde reste la même, mais la longueur d'onde change.

Ce phénomène s'interprète par le concept des ondes élémentaires d'Huygens (Fig. 12.47). Lorsqu'un front d'onde est incident sur l'interface entre deux milieux d'indices de réfraction différents, avec un angle différent de 90°, une onde élémentaire sphérique d'Huygens est issue de chaque point de l'interface. Chaque onde élémentaire se propage dans chacun des deux milieux (la partie réfléchie n'est pas représentée). Puisque les différents points de l'interface sont atteints à des temps différents, les ondes élémentaires prennent naissance à des temps différents. La figure représente un instantané qui montre les maxima des ondes élémentaires ainsi que les fronts d'ondes plans qui résultent de leur superposition (voir page 293).

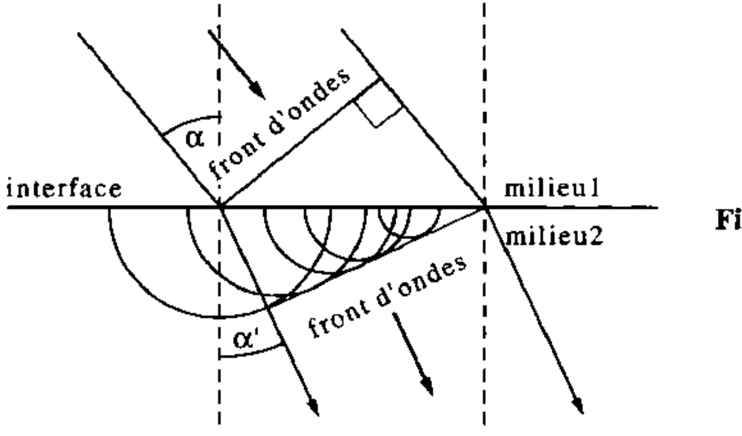


Fig. 12.47 : *Réfraction d'ondes*

12.5.4 Interférences

Pour que des ondes électromagnétiques puissent donner lieu à des interférences, il faut que les ondes qui se superposent soient **cohérentes**, c'est à dire qu'elles doivent venir d'un même domaine d'une source de lumière. On peut obtenir des ondes cohérentes en dédoublant un faisceau à l'aide de miroirs ou de lames semi-réfléchissants.

Si les ondes qui se superposent ne sont pas cohérentes temporellement et spatialement, les interférences ne sont pas visibles, car en un point donné les interférences constructives et destructives alternent continuellement.

▷ Un **laser** se distingue par le fait que la lumière qu'il produit est cohérente (est caractérisée par une grande longueur de cohérence).

Une lampe à incandescence émet des trains d'ondes qui n'ont pas de relation de phase constante entre eux. Les différences de phases entre trains d'ondes sont aléatoires. Des interférences entre de tels sources ne sont observables que si les trains d'ondes qui se superposent sont émis par un même élément de surface de la source.

1. Condition de cohérence

Condition que doit remplir l'angle d'ouverture α sous lequel doit apparaître un élément de surface de la source de diamètre b, pour que des interférences puissent se produire (Fig. 12.48) :

$$n \sin \alpha \ll \frac{\lambda}{2b}$$

λ est la longueur d'onde, n est l'indice de réfraction du milieu.

Longueur de cohérence, l : longueur moyenne d'un train d'ondes.

Temps de cohérence, τ : temps que met la lumière pour parcourir distance égale à une longueur de cohérence :

$$l = c \cdot \tau$$

La cohérence temporelle est assurée si pour la demi-largeur Δf d'une ligne spectrale de fréquence f on a :

$$\tau \approx \frac{1}{\Delta f} \quad l \approx \frac{c}{\Delta f}$$

■ Les lampes spectrales ont une longueur de cohérence de l'ordre de $l = 1 \cdot 10^{-1}$ m pour une largeur de bande de fréquence de Δf=1 GHz. Les Laser HeNe atteignent des valeurs de $l = 150$ m et $\Delta f = 2$ MHz.

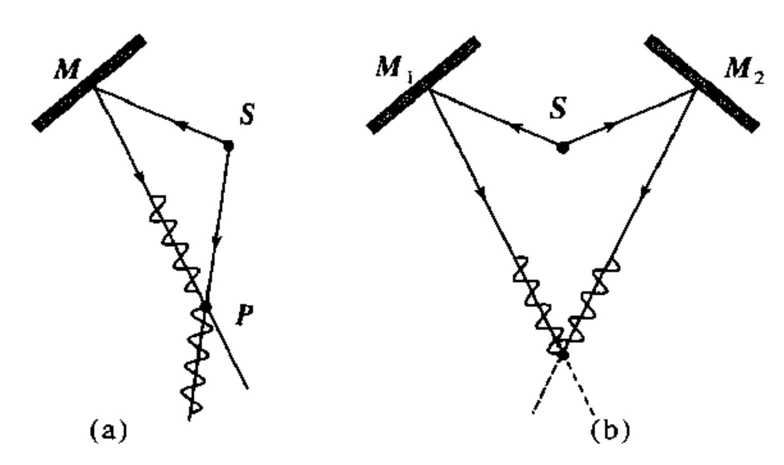


Fig. 12.48 : *Cohérence de la lumière. S : source de lumière, M, M_1, M_2 : miroirs. (a) : pas de cohérence au point P, (b) : cohérence temporelle au point P*

2. Interférences sur les lames minces

Les **interférences sur les lames minces** se produisen lorsque :

- la lumière est incidente sur une lame dont l'indice de réfraction est différent de celui du milieu extérieur
- une partie de la lumière incidente est réfléchie par la face avant de la lame mince et se superpose à l'autre partie réfractée dans la lame et réfléchie par sa face arrière

À chaque interface milieu extérieur-milieu intérieur à la lame, les rayons de lumière se séparent en une partie réfléchie et une partie réfractée. (Fig. 12.49).

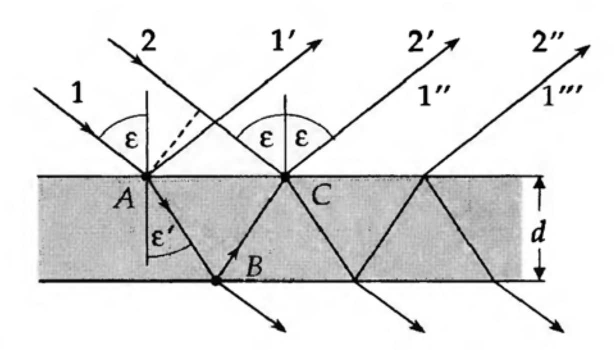


Fig. 12.49 : *Interférences sur une lame à faces parallèles d'épaisseur d*

- Un rayon 1, incident sur la lame en A est partiellement réfléchi suivant le rayon 1′.
- L'autre partie du rayon 1 pénètre la lame en A, est refractée, puis partiellement réfléchie sur la face arrière de la lame en B. Ce rayon, après réfraction, ressort de la lame en C et donne le rayon 1″. Si la lame est mince (d'épaisseur inférieure à la longueur de cohérence), ce rayon est cohérent avec le rayon 1′.
- Le rayon 1″ peut se superposer avec un autre rayon 2′ du faisceau de rayons parallèles et, suivant leur différence de marche, donner lieu à des interférences constructives ou destructives.

3. Différence de marche des rayons

Soit une lame mince d'indice de réfraction n, d'épaisseur d, placée dans un milieu d'indice ≈ 1. Un faisceau de lumière parallèle de longueur d'onde λ y est incident sous l'angle ε (Fig. 12.49). La différence de marche Δ des rayons 1″ et 2′ au point C est :

Différence de marche : lame mince — 1

$$\begin{aligned}\Delta &= 2d\sqrt{n^2-\sin^2\varepsilon}-\frac{\lambda}{2}\\ &= 2nd\sqrt{1-\sin^2\varepsilon'}-\frac{\lambda}{2}\\ &= 2nd\cos\varepsilon'-\frac{\lambda}{2}\end{aligned}$$

Symbole	Unité	Dénomination
Δ	m	différence de marche
d	m	épaisseur de la lame mince
n	1	indice relatif de la lame
ε	rad	angle d'incidence
λ	m	longueur d'onde

où ε' est l'angle de réfraction du rayon dans la lame. Si l'incidence est normale ($\varepsilon = \varepsilon' = 0°$) :

$$\Delta = 2nd - \frac{\lambda}{2}$$

Le terme $-\lambda/2$ correspond à la réflexion sur le milieu de plus grand indice sous la lame. Lorsque les rayons du type de 1″ et 2′ interfèrent, suivant les valeurs de Δ, il y a **interférences constructives** (brillance) ou **interférences destructives** (obscurité).

4. Interférences constructives

Pour qu'il y ait interférences constructives, il faut que :

Interférences constructives : lame mince

$$\begin{aligned}2d\sqrt{n^2-\sin^2\varepsilon} &= \left(m+\frac{1}{2}\right)\lambda\\ 2nd\cos\varepsilon' &= (2m+1)\,\frac{\lambda}{2}\\ m &= 0,1,2,\ldots\end{aligned}$$

Symbole	Unité	Dénomination
d	m	épaisseur de la lame mince
n	1	indice relatif de la lame
ε	rad	angle d'incidence
ε'	rad	angle de réfraction
λ	m	longueur d'onde

À incidence normale ($\sin\varepsilon = 0$), les franges brillantes ont lieu pour :

$$\lambda = \frac{4nd}{2m+1}$$

5. Interférences destructives

Pour les franges sombres (interférences destructives), on a :

Interférences destructives : lame mince			
	Symbole	Unité	Dénomination
$2d\sqrt{n^2 - \sin^2\varepsilon} = (m+1)\,\lambda$	d	m	épaisseur de la lame mince
$2nd\cos\varepsilon' = (m+1)\,\lambda$	n	1	indice relatif de la lame
$m = 0, 1, 2, \ldots$	ε	rad	angle d'incidence
	ε'	rad	angle de réfraction
	λ	m	longueur d'onde

À incidence normale, les franges sombres ont lieu pour :

$$\lambda = \frac{2nd}{m+1}$$

Les interférences observées sur des lames à faces parallèles correspondent à des angles d'incidence déterminés (**franges d'égales inclinaison**).

■ Les films d'huile qui se déposent sur des flaques d'eau apparaissent colorées (irisées). Ces lames minces d'huile présentent des irrégularités d'épaisseur. À chaque épaisseur correspondent des longueurs d'onde (couleurs) définies, pour lesquelles il y a interférences constructives (brillance), alors que d'autres longueurs d'onde sont éteintes. Il en résulte diverses colorations très sensibles aux variations d'épaisseur (**échelle des teintes de Newton, teintes sensibles**).

6. Couches antireflet

Les interférences (destructives) sur les couche minces sont utilisées pour diminuer les reflets à la surface de certaines lentilles. Sur une surface d'indice n_1, on dépose une couche mince d'indice de réfraction $n_2 < n_1$. L'indice n_2 et l'épaisseur d de la couche sont choisis de manière à ce que pour la longueur d'onde λ souhaitée, les ondes réfléchies se détruisent par interférences.

L'extinction n'est pas limitée à une longueur d'onde bien définie, mais s'étend à un certain domaine, de sorte qu'on peut diminuer les réflexions sur une partie du spectre visible. Des couches minces sont utilisées pour le **traitement optique** de lentilles d'objectifs photographiques ou de lunettes de vision. Ces lentilles pésentent souvent une coloration purpurine, car les longueurs d'ondes correspondant au rouge et au violet ne sont pas complètement éteintes.

Franges de Fizeau : franges d'interférences lumineuses d'égale épaisseur optique, observables sur des lames transparentes minces. On peut produire ces **franges d'égale épaisseur** (Fig. 12.50) à l'aide du coin d'air compris entre deux lames planes inclinées l'une par rapport à l'autre.

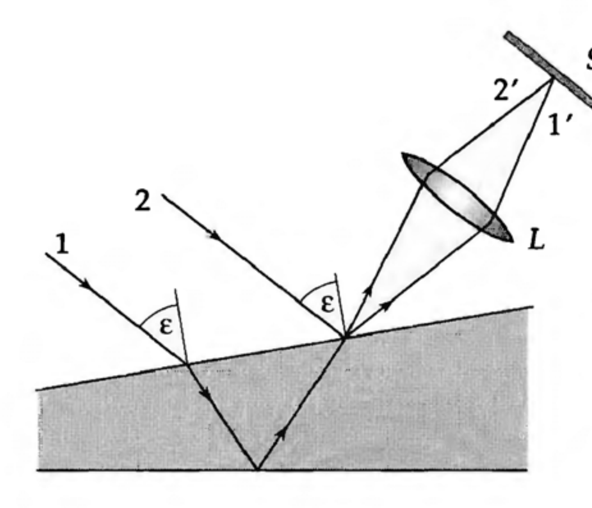


Fig. 12.50 : *Interférences sur une couche en forme de coin. L : lentille, S : écran*

7. Anneaux de Newton

Franges d'interférences d'égale épaisseur, données par le coin d'air qui sépare deux surfaces sphériques ou une sphérique de rayon R et une plane. Des anneaux brillants et sombres alternent à la manière des franges de Fizeau. Lorsque le coin d'air est limité par une surface sphérique en contact avec une surface plane, les rayons $r_{\min}$ des anneaux de Newton sombres et les rayons $r_{\max}$ des anneaux brillants sont :

$$r_{\min} = \sqrt{R\lambda k}\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

$$r_{\max} = \sqrt{R\lambda\left(k + \frac{1}{2}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

8. Interférométrie

Technique appliquant l'observation des interférences d'ondes à la mesure de diverses grandeurs physiques : longueurs, distances angulaires, indices de réfraction. L'interférométrie permet des mesures très précises.

Interféromètre de Michelson : interféromètre à deux ondes et à faisceaux séparés (Fig. 12.51). La lumière issue de la source S, grâce à la lame semi-transparente L_1, se sépare en un faisceau transmis 1 et un faisceau réfléchi 2. Ces faisceaux se réfléchissent sur deux miroirs plans parallèles M_1 et M_2. Les deux faisceaux réfléchis, après une nouvelle séparation par la lame L_1, se superposent en 1'2'.

Si l'indice de réfraction est n sur l'ensemble du parcours des faisceaux et si les chemins géométriques des deux faisceaux sont respectivement s_1 et s_2, la différence de marche correspondant à deux maxima d'interférences successifs (interfrange) est :

$$n(s_2 - s_1) = k \cdot \lambda$$

Si, par exemple, le miroir M_1 est déplacé de $d = \lambda/2$ vers M_1', on observera un déplacement exactement d'une frange d'interférence. De cette façon, il est possible d'effectuer des mesures très précises de déplacements ou de variations de longueurs.

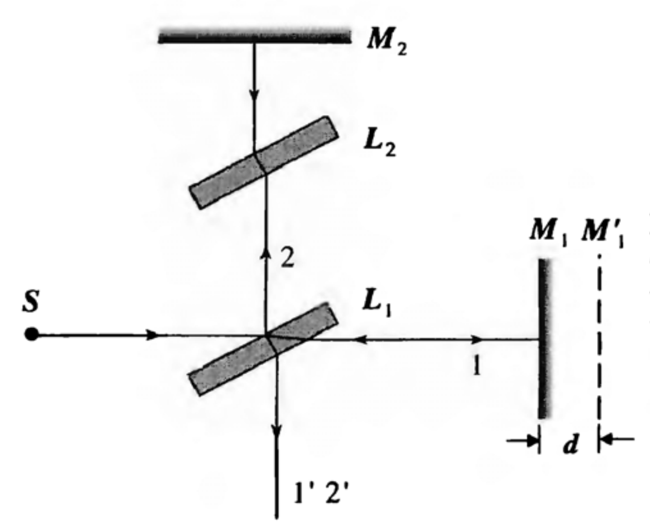


Fig. 12.51 : *Interféromètre de Michelson (principe). S : source de lumière, L_1, L_2 : lames semi-réfléchissantes, M_1, M_2 : miroirs, d : déplacement du miroir M_1*

12.5.5 Éléments optiques diffractants

Le fonctionnement de certains éléments optiques, tels que les réseaux et les plaques zonales, repose sur la **diffraction** des ondes par de fines structures géométriques et requiert l'optique ondulatoire pour leur description.
Les **éléments optiques réfringents**, au contraire, sont décrits par les lois de **réfraction** de l'optique géométrique.

■ Les réseaux de fentes, les réseaux cristallins, les hologrammes, les plaques zonales de Fresnel sont des éléments optiques diffractants.

▷ Les éléments optiques "classiques" sont soit des éléments réfringents (lentilles, prismes), soit réfléchissant ou catadioptriques (miroirs).

▷ En réalité, la diffraction intervient également pour les éléments réfringents. La monture d'une lentille, par exemple, agit comme un fente circulaire qui diffracte les rayons qui la frappe. Cette diffraction peut limiter le pouvoir séparateur de certains instruments d'optique.

Les effets de la **diffraction** prédominent lorsque les dimensions des structures sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde.
Les dimensions des éléments diffractants sont de l'ordre du micromètre (10^{-6} m). Leur fabrication n'est maîtrisée que depuis le milieu de ce siècle.

12.5.5.1 Réseau de diffraction

Les **réseaux de diffraction**, décomposent la lumière en ses composantes spectrales (spectrographe à réseau) ou dévient des faisceaux monochromatiques dans une ou plusieurs directions (formules voir page 293). Les relations correspondantes se trouvent dans le chapitre relatif aux ondes.

■ Un Compact Disc (CD) constitue un réseau de diffraction par réflexion.

12.5.5.2 Réseau zoné

Plaque zonales de Fresnel : écran plan formé d'anneaux alternativement transparents et opaques de même centre, séparés par des cercles dont les rayons varient proportionnellement aux racines carrées des entiers successifs (Fig. 12.52). Un tel réseau zoné, pour de la lumière cohérente, se comporte comme une lentille convergente.

Le **rayon des anneaux transparents** est choisi de manière à ce que les chemins optiques parcourus à partir de deux zones adjacentes jusqu'au foyer diffèrent exactement d'une longueur d'onde, de sorte que la lumière interfère constructivement au foyer.

Rayon r_1 du premier anneau transparent :

$$r_1 = \sqrt{(f+\lambda)^2 - f^2} = \sqrt{f^2 + 2f\lambda + \lambda^2 - f^2} \approx \sqrt{2f\lambda} \quad \text{pour } \lambda \ll f$$

Rayon r_n du n-ième anneau transparent :

$$r_n \approx \sqrt{2n\lambda f}.$$

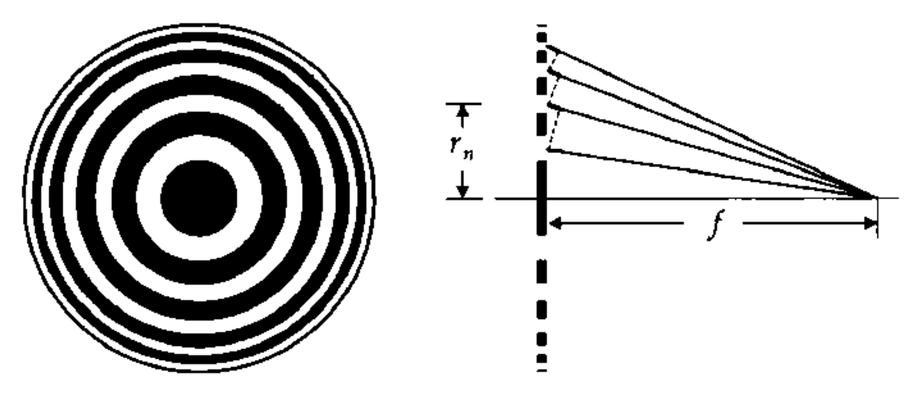


Fig. 12.52 : *Réseau zoné ou plaque zonale de Fresnel*

Un tel élément est capable de focaliser des faisceaux, mais occasionne une importante perte de lumière (50% de pertes aux anneaux opaques ainsi que des pertes aux ordres de diffraction supérieurs). Néanmoins, ces éléments jouent un rôle important dans les domaines de longueur d'onde pour lesquels il n'existe pas de matériaux réfringeants pour construire des lentilles (microscope à rayons X).

12.5.5.3 Lentille de Fresnel

Lentille de Fresnel à échellons : ensemble composé de la lentille centrale et d'anneaux dioptriques qui agit comme une lentille convergente unique. La forme de la surface correspond à celle d'une lentille dont on a enlevé le verre superflu (Fig. 12.53).

En lumière cohérente, l'échelonnement des anneaux dioptriques est calculé de manière à ce que, d'un échelon à l'autre, les chemins optiques diffèrent d'un nombre entier de longueurs d'onde (Fig. 12.55). Les ondes partielles interfèrent alors consructivement au foyer. La hauteur h des structures est dans ce cas de l'ordre du μm. La qualité des images est équivalente à celle donnée par une lentille conventionnelle.

Une lentille de Fresnel n'est pas un élément optique purement diffractant, elle constitue une transition entre éléments réfringents et diffractants (Fig. 12.54).



Fig. 12.53 : *Lentille à échelon de Fresnel : élimination successive du verre superflu*

■ Les lentilles de Fresnel furent utilisés, entre autres, comme condenseur dans les phares. Pour des lentilles de grand diamètre, l'économie de verre et donc de poids peut être très importante.

Ce type de condenseur est très utiisé dans les rétroprojecteurs ou les dispositifs placés sur la lunette arrière d'autobus pour élargir le champ de vision de leur rétroviseur.

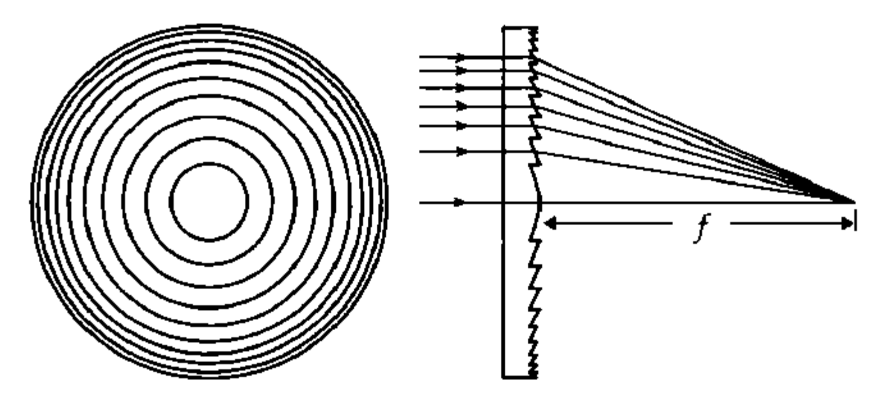


Fig. 12.54 : *Lentille de Fresnel à échelons. La partie centrale et les anneaux dioptriques focalisent un faisceau parallèle de lumière en un même foyer. Réciproquement, on peut former une faisceau parallèle à partir d'une source ponctuelle*

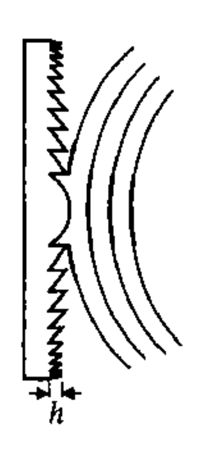


Fig. 12.55 : *Lentilles de Fresnel à échelons. Les différences de marche d'un échelon à l'autre sont égales à un nombre entier de longueurs d'onde.*
h : hauteur de structure

▷ En lumière non cohérente, le pouvoir séparateur est fonction du diamètre de la zone la plus centrale. En lumière cohérente il dépend du diamètre total de la lentille.

12.5.5.4 Hologrammes

Hologramme : élément optique sur lequel sont enregistrés à la fois la distribution d'intensité et de phase de la lumière réfléchie par un objet. La méthode holographique est due à Gabor.

● Les procédés d'enregistrement photographique (films, caméras vidéo, CCD) n'enregistrent que les intensités, c'est à dire la valeur de l'amplitude complexe. Les informations sur les relations de phase, contenues dans le champ d'onde réfléchi par un objet, sont perdues.
En utilisant de la lumière cohérente, l'information relative à la phase peut aussi être enregistrée. Pour ce faire, il faut que la lumière réfléchie par l'objet interfère avec la lumière issue de la source de référence. À partir de l'interférogramme (hologramme) ainsi enregistré, on peut restituer le champ d'onde original (Fig. 12.56) et restituer une image en 3 dimensions de l'objet.

Soit l'amplitude complexe $o(x,y) = |o(x,y)|e^{i\phi(x,y)}$ de la lumière réfléchie par l'objet et $r(x,y)$ l'amplitude complexe de la source de référence dans le plan (x,y) de l'hologramme.
Sans la source de référence, on enregistre :

$$oo^* = |o|e^{i\phi}|o|e^{-i\phi} = |o|^2$$

Avec la source de référence, on enregistre :

$$(o+r)(o+r)^* = oo^* + rr^* + or^* + ro^* = |o|^2 + |r|^2 + or^* + ro^*$$

Lorsque cet enregistrement est éclairé par la source de référence r, on obtient :

$$|o+r|^2 \cdot r = |o|^2 r + |r|^2 r + o|r|^2 + o^* r^2$$

Fig. 12.56 : *Enregistrement (à gauche) et restitution (à droite) d'un hologramme. (S) : miroir semi-transparent, (H) : hologramme, (B) : observateur*

En utilisant une onde plane comme onde de référence r on a $|r|^2$ = const., de ce fait on restitue le front d'onde original o issu de l'objet. L'observateur voit une **image virtuelle** en trois dimensions de l'objet. En changeant de position, il perçoit l'image sous différents angles de vue.

- À partir de l'onde restituée o, on peutr obtenir une image normale.
- Si un hologramme est déchiré en morceaux, chaque morceau contient les mêmes informations et est capable de restituer l'image de l'ensemble de l'objet, mais sous des angles de vue différents.
- Pour l'enregistrement d'un hologramme, un film de grain extrêmement fin est requis (taille des grains de l'ordre de la longueur d'onde), ainsi qu'un laser de puissance et de longueur de cohérence suffisantes.

▷ Cette description sommaire ne vaut que pour les hologrammes par transmission et éclairés par de la lumière cohérente à la restitution. On peut également produire des hologrammes par réflexion.

■ Les hologrammes que l'on trouve sur certaines cartes de crédit ou de téléphone sont des hologrammes par réflexion. Généralement, ils ne permettent de changer l'angle de vue que dans la direction horizontale, la direction verticale a été réservée pour la décomposition spectrale de la lumière. Ces hologrammes ne sont pas des photographies, ils sont générés par des programmes d'ordinateurs.

12.5.5.5 Hologrammes générés par ordinateur

La structure des **hologrammes générés par ordinateur** est calculée pour produire une image déterminée qui est reproduite par des techniques de microstructures (lithographie).
Les procédés lithographiques actuels permettent de produire des structures dont les éléments ont des dimensions de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde du spectre visible. Leurs applications sont diverses :

■ Hologrammes pour la protection contre la falsificaton de cartes bancaires, de billets de banque, de certificats d'origine...

Le calcul des hologrammes par ordinateur est basé sur la propagation des ondes électromagnétiques à l'aide de transformées de Fourier.

Holographie acoustique : en envoyant des ondes acoustiques de haute fréquence sur un objet et en utilisant un film dont la densité optique est fonction de l'intensité acoustique (pression) reçue, on peut obtenir une image restituant le champ acoustique que l'on peut examiner à l'aide d'un laser.

Diffraction de Fraunhofer : diffraction à l'infini, méthode approchée de calcul des figures de diffraction en admettant que les distances entre l'objet sur lequel la lumière est diffractée et le point d'observation sont très grandes par rapport à la longueur d'onde de la lumière. Selon le **principe d'Huygens** (voir page 297) : chaque point d'un front d'ondes peut être considéré comme source d'une onde élémentaire sphérique. La propagation du champ d'ondes est décrite par la superposition de ces ondes élémentaires. La Figure 12.57 représente la disposition géométrique des éléments utilisés dans le calcul.

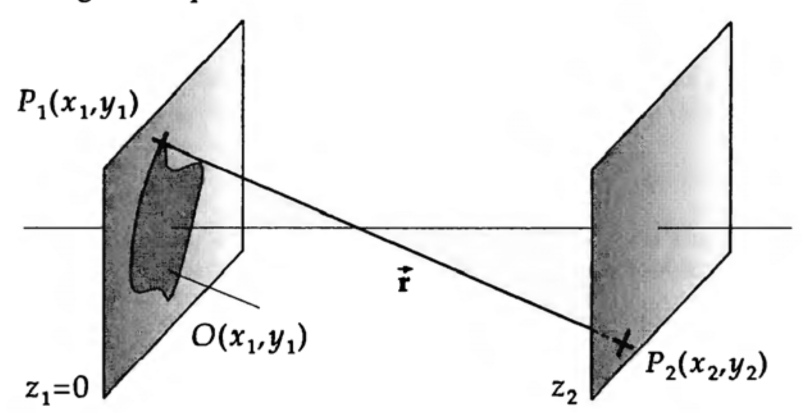


Fig. 12.57 : *Géometrie pour le calcul des figures de diffraction*

L'objet diffractant est situé dans le plan $z_1 = 0$ et est éclairé à partir de la gauche par une onde plane $u(x_1, y_1)$, par exemple un faisceau laser étendu. Sa transparence est décrite par la fonction $O(x_1, y_1)$; pour une fente, $O(x_1, y_1) = 1$ sur toute la largeur de la fente et $O(x_1, y_1) = 0$ partout ailleurs.

Amplitude complexe dans le plan de l'image de diffraction :

$$u(x_2, y_2) = \int dx_1 \int dy_1 O(x_1, y_1) \frac{1}{r} \exp[i\vec{k} \cdot \vec{r}]$$

L'**approximation paraxiale** : $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \ll z_2^2$, conduit à l'approximation de Fraunhofer. On obtient :

$$u(x_2, y_2) \approx \int dx_1 \int dy_1 O(x_1, y_1) \exp\left[\frac{-2\pi i}{\lambda z_2}(x_2 x_1 + y_2 y_1)\right]$$

Ceci représente une transformée de Fourier complexe à deux dimensions.
L'image de diffraction est le carré de l'amplitude $|u|^2 = uu^*$, d'où :

- dans le domaine de validité de l'approximation de Fraunhofer, l'image de diffraction, à des facteurs constants près, est égale au carré de la valeur de la transformée de Fourier complexe de l'objet diffractant.

Ceci a une grande importance, car :

- La transformée de Fourier est réversible. À partir d'une image de diffraction souhaitée, on peut, par transformation inverse, calculer l'objet diffractant nécessaire.
- La description mathématique à l'aide d'une transformée de Fourier autorise l'utilisation des théorèmes correspondants, en particulier le théorème de la convolution (théorème de Parseval).

- De nombreux algorithmes efficaces sont disponibles pour l'implantation de la transformée de Fourier dans les ordinateurs (FFT : Fast Fourier Transform, transformée de Fourier rapide).

▷ Cependant, la réalisation pratique est quelque peu plus complexe, car pour des raisons techniques il est souvent demandé de réaliser soit des hologrammes en amplitude (partie relative à la phase de $O(x_1, y_1)$ constante) soit des hologrammes de phase (amplitude $|O(x_1, y_1)|$ constante), dont en outre la résolution est limitée. De ceci découlent des conditions aux limites supplémentaires. La phase dans le plan de l'image de diffraction est alors librement choisie. Pour tenir compte de toutes les conditions aux limites, des algorithmes itératifs sont utilisés (par ex. *algorithmes de Gerchberg-Saxton*).

▷ Le principe d'Huygens équivaut à choisir des ondes sphériques comme **fonctions de Green** pour la résoltion de l'**équation de Helmholtz**. Pour des raisons historiques, cette façon de faire est encore exposée dans de nombreux manuels (*intégrale de diffraction de Fresnel-Kirchhoff et intégrale de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld*). Le développement en ondes planes, en revanche, permet une démarche plus simple et évite des approxmations inutiles. L'optique moderne procède de cette manière (**optique de Fourier**).

12.5.6 Dispersion

Dispersion (voir page 311) : dépendance de la vitesse de phase d'une onde électromagnétique en fonction de la longueur d'onde (ou de la fréquence).

Puisque l'indice de réfraction d'un milieu réfringent est défini par le rapport de la vitesse de propagation d'une onde dans le vide à la vitesse dans le milieu, l'indice de réfraction varie en fonction inverse de la longueur d'onde. (voir page 293).

- **Dispersion normale** :
  $$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} < 0$$
  L'indice de réfraction n d'un milieu diminue lorsque la longueur d'onde λ augmente. L'angle de réfraction d'un rayon augmente lorsque la longueur d'onde diminue (spectroscope à prisme).
- **Dispersion anormale** :
  $$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} > 0$$
  L'indice de réfraction n d'un milieu augmente lorsque la longueur d'onde λ augmente. L'angle de réfraction d'un rayon augmente lorsque la longueur d'onde augmente.
- **Dispersion nulle** :
  $$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = 0$$
  Exemple : ondes électromagnétiques dans le vide.

▷ Mises à part quelques rares exceptions, les matériaux réfringents naturels présentent la dispersion normale. La Fig. 12.58 montre les courbes de dispersion de quelques matériaux optiques.

La lumière blanche est une superposition de diverses longueurs d'onde qu'un observateur perçoit séparément comme autant de couleurs différentes.

Couleurs du spectre visible : les composantes de la lumière blanche naturelle sont, dans l'ordre décroissant de longueur d'onde : rouge, orange, jaune, vert, bleu, indigo, violet (les 7 couleurs de l'arc-en-ciel).

Spectre : de manière générale, répartition des valeurs d'une grandeur physique en fonction d'une grandeur périodique. Ici, répartition des couleurs perçues en fonction de leur longueur d'onde.

Décomposition spectrale : séparation des composantes d'un rayonnement en fonction de leur longueur d'onde.

M On utilise souvent des prismes pour décomposer la lumière blanche en ses composantes. L'angle de déviation des différentes longueurs d'ondes qui composent la lumière blanche dépend de l'indice de réfraction dont la dispersion $\mathrm{d}n(\lambda)/\mathrm{d}\lambda$ est différente de zéro. Le pouvoir séparateur spectral d'un prisme de longueur de base b est :

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b\left|\frac{\mathrm{d}n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|$$

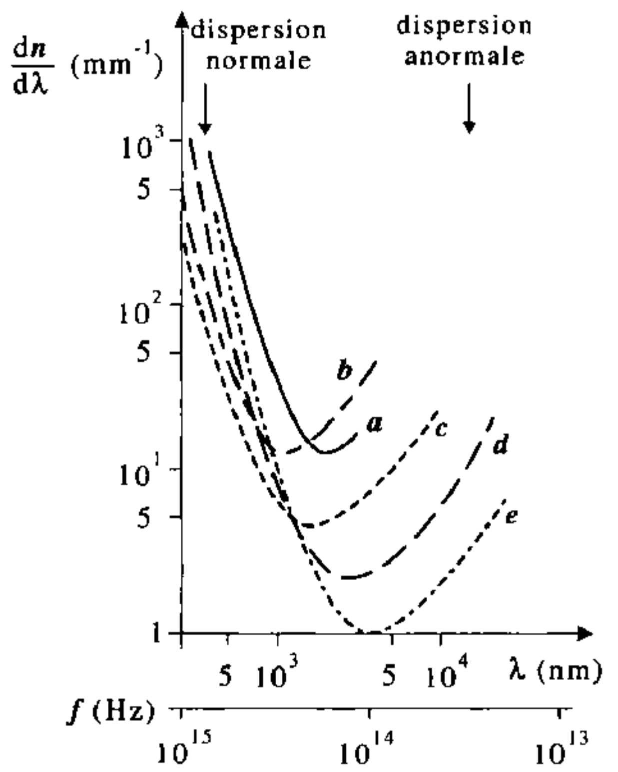


Fig. 12.58 : *Dispersion de quelques matériaux optiques. (a) : verre Flint, (b) : quartz, (c) : spath, (d) : NaCl, (e) : KBr*

Prisme achromatique : prisme spécial dont la dispersion chromatique est nulle. La lumière incidente est déviée, mais n'est pas décomposée en ses composantes spectrales. Il sont réalisés par assemblage de deux prismes, l'un en verre Flint, l'autre en Crown.

La dispersion ne peut jamais être éliminée simultanément pour toutes les longueurs d'ondes sans diminuer notablement le pouvoir réfringent du système.

Système achromatique : système de lentilles dont les aberrations chromatiques ont été annulées pour **deux** longueurs d'onde choisies aux extrémités du spectre visible. Il est généralement constitué d'une lentille convergente et d'une lentille divergente de mêmes valeurs de distances focales.

Système apochromatique : système de lentilles dont les aberrations chromatiques ont été corrigées pour **trois** longueurs d'onde choisies, l'une au milieu, les autres aux extrémités du spectre visible. Ses aberrations résiduelles sont plus réduites que pour un système achromatique.

12.5.7 Appareils spectroscopiques

Analyse spectrale : séparation des diverses radiations contenues dans un rayonnement. Identification (analyse qualitative) ou dosage (analyse quantitative) des constituants d'un mélange, à l'aide de son spectre d'émission ou d'absorption.

Analyseur spectral : instrument optique pour l'analyse spectrale, permettant la décomposition d'un rayonnement électromagnétique en ses composantes :

- **Spectroscope** : instrument pour l'observation visuelle directe de la décomposition spectrale.
- **Spectromètre** : permet la détermination des longueurs d'ondes des composantes spectrales d'un rayonnement, après étalonnage à l'aide de raies de longueurs d'onde connues.
- **Spectrographe** : appareil servant à l'enregistrement des spectres sur une plaque photographique et à leur comparaison à des spectres étalons.
- **Monochromateur** : appareil qui permet de sélectionner, dans un spectre d'émission complexe, un intervalle étroit, réglable, de longueurs d'onde. Selon la largeur de l'intervalle, il permet d'obtenir un rayonnement approximativement monochromatique.
- **Spectrophotomètre** : combinaison d'un analyseur spectral et d'un photomètre. Il permet la comparaison quantitative de deux spectres et l'étude de la répartition spectrale de l'énergie.

Caractéristiques des appareils spectraux :

- luminosité élevée : détermine la clarté des spectres, important dans le cas de l'étude de spectres d'émission provenant de sources peu intenses.
- pouvoir de résolution élevé : détermine la plus petite différence de longueur d'onde que l'appareil est capable de discerner.
- domaine de dispersion étendu : détermine la largeur du domaine de longueurs d'onde qui peuvent être analysées en une seule observation.

Spectroscope à prisme : la décomposition spectrale d'un rayonnement polychromatique, est obtenue grâce au pouvoir dispersif d'un prisme.

Réseau optique : surface transparente (plane) ou réfléchissante (plane ou concave) sur laquelle est tracé un grand nombre de traits rectilignes, parallèles et équidistants. Un réseau est caractérisé par la distance entre deux traits consécutifs (pas du réseau) et le profil des parties transparentes ou réfléchissantes (réseau échelette).

Réseau par transmission : constitué de fentes fines tracées sur un support plan (verre ou film plastique).

Réseau par réflexion : constitué de sillons parallèles gravés sur une surface plane ou courbe (verre ou métal). Des formes appropriées des sillons permettent de concentrer la lumière diffractée dans un ordre de diffraction donné (réseau échelette, angle de blaze).

Spectroscope à réseau : la décomposition specrale d'un rayonnement polychromatique est obtenue grâce au pouvoir dispersif d'un réseau.

▷ Les appareils spectraux à prisme ont en général un domaine de dispersion plus large et un pouvoir de résolution plus faible que ceux à réseau. Les spectroscope à réseau par réflexion sont généralement plus lumineux que ceux à réseau par transmission.

12.5.8 Polarisation de la lumière

1. Formes de polarisation

Les ondes électromagnétiques étant des ondes transversales, les différentes formes de polarisation peuvent se produire :

- **Lumière polarisée rectilignement** : le vecteur champ électrique $\vec{E}$ et le vecteur propagation de la lumière se trouvent dans un plan fixe de l'espace (plan de polarisation).
- **Lumière polarisée circulairement** : le vecteur champ électrique $\vec{E}$ décrit une hélice autour du vecteur propagation. Dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation, l'extrémité du vecteur champ électrique $\vec{E}$ décrit un cercle. En regardant dans la direction opposée à la propagation, la lumière est dite **circulaire droite** si l'extrémité du vecteur champ électrique tourne dans **le sens des aiguilles** d'une montre, circulaire gauche dans le cas contraire.
- **Lumière polarisée elliptiquement** : le vecteur champ électrique $\vec{E}$ décrit une hélice autour du vecteur propagation. Dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation, l'extrémité du vecteur champ électrique $\vec{E}$ décrit une ellipse. La polarisation elliptique, comme la polarisation circulaire, peut être droite ou gauche.

2. Origine de la Polarisation

La lumière naturelle rayonnée par le Soleil n'est pas polarisée. Le vecteur champ électrique $\vec{E}$ vibre dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde, sans privilégier une direction donnée dans ce plan. Le vecteur $\vec{E}$ vibre aléatoirement dans toutes les directions possibles. La lumière est **partiellement polarisée** si une direction de vibration du vecteur $\vec{E}$ est privilégiée. Si la vibration n'a lieu que dans cette direction privilégiée, la lumière est **polarisée rectilignement** (entièrement). La lumière polarisée rectilignement peut être décomposée en deux composantes, de même fréquence et direction de propagation, qui vibrent en phase avec la même amplitude dans deux directions perpendiculaires. D'autres relations d'amplitude et de phase de ces composantes conduisent à de la lumière polarisée circulairement ou elliptiquement. Si ces composantes ont même amplitude mais sont déphasées de $\pi/2$, la lumière sera **polarisée circulairement**. Si leurs amplitudes sont différentes et leur déphasage $(2n+1)\cdot\pi/2,\ n = 1, \ldots,$ la lumière sera **polarisée elliptiquement**.

● Deux ondes lumineuses, polarisées linéairement dans des directions perpendiculaires, ne peuvent pas donner un minimum d'interférences nul.

3. Polariseur

Dispositif qui ne transmet que les ondes dont les vibrations sont parallèles à une direction donnée et perpendiculaire à la direction de propagation. En fait, un polariseur divise un rayonnement électromagnétique en deux rayonnements polarisés rectilignement, dont les vibrations sont perpendiculaires entre elles. On peut ainsi, à partir de la lumière naturelle non polarisée, obtenir de la lumière polarisée rectilignement.

Analyseur : filtre de polarisation, servant à la détection ou à la mesure de l'état de polarisation d'une vibration lumineuse. Tout polariseur est aussi un analyseur, seules les vibrations parallèles à la direction privilégiée sont transmises. Lorsqu'un polariseur et un analyseur sont "croisés" (leur directions privilégiées sont perpendiculaires), et qu'aucune substance placée entre eux ne fait tourner le plan de polarisation, aucune lumière n'est transmise. Si les directions privilégiées d'un polariseur et d'un analyseur font entre elles un angle φ, l'analyseur ne laisse passer que la composante qui correspond à sa direction privilégiée.

L'amplitude de l'onde transmise est alors réduite du facteur cos φ (loi de Malus). L'intensité de la lumière transmise, si l'intensité incidente est I_0, est dans ce cas :

$$I = I_0 \cos^2 \varphi$$

4. Activité optique

Ensemble des propriétés de pouvoir rotatoire, de dispersion rotatoire et de dichroïsme circulaire qui peuvent modifier la direction de polarisation de la lumière polarisée rectilignement. Les substances douées de **pouvoir rotatoire** font tourner le plan de polarisation d'un angle proportionnel à l'épaisseur de la substance traversée. Certaines substances **lévogyres** font tourner le plan de polarisation autour de la direction de propagation vers la gauche, les substances **dextrogyres** le font tourner vers la droite. Des substances isotropes aussi bien que des substances anisotropes sont douées de pouvoir rotatoire.

■ Le quartz est optiquement actif. L'effet est observable lorsque de la lumière polarisée traverse un cristal de quartz suivant son axe optique. Il n'y a alors pas de double réfraction.

▷ L'affichage sur les écrans à **cristaux liquides** est basé sur la rotation du plan de polarisation par un cristal liquide nématique. Les cristaux liquides sont placés entre un polariseur et un analyseur croisés (aucune lumière ne passe). En appliquant un champ électrique de forme convenable aux cristaux, le plan de polarisation tourne à ces endroits et la lumière peut passer pour représenter le dessin souhaité.

Effet Faraday magnétorotation pouvoir rotatoire magnétique : un corps isotrope placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ fait tourner la vibration d'une onde électromagnétique polarisée rectilignement dont la propagation $\vec{k}$ est parallèle à la direction du champ. L'angle α dont tourne le plan de polarisation est :

$$\alpha = V\,l\,B$$

l désigne l'épaisseur de substance traversée, V est la **constante de Verdet** ou pouvoir rotatoire magnétique, paramètre dépendant de la longueur d'onde, de la température et de l'état de la substance, B est l'intensité du champ magnétique. Le signe de l'angle α dépend du sens du champ magnétique.

● La lumière réfléchie ou réfractée par la substance est partiellement polarisée.

12.5.8.1 Polarisation par réflexion

Angle de Brewster, angle de polarisation α_p : angle d'incidence d'un faisceau de lumière sur une surface vitreuse (diélectrique), pour lequel la lumière réfléchie est totalement polarisée rectilignement dans une direction perpendiculaire au plan d'incidence (Fig. 12.59). Pour cet angle d'incidence α_p, le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont perpendiculaires entre eux :

$$\sin \alpha_p = n \sin(\pi/2 - \alpha_p) = n \cos \alpha_p$$

À l'incidence de Brewster, le rayon réfracté ne subit pas d'atténuation, le coefficient de transmission τ est égal à 1.

Polariseurs par réflexion : polariseurs basés sur la polarsation par réflexion à l'angle de Brewster pour produire un faisceau de lumière polarisée rectilignement.

▷ La lumière réfléchie par une étendue d'eau ou une surface vitrée est polarisée rectilignement. Un analyseur, convenablement orienté, permet d'atténuer l'intensité de la lumière réfléchie et par là, voir ce qui est placé derrière la surface réfléchissante (lunettes de soleil à filtre polarisant, photographie d'objets situés derrière une vitre ou sous l'eau).

Fig. 12.59 : *Polarisation par réflexion. Rayons réfléchi et réfracté sous incidence de Brewster α_p*

12.5.8.2 Polarisation par réfraction

1. Double réfraction, biréfringence

Phénomène manifestant l'anisotropie optique d'un corps. Dans une substance biréfringente, la vitesse de phase est fonction de la direction de propagation et de l'état de polarisation des ondes électromagnétiques. Il en résulte un dédoublement d'un rayon incident en deux rayons distincts (Fig. 12.60) : le **rayon ordinaire** et le **rayon extraordinaire**. Les substances biréfringentes sont généralement des cristaux ayant ces propriétés particulières (d'où le nom générique d'optique cristaline).

Rayon ordinaire : obéit aux lois de la réfraction de Descartes. L'indice de réfraction ordinaire n_o est indépendant de la direction de propagation dans le cristal biréfringent.

Rayon extraordinaire : son indice de réfraction n_{eo} dépend de sa direction de propagation dans le cristal.

Il y a biréfringence dans un cristal si la structure du cristal est **anisotrope**. Une **anisotropie** peut aussi être produite artificiellement dans certaines substances solides ou liquides soit par déformation, tension mécanique, application d'une tension électrique ou d'un champ électromagnétique. Dans les liquides, la biréfringence peut être produite par écoulement laminaire (**biréfringence d'écoulement**).

▷ Les cristaux cubiques sont isotropes pour la propagation des ondes électromagnétiques.

Axe optique d'un cristal : direction privilégiée de symétrie suivant laquelle les ondes se propagent comme dans un milieu isotrope. Dans la direction de l'axe optique, les indices ordinaire et extraordinaire sont égaux : $n_o = n_{eo}$. Perpendiculairement à l'axe optique leur différence est la plus grande : $|n_o - n_{eo}|$ maximum.

2. Cristaux optiques

Cristaux uniaxes : cristaux possédant un seul axe optique, leur structure est monoclinique, triclinique ou rhombique.

Cristaux biaxes : cristaux possédant deux axes optiques, leur structure est tetragonale, hexagonale ou rhomboédrique.

Plan de section principale : plan de symétrie pour les propriétés optiques d'un cristal. Pour une lame d'un cristal uniaxe, il contient l'axe optique et la normale à la face d'entrée.

Lignes neutres : l'une et l'autre des deux directions perpendiculaires entre elles dans le plan d'une lame biréfringente à faces parallèles. Une vibration rectiligne, orientée suivant l'une d'elles, traverse la lame en demeurant rectiligne, mais avec des vitesses différentes. Il en résulte un déphasage proportionnel à la différence des indices ordinaire et extraordinaire et à l'épaisseur de la lame. En fonction de la différence de marche correspondante, on réalise des **lames d'onde, lames demi-onde** ou **lames quart d'onde**.

Formes de biréfringence :

- **Biréfringence linéaire** : les composantes orthogonales d'ondes polarisées linéairement ont des vitesses de phase différentes.
- **Biréfringence circulaire** : les vitesses de phase de deux ondes polarisées circulairement en sens inverse ne sont pas égales.

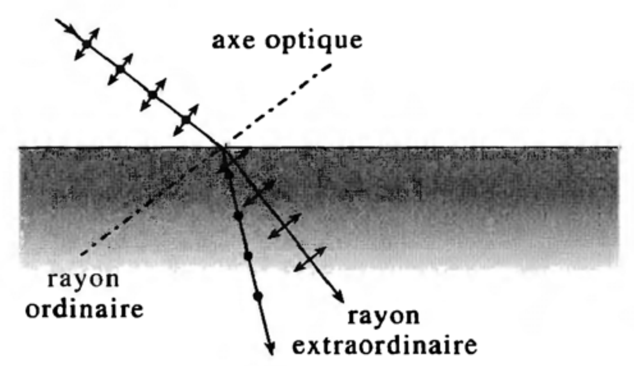


Fig. 12.60 : *Biréfringence dans les cristaux uniaxes*

■ Cristaux biréfringents : spath d'Islande (calcite), quartz, tourmaline.

■ Indices ordinaire n_o et extraordinaire n_{eo} d'un cristal de spath d'Islande : $n_o = 1.66,\ n_{eo} = 1.49$.

3. Propagation d'un faisceau polarisé dans un cristal

Le vecteur d'onde du rayon ordinaire vibre perpendiculairement au plan de section principale ; le vecteur d'onde du rayon extraordinaire vibre parallèlement au plan de section principale. Le rayon ordinaire se propage à la même vitesse dans toutes les directions du cristal ; les surfaces d'ondes des ondes élémentaires sont sphériques. La vitesse de propagation du rayon extraordinaire dépend de sa direction ; les surfaces d'ondes des ondes élémentaires sont ellipsoïdales. Le long de l'axe optique, les vitesses des rayon ordinaire et extraordinaire sont égales ; sphère et ellipsoïde sont en contact dans la direction de l'axe optique (Fig. 12.62).

Cristaux uniaxes positifs : le rayon ordinaire se propage plus vite que le rayon extraordinaire (Fig. 12.62). Dans la représentation des vitesses, la sphère englobe l'ellipsoïde. $c_o \geq c_{eo},\ n_o \leq n_{eo}$.

Cristaux uniaxes négatifs : le rayon ordinaire se propage moins vite que le rayon extraordinaire.

$c_o \leq c_{eo},\ n_o \geq n_{eo}$

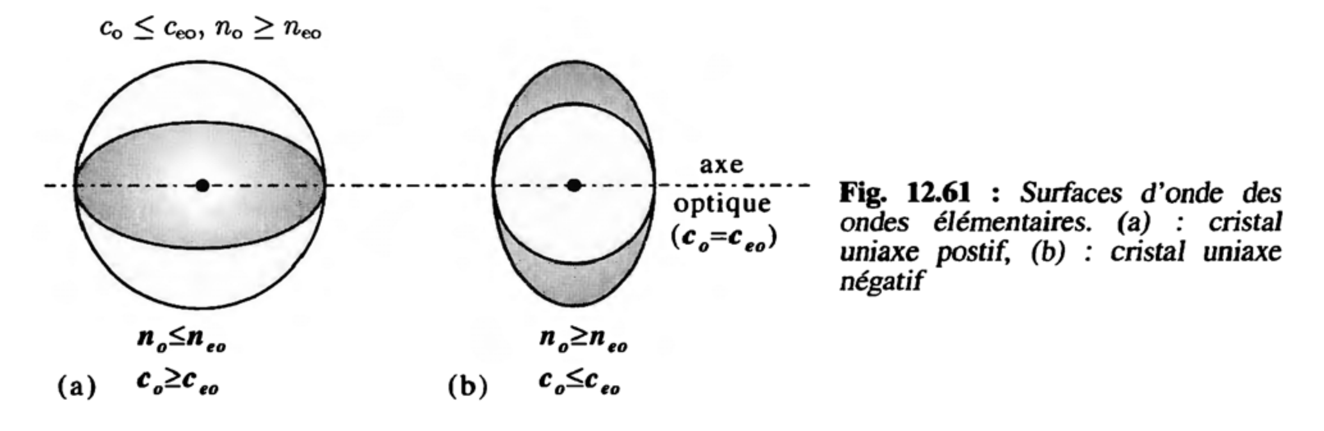


Fig. 12.61 : *Surfaces d'onde des ondes élémentaires. (a) : cristal uniaxe postif, (b) : cristal uniaxe négatif*

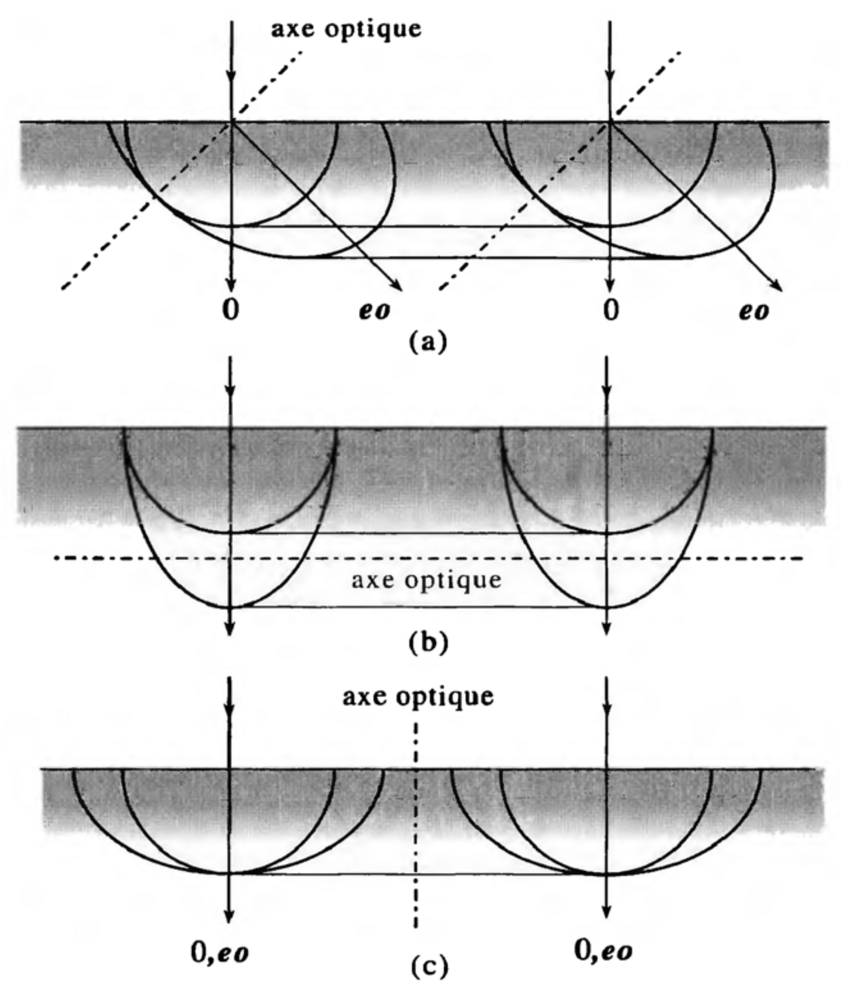


Fig. 12.62 : *Marche d'un rayon polarisé en incidence normale selon le principe d'Huygens. (a) : axe optique incliné par rapport à la surface du cristal. Le rayon extraordinaire n'est pas perpendiculaire au front d'onde incident. (b) : axe optique parallèle à la surface du cristal. Il n'y a pas de séparation de rayons, mais les vitesses de propagation des rayons ordinaire et extraordinaire sont différentes. (c) : axe optique perpendiculaire à la surface du cristal. Les rayons ordinaire et extraordinaire sont confondus*

Dichroïsme : se rencontre dans les milieux uniaxes où n'existent que deux spectres d'absorption principaux. Les maxima d'absorption des rayons ordinaires et extraordinaires se produisent pour des longueurs d'onde différentes. Lorsque le cristal est éclairé par de la lumière blanche polarisée rectilignement, en fonction de la direction de polarisation, il se produit un changement de couleur de la lumière transmise.

- La biréfringence conduit à la polarisation de la lumière. La direction de polarisation du rayon ordinaire est perpendiculaire à celle du rayon extraordinaire.

4. Prisme de Nicol

Polariseur à réflexion totale formé par un parallélépipède de spath d'Islande, coupé suivant un plan diagonal normal au plan de section principale, puis recollé au baume du Canada. Le rayon ordinaire est réfléchi totalement sur la mince couche de baume du Canada ($n = 1.54$) interposée dans le plan de la coupe (Fig. 12.63). L'indice du baume du Canada est intermédiaire aux indices ordinaire et extraordinaire. Le rayon extraordinaire traverse par conséquent la couche de séparation. Ce rayon sortant du prisme est polarisé linéairement.

Les polariseurs à champ normal sont réalisés en choisissant un plan de coupe approprié de manière à ce que le rayon sortant se propage normalemnt à l'axe optique (**prismes de Glan-Thompson, de Glazebrook ou d'Ahrens**).

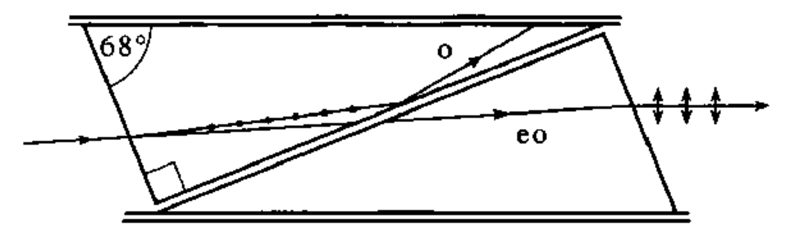


Fig. 12.63 : *Production de lumière polarisée à l'aide d'un prisme de Nicol*

5. Biréfringence provoquée

La biréfringence est parfois appliquée à l'étude des tensions mécaniques dans des solides ou des liquides. Un verre, un cristal cubique, ou certaines matières plastiques, soumis à une traction ou à une compression uniforme, acquièrent une biréfringence proportionnelle à l'effort appliqué. En lumière polarisée, à l'aide d'un analyseur, on peut observer les différences d'indices qui correspondent à diverses colorations fonctions des efforts. On peut alors déceler les zones où les contraintes subies par le matériau sont critiques.

La vitesse d'écoulement d'un liquide, en régime laminaire, est maximum sur l'axe du tube et nulle près des parois, d'où un cisaillement des lames fluides auquel correspondent des tensions et des compressions qui induisent une biréfringence.

Effet Pockels : biréfringence résultant d'un déplacement d'ions, dans des cristaux cubiques dépourvus de centre de symétrie (dihydrophosphate de potassium), sous l'action d'un champ électrique $\vec{E}$. L'écart d'indice est proportionnel à E :

$$|n_{eo} - n_o| \sim E$$

Effet Kerr : une substance isotrope (sulfure de carbone, benzène), placée dans un champ électrique transversal $E \approx 10^6$ V/m, devient biréfringente. La différence des indices ordinaire (n_o) et extraordinaire (n_{eo}) est proportionnelle au carré du champ électrique :

$$|n_{eo} - n_o| \sim E^2 = C\lambda E^2$$

La constante de proportionnalité dépend de la substance. Pour le sulfure de carbone :
$C = 2,7 \cdot 10^{-14} m/V^2$, λ est la longueur d'onde de la lumière utilisée.

▷ Les **cellules de Kerr** sont utilisés pour la modulation haute fréquence de la lumière.

Effet Cotton et Mouton : un liquide isotrope (nitrobenzène) placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ devient biréfringent. Pour une longueur d'onde λ, la différence l'indices est :

$$|n_{eo} - n_o| = C\lambda B^2$$

12.6 Photométrie

Photométrie : à l'origine, mesures concernant la perception et la sensation lumineuse par l'œil humain. Par extension, mesures faites sur les rayonnements électromagnétiques, quel que soit leur longueur d'onde et l'instrument de mesure utilisé. Les **grandeurs photométriques** mesurées sont diverses. On distingue :

- **Photométrie énergétique** ou photométrie objective : mesure de grandeurs photométriques à l'aide d'instruments qui ne tiennent pas compte des spécificités de la perception humaine des ondes électromagnétiques. Dans les relations qui suivent, l'indice e sera utilisés pour énergétique.
- **Photométrie visuelle** ou photométrie subjective : mesure de grandeurs photométrques qui tiennent compte de la perception subjective par l'œil humain. Dans les relations qui suivent, l'indice v est utilisé pour visuel.

12.6.1 Grandeurs photométriques

1. Énergie du rayonnement et densité d'énergie

Énergie de rayonnement , Q_e : énergie transportée par les ondes électromagnétiques.

Densité d'énergie, w, du rayonnement électromagnétique : énergie rayonnée par unité de volume :

Densité d'énergie des ondes électromagnétiques			$\mathrm{MT^{-2}L^{-1}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$$w = \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{\mathbf{B}})$$	w	J/m³	densité d'énergie
	$\vec{\mathbf{E}}$	V/m	intensité du champ électrique
	$\vec{\mathbf{D}}$	C/m²	déplacement électrique
	$\vec{\mathbf{B}}$	T	induction magnétique
	$\vec{\mathbf{H}}$	A/m	intensité du champ magnétique

L'énergie présente dans un domaine de l'espace est donnée par l'intégrale de la densité volumique d'énergie sur le volume du domaine considéré.

2. Mesure de l'énergie d'un rayonnement

L'énergie d'un rayonnement est mesurée indirectement, après conversion en une autre forme d'énergie, par exemple :

- **Élément thermoélectrique** : un gradient de température produit un gradient de potentiel électrique. La différence de potentiel entre deux points de l'élément est proportionnelle à l'énergie reçue par cet élément. Ces mesures concernent essentiellement le rayonnement infrarouge.
- **Bolomètre** : récepteur d'énergie, formé d'une mince lame de platine noircie (bolomètre de Langley) ou de semiconducteur, dont la résistance électrique est fonction de l'élévation de température consécutive à l'absorption d'énergie rayonnée. Concerne essentiellement le rayonnement infrarouge.
- **Semiconducteur** : modification de la résistance électrique produite par l'effet photoélectrique ; fonction de la longueur d'onde.
- **Photodiode** : le courant électrique induit par le rayonnement électromagnétique est proportionnel à sa densité.
- **Photoémulsion** : plaque photographique revêtue d'une couche photosensible. L'énergie de radiation est convertie en énergie chimique, le noircissement de la couche photosensible est fonction de l'énergie reçue.

3. Puissance ou flux énergétique

La **puissance énergétique** ou **flux énergétique**, Φ_e, est l'énergie transportée par le rayonnement électromagnétique par unité de volume et de temps par le rayonnement électromagnétique.

Puissance énergétique d'un rayonnement électromagnétique			ML^2T^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt}$	Φ_e Q_e t	W J s	puissance énergétique énergie rayonnée temps

La puissance énergétique indiquée par un instrument de mesure, pour une source de rayonnement donnée, dépend de :

- l'aire du récepteur de l'instument de mesure
- la distance du récepteur à la source d'énergie
- l'orientation du récepteur par rapport à la source
- la sensibilité spectrale du récepteur

Des corps étendus, de forme quelconque, s'ils sont suffisamment éloignés, peuvent être considérés comme des sources ponctuelles. Si ceci n'est pas le cas, on les décompose en éléments pour lesquels l'approximation ponctuelle peut être considérée comme valable. Les grandeurs mesurées pour chacun de ces éléments sont alors additionnées.

La plupart des récepteurs sont formés de surfaces planes. Leur surface ne correspond pas aux surfaces sphériques des fronts d'ondes émis par les sources. Si la distance entre émetteur et récepteur est suffisamment grande, on admet, en bonne approximation, que la surface plane du récepteur correspond à la surface sphérique (de très grand rayon) des fronts d'ondes de l'émetteur.

4. Distance photométrique limite

La plus petite distance entre émetteur et récepteur au-delà de laquelle l'approximation ci-dessus est considérée comme valable. Si cette distance est au moins égale à 10 fois la dimension transversale du récepteur, l'erreur due à l'approximation en surface plane du récepteur reste inférieure à 2%.

- La puissance de rayonnement reçue par un récepteur, si le rayonnement est distribué de manière homogène, est proportionnelle à l'angle solide sous lequel il est vu à partir de l'émetteur.

5. Intensité de rayonnement, intensité énergétique

Le rapport I_e, du flux énergétique à l'angle solide dans lequel il est émis.

Intensité énergétique = $\frac{\textbf{puissance énergétique}}{\textbf{angle solide}}$			ML^2T^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination
$d\Phi_e = I_e \, d\Omega \qquad I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}$	Φ_e I_e Ω	W J sr	puissance énergétique intensité énergétique angle solide

Le flux énergétique dans l'angle solide Ω est donné par :

$$\Phi_e = \int_{\Omega} I_e \, d\Omega$$

12.6.1.1 Émetteur de rayonnement

Pour des émetteurs non ponctuels, l'intensité énergétique mesurée est fonction de :

- l'aire A de la surface de l'émetteur
- l'orientation relative de la surface de l'émetteur à celle du récepteur

1. Facteur de directivité

Facteur $g(\alpha)$, qui tient compte de la variation de l'intensité énergétique en fonction de l'angle α, sous lequel l'émetteur est vu à partir du récepteur.

Intensité énergétique en fonction de l'angle			**ML^2T^{-3}**
	Symbole	Unité	Dénomination
	$I_e(\alpha)$	W/sr	intensité énergétique
	$g(\alpha)$	1	facteur de directivité
$I_e(\alpha) \ = \ L_e(\alpha)A_S g(\alpha)$	α	rad	angle entre normales aux surfaces du récepteur et de l'émetteur
	L_e	W/(m^2 sr)	radiance (luminance énergétique)
	A_S	m^2	aire de l'émetteur

Radiance ou luminance énergétique, L_e : caractérise les propriétés d'un émetteur. Elle dépend, entre autres, de l'état de surface et de la température de l'émetteur.

2. Émetteur de Lambert

Émetteur dont le facteur de directivité est $g(\alpha) = \cos(\alpha)$. La luminance L d'un tel émetteur ne dépend pas de la direction dans laquelle il rayonne. Il apparaît également brillant quel que soit l'angle d'observation α. En effet, $A_S \cos(\alpha)$ est la projection de la surface sur un plan perpendiculaire à la direction d'observation, et de ce fait, le rapport de la luminance à la surface A_{eff}, vue sous l'angle α, est constant :

$$\frac{I_e(\alpha)}{A_{\text{eff}}} = \frac{L_e A_S \cos(\alpha)}{A_S \cos(\alpha)} = L_e$$

La plupart des sources de lumiere thermiques sont des émetteurs de Lambert.

▷ Une surface non lumineuse par elle-même, qui diffuse tout le flux qu'elle reçoit suivant la Loi de Lambert, est un **diffuseur parfait**. Son exitance est égale à l'éclairement E qu'elle reçoit, sa luminance $L = E/\pi$.

Conditions pour un émetteur de Lambert :

- pas de relation de phase fixe entre champs d'ondes issus de points voisins de la surface de l'émetteur.
- le matériau de l'émetteur doit être **optiquement dense** , c'est à dire doit pouvoir absorber le rayonnement émis par sa surface.

Loi de Lambert : définie par le facteur de directivité ci-dessus :

$$g(\alpha) = \cos(\alpha)$$

3. Caractéristique gaussienne et éclairement énergétique

Caractéristique gaussienne : fonction de directivité de la forme :

$$g(\alpha) = e^{-\alpha^2/\gamma^2}$$

où γ est une constante qui caractérise la source des rayonnements. La distribution est d'autant plus étroite que γ est faible, l'irradiance plus intense et concentrée dans une direction. La directivité des **Laser** est gaussienne.

Exitance énergétique spécifique, M_e : caractéristique d'un émetteur. Elle correspond au flux énergétique émis par unité de surface de l'émetteur :

Exitance énergétique spécifique = $\dfrac{\textbf{puissance rayonnée}}{\textbf{aire d'émission}}$				MT^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$M_e = \dfrac{d\Phi_e}{dA_S}$	M_e	W/m^2	exitance énergétique	
	Φ_e	W	puissance énergétique	
	A_S	m^2	aire de l'émetteur	

Irradiance ou **éclairement énergétique** , E_e : la puissance rayonnée reçue par un récepteur par unité de surface A_r :

Irradiance = $\dfrac{\textbf{puissance rayonnée}}{\textbf{aire du récepteur}}$				MT^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$E_e = \dfrac{d\Phi_e}{dA_r}$	E_e	W/m^2	irradiance ou éclairement énergétique	
	Φ_e	W	puissance énergétique	
	A_r	m^2	aire du récepteur	

L'aire efficace du récepteur correspond à la projection de l'aire A_r du récepteur sur un plan perpendiculaire à la direction émetteur-récepteur :

$$A_r = A\cos\beta$$

β est l'angle entre la direction émetteur-récepteur et la normale à la surface A_r.

4. Variation avec la distance

L'éclairement énergétique E_e d'un récepteur varie avec sa distance r à la source :

Éclairement en fonction de la distance				MT^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$E_e = \dfrac{I_e(\alpha)}{r^2}\cos\beta\,\Omega_0$	E_e	W/m^2	irradiance ou éclairement énergétique	
	I_e	W/sr	intensité énergétique	
	Ω_0	sr	angle solide	
	β	rad	angle d'observation	
	r	m	distance émetteur-récepteur	

Cette relation n'est valable que dans le cas d'une symétrie sphérique et en négligeant la réflexion et l'absorption.

Exposition ou **quantité d'éclairement,** H_e : énergie reçue par unité de surface entre les instants t_1 et t_2. Elle est égale à l'intégrale de l'éclairement E_e sur sa durée :

Exposition			MT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$H_e = \int_{t_1}^{t_2} E_e(t)\mathrm{d}t$	H_e	J/m^2	exposition
	E_e	W/m^2	irradiance ou éclairement énergétique
	$t_2 - t_1$	s	durée de l'éclairement
	t	s	temps

▷ En radiothérapie, exposition est synonyme de **dose** de rayonnement.

12.6.1.2 Grandeurs spectrales

Filtres optiques : dispositifs qui ne transmettent qu'une ou plusieurs bandes de fréquence. Ils modifient la distribution en énergie des rayonnements transmis. Leur action, fondée sur l'absorption, la réflexion totale ou les interférences, est représentée par un coefficient de transmission fonction de la longueur d'onde. À l'aide de filtres, on peut isoler les composantes d'un rayonnement composé de plusieurs longueurs d'ondes et mesurer les grandeurs photométriques correspondantes à chaque composante.

▷ La contribution d'un rayonnement d'un domaine de longueurs d'onde $\mathrm{d}\lambda$ à une grandeur photométrique X_e est donnée par :

$$\frac{\partial X_e}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

Grandeur spectrale : désigne la dérivée d'une grandeur photométrique par rapport à la longueur d'onde ; elle est marquée d'un indice λ. On les désigne parfois sous le nom de grandeur par unité de longueur d'onde ou **grandeur monochromatique**.

■ La radiance monochromatique est la dérivée de la radiance par rapport à la longueur d'onde :

$$L_{e,\lambda} = \frac{\partial I_e}{\partial \lambda}$$

Réciproquement, la radiance peut se calculer par intégration sur la longueur d'onde de la radiance monochromatique :

$$L_e = \int L_{e,\lambda}\,\mathrm{d}\lambda$$

12.6.1.3 Réflexion, absorption, transmission

Lors du passage d'un rayonnement électromagnétique à travers une lame il y a réflexion, absorption et transmission. Seule une partie Φ_t du flux énergétique incident Φ_e est transmise et mesurée à la sortie de la lame. La réflexion et l'absorption dépendent du matériau constituant la couche et de la longueur d'onde λ du rayonnement (Fig. 12.64).

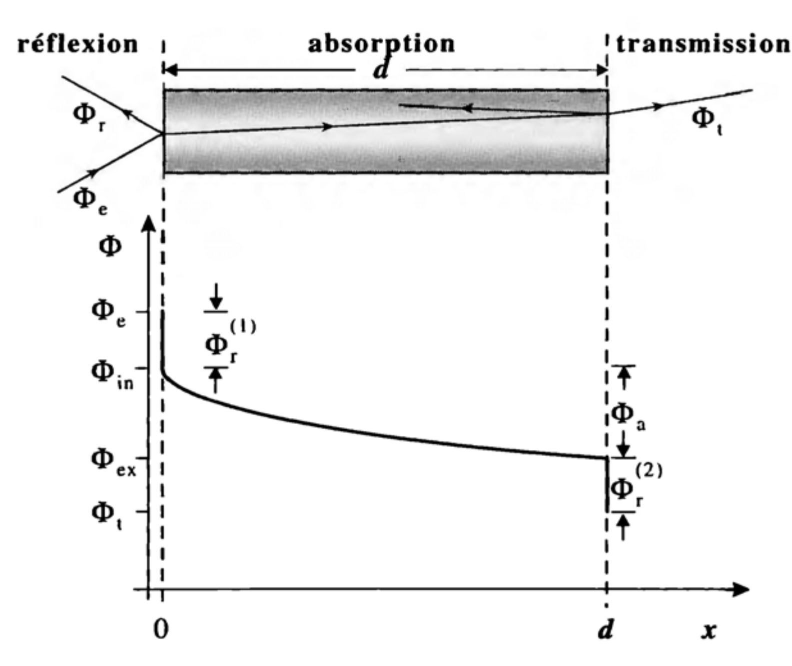


Fig. 12.64 : *Réflexion, absorption et transmission lors du passage d'un rayonnement électromagnétique à travers une lame d'épaisseur d*

1. Coefficients spectraux de réflexion et d'absorption

Coefficient spectral de réflexion, $\rho(\lambda)$: rapport du flux énergétique réfléchi Φ_r au flux énergétique incident Φ_e :

$$\rho(\lambda) = \frac{\Phi_r(\lambda)}{\Phi_e(\lambda)}$$

Le coefficient de réflexion dépend fortement de l'état de surface de la lame.

■ Le coefficient de réflexion de la neige vaut 0,93, de l'aluminium 0,69 et du papier noir 0,05.

Coefficient spectral d'absorption, $\alpha(\lambda)$: rapport du flux énergétique absorbé Φ_a au flux énergétique incident Φ_e :

$$\alpha(\lambda) = \frac{\Phi_a(\lambda)}{\Phi_e(\lambda)}$$

Le coefficient d'absorption dépend faiblement de la température T du matériau, $\alpha(\lambda) = \alpha(\lambda, T)$.

Loi d'absorption : le flux énergétique décroit exponentiellement avec la profondeur de pénétration x :

$$\Phi(x) = \mathrm{e}^{-a(\lambda)\,x}$$

Le **coefficient d'absorption linéaire** , $a(\lambda)$, exprimé en m^{-1}, est caractéristique d'un matériau absorbant donné.

2. Longueur d'atténuation et coefficient de transmission

Longueur d'atténuation d'un rayonnement, x_m : la distance qu'un rayonnement doit parcourir dans un matériau pour que son flux énergétique soit réduit du facteur 1/e :

$$x_m = \frac{1}{a}$$

Coefficient de transmission spectral, $\tau(\lambda)$: rapport des flux énergétiques transmis Φ_t et incident Φ_e :

$$\tau(\lambda) = \frac{\Phi_t(\lambda)}{\Phi_e(\lambda)}$$

D'après la conservation de l'énergie, on a :

$$\rho(\lambda) + \alpha(\lambda) + \tau(\lambda) = 1$$

3. Corps noir

Corps idéal dont le coefficient d'absorption est 1 pour l'ensemble des ondes électromagnétiques, quelle que soit leur fréquence. Aucun matériau ne possède ces propriétés, néanmoins le concept de corps noir est important du point de vue de la théorie du rayonnement thermique. Toute enceinte isotherme, fermée à l'exception d'une très petite ouverture, peut jouer le rôle d'un coprs noir.

Loi de Kirchhoff : La luminance énergétique monochromatique $L_{e,\lambda}$ d'un corps quelconque à la température T et pour la longueur d'onde λ, est égale au produit de coefficient d'absorption de ce corps, pour ces températures et longueurs d'onde, par la luminance énergétique monochromatique $L_{e,\lambda}^{\text{noir}}$ du corps noir pour les mêmes températures et longueurs d'onde.

Loi de Kirchhoff			$ML^{-1}T^{-3}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$L_{e,\lambda} = \alpha(\lambda, T) \cdot L_{e,\lambda}^{\text{noir}}$	$L_{e,\lambda}$	W/(m^3 sr)	luminance énergétique
	$\alpha(\lambda, T)$	1	coefficient d'absorption
	$L_{e,\lambda}^{\text{noir}}$	W/(m^2 sr nm)	luminance én. corps noir

La loi de Kirchhoff relie la luminance énergétique monochromatique d'un corps quelconque à la luminance énergétique monochromatique d'un corps noir $L_{e,\lambda}^{\text{noir}}$ (**Loi de Planck**) :

$$L_{e,\lambda}^{\text{noir}} = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

c : vitesse de la lumière dans le vide, h : constante de Planck, k : constante de Boltzmann.

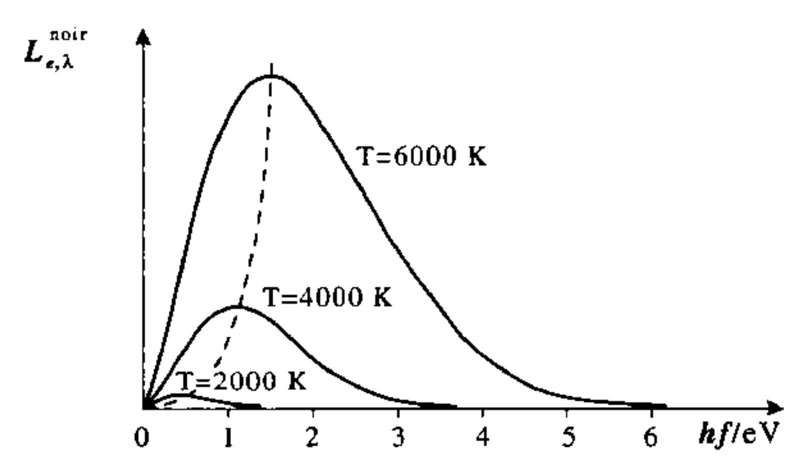


Fig. 12.65 : *Luminance énergétique monochromatique d'un corps noir à différentes températures en fonction de l'énergie du rayonnement*

12.6.2 Éclairagisme

L'éclairagisme est l'application rationnelle de la photométrie aux techniques de l'éclairage. Il fait intervenir le rendement des sources, leur luminance, leur spectre, l'éclairement des surfaces en relation avec les propriétés de la perception humaine. Les **grandeurs de l'éclairagisme** sont fondées sur la perception des rayonnements par l'œil humain.

- Une grandeur Y de **l'éclairagisme** se déduit généralement de l'évaluation par l'œil d'une grandeur **énergétique** X_e.

1. Sensibilité relative et absolue

Pour décrire l'évaluation d'une grandeur énergétique par un récepteur quelconque (y compris l'œil) et pour tenir compte de la dépendance de sa sensibilité en fonction de la longueur d'onde λ de la lumière, on introduit les grandeurs suivantes :

Sensibilité relative et absolue

$$s(\lambda) = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X_e} = \frac{Y_\lambda}{X_{e\lambda}}$$

$$s_{\mathrm{rel}}(\lambda) = \frac{s(\lambda)}{s(\lambda_0)}$$

Symbole	Unité	Dénomination
λ	m	longueur d'onde quelconque
λ_0	m	longueur d'onde
$s(\lambda)$		sensibilité spectrale absolue
$s_{\mathrm{rel}}(\lambda)$	1	sensibilité spectrale relative
X_e		grandeur énergétique incidente
$X_{e\lambda}$		grandeur énergétique spectrale incidente
Y		grandeur émergente
Y_λ		grandeur spectrale émergente

■ Si un flux de rayonnement $\mathrm{d}\Phi_e = \Phi_{e\lambda} \cdot \mathrm{d}\lambda$ est incident sur un récepteur et y produit le courant $\mathrm{d}J$, alors Φ_e correspond à la grandeur énergétique incidente X_e et J à la grandeur émergente Y. $\Phi_{e\lambda}$ correspond à la grandeur énergétique spectrale incidente $X_{e\lambda}$ et J_λ à la grandeur spectrale émergente Y_λ.

Avec ces grandeurs, un rayonnement peut être évalué même s'il est constitué d'une superposition de lumières de différentes longueurs d'onde d'un intervalle $[\lambda_1, \lambda_2]$. Dans un tel cas, la grandeur émergente Y est obtenue en convoluant les grandeurs énergétiques spectrales incidentes avec la sensibilité spectrale. Le rapport de la grandeur émergente ainsi obtenue à la grandeur incidente donne alors la **sensibilité absolue**.

Sensibilité absolue

$$Y = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathrm{d}\lambda\, X_{e\lambda} \cdot s(\lambda) = s(\lambda_0) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathrm{d}\lambda\, X_{e\lambda} \cdot s_{\mathrm{rel}}(\lambda)$$

$$s = \frac{Y}{X}$$

Symbole	Unité	Dénomination
Y		grandeur émergente
λ	m	longueur d'onde quelconque
λ_0	m	longueur d'onde
λ_1	m	longueur d'onde (limite inférieure)
λ_2	m	longueur d'onde (limite supérieure)
$X_{e\lambda}$		grandeur énergétique spectrale incidente
$s(\lambda)$		sensibilité spectrale absolue
$s_{\mathrm{rel}}(\lambda)$	1	sensibilité spectrale relative
s		sensibilité absolue

▷ La définition de s utilise X au lieu de X_e, puisque la relation ci-dessus est aussi valable pour des grandeurs non énergétiques.

Coefficient spectral de luminance : sensibilité spectrale relative de l'œil. Pour l'évaluation de la perception par l'œil, on utilise :

- le flux énergétique spectral $\Phi_{e\lambda}$, pour $X_{e\lambda}$
- La sensibilité spectrale à la lumière du jour $V(\lambda)$ (Fig. 12.66), pour $s_{rel}(\lambda)$
- la sensibilité spectrale absolue de l'œil à $\lambda_0 = 555$ nm pour $s(\lambda_0)$

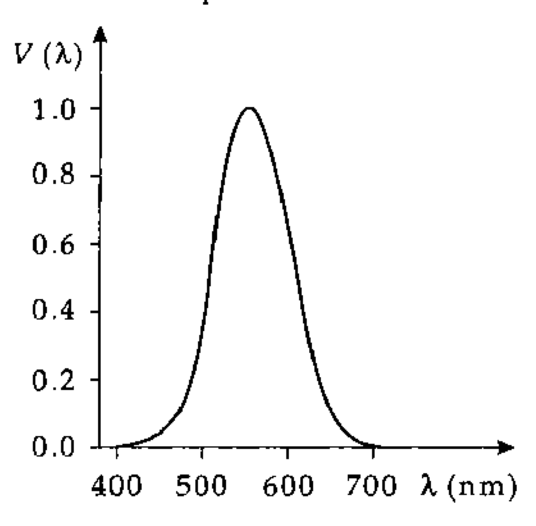


Fig. 12.66 : *Sensibilité spectrale de l'œil à la lumière du jour $V(\lambda)$, en fonction de la longueur d'onde λ*

2. Flux lumineux

Φ : déterminé par intégration sur le domaine des longueurs d'onde contenues dans le rayonnement, à cause de la dépendance de la sensibilité spectrale en fonction de la longueur d'onde.

Sensibilité absolue			**I_v**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Phi = V(\lambda_0) \int_{380\,\text{nm}}^{780\,\text{nm}} d\lambda \Phi_{e\lambda} V(\lambda)$	Φ	lm	flux lumineux
	V	1	coefficient de sensibilité spectrale
	λ	m	longueur d'onde
	$\Phi_{e\lambda}$	cd/m	flux énergétique spectral

Lumen, lm : unité SI du flux lumineux Φ.

■ Flux lumineux de quelques sources de lumière : lampe à vapeur de mercure 125 000 lm, tube fluorescent 2300 lm, lampe à incandescence 730 lm, diode électroluminescente LED 0.01 lm.

Intensité lumineuse, I : flux lumineux $d\Phi$ émis par unité d'angle solide $d\Omega$.

Candela, cd : unité SI l'intensité lumineuse. La candela est une grandeur fondamentale du système SI (comme kg, m, s, A), et ne peut, par conséquent, être exprimée en fonction d'autres grandeurs.

● 1 candela est l'intensité lumineuse d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $f = 540$ THz ($\lambda = 555$ nm) et dont l'irradiance est (1/683) W/sr.

On a : $1\ \text{lm} = 1\ \text{cd} \cdot \text{sr}$.

▷ Par le passé, 1 cd était défini à partir de la luminance d'un corps noir à la température de solidification du Platine.

Luminance visuelle, L : éclairement visuel émis par unité de surface $\mathrm{d}A$ d'une source de lumière sous l'angle α :

$$L = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A_S \cos\alpha}$$

Éclairement visuel, E : défini comme le flux lumineux reçu par unité de surface :

$$E = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A}$$

Lux, lx : unité SI d'éclairement visuel, $1\ \mathrm{lx} = 1\ \mathrm{lm/m^2}$.

- Irradiation : Soleil (été) 70 000 lx, Soleil (hiver) 5500 lx,
  lumière du jour (ciel couvert) 1000 - 2000 lx,
  pleine Lune 0.25 lx, limite de perception de la couleur 3 lx.

Comparaison de grandeurs physiques d'un rayonnement et des grandeurs d'éclairagisme					
Physique du rayonnement			Éclairagisme		
Flux énergétique	Φ_e	W	Flux lumineux	Φ	lm (cd·sr)
Intensité énergétique	$I_e = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}\Omega}$	W/sr	Intensité lumineuse	$I = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\Omega}$	cd
Luminance énergétique	$L_e = \frac{\mathrm{d}I_e}{\mathrm{d}A_S \cos\alpha}$	W/(m²sr)	Luminance visuelle	$L = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A_S \cos\alpha}$	cd/m²
Irradiance	$E_e = \frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}A_r}$	W/m²	Irradiation	$E = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}A_r}$	lx (lm/m²)

A_S : aire de l'émetteur, A_r : aire du récepteur, α : direction d'observation.

Symboles des vibrations et des ondes

Symb.	Unité	Dénomination
α	rad	élongation angulaire
$\dot{\alpha}$	rad/s	vitesse angulaire
$\ddot{\alpha}$	rad/s^2	accélération angul.
$\Delta\phi$	rad	différence de phase
λ	m	longueur d'onde
Λ	1	décrément logarith.
μ	1	coeff. frottement
ϕ	rad	déphasage
ω	rad/s	pulsation
a	m/s^2	accélération
A		amplitude
λ	kg/s	coeff. frottement
k	kg/s^2	conste. de rappel
v_ϕ	m/s	vitesse de phase
D	s	coeff. d'amortissement
f	Hz	fréquence
F	kg m/s^2	force de rappel
F_N	N	réaction normale
F_f	N	frottement
g	m/s^2	pesanteur
k	1/m	nombre d'onde
$\vec{k}$	1/m	vecteur d'onde
m	kg	masse
Q	1	facteur de qualité
v	m/s	vitesse de phase
v_{gr}	m/s	vitesse de groupe
c	m/s	célérité d'onde
T	s	période
T_b	s	période de battement
α_g	rad	angle de réflexion totale
β	1	grandissement
a	m	haut. d'objet
a'	m	haut. d'image
a_B	m	punctum proximum
$A(\lambda, T)$	1	pouvoir absorbant
B	1/m	puissance
E_e	W/m^2	irradiance
$\bar{f}$	m	dist. focale objet
f'	m	dist. focale image

Symb.	Unité	Dénomination
H_e	J/m^2	irradiation
I_e	W/sr	intensité
k	1	ouverture
L_e	W/(m^2 sr)	radiance
α	1	coeff. d'absorption son.
κ	1	Adiabatenkoeffizent
ω	rad/s	vitesse angulaire
B_s	Pa/V	rendement électroacoustique
c	cm/s	vitesse du son
c_s	m/s	vitesse du son dans un solide
c_l	m/s	vitesse du son dans un liquide
c_g	m/s	dans un gaz
E	N/m^2	module d'élasticité
E_k	Pa$\sqrt{\text{VA}}$	sensibilité d'un haut-parleur
G_s	dB	rendement électroacoustique relatif
J	W/m^2	intensité sonore
K	N/m^2	module de compression
p	Pa	pression acoustique
P	W	puissance sonore
p_0	Pa	pression statique
r	1	taux de réflexion
R_i	J/(K kg)	cste. spécifique des gaz
T	K	température
T	s	temps de réverbération
v	cm/s	vitesse du son
w	J/m^3	densité d'énergie
Z	kg/(m^{2}s)	impédance acoustique
Z	Ω	impédance
M_e	W/m^2	rayonnement spécifique
Φ	cd	flux lumineux
Φ_e	W	puissance
$\Phi_{e\lambda)}$	cd/m	flux spectral
Q_e	J	Strahlungsenergie
s		sensibilité absolue
$s(\lambda)$		sensibilité spectrale abs.
$s_{rel}(\lambda)$	1	sensibilité spectrale relative
v	1	grossissement
y	m	haut. d'objet
y'	m	haut. d'image

13 Tables de l'acoustique et de l'optique

13.1 Tables de l'acoustique

13.1/1 : Facteurs correctifs de la période aux grandes élongations

Angle (°)	Angle (rad)	Facteur correctif
1	0,017453	1,00002
5	0,087266	1,00048
10	0,174533	1,00191
30	0,523598	1,01741
45	0,785398	1,03997

13.1/2 : Vitesse du son dans les gaz

Gaz	c (ms^{-1})		Gaz	c (ms^{-1})	
	à 0 °C	à 20 °C		à 0 °C	à 20 °C
Ammoniaque	415	428	Argon	319	321
CO_2	259	258	Gaz de ville	453	450
Chlore	206	–	Oxygène	316	324
Azote	334	348	Hydrogène	1284	1300
Hélium	965	1020	Ethylène	317	329
Méthane	430	–	Néon	435	453

13.1/3 : Vitesse du son dans l'air

Gaz	c (ms^{-1})			
	0 °C	10 °C	20 °C	30 °C
Air	332	338	344	350

13.1/4 : Coefficient d'affaiblissement du son dans les gaz

Gaz	T(°C)	ν (kHz)	P (MPa)	α (cm^{-1})
Azote	19,9	598,9	0,097	0,0484
Hydrogène	19,9	589,9	0,1	1,284
Hélium	17,5	598,9	0,099	1,061
Monoxyde d'azote	16,3	598,9	0,095	0,656
Dioxyde de carbone	18,7	304,4	0,085	2,073
Oxygène	19,6	598,9	0,099	0,602

13.1/5 : Champ sonore dans l'air à 20 °C

Pression acoust. (Pa)	Vitesse du son ($cm{\cdot}s^{-1}$)	Intensité sonore ($\frac{\mu W}{cm^2}$)
0,01	$2,42 \cdot 10^{-5}$	$2,42 \cdot 10^{-9}$
0,05	$1,21 \cdot 10^{-4}$	$6,05 \cdot 10^{-8}$
0,10	$2,42 \cdot 10^{-4}$	$1,42 \cdot 10^{-7}$
0,50	$1,21 \cdot 10^{-3}$	$6,05 \cdot 10^{-6}$
1,00	$2,42 \cdot 10^{-3}$	$2,42 \cdot 10^{-5}$

13.1/6 : Vitesse du son dans l'huile et les produits pétroliers

Produit	T(°C)	c (ms^{-1})	Produit	T(°C)	c (ms^{-1})
Essence	25	1295	Pétrole	34	1295
Huile de lin	31,5	1772	Huile d'olives	32,5	1381
Huile de paraffine	33,5	1420	Résine de pin	31	1468
Térébentine	27	1280	Huile de transfo.	32,5	1425
Huile d'eucalyptus	29,5	1276	Huile végétale	31,5	1825

13.1/7 : Vitesse du son dans les liquides à 20 °C

Liquide	c (ms^{-1})	Liquide	c (ms^{-1})
Benzène	1330	Glycérine	1920
Eau	1480	Eau de mer	1470
Eau lourde	1399	Alcool éthylique	1165
Pétrole	1451	Mercure	1460
Aniline	1656	Acétone	1192
Essence	1321	Alcool méthylique	1156

13.1/8 : Coefficient d'affaiblissement du son dans les liquides

Liquide	T(°C)	ν(MHz)	α(cm^{-1})	Liquide	T(°C)	ν(kHz)	α(cm^{-1})
Acétone	20	307	25,6	Benzène	20	307	711,5
	20	482	56		20	482	1150
	20	843	167,7	Essence	–	1	0,0096
Eau	20	307	23,28	Chloroforme	20	307	344
	20	482	55,3		20	482	720,2
	20	843	172		20	843	1748
Toluène	20	307	71,9	Tétrachlorure de carbone	20	307	492
	20	482	182,4		20	482	1115,2
	20	843	575,6		20	843	3269
Glycérine	32,8	30	12,69	Huile de lin	20,5	3,1	0,141
Huile d'olive	21	1	0,0125	Huile de ricin	21,4	15,7	5,18

13.1/9 : Vitesse du son dans les métaux

Matériau	c (ms^{-1})
Acier	5050
Aluminium	5200
Argent	3650
Cuivre	3500
Étain	2490
Fer	5000
Iridium	4900
Laiton	3400
Nickel	4973
Plomb	1200
Titane	6070
Zinc	2680

13.1/10 : Vitesse du son dans les matériaux de synthèse et les verres (tiges fines)

Matériau	c (ms^{-1})
Polystyrène	1800
PVC souple	80
PVC dur	1700
Polycarbonate	1400
Polyéthylène	540
Nylon	1800
Plexiglas	1840
Verre Flint	3720
Verre boraté	4540
Verre Crown	5300
Verre au quartz	5400
Porcelaine	4880

13.1/11 : Vitesse du son dans les matériaux de construction

Matériau	c (ms^{-1})
Béton	3100
Marbre	3810
Granite	3950
Pin	3600
Sapin	3320
Tuile	3600
Chêne	4100
Liège	500
Hêtre	3300
Briques	3500...4000

13.1/12 : Intensité sonore en dB

Seuil d'audibilité	0	Machine à écrire	50...70
Tic-tac de montre	10	Bruits de rue	70
Bruissement de feuilles	20	Cris	80
Chuchotement	20	Klaxon	90
Conversation	40	Motocyclette	70...100
Musique douce	40	Rock'n Roll	105
Papier déchiré	40	Martelage	110
Conférence	40...50	Seuil de douleur	130

13.1/13 : Atténuation du son dans l'air en dB (100 m) à pression normale

T(°C)	Humidité relative %	Fréquence (Hz)					
		125	250	500	1000	2000	4000
30	10	0,09	0,19	0,35	0,82	2,6	8,8
	20	0,06	0,18	0,37	0,64	1,4	4,4
	30	0,04	0,15	0,38	0,68	1,2	3,2
	50	0,03	0,10	0,33	0,75	1,3	2,5
	90	0,02	0,06	0,24	0,70	1,5	2,6
20	10	0,08	0,15	0,38	1,21	4,0	2,5
	20	0,07	0,15	0,27	0,62	1,9	6,7
	30	0,05	0,14	0,27	0,51	1,3	4,4
	50	0,04	0,12	0,28	0,50	1,0	2,8
	90	0,02	0,08	0,26	0,56	0,99	2,1
10	10	0,07	0,19	0,61	1,9	4,5	7,0
	20	0,06	0,11	0,29	0,94	3,2	9,0
	30	0,05	0,11	0,22	0,61	2,1	7,0
	50	0,04	0,11	0,20	0,41	1,2	4,2
	90	0,03	0,10	0,21	0,38	0,81	2,5
0	10	0,10	0,30	0,89	1,8	2,3	2,6
	20	0,05	0,15	0,50	1,6	3,7	5,7
	30	0,04	0,10	0,31	1,08	3,3	7,4
	50	0,04	0,08	0,19	0,60	2,1	6,7
	90	0,03	0,08	0,15	0,36	1,1	4,1

13.1/14 : Coefficients d'affaiblissement pour des matériaux de construction (valeurs moyennes).

Matériau	dB	Ouvrage	Norme recommandée
Fenêtre	15	Mur en briques	50
Fenêtres doubles (12 cm air)	< 30	Fenêtre	25
Porte en bois	20	Portes	30
Double porte (12 cm air)	< 40	Murs de séparation appartement	40
Panneau paille, 5 cm	38	Murs de séparation salles de classe	42
Panneau bois agloméré, 8 cm	50	Appartement	48
Mur de béton, 10 cm	42	Murs extérieurs	48
Mur de béton, 20 cm	48	Chambre d'hôpital	50
Maçonnerie en briques, crépie 12 cm	45	Plafonds	52

13.1/15 : Bruits nuisibles à la santé

Réaction	Intensité (dB)
psychiques (irritation)	> 30
végétatifs (faiblesse de la concentration)	> 65
dommages de l'oreille (oreille interne, incurable)	> 80
dommages mécaniques (surdité)	> 120

13.1/16 : Indices d'absorption acoustique

Absorption acoustique α de divers matériaux de construction			
	α pour		
Matériau	125 Hz	500 Hz	2000 Hz
Crépi sur maçonnerie	0,02	0,02	0,03
Crépi à la chaux	0,03	0,03	0,04
Béton léger	0,07	0,22	0,10
Mortier	0,03	0,03	0,07
Plaque acoustique, épais. 2,5 cm			
avec 3 cm d'air	0,25	0,23	0,74
appliquée sur un mur	0,15	0,23	0,73
Panneaux isolants, épais. 2cm			
appliqué sur un mur	0,13	0,19	0,24
avec 3cm d'air	0,15	0,23	0,23
avec 3cm de laine de verre	0,33	0,44	0,37
Porte en bois	0,14	0,06	0,10
Parquet	0,05	0,06	0,10
Contreplaqué, 3mm, air 2cm	0,07	0,22	0,10
Contreplaqué, 3mm, sur un mur	0,07	0,05	0,10
Panneaux de bois	0,25	0,25	0,08

13.2 Tables de l'optique

13.2/1 : Indices de réfraction à 20° C et $\lambda = 589,3$ nm

Verre Flint F 3	1,613	Oxyde de barium	1,980
Spath	1,434	Benzène	1,501
Dioxyde de carbone	1,0045	Verre crown BK 1	1,510
Air	1,0003	Iodure de césium	1,790
Quartz	1,459	Diamant	2,417
Sulfure de carbone	1,628	Eau (glace)	1,310
Eau	1,333	Alcool éthylique	1,362

13.2/2 : Éclairement

Source	Éclairement (lx)
Soleil, été	70000
Soleil, hiver	5500
Ciel couvert	1000-2000
Pleine lune	0,25
Étoiles, ciel clair/sans lune	0,001
Poste de travail	1000
Salle de séjour	120
Limite de perception de la couleur	3
Éclairage de rue	1-16

13.2/3 : Flux lumineux

Source	Flux (lm)
Diode électroluminescente	0,01
Lampe (incand.) 60W	730
Lampe (incand.) 100W	1380
Tube fluorescent	2300
Lampe (vap. mercure) 60 W	5400
Lampe (vap. mercure) 100 W	125000

13.2/4 : Rayons ultra-violets

Longueur d'onde λ (10^{-7}m)	Dénomination	Effets
$3,15\ldots3,80$	UV proche	Pigmentation
$2,80\ldots3,15$	UV moyen	Érythème
$2,00\ldots2,80$	UV lointain	Bactéricide
$< 2,00$	UV court	Ozonisation

13.2/5 : Les principaux types de Laser

Laser	raies principales (nm)
Hélium-Néon	**632.8,** 543, 594, 612, ...
Hélium-Cadmium	442, 325
Argon-Ions	488, 514
Dioxyde de Carbone	10.6 μm
Excimère (XeF, KrF, ArF)	351, 248, 193
À colorant	règlable UV – IR
Nd:YAG	1064 (532 avec doublage de fréquence)
Semiconducteur (par ex. InGaAs)	règlable 660 – 1550

13.2/6 : Longueurs de cohérence de quelques sources

Source	Longueur de cohérence
Soleil (spectre visible)	1 μm
Diode électroluminescente	20 μm
Lampe à vapeur de Mercure	0.5 mm
Diodes Laser	mm - cm
Laser HeNe	0.2 m
Laser stabilisé	> 100 m

13.2/7 : Sensibilité spectrale

λ (nm)	V/1	λ (nm)	V/1	λ (nm)	V/1	λ (nm)	V/1
380	0	490	0,208	590	0,757	700	0,0041
390	0,0001	500	0,323	500	0,631	710	0,0021
400	0,0004	510	0,503	610	0,503	720	0,105
410	0,0012	520	0,710	620	0,381	730	0,000052
420	0,0040	530	0,862	630	0,265	740	0,000025
430	0,0116	540	0,954	640	0,175	750	0,000012
440	0,023	550	0,995	650	0,107	760	0,000006
450	0,038	555	1	660	0,061	770	0,000003
460	0,060	560	0,995	670	0,032	780	0,0000015
470	0,091	570	0,952	680	0,017		
480	0,139	580	0,870	690	0,0082		

13.2/8 : Raies de Fraunhofer

Nom	Élément	Long. d'onde	Nom	Élément	long. d'onde
A	O_2	7593	F	H	4861
B	O_2	6867	f	H	4340
C	H	6593	G	Fe, Ti	4308
D_1	Na	5896	h	H	4102
D_2	Na	5890	H	Ca^+	3968
E	Ca, Fe	5270	K	Ca^+	3933

Partie III Électricité

Électricité : décrit les charges électriques stationnaires ou en déplacement, les forces d'interaction auxquelles elles sont soumises aussi bien que les champs électriques et magnétiques qu'elles engendrent.

L'électricité trouve des applications dans plusieurs domaines :

- L'électrotechnique, par exemple installations électriques en courants continus, alternatifs ou triphasés, calculs de circuits, fabrication de générateurs et de moteurs.
- l'électrochimie, avec par exemple le transport de charges dans les électrolytes ou la fabrication des piles.
- l'électronique, dans la conception de systèmes électroniques analogiques ou numériques et le développement des ordinateurs.
- la physique des plasmas, par exemple pour la production de lumière, le traitement des matériaux, la production d'énergie et la génération de faisceaux de plasma à partir de sources d'ions.
- la physique des accélérateurs, avec le transport et l'accélération d'ions et d'électrons.
- les communications, traitement du signal et de l'information.

Par ailleurs, l'électricité intervient dans :

- la physique atomique
- la physique du solide.

Dans ce cas, l'électricité décrit les interactions électromagnétiques entre le noyau et les électrons périphériques de l'atome, les électrons et les photons ou entre particules chargées et solides.

14 Charges et courants

La charge électrique est une propriété de la matière. Les corps chargés peuvent interagir à longue distance à cause du champ électrique. L'interaction de deux charges ponctuelles est décrite par la loi de Coulomb.

Des charges électriques en déplacement donnent lieu à un courant électrique. Ces courants donnent naissance à une interaction à longue distance due au champ magnétique. L'interaction de deux fils parcourus par un courant électrique est décrite par la loi d'Ampère.

14.1 Charge électrique

Charge électrique Q : propriété des corps d'exercer une force d'interaction due au champ électrique. La charge est une propriété de la matière.

$$[Q] = 1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{As}$$

1. Charges positives et négatives

Il y a deux types de charges électriques :

Charges positives, considérées comme sources du champ électrique.

■ **Cations** : ions positifs, atomes ayant perdu un électron.
Trous dans un semi-conducteur, électron manquant dans le réseau cristallin. Il ne faut pas confondre les trous avec les **protons** (ions H^+) ou les **positrons** (antiparticule associée à l'électron), **particules élémentaires** chargées positivement.

Charges négatives, considérées comme puits du champ électrique.

■ **Électrons** : **particules élémentaires** chargées négativement.
Anions : ions négatifs, atomes dotés d'un électron excédentaire.

● Des charges de mêmes signes s'attirent.

● Des charges de signes opposés se repoussent.

2. Charge élémentaire et conservation de la charge

La charge électrique est quantifiée, elle est toujours un multiple entier de la charge élémentaire.

Charge élémentaire : plus petite charge électrique liée à une particule que l'on puisse observer dans la nature :

Charge élémentaire			**TI**
	Symbole	Unité	Dénomination
$e_0 = 1,60217733 \cdot 10^{-19}$ C	e_0	C	charge élémentaire

● **Conservation de la charge** : la charge totale d'un système fermé est constante, c'est-à-dire que la somme de toutes les charges de ce système est une constante.
$\sum_i Q_i = \text{const.}$

■ Un proton porte une charge e_0, un électron $-e_0$ et un noyau d'Uranium $92\,e_0$.

3. Conducteurs et isolants

Conducteur électrique : un matériau dans lequel il y a des charges pouvant se déplacer librement. Les conducteurs ont une → *résistance électrique* faible.

Isolant ou **non-conducteur électrique** : un matériau non conducteur d'électricité dans lequel il n'y a pas de charges libres. Les isolants opposent un très grande résistance au courant. → *résistance électrique*.

▷ Même dans les matériaux isolants, il peut se produire un déplacement local de charges au niveau atomique ou moléculaire sous l'effet d'un champ électrique.

4. Influence et polarisation

Influence : déplacement des charges électriques à l'intérieur d'un corps quand il est placé dans un champ électrique.

Polarisation : formation de dipôles due à un déplacement local de charges dans un isolant.

Des concentrations de charges apparaissent dans un conducteur sous l'effet de l'influence. Il y a excès de charges positives par rapport aux charges négatives dans certaines régions. Néanmoins, le conducteur reste globalement neutre.

▷ Du fait de la polarisation, des charges peuvent aussi exercer une force sur un isolant.

5. Mesure de charges électriques

M La charge peut être mesurée par une force électrostatique, par une différence de potentiel ou par une impulsion de courant correspondant à une décharge dans le détecteur.
Mesure de la tension U aux bornes d'un conducteur de capacité connue C suivant la loi :

$$Q = CU$$

Mesure de la déviation d'un **galvanomètre balistique** produite par l'impulsion de courant pendant la décharge dans le galvanomètre :

$$Q = \int_0^T i(t)\,\mathrm{d}t$$

La durée de l'impulsion de courant doit être inférieure à 1% de la période du galvanomètre.

M Mesure de la charge élémentaire :
Éxpérience de Millikan : des gouttes d'huile chargées sont placées entre les plaques disposées horizontalement d'un condensateur. La tension aux bornes du condensateur est augmentée progressivement jusqu'à ce que la force gravitationnelle agissant sur les gouttes soit compensée par la force électrostatique provenant du champ électrique du condensateur. Alors, la charge de la goutte d'huile peut être déterminée à partir de la tension appliquée aux bornes du condensateur. On observe que cette charge est toujours un multiple entier d'une certaine charge, la charge élémentaire.
Récemment, une méthode similaire a été utilisée pour détecter des fractions de la charge élémentaire. Mais jusqu'à maintenant, le résultat de ces mesures a été négatif.

14.1.1 Loi de Coulomb

1. Force entre charges ponctuelles

La **loi de Coulomb** décrit la force d'interaction entre deux charges ponctuelles :

- La force $\vec{F}_{12}$ entre deux charges ponctuelles Q_1 et Q_2 est proportionnelle au produit des charges et décroît comme carré de la distance r qui les sépare. La direction de la force est parallèle à la droite reliant les charges (Fig. 14.1)

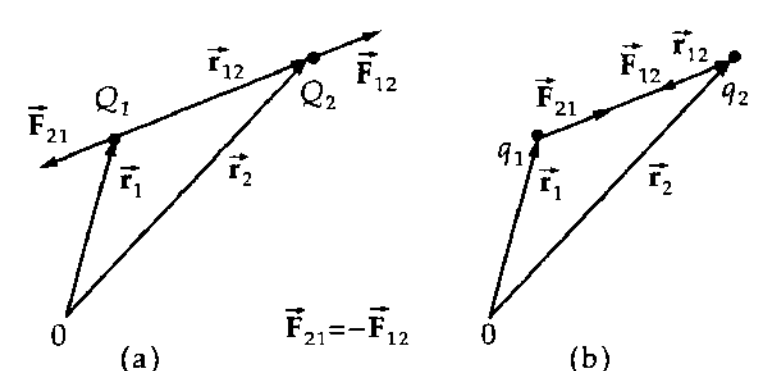


Fig. 14.1 : *Loi de Coulomb. (a) : charges de mêmes signes, (b) : charges de signes opposés*

Force ~ $\frac{\text{charge 1} \cdot \text{charge 2}}{\text{carré de la distance}}$				**$LT^{-2}M$**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$	$\vec{F}$	N	force entre les charges	
	Q_1	C	première charge	
	Q_2	C	seconde charge	
	$\vec{r}_{12}$	m	vecteur reliant les charges	
	r_{12}	m	distance	
	ε_0	As/(Vm)	permittivité du vide	

Le facteur de proportionnalité inclut la **permittivité** (constante diélectrique) :

Permittivité du vide				**$L^{-3}T^4M^{-1}I^2$**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\varepsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$	ε_0	As/(Vm)	permittivité du vide	

2. Exemples d'application de la loi de Coulomb

■ Une charge $Q = 10^{-5}$ C est repoussée par une autre charge $Q = 5 \cdot 10^{-5}$ C, à une distance $r = 1$ m avec la force :
$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{10^{-5}\,\text{C} \cdot 5 \cdot 10^{-5}\,\text{C}}{1\,\text{m}^2} = 4,49\,\text{N}$

■ Dans la description classique de l'atome d'hydrogène, la force exercée par le proton sur l'électron est :
$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-e_0 \cdot e_0}{r^2} = -8,24 \cdot 10^{-8}\,\text{N}$
où $e_0 = 1,6022 \cdot 10^{-19}$ C est la charge élémentaire (Q(proton) $= e_0$, Q(électron) $= -e_0$) et $r = 0,529 \cdot 10^{-10}$ m est le rayon de Bohr de l'orbite circulaire classique correspondant au niveau fondamental de l'électron dans l'atome d'hydrogène. Le signe négatif de la force indique une attraction.

14.2 Densité de charge électrique

Densité de charge électrique : permet de décrire la distribution de charge.

▷ Alors que la quantité Q permet seulement de savoir qu'une certaine charge est localisée dans une certaine région de l'espace, la densité de charge permet de quantifier la charge comprise dans un petit volume autour de n'importe quel point de l'espace, ce qui fournit une information plus précise. La densité de charge est une fonction scalaire dépendant de la position.

1. Densité volumique de charge électrique

La **densité volumique de charge électrique** ρ, donne le rapport de la charge électrique ΔQ, présente dans la région de l'espace ΔV sur le volume de cette région (Fig. 14.2 (a)). Si la charge dépend de la position, le volume ΔV, est diminué jusqu'à ce que la charge à l'intérieur de ce volume puisse être considérée comme

uniforme. Ceci correspond à la limite :

Densité de charge électrique $= \dfrac{\textbf{charge}}{\textbf{élément de volume}}$				**$L^{-3}TI$**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta V} = \dfrac{dQ}{dV}$	ρ	C/m³	densité spatiale de charge	
	dQ	C	charge dans le volume dV	
	dV	m³	élément de volume	

Coulomb/mètre³ C/m³ : unité SI pour la densité volumique de charge ρ

$[\rho] = \mathrm{C/m^3}$

Densité de charge dans le cas d'une distribution uniforme de la charge Q dans le volume V

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

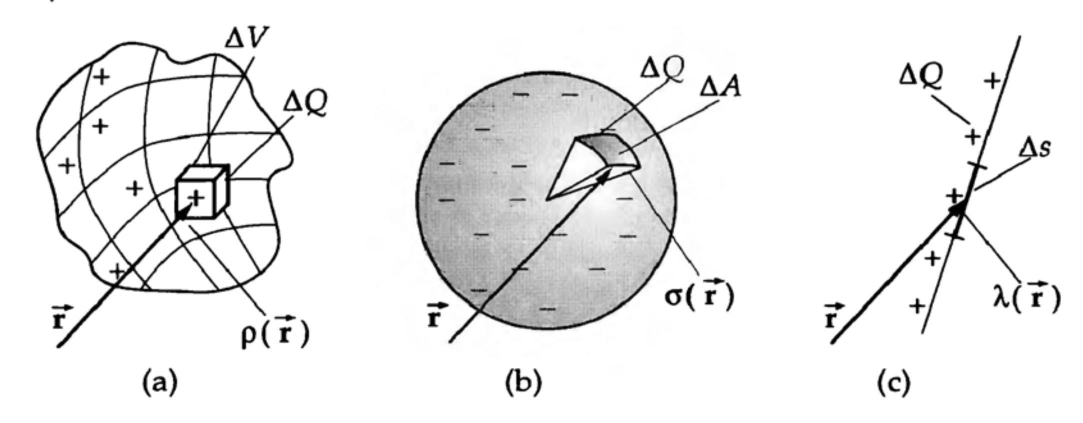


Fig. 14.2 : *a) charge volumique ρ, b) charge surfacique σ, c) charge linéique λ*

2. Densité surfacique de charge électrique

La **densité surfacique de charge électrique** σ, décrit la répartition de la charge sur une surface (Fig. 14.2 (b)). Rapport de la charge électrique ΔQ de la surface ΔA sur la dimension de la surface. Dans ce cas, l'élément de surface ΔA est diminué jusqu'à ce que l'on puisse considérer que la charge ΔQ est distribuée uniformément sur cette surface. Ceci correspond à la limite :

Densité surfacique de charge électrique $= \dfrac{\textbf{charge}}{\textbf{élément de surface}}$				**$L^{-2}TI$**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta A} = \dfrac{dQ}{dA}$	σ	C/m²	densité surfacique de charge	
	dQ	C	charge de l'élément dA	
	dA	m²	élément de surface	

Coulomb/mètre² : unité SI pour la densité surfacique de charge électrique

$[\sigma] = \mathrm{C/m^2}$

Densité surfacique de charge dans le cas d'une distribution uniforme de la charge sur la surface A :

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

3. Densité linéique de charge électrique

La **densité linéique de charge électrique** λ, décrit la distribution de charge le long d'un fil conducteur (Fig. 14.2 (c)). Rapport de la charge électrique ΔQ d'un segment de fil Δs sur la longueur du segment. Dans ce cas, le segment Δs est réduit jusqu'à ce que la charge ΔQ puisse être considérée comme répartie uniformément. Ceci correspond à la limite :

Densité linéique de charge électrique $= \dfrac{\textbf{charge}}{\textbf{segment}}$				$\mathrm{L^{-1}TI}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\lambda = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta s} = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}$	λ	C/m	densité linéique de charge	
	$\mathrm{d}Q$	C	charge du segment $\mathrm{d}s$	
	$\mathrm{d}s$	m	segment	

Coulomb/mètre : unité SI pour la densité linéique de charge électrique

$[\lambda] = \mathrm{C/m}$

Répartition uniforme de la charge le long du fil s :

$$\lambda = \frac{Q}{s}$$

4. Densité moyenne de charge

La **densité moyenne de charge** : peut être définie même si la charge Q n'est pas distribuée uniformément. En général, la densité moyenne de charge en un point est différente de la densité de charge en ce point.

Densité volumique moyenne de charge	$\bar{\rho} = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{1}{V}\displaystyle\int_V \rho(\vec{r})\ \mathrm{d}V$
Densité surfacique moyenne de charge	$\bar{\sigma} = \dfrac{Q}{A} = \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_A \sigma(\vec{r})\ \mathrm{d}A$
Densité linéique moyenne de charge	$\bar{\lambda} = \dfrac{Q}{s} = \dfrac{1}{s}\displaystyle\int_s \lambda(\vec{r})\ \mathrm{d}s$

14.3 Courant électrique

1. Courant électrique

Le **courant électrique** caractérise le déplacement de particules chargées à l'intérieur d'un milieu conducteur. Un courant électrique peut causer un échauffement de la matière, des processus électrochimiques, aussi bien qu'une magnétisation.

- Une résistance placée dans un circuit électrique est échauffée par le courant qui la traverse.
- Dans une solution chimique il y a précipitation aux électrodes due à l'échange de charges.
- Une bobine parcourue par un courant est entourée d'un champ magnétique. Un morceau de fer placé à l'intérieur de la bobine est magnétisé.

2. Intensité du courant

L'**intensité du courant** I, unité SI : quantité de charge ΔQ traversant la section orthogonale A par unité de temps Δt (Fig. 14.3). Si le courant varie au cours de l'intervalle de temps Δt alors Δt est diminué jusqu'à ce que le courant puisse être considéré comme constant.

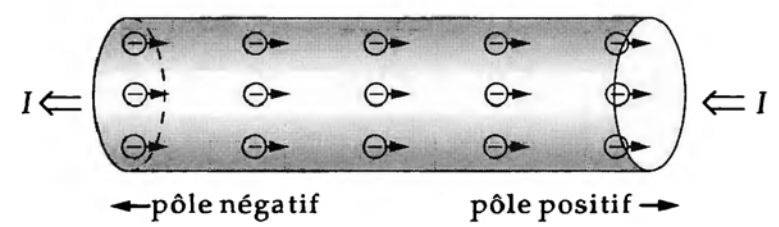


Fig. 14.3 : *Courant et direction technique du courant*

Intensité de courant à un instant t dans un conducteur : quantité de charge dQ traversant la section du conducteur pendant un intervalle de temps infinitésimal dt :

Intensité du courant électrique $= \dfrac{\textbf{charge}}{\textbf{unité de temps}}$	**I**

	Symbole	Unité	Dénomination
$I = \lim\limits_{\Delta t \to \infty} \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$	I	A	courant à l'instant t
	dQ	C=As	charge transportée
	dt	s	intervalle de temps

Dans le cas d'un courant stationnaire on a :

$$Q = I \cdot t$$

3. Unité SI du courant électrique

Ampère A : unité SI du courant électrique I. Le courant dans un conducteur est de 1 Ampère si la quantité de charge $\Delta Q = 1$ C est transportée pendant $\Delta t = 1$ s au travers d'une section du conducteur.

$[I] = \mathrm{A} = \mathrm{C/s}$

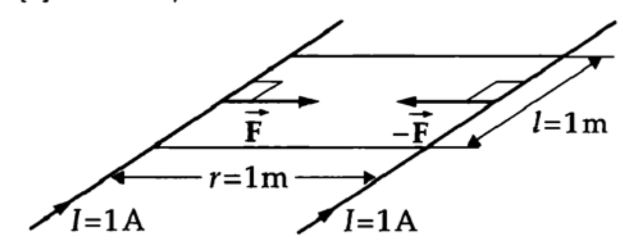


Fig. 14.4 : *Définition de l'unité de courant Ampère*

- **Définition de l'unité de courant Ampère** : Le courant I prend la valeur 1 A si deux conducteurs rectilignes, infiniment longs, de section négligeable, parallèles entre eux à une distance $r = 1$ m et parcourus par un courant continu de même intensité I exercent une force $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N/m l'un sur l'autre.

- **Direction technique du courant** : correspond à la direction de déplacement des porteurs de charge positive. Dans un conducteur métallique, la direction du courant est opposée à la direction de déplacement des porteurs de charge négative, c'est-à-dire des électrons (Fig. 14.4).

▷ Dans un circuit électrique, les électrons se déplacent du pôle négatif de la source de tension vers le pôle positif. Par conséquent, la direction du courant va du pôle positif (+) de la source de tension vers son pôle négatif (−).

4. Courant continu

Le courant I est constant au cours du temps. La quantité de charge ΔQ traversant une section du conducteur pendant l'intervalle de temps Δt est proportionnel à Δt :

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \text{const.}$$

5. Courant alternatif

Au contraire du courant continu, le **courant alternatif** désigne un courant dont le sens varie au cours du temps suivant une loi périodique.

▷ Les effets du courant électrique sont énumérés dans le tableau 19.3/7 dans le cas de courants continus et alternatifs.

■ Si dans un fil électrique la quantité de charge constante $\Delta Q = 3\,\text{C}$ traverse la section du fil pendant un intervalle de temps $\Delta t = 60\,\text{s}$, alors cela correspond à un courant :

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{3\,\text{C}}{60\,\text{s}} = 0,05\,\text{A} = 50\,\text{mA}$$

6. Mesure de l'intensité des courants électriques

M La mesure des courants électrique se fait par la mesure de leurs effets :

Balance électrométrique (action mécanique) : Des conducteurs parcourus par un courant exercent l'un sur l'autre une force due au champ magnétique. Cette force peut être comparée à un poids par une balance.

Ampèremètre à fil chaud (action de la chaleur) : Un fil parcouru par un courant électrique s'échauffe et se dilate. La dilatation peut être mesurée.

Effet chimique : précipitation par → *électrolyse* : La quantité de solide précipité par unité de temps est proportionnelle au courant électrique. C'est la méthode utilisée à l'origine pour fixer l'unité de courant Ampère.

Instrument à bobine mobile : Une bobine parcourue par un courant électrique est déviée par un champ magnétique. Plus le courant dans la bobine est fort, plus la déviation sera importante. L'intensité du courant peut être lue sur une échelle.

14.3.1 Loi d'Ampère

Loi d'Ampère : les conducteurs parcourus par un courant électrique produisent un champ magnétique grâce auquel ils interagissent.

● La force qu'exercent l'un sur l'autre deux fils conducteurs parcourus par un courant est proportionnelle au produit des courants I_1 et I_2 dans les fils, à la longueur l des deux fils et inversement proportionnelle à la distance r qui les sépare (Fig. 14.4).

force ~ $\frac{\text{longueur} \times \text{courant 1} \times \text{courant 2}}{\text{distance}}$				**$LT^{-2}M$**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{l \cdot I_1 \cdot I_2}{r}$	F	N	force	
	I_1	A	premier courant	
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\text{Vs/(Am)}$	I_2	A	deuxième courant	
	r	m	distance	
	l	m	longueur des fils	
	μ_0	Vs/(Am)	constante de perméabilité	

▷ L'unité de courant est définie à partir de la loi d'ampère.

14.4 Densité de courant électrique

1. Définition de la densité de courant

La **densité de courant électrique $\vec{J}$** : permet la description de la distribution de courant dans des conducteurs étendus. Quantité vectorielle, la direction du vecteur donne la direction de déplacement des porteurs de charge positive, l'amplitude est calculée à partir du courant ΔI traversant une section $\Delta A_\perp$ perpendiculaire à la direction de déplacement des porteurs de charge divisé par la surface de cette section (Fig. 14.5). Si le courant n'est pas constant dans l'espace, alors la densité de courant J est définie par le rapport différentiel.

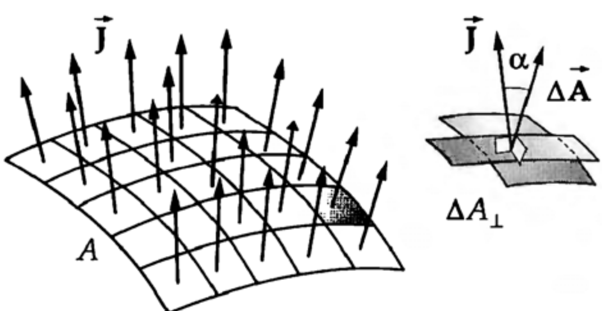


Fig. 14.5 : *Définition de la densité de courant* $\vec{J}$

Densité de courant = $\frac{\text{courant}}{\text{élément de surface}}$				**$L^{-2}I$**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$J = \lim_{\Delta A_\perp \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta A_\perp} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A_\perp}$	J	A/m^2	densité de courant	
	ΔI	A	courant traversant $\Delta A_\perp$	
	$\Delta A_\perp$	m^2	élément de surface	
	$\mathrm{d}A_\perp$	m^2	élément de surface infinitésimal	

Ampère/mètre² A/m^2 : unité SI pour la densité de courant. 1 A/m^2 est la densité de courant correspondant à un courant électrique $I = 1\,\text{A}$ traversant une surface $A_\perp = 1\,\text{m}^2$ perpendiculaire à sa direction de propagation.
$[J] = A/m^2$

2. Propriétés de la densité de courant

Alors que le courant électrique est une mesure de la quantité de charge traversant une section donnée, la densité de courant électrique donne la direction et l'amplitude de la charge transportée en n'importe quel point de l'espace.

Si le courant I traversant une surface $A_\perp$ est le même en tout point de cette surface, alors la densité de courant est :

$$J = \frac{I}{A_\perp}$$

■ Un courant $I = 2\,\text{A}$ parcourant un fil métallique de section $A = 2,5\,\text{mm}^2$ correspond à une densité de courant :

$$J = \frac{I}{A} = \frac{2\,\text{A}}{2,5\,\text{mm}^2} = \frac{2\,\text{A}}{2,5\cdot 10^{-6}\,\text{m}^2} = 8\cdot 10^7\,\text{A/m}^2$$

Le vecteur densité de courant $\vec{\mathbf{J}}$ est dirigé le long du fil dans le sens opposé à celui du déplacement des électrons, c'est-à-dire suivant le sens technique du déplacement.

3. Représentation vectorielle de la densité de courant

La densité de courant est proportionnelle à la densité volumique de charge ρ et à la vitesse moyenne $\bar{v}$ de déplacement des porteurs de charge (Fig. 14.6).

$$\vec{\mathbf{J}} = \rho\cdot\vec{\mathbf{v}}$$

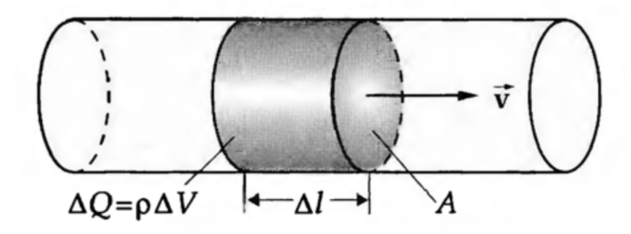


Fig. 14.6 : *La densité de courant correspond à la densité de charge, multipliée par la vitesse de déplacement des porteurs de charge*

4. Forme intégrale de l'intensité du courant

Le courant traversant une surface ΔA est le produit de la composante de la densité de courant $J\cdot\cos\alpha$ perpendiculaire à la surface ΔA par la valeur de sa surface.

Si le courant n'est pas constant sur la surface ΔA, alors on utilise la forme différentielle :

$$\mathrm{d}I = J\cdot\,\mathrm{d}A\cdot\cos\alpha = \vec{\mathbf{J}}\cdot\,\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$

Le courant traversant une surface quelconque s'en déduit par intégration :

Courant = intégrale de la densité de courant sur la surface				**I**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$I = \int_A \vec{\mathbf{J}}\cdot\,\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$	I	A	courant traversant $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$	
	$\vec{\mathbf{J}}$	A/m²	densité de courant	
	$\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$	m²	élément de surface infinitésimal	
	A	m²	surface totale	

Le vecteur $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$ a la direction de la normale à la surface et sa longueur est proportionnelle à l'aire $\mathrm{d}A$.

5. Première loi de Kirchhoff

▷ On dit encore que le courant est égal au flux du vecteur densité de courant.

● La somme de tous les courants traversant une surface fermée est nulle. C'est une conséquence de la conservation de la charge :

$$\oint \vec{\mathbf{J}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = 0$$

(Première loi de Kirchhoff).

14.4.1 Champ de courant

1. Champ de courant et lignes de courant

Le **champ de courant électrique** indique la densité de courant en tout point de l'espace.

▷ Si le champ de courant électrique est constant dans le temps, on dit qu'on est en présence d'un champ de courant stationnaire. Dans ce cas, la densité de courant est constante dans le temps, mais peut différer d'un point à un autre. Dans un champ de courant électrique stationnaire, la quantité de charge traversant par unité de temps une surface donnée est constante.

Les **lignes de courant** servent pour visualiser la densité de courant électrique.

Les conventions suivantes caractérisent les lignes de courant :

- Les lignes de courant correspondent aux trajectoires suivies par les charges positives.
- La tangente en un point à une ligne de courant coïncide avec la direction du vecteur densité de courant en ce point.

2. Propriétés des lignes de courant

- La densité des lignes de courant est une mesure du courant.
- Les lignes de courant ne peuvent pas se couper, puisque en tout point la direction du déplacement des charges est définie de façon unique.

■ Les lignes de courant le long d'un fil conducteur sont dirigées parallèlement au fil.

■ Pour une électrode ponctuelle, les lignes de courant concourent radialement vers l'électrode. La densité de courant diminue avec le carré de la distance à l'électrode (symétrie sphérique).

■ Dans un conducteur rectiligne, les lignes de courant sont perpendiculaires à l'axe du conducteur et sont dirigées radialement vers l'extérieur (symétrie cylindrique).

14.5 Résistance et conductance

14.5.1 Résistance électrique

1. Définition de la résistance électrique

La **résistance électrique** d'un conducteur détermine l'intensité du courant le traversant en fonction de la valeur de la tension qui est appliquée aux bornes de ce conducteur. La résistance R est le rapport de la

tension U sur le courant I :

Résistance $= \dfrac{\textbf{tension}}{\textbf{courant}}$			$L^2T^{-3}MI^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$R = \dfrac{U}{I}$	R	Ω=V/A	résistance électrique
	U	V	tension
	I	A	courant

Ohm Ω: unité SI pour la résistance R. La résistance d'un conducteur est $1\ \Omega$ si pour une tension $U = 1$ V appliquée aux bornes du conducteur, celui-ci est traversé par un courant $I = 1$ A.

$[R]$=V/A

2. Loi d'Ohm

Dans un conducteur ohmique, la tension U est proportionnelle au courant I. Le facteur de proportionnalité est la **résistance ohmique** R.

Tension = résistance × courant			$L^2T^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$U = R \cdot I$	U	V	tension
	R	Ω=V/A	résistance électrique
	I	A	courant

3. Caractéristique courant-tension

C'est la représentation graphique de la relation entre courant et tension.

- La caractéristique courant-tension d'une résistance ohmique est linéaire (**résistance linéaire**). (Fig.14.7 (a))

Résistance non-linéaire : la relation entre le courant traversant le conducteur et la différence de potentiel est non-linéaire (Fig.14.7 (b)).

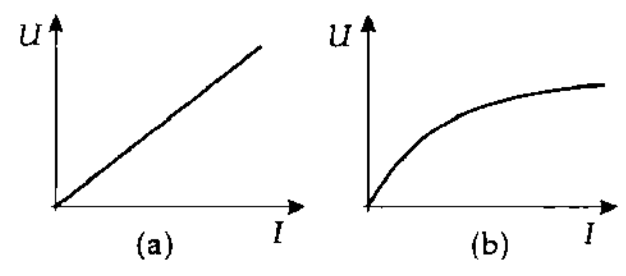


Fig. 14.7 : *Caractéristique courant-tension.*
(a) : résistance linéaire, (b) : résistance non-linéaire

▷ À température constante, les conducteurs métalliques ont une caractéristique courant-tension linéaire (Fig. 14.7 (a)). Un courant traversant un conducteur métallique provoque un échauffement de ce conducteur. Pour des courants élevés, la relation entre le courant et la tension devient non-linéaire.

■ La caractéristique courant-tension d'une diode est non-linéaire.

14.5.2 Conductance électrique

Valeur réciproque de la résistance électrique. Rapport entre le courant I et la tension U.

$\textbf{Conductance} = \dfrac{\textbf{1}}{\textbf{résistance}} = \dfrac{\textbf{courant}}{\textbf{tension}}$				$L^{-2}T^{3}M^{-1}I^{2}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$G = \dfrac{1}{R} = \dfrac{I}{U}$	G	S=A/V	conductance électrique	
	R	Ω	résistance électrique	
	I	A	courant	
	U	V	tension	

Siemens S : unité SI de la conductance électrique G. Si la résistance électrique d'un conducteur vaut $R = 1\,\Omega$, alors la conductance électrique est $G = 1\,\text{S}$.

$[G]$=S=1/Ω=A/V

14.5.3 Résistivité et conductivité

Résistivité (résistance spécifique) ρ : quantité dépendant du matériau, indépendante de la géométrie du conducteur.

Conductivité électrique κ, valeur réciproque de la résistivité.

1. Résistance d'un fil

La **résistance d'un fil** R: est proportionnelle à la longueur l du fil et inversement proportionnelle à sa section A. La constante de proportionnalité est la résistivité ρ (Fig. 14.8).

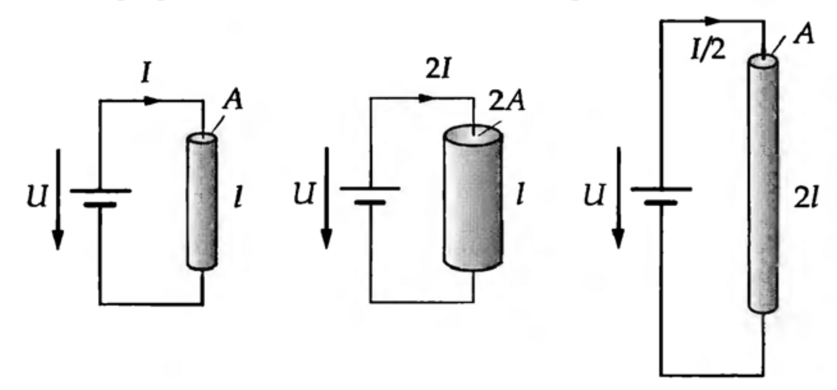


Fig. 14.8 : *Résistance d'un fil en fonction de sa section A et de sa longueur l*

$\textbf{Résistance} = \textbf{résistivité} \times \dfrac{\textbf{longueur}}{\textbf{surface}}$				$L^{2}T^{-3}MI^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$R = \rho \cdot \dfrac{l}{A}$	R	Ω	résistance	
	ρ	Ωm	résistivité	
$= \dfrac{1}{\kappa} \cdot \dfrac{l}{A}$	κ	S/m	conductance électrique	
	l	m	longueur du fil	
	A	m^2	section du fil	

2. Unités SI de la résistivité

Ohm·mètre Ω/m : unité SI de la résistivité ρ.

$[\rho] = \Omega\text{m}$

▷ La résistivité et la densité volumique de charge sont représentées par le même symbole ρ.

▷ Le nom de résistance spécifique a été choisi de manière inappropriée. En général, une quantité dite spécifique est liée à la masse, ce qui n'est évidemment pas le cas de la résistance spécifique.

Siemens/mètre S/m : unité SI pour la conductance électrique κ.

$[\kappa]$=S/m

La résistivité des métaux est donnée dans le tableau 19.1/1, de certains alliages dans le tableau 19.1/4, et pour certains alliages résistifs dans le tableau 19.3/1. La résistivité de quelques matériaux isolants est donnée dans les tableaux 19.2/5 et 19.2/6.

■ Soit un fil de cuivre de longueur $l = 2\,\text{m}$, de section $A = 1\,\text{mm}^2$, avec une résistivité $\rho = 0,0178\,\Omega\text{mm}^2/\text{m}$. Alors, la résistance du fil est :

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = 0,0178\,\Omega\text{mm}^2/\text{m} \cdot \frac{2\,\text{m}}{1\,\text{mm}^2} = 0,0356\,\Omega$$

14.5.4 Mobilité des porteurs de charge

1. Mobilité des porteurs de charge

La **mobilité** b représente la vitesse moyenne de déplacement $\bar{v}$ des porteurs de charge dans un champ électrique d'intensité E.

$\text{Mobilité} = \dfrac{\text{vitesse moyenne}}{\text{intensité du champ}}$			$T^{-2}M^{-1}I$
	Symbole	Unité	Dénomination
$b = \dfrac{\bar{v}}{E}$	b	m²/(Vs)	mobilité
	$\bar{v}$	m/s	vitesse moyenne de déplacement
$= \dfrac{\bar{v} \cdot l}{U}$	E	V/m	intensité du champ électrique
	l	m	distance
	U	V	différence de potentiel

Mètre²/Volt·seconde m²/(Vs) : unité SI de la mobilité b

$[b] = \text{m}^2/(\text{Vs})$

▷ Dans le cas d'une résistance linéaire, la vitesse de déplacement des porteurs de charge est proportionnelle au champ électrique.

La conductivité électrique κ est le produit de la densité volumique de charges ρ et de la mobilité b des porteurs de charge.

$$\kappa = \rho \cdot b$$

2. Exemple : mobilité des électrons

■ On applique aux bornes d'un fil métallique de longueur 1 m une tension $U = 5\,\text{V}$. Soit la vitesse moyenne de déplacement des électrons dans le fil $\bar{v} = 50\,\mu\text{m/s} = 5 \cdot 10^{-5}\,\text{m/s}$. Alors, la mobilité des électrons est :

$$b = \frac{\bar{v} \cdot l}{U} = \frac{5 \cdot 10^{-5}\,\text{m/s} \cdot 1\,\text{m}}{5\,\text{V}} = 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{Vs}$$

La densité de charge des électrons dans ce métal vaut $\rho = 1,36 \cdot 10^{10}\,\text{C/m}^3$. Alors, la conductivité électrique du fil métallique est donnée par :

$$\kappa = \rho \cdot b = \rho = 1,36 \cdot 10^{10}\,\text{C/m}^3 \cdot 10^{-5}\,\text{m}^2/\text{Vs} = 1,36 \cdot 10^5\,\text{S/m}$$

La résistivité du fil est :

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = 7,35 \cdot 10^{-6}\,\Omega\text{m}$$

▷ Les conductivités électriques de quelques matériaux sont reportées dans le Tableau 19.3/3.

14.5.5 Dépendance en température de la résistance

La résistivité ρ, et donc la résistance électrique R d'un conducteur, dépend de la température. Dans beaucoup de cas, on peut supposer que la résistance varie linéairement avec la température. Il est donc suffisant de donner la résistance pour une certaine température (en général la température ambiante $\theta = 293\,\text{K}$) et le coefficient de température.

1. Coefficient de température de la conductivité

Le coefficient de température de la conductivité, la constante de proportionnalité, donne la variation relative de résistance $\Delta R/R$ pour une variation de température de $\Delta\theta = 1\,\text{K}$. Le coefficient de température est de l'ordre de $10^{-3}\,1/\text{K}$ pour beaucoup de conducteurs.

Résistance = fonction de la température			
	Symbole	Unité	Dénomination
	R	Ω	résistance à la température θ
$R(\theta) = R_0(1 + \alpha\Delta\theta)$	R_0	Ω	résistance à la température θ_0
	ρ	Ω	résistance à la température θ
$\rho(\theta) = \rho_0(1 + \alpha\Delta\theta)$	ρ_0	Ω	résistance à la température θ_0
	$\Delta\theta$	K	variation de température
	α	1/K	coefficient de température

1/kelvin : unité SI pour le coefficient de température.

$[\alpha] = 1/\text{K}$

2. Propriétés des coefficients de température

Les coefficients de température sont donnés pour plusieurs conducteurs dans les tableaux 19.1/1, pour des alliages dans le tableau 19.1/4 et pour des alliages résistifs dans le tableau 19.3/1.

▷ Si la résistance varie non-linéairement avec la température, on utilise un développement en série :

$$R = R_0 \cdot (1 + \sum_i \alpha_i (\Delta\theta)^i)$$

en introduisant le nombre de coefficients correspondant α_i, $i = 1, \ldots, n$ pour décrire la variation de la résistance.

■ Dans la plupart des applications, la valeur des résistances ne devrait pas varier avec la température.

■ **Coefficient positif** : **CTP** ou **PTC** (*Positive Temperature Coefficient*) : la résistance croît fortement avec la température. Utilisé comme sonde de température ou pour la stabilisation en courant.

■ **Thermistance** : **TN** ou **NTC** (*Negative Temperature Coefficient*) : le coefficient de température est négatif, la résistance décroît lorsque la température augmente. Utilisé comme sonde de température ou pour la stabilisation de la tension (Fig. 14.9).

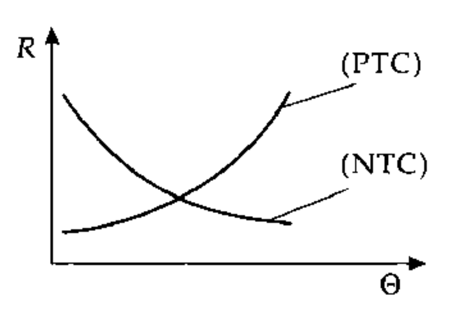


Fig. 14.9 : *Caractéristiques de thermistances à coefficients de température positif et négatif*

▷ Par ailleurs, la résistance électrique des métaux peut dépendre de la pression. De façon analogue avec le coefficient de température, on introduit un coefficient de pression de la conductivité $(1/\rho)\mathrm{d}\rho/\mathrm{p}$. Les coefficients de pression de quelques métaux sont données dans le tableau 19.1/2.

14.5.6 Résistance variable

Résistance variable : change de valeur de résistance en fonction d'influences externes.

À côté des résistances dépendantes de la température ou de la pression il y a les dispositifs suivants :

- **Résistance ajustable, potentiomètre** : la résistance est modifiée manuellement. Les potentiomètres linéaires sont utilisés comme diviseurs de tension. Les potentiomètres logarithmiques sont utilisés pour le contrôle de volume.
- **Photorésistance : LDR** (*Light Dependent Resistor*) : la résistance varie en fonction de l'intensité de la lumière incidente, utilisées pour la mesure d'exposition.
- **Varistance, VDR** (*Voltage Dependent Resistor*) : la résistance varie en fonction de la tension appliquée. Utilisées pour la stabilisation de tension.

14.5.7 Association de résistances

1. **Association en série de N résistances**

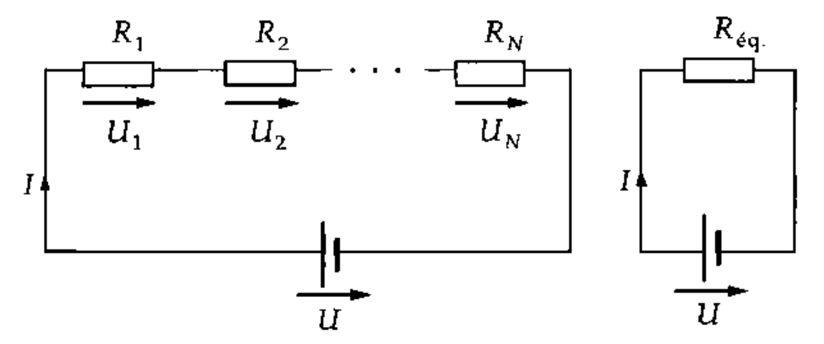


Fig. 14.10 : *Association en série de N résistances*

Le courant I est le même dans toutes les résistances. La chute de tension totale U, qui résulte de l'addition des chutes de tension partielles $U_i = R_i \cdot I$ aux bornes des résistances R_i, peut s'exprimer par celle aux

bornes d'une résistance équivalente R_{tot} :

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_N \\ U &= R_{\text{tot}} \cdot I \\ R_{\text{tot}} &= R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_N \end{aligned}$$

L'admittance totale G_{tot} est :

$$\frac{1}{G_{\text{tot}}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3} + \cdots + \frac{1}{G_N}$$

2. Association en parallèle de N résistances

La tension U est la même aux bornes de toutes les résistances. Dans les différentes branches circulent les courants partiels $I_i = U/R_i$, qui s'additionnent pour donner le courant total I :

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_N \\ \frac{1}{R_{\text{tot}}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N} \end{aligned}$$

La résistance équivalente R_{tot} est plus petite que chacune des résistances R_i mises en parallèle.

L'admittance totale G_{tot} est la somme de toutes les admittances partielles G_i :

$$G_{\text{tot}} = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N$$

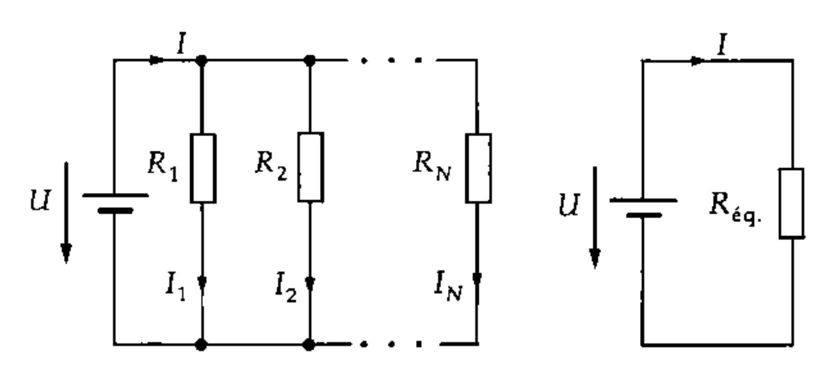


Fig. 14.11 : *Association en parallèle de N résistances*

3. Montage potentiométrique

Utilisé pour diviser la tension totale U en des tensions partielles plus faibles. Le potentiomètre est chargé par une résistance externe R_a. La tension réduite U_a est alors donnée par :

$$U_a = U \frac{R_2 R_a}{R_1 R_2 + R_a(R_1 + R_2)}$$

Si la résistance de charge est grande ($R_a \gg R_1 R_2/(R_1 + R_2)$), on peut négliger le courant dérivé vers la charge R_a. On a alors :

$$U_a = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

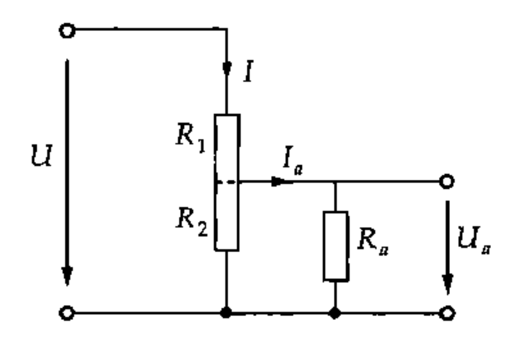


Fig. 14.12 : *Montage potentiométrique*

15 Champ électrique et magnétique

Les **champs électriques** sont produits par des charges électriques ou par par des champs magnétiques variables dans le temps.

Les **champs magnétiques** proviennent de courants, c'est-à-dire de charges électriques en mouvement.

▷ Une charge électrique en mouvement est entourée d'un champ électrique aussi bien que d'un champ magnétique. Dans son état de repos, une charge électrique génère un champ électrique mais pas de champ magnétique.

▷ Les champs électriques et magnétiques sont des champs vectoriels.

Champ vectoriel $\vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$: une fonction qui associe un vecteur à chaque point de l'espace de coordonnées $\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$:

$$\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}(\vec{\mathbf{r}})$$

Champ scalaire $f(\vec{\mathbf{r}})$: une fonction qui associe un nombre à chaque point de l'espace $\vec{\mathbf{r}} = (x, y, z)$:

$$f = f(\vec{\mathbf{r}})$$

■ Le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})$ est un champ vectoriel, il est défini en tout $\vec{\mathbf{r}}$ de l'espace.

■ Le potentiel électrique $\varphi(\vec{\mathbf{r}})$ est un champ scalaire (un nombre), défini pour chaque point $\vec{\mathbf{r}}$ de l'espace.

▷ En général, l'argument est omis, bien qu'une dépendance spatiale puisse exister comme dans le cas du champ électrique d'une charge ponctuelle.

15.1 Champ électrique

Champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$: propriété de l'espace dans l'entourage d'une charge électrique. Le champ électrique est un champ vectoriel. En chaque point de l'espace peut être définie une quantité orientée qui traduit l'action d'une force sur une charge électrique.

1. Grandeur du champ électrique

C'est une grandeur vectorielle dont l'amplitude E donne la force du champ électrique et dont la direction et le sens correspondent à la direction dans laquelle une charge d'épreuve positive serait accélérée. L'intensité du champ électrique est déterminée par la force $\vec{\mathbf{F}}$ à laquelle serait soumise une charge d'épreuve Q plongée dans ce champ et rapportée à la valeur de la charge d'épreuve :

Champ électrique = $\dfrac{\textbf{force}}{\textbf{charge d'épreuve}}$			$LT^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{\mathbf{E}} = \dfrac{\vec{\mathbf{F}}}{Q}$	$\vec{\mathbf{E}}$	V/m	champ électrique
	$\vec{\mathbf{F}}$	N	force sur la charge d'épreuve
	Q	C	charge d'épreuve

Volt/mètre, V/m : unité SI pour l'intensité du champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$. L'intensité du champ électrique en un point vaut $E = 1\,\mathrm{V/m}$, si une force $F = 1\,\mathrm{N}$ s'exerce sur une charge $Q = 1\,\mathrm{C}$ placé dans ce champ.

$[\vec{\mathbf{E}}] = \mathrm{V/m} = \mathrm{N/C}$

En général, le champ électrique est une fonction vectorielle de la position ; un vecteur $\vec{E}$ du champ électrique est associé à chaque point $\vec{r}$ de l'espace.

▷ On utilise fréquemment le terme champ électrique pour parler de l'intensité du champ électrique.

2. Charge d'épreuve

C'est une charge placée dans un champ électrique dans le but de déterminer la direction et l'amplitude du champ électrique. La charge doit être suffisamment petite pour ne perturber que légèrement la valeur initiale du champ. En théorie, la charge d'épreuve doit être prise infiniment petite, même si physiquement il existe une limite inférieure qui est la charge élémentaire.

■ Si une force $F = 10^{-5}$ m s'exerce sur une charge d'épreuve $Q = -10^{-9}$ C , alors l'intensité du champ électrique à la position de la charge d'épreuve est $E = 10^{-4}$ V/m. La direction du champ électrique est opposée à la direction de la force.

▷ L'existence de charges positives et négatives conduit au fait que les champs électriques peuvent être écrantés. Au contraire, le champ gravitationnel ne peut pas être écranté.

3. Champ électrique uniforme

Champ électrique uniforme : champ électrique dont l'intensité est constante en amplitude, en direction et en sens, en tout point de la région considérée. Une force constante $\vec{F}$ agit sur une charge d'épreuve Q en n'importe quel point de l'espace :

$$E = \frac{F}{Q}$$

■ Le champ électrique dans un condensateur plan à plaques parallèles, mis à part sur les bords des plaques, est uniforme si la distance entre les plaques est faible par rapport à leur surface.

15.2 Influence

1. Conducteur électrique

C'est un matériau dans lequel il y a des charges qui sont libres de se déplacer.

■ Les métaux sont des conducteurs, les charges libres sont les électrons de la bande de conduction.

■ Les solutions salines (électrolytes) sont des conducteurs, les porteurs de charges sont les ions positifs et négatifs.

■ Un plasma est un conducteur, les charges libres sont les électrons et les noyaux atomiques chargés positivement.

Des charges de même signe se repoussent. En conséquence, les charges non compensées se déplacent dans le conducteur jusqu'à ce qu'elles atteignent la distance de séparation la plus grande possible. Dans un conducteur chargé, les charges sont disposées sur la surface du conducteur.

● À l'intérieur d'un conducteur métallique le champ est nul ; sinon, des forces agiraient sur les porteurs de charges libres de manière à ce qu'ils soient encore déplacés.

2. Influence

Les charges libres dans un conducteur se déplacent par influence, quand le conducteur est placé dans un champ électrique.

■ Quand un métal est placé entre les plaques d'un condensateur chargé, les électrons de conduction sont déplacés vers la plaque chargée positivement du condensateur. Un champ électrique se construit entre les noyaux atomiques (chargés positivement) et les électrons déplacés (chargés négativement) qui s'oppose au champ initial dans le condensateur. Le déplacement des électrons prend fin lorsque ces champs électriques se compensent.

15.2.1 Lignes de champ électrique

1. Lignes de champ

Les **lignes de champ** servent à visualiser le champ électrique dans l'espace.

Par convention :

- la direction des lignes de champ en un point correspond à la direction du champ électrique, c'est-à-dire la direction de la force exercée sur une charge positive en ce point. Le sens des lignes de champs est signalé par une flèche.
- les lignes de champ partent d'une charge ponctuelle positive
- les lignes de champ sont dirigées vers une charge ponctuelle négative.

Il s'ensuit que :

- il n'y a pas de lignes de champ fermées, car pour chaque ligne de champ, le point de départ et le point d'arrivée sont différents l'un de l'autre. Le champ électrique est **irrotationel**.
- les lignes de champ ne peuvent pas se croiser : en chaque point la direction du champ électrique est unique (sauf à l'endroit d'une charge).
- plus la densité des lignes de champ est grande, plus l'intensité du champ est grande.

● Dans le cas d'un conducteur métallique chargé, les lignes de champ partent perpendiculairement à la surface du conducteur.

S'il y avait une composante du champ électrique tangentielle à la surface du conducteur, une force s'exercerait sur les particules chargées dans le conducteur. Les porteurs de charge seraient déplacés jusqu'à ce qu'une position d'équilibre soit trouvée. Cela entraîne que la composante tangentielle du champ s'annule.

● La charge électrique d'un conducteur est répartie sur sa surface. À l'intérieur d'un conducteur métallique le champ est nul, sinon les porteurs de charge seraient déplacés jusqu'à ce que la distance qui les sépare soit maximale. Ils se situeraient alors sur la surface du conducteur.

2. Cage de Faraday

Une **cage de Faraday** est constituée d'une enveloppe conductrice entourant un volume dépourvu de charges qui, plongé dans un champ électrique, garantit que dans cet espace le champ est nul.

■ Par exemple, durant un orage, une voiture agit comme une cage de Faraday qui protège les passagers de la foudre (à condition que les passagers soient entièrement à l'intérieur de la voiture et qu'ils ne soient pas en contact avec la partie extérieure de la carrosserie).

3. Lignes de champ de diverses distributions de charges

a) Charge ponctuelle : une charge dont la dimension dans l'espace est infiniment petite. Les lignes de champ électrique d'une charge ponctuelle positive sont dirigées radialement vers l'extérieur de la charge (Fig. 15.1 (a)) ; les lignes de champ d'une charge ponctuelle négative sont dirigées radialement vers la charge (Fig. 15.1 (b)). Le champ électrique autour d'une charge ponctuelle est isotrope.

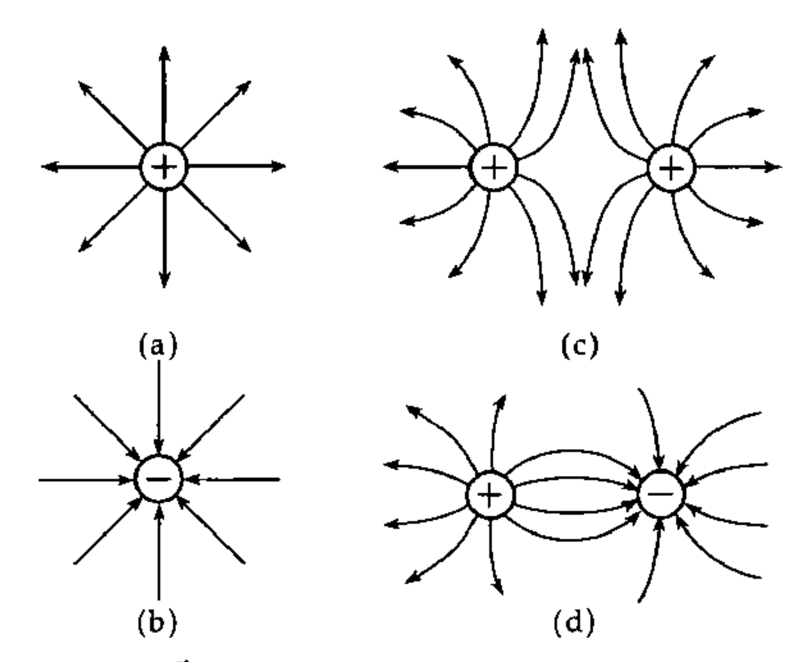


Fig. 15.1 : *Lignes de champ $\vec{E}$ (a) : d'une charge ponctuelle positive, (b) : d'une charge ponctuelle négative, (c) : de deux charges de mêmes signes, (d) de deux charges de signes opposés*

b) **Charge ponctuelle devant une plaque conductrice plane** (Fig. 15.2) présente les lignes de champ d'une charge ponctuelle positive en présence d'une plaque plane négative chargée uniformément.

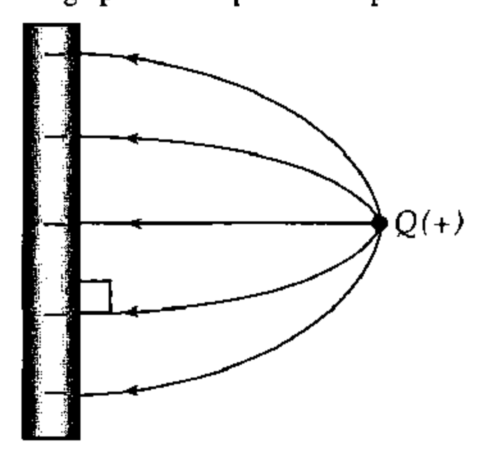


Fig. 15.2 : *Lignes de champ d'une charge ponctuelle placée devant un plan conducteur*

c) **Condensateur à plaques parallèles** : deux plaques conductrices sont placées en opposition à une certaine distance l'une de l'autre. En dehors des régions du bord, les lignes de champ électrique entre les deux plaques sont parallèles entre elles et perpendiculaires aux surfaces des plaques (Fig. 15.3). Le champ électrique y est uniforme.

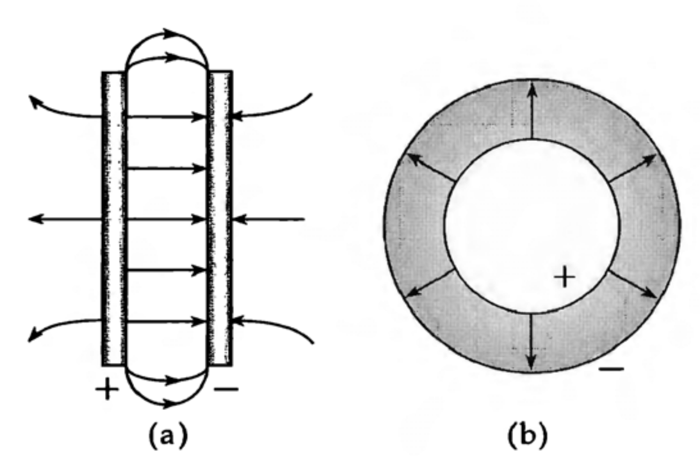


Fig. 15.3 : *Lignes de champ électrique. (a) : condensateur plan parallèle, (b) : condensateur sphérique*

4. Dipôle, doublet de charges

Deux charges ponctuelles $+Q$ et $-Q$ sont placées à une distance $\vec{\mathbf{r}}$ l'une de l'autre. Si la charge positive est placée à la position $\vec{\mathbf{r}}_+$ et la charge négative à la position $\vec{\mathbf{r}}_-$, on définit alors le **moment dipolaire** $\vec{\mathbf{p}}$ (Fig. 15.4), produit de la charge et de la distance $\vec{\mathbf{r}}$ des pôles :

$$\vec{\mathbf{p}} = Q(\vec{\mathbf{r}}_+ - \vec{\mathbf{r}}_-) = Q\vec{\mathbf{r}}$$

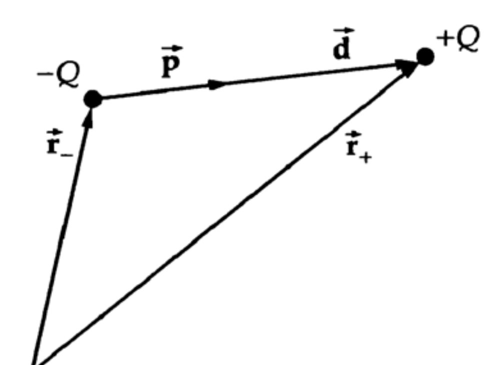


Fig. 15.4 : *Dipôle électrique.* $\vec{\mathbf{p}}$ *: moment dipolaire*

Les deux charges ponctuelles sont appelées les pôles. Le champ électrique d'un dipôle à une grande distance de ce dipôle est visualisé sur la Figure 15.6 (a).

- De l'extérieur, le dipôle apparaît être électriquement neutre.

L'énergie potentielle E_{pot} d'un dipôle dans un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ est :

$$E_{pot} = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$$

- Placé dans un champ électrique uniforme, le dipôle est soumis à un couple $\vec{\mathbf{M}}$ (Fig. 15.5 (a)).

$$\vec{\mathbf{M}} = -\vec{\mathbf{p}} \wedge \vec{\mathbf{E}} = D \cdot (\vec{\mathbf{d}} \wedge \vec{\mathbf{E}})$$

- Dans un champ électrique non uniforme $\vec{\mathbf{E}}$, le dipôle est soumis à une force $\vec{\mathbf{F}}$ qui le pousse dans les régions de forte intensité du champ (Fig. 15.5 (b)).

$$\vec{\mathbf{F}} = \left(\vec{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{\mathbf{r}}}\right) \vec{\mathbf{E}}$$

▷ La molécule d'eau H_2O possède un moment dipolaire électrique permanent de $6.17 \cdot 10^{-30}$ C · m.

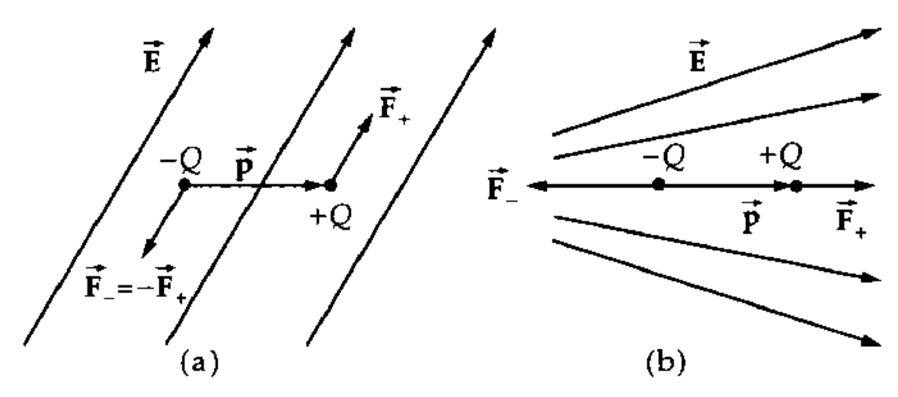


Fig. 15.5 : *Dipôle dans un champ électrique* $\vec{E}$. *(a) : couple dans un champ uniforme, (b) : force exercée sur un dipôle placé dans un champ non uniforme* ($F_- > F_+$)

5. Champ électrique d'un dipôle à grande distance

▷ À faible distance du dipôle, il y a un mélange de champs électriques de polarité plus grandes (champ multipolaire), qui décroissent plus vite avec la distance de sorte que, pour de grandes distances, ne subsiste que le champ dipolaire.

Une distribution de charges globalement neutre qui ne présente pas de moment dipolaire peut néanmoins posséder un **moment quadripolaire** non nul. Le champ électrique à grande distance du quadripôle est représenté sur la Figure 15.6 (b).

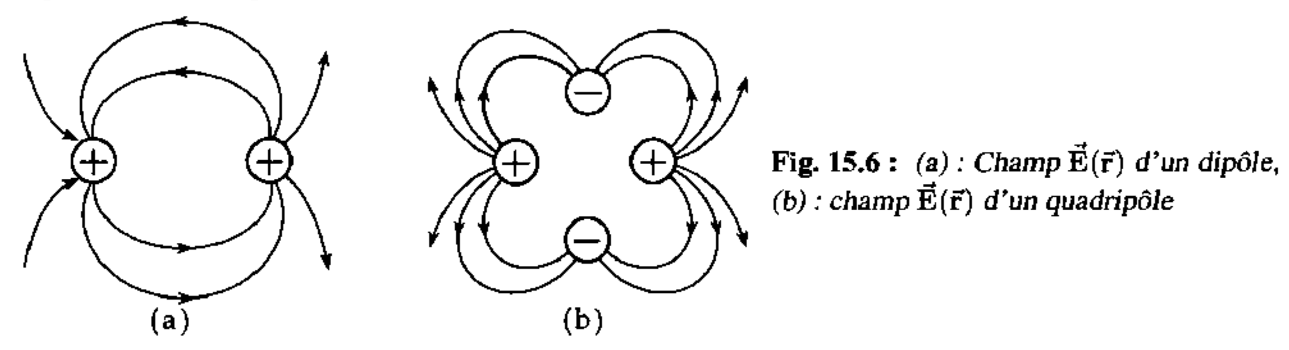


Fig. 15.6 : *(a) : Champ* $\vec{E}(\vec{r})$ *d'un dipôle, (b) : champ* $\vec{E}(\vec{r})$ *d'un quadripôle*

15.2.2 Champ électrique produit par une charge ponctuelle

1. Champ électrique d'une charge ponctuelle

Le champ électrique $\vec{E}$ d'une charge ponctuelle est une grandeur orientée. L'amplitude donne l'intensité du champ électrique d'une charge ponctuelle Q à une distance r de cette charge ; le vecteur champ part d'une charge positive vers une charge négative. L'intensité décroît comme le carré de la distance :

Intensité du champ $\sim \dfrac{\textbf{charge}}{\textbf{carré de la distance}}$			$LT^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$	$\vec{E}$	N/C=V/m	champ électrique de la charge Q
	Q	C	charge produisant le champ
	$\vec{r}$	m	vecteur distance
	r	m	distance de la charge Q
	ε_0	As/(Vm)	permittivité

■ À une distance $r = 1$ m, une charge $Q = 10^{-6}$ C produit un champ électrique

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{10^{-6}\,\mathrm{C}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot (1\,\mathrm{m})^2} = 8988\,\mathrm{V/m}$$

La direction du champ électrique pointe vers l'extérieur de la charge ponctuelle.

2. Champ électrique d'une distribution de N charges ponctuelles discrètes

Le **champ électrique** $\vec{\mathbf{E}}$ **de** N **charges ponctuelles** situées en des points de l'espace $\vec{\mathbf{r}}_i$ se déduit de la superposition des champs électriques $\vec{\mathbf{E}}_i$ produits par chacune des charges ponctuelles :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{E}}_i(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon(r - r_i)^2} \frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_i}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_i|}$$

3. Champ électrique d'une distribution continue de charges

Le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ d'une distribution de charge $\rho(\vec{\mathbf{r}}')$ est obtenu par intégration :

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \int_V \frac{\rho(\vec{\mathbf{r}}')}{4\pi\varepsilon(r - r')^2} \frac{\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\, \mathrm{d}V'$$

15.3 Force

La force qui s'exerce sur une charge électrique d'épreuve Q, placée dans un champ électrique, est directement proportionnelle à la charge et à l'amplitude du champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$. La force est une grandeur orientée pointant dans la direction du champ pour une charge Q positive, et dans la direction opposée pour une charge Q négative.

Force = charge d'épreuve × intensité du champ électrique				$\mathrm{LT^{-2}M}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\vec{\mathbf{F}} = Q \cdot \vec{\mathbf{E}}$	$\vec{\mathbf{F}}$	N	force sur la charge électrique	
	Q	C	charge électrique	
	$\vec{\mathbf{E}}$	N/C=V/m	champ électrique	

Champ électrique uniforme : l'intensité du champ électrique est constante sur l'espace en amplitude et en direction. L'équation scalaire suivante est valide :

$$F = QE$$

■ Dans un champ électrique $E = 200$ V/m, une charge négative $Q = -10^{-6}$ C est soumise à une force $F = -10^{-6}\,\mathrm{C} \cdot 200\,\mathrm{V/m} = -2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}$

La force $\vec{\mathbf{F}}$ est donc dirigée en opposition avec le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$.

15.4 Tension électrique

1. Définition de la tension électrique

La **tension électrique** (différence de potentiel) U, entre deux points A et B, est la quantité scalaire qui représente le travail par unité de charge nécessaire pour déplacer une charge q du point A au point B (Fig. 15.7).

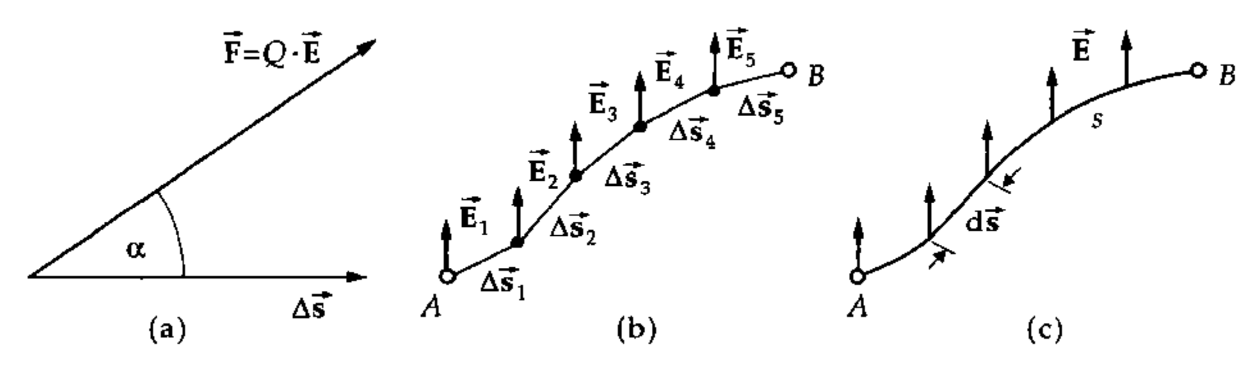


Fig. 15.7 : *Déplacement d'une charge dans un champ électrique. (a) : sur le déplacement élémentaire Δs, (b) : suivant une ligne polygonale de A à B, (c) : suivant un chemin arbitraire de A vers B*

Si la force $\vec{F}$ est constante sur le déplacement élémentaire Δs alors la tension, c'est-à-dire le travail ΔW par unité de charge est :

$$U = \frac{\Delta W}{q} = \frac{F \Delta s \cos \alpha}{q} = \vec{E} \cdot \Delta \vec{s}$$

où α est l'angle entre la direction de la force et celle du déplacement élémentaire (Fig. 15.7).

2. Forme intégrale de la tension

Pour un déplacement arbitraire s du point A au point B, on subdivise le déplacement en déplacements élémentaires rectilignes $\Delta \vec{s}_i$. Alors, la tension électrique U_{AB} entre les points A et B est obtenue en faisant la somme des contributions ΔU_i pour chaque déplacement élémentaire :

$$U_{AB} = \sum_i \Delta U_i = \sum_i \vec{E} \cdot \Delta \vec{s}_i$$

Si les subdivisions tendent vers un infiniment petit, la somme est représentée par l'intégrale :

$\text{Tension} = \dfrac{\textbf{travail}}{\textbf{unité de charge}}$				$L^2T^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$U_{AB} = \dfrac{W_{AB}}{Q}$	U_{AB}	V=Nm/C	tension entre A et B	
	W_{AB}	J=Nm	travail effectué	
$= \displaystyle\int_A^B \vec{E}\, d\vec{s}$	Q	C	charge d'épreuve	
	$\vec{E}$	V/m	champ électrique	
	$d\vec{s}$	m	élément de déplacement	

Volt V : unité SI pour la tension électrique U. La tension (différence de potentiel) est 1 V s'il faut fournir un travail $W = 1$ J pour déplacer la charge $Q = 1$ C.

$[U] = \text{V} = \text{J/C}$

- L'intégrale du champ électrique $\vec{E}$ le long d'un chemin fermé s est nulle. Ceci correspond à la conservation de l'énergie :

  $$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0\,\text{V}$$

  Une conséquence de ce résultat est la deuxième loi de Kirchhoff : la somme des tensions le long d'une maille (circuit fermé) est nulle.

▷ L'intégrale du champ électrique $\vec{E}$ suivant un chemin $\vec{s}$ est aussi appelée circulation de $\vec{E}$ le long de $\vec{s}$.

3. Tension entre les plaques d'un condensateur plan

Tension électrique U dans un champ électrique uniforme : quantité scalaire, indépendante de la position. Produit du champ électrique E avec la distance d entre les plaques du condensateur :

Tension = intensité du champ × chemin				$L^2T^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$U = E \cdot d$	U	V=Nm/C	tension électrique	
	E	N/C = V/m	intensité du champ électrique	
	d	m	distance	

15.5 Potentiel électrique

1. Définition et propriétés du potentiel

Le Potentiel électrique φ_A en un point A dans le champ électrique, est la tension entre le point A et un **point de référence** P. Le potentiel électrique φ_A représente le travail W_A nécessaire pour déplacer une charge d'épreuve du point de référence P vers le point A.

- Le potentiel ne dépend que du point A et du potentiel du point de référence. Le potentiel est donc une fonction scalaire de la position, qui n'est définie qu'à une constante additive près.

Dans la plupart des cas, on choisit pour le point de référence P un point situé à l'infini pour lequel le potentiel est pris égal à zéro (si aucune charge s'y trouve), $\varphi_P = 0$.

Potentiel $= \dfrac{\textbf{travail}}{\textbf{unité de charge}}$				$L^2T^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\varphi_A = \dfrac{W_A}{Q}$	φ_A	V=Nm/C	potentiel de A	
	W_A	J=Nm	travail lors du déplacement de Q	
$= -\int_\infty^A \vec{E} \cdot d\vec{s}$	Q	C	charge d'épreuve	
	$\vec{E}$	N/C=V/m	champ électrique	
	$d\vec{s}$	m	déplacement élémentaire	

Volt V : unité SI de potentiel électrique φ. Le potentiel est 1 V si un travail $W = 1$ J doit être produit lors du déplacement de la charge $Q = 1$ C.

$[\varphi]$=V

2. Champ et potentiel

Différence de potentiel : tension entre les points A et B :

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = -\int_\infty^A \vec{E} \cdot d\vec{s} - \left(-\int_\infty^B \vec{E} \cdot d\vec{s}\right)$$

$$= \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = U_{AB}$$

La composante du champ électrique $\vec{\mathbf{E}}_x$ suivant la direction x se déduit de la dérivée du potentiel par rapport à cette direction :

$$|\vec{\mathbf{E}}_x| = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

En général, en trois dimensions, le champ $\vec{\mathbf{E}}$ se déduit du potentiel φ en prenant le gradient :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\overrightarrow{grad}\,\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{\mathbf{k}}\right)$$

La composante x de l'intensité du champ électrique, par exemple, est la **dérivée partielle** du potentiel par rapport à x. Elle est obtenue par dérivation du potentiel par rapport à x en considérant y et z comme des constantes.

▷ Bien sûr, le champ électrique est à nouveau indépendant du choix du système de référence.

3. Équation de Poisson

Le potentiel d'une distribution continue de charges $\rho(\vec{\mathbf{r}})$ est donnée par :

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{\mathbf{r}}')}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|}\,\mathrm{dV}'$$

Équation de Poisson : équation différentielle pour le calcul du potentiel électrique φ à partir de la densité volumique de charge $\rho(\vec{\mathbf{r}})$:

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

15.5.1 Surfaces équipotentielles

Surfaces équipotentielles : surfaces d'égal potentiel électrique. Les surfaces équipotentielles ne peuvent pas se couper ou se toucher. L'intensité du champ électrique est toujours perpendiculaire aux surfaces équipotentielles (Fig. 15.8). Les surfaces équipotentielles correspondent aux contours des lignes de niveau. La direction de la ligne de pente est normale aux lignes de contours.

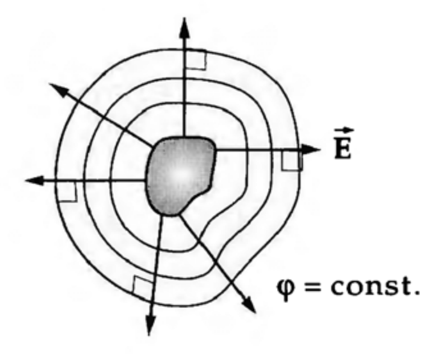


Fig. 15.8 : *Surfaces équipotentielles φ et champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ pour une distribution de charges*

▷ La surface d'un conducteur est une surface équipotentielle. Dans le cas contraire, il y aurait une composante du champ électrique suivant la surface, ce qui provoquerait un déplacement de charge sur la surface du conducteur.

15.5.2 Champ et potentiel pour quelques distributions de charges

1. Charge ponctuelle

Le potentiel φ est inversement proportionnel à la distance r de la charge. L'intensité du champ électrique décroît de façon quadratique avec la distance :

Champ et potentiel : charge ponctuelle

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$
$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Symbole	Unité	Dénomination
E	V/m	intensité du champ à la distance r
φ	V	potentiel à la distance r
Q	C	charge ponctuelle
r	m	distance de la charge Q
ε_0	As/Vm	permittivité

2. Dipôle

À grande distance d'un dipôle ($|\vec{\mathbf{r}}| \gg |\vec{\mathbf{d}}|$) le potentiel décroit proportionnellement à r^{-2}. Aux petites distances, il existe des composantes multipolaires d'ordre élevé qui décroissent encore plus rapidement avec la distance. Ainsi, aux grandes distances, seule la composante dipolaire subsiste.

Champ et potentiel d'un dipôle

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{r}})\vec{\mathbf{r}}}{r^5} - \frac{\vec{\mathbf{p}}}{r^3}\right)$$
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{r}}}{r^3}$$
$$\vec{\mathbf{p}} = Q\vec{\mathbf{d}}$$
$$\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{r}}_+ - \vec{\mathbf{r}}_-$$

Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{\mathbf{E}}$	V/m	champ en $\vec{\mathbf{r}}$
φ	V	potentiel en $\vec{\mathbf{r}}$
Q	C	charge
$\vec{\mathbf{p}}$	Cm	moment dipolaire
$\vec{\mathbf{r}}_+$	m	position de la charge positive
$\vec{\mathbf{r}}_-$	m	position de la charge négative
$\vec{\mathbf{d}}$	m	distance
ε_0	C/(Vm)	permittivité du vide

3. Sphère creuse chargée

Le potentiel ϕ à l'extérieur de la sphère est inversement proportionnel à la distance par rapport au centre de la sphère. L'intensité du champ électrique décroît de façon quadratique avec la distance r :

Champ et potentiel à l'extérieur d'une sphère chargée

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$
$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Symbole	Unité	Dénomination
E	V/m	intensité du champ à la distance r
φ	V	potentiel à la distance r
Q	C	charge de la sphère creuse
r	m	distance par rapport au centre
R	m	rayon de la sphère
ε_0	As/Vm	permittivité

- À l'intérieur de la sphère creuse le champ électrique est nul. De ce fait, le potentiel électrique y est constant.

4. Distribution sphérique uniforme de charges

Le champ électrique E, dans le volume de la sphère, augmente linéairement avec la distance r par rapport au centre de la sphère, le potentiel φ est proportionnel à r^2 :

Champ et potentiel à l'intérieur de la sphère			
	Symbole	Unité	Dénomination
$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}$	E	V/m	intensité du champ à la distance r
$\varphi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{R} - \frac{r^2}{R^3}\right)$	φ	V	potentiel à la distance r
	Q	C	charge de la sphère
	r	m	distance par rapport au centre
	R	m	rayon de la sphère
	ε_0	As/Vm	permittivité

L'intensité du champ électrique E à l'extérieur de la sphère décroît quadratiquement avec la distance r par rapport au centre de la sphère. Le potentiel φ décroît linéairement avec la distance r :

Champ et potentiel à l'extérieur de la sphère			
	Symbole	Unité	Dénomination
$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$	E	V/m	intensité du champ à la distance r
$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$	φ	V	potentiel à la distance r
	Q	C	charge de la sphère
	r	m	distance par rapport au centre
	ε_0	As/Vm	permittivité

5. Cylindre creux chargé

En négligeant les effets de bord, le champ électrique E à l'extérieur du cylindre creux décroît linéairement avec l'augmentation de la distance r par rapport à l'axe du cylindre. Le potentiel décroît logarithmiquement avec r :

Champ et potentiel à l'extérieur du cylindre creux chargé			
	Symbole	Unité	Dénomination
$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{l}\frac{1}{r}$	E	V/m	intensité du champ à la distance r
$\varphi = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{l}\ln\frac{r}{R}$	φ	V	potentiel à la distance r
	Q	C	charge du cylindre creux
	r	m	distance par rapport à l'axe
	R	m	rayon du cylindre
	l	m	longueur du cylindre
	ε_0	As/Vm	permittivité

- À l'intérieur du cylindre creux, le champ électrique est nul. Le potentiel est constant (volume équipotentiel).

6. Barreau uniformément chargé

Le champ électrique E à l'intérieur du barreau croît linéairement avec la distance r par rapport à l'axe du barreau. Le potentiel φ est proportionnel à $-1/r^2$:

Champ et potentiel à l'intérieur du barreau	Symbole	Unité	Dénomination
$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{r}{lR^2}$$ $$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{lR^2}$$	E	V/m	intensité du champ à la distance r
	φ	V	potentiel à la distance r
	Q	C	charge du barreau
	r	m	distance par rapport à l'axe
	R	m	rayon du barreau
	l	m	longueur du barreau
	ε_0	As/Vm	permittivité

À l'extérieur du barreau le champ électrique E décroît en $1/r$, le potentiel décroît logarithmiquement :

Champ et potentiel à l'extérieur du barreau	Symbole	Unité	Dénomination
$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{l}\frac{1}{r}$$ $$\varphi = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{l}\ln\frac{r}{R}$$	E	V/m	intensité du champ à la distance r
	φ	V	potentiel à la distance r
	Q	C	charge du barreau
	r	m	distance par rapport à l'axe
	R	m	rayon du barreau
	l	m	longueur du barreau
	ε_0	As/Vm	permittivité

7. Plan conducteur uniformément chargé

À petite distance du plan (champ uniforme), l'intensité du champ et le potentiel sont proportionnels à la densité surfacique de charge $\sigma = Q/A$. Le potentiel φ est proportionnel à la distance x du plan, le champ électrique est constant :

Champ et potentiel d'un plan	Symbole	Unité	Dénomination
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ $$\varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot x$$	E	V/m	intensité du champ à la distance r
	φ	V	potentiel à la distance r
	σ	C	densité surfacique de charge
	x	m	distance de la plaque
	ε_0	As/Vm	permittivité

▷ Le champ produit par une **distribution plane uniforme de charges** est :

$$E = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}$$

15.5.3 Flux du champ électrique

1. Définition du flux du champ électrique

Considérons une petite surface carrée ΔA placée dans un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ uniforme. Le **flux électrique** ou **flux de déplacement** Φ, mesure la quantité de champ électrique qui traverse la surface ΔA. Le flux de déplacement est le produit de l'intensité du champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ par la surface ΔA et le cosinus de l'angle α entre la direction du champ et la normale à la surface :

$$\Delta\Phi = E \cdot \Delta A \cdot \cos\alpha = \vec{\mathbf{E}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}$$

Pour une surface quelconque placée dans un champ électrique non uniforme $\vec{\mathbf{E}}$, la surface est divisée en surfaces élémentaires $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$ de telle sorte que le champ traversant chacune de ces surfaces puisse être considéré comme constant en direction, amplitude et sens. Les flux de déplacement résultants sont additionnés (Fig. 15.9). Ceci correspond à l'intégrale :

Flux = intégrale du champ $\vec{\mathbf{E}}$ sur la surface			**$L^3T^{-3}MI^{-1}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\Phi = \int_A \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$	Φ	Vm	flux de déplacement
	$\vec{\mathbf{E}}$	V/m	champ électrique
	$\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$	m^2	élément de surface orienté
	A	m^2	surface totale

Volt·mètre, Vm : unité SI pour le flux de déplacement Φ. Le flux électrique pour un champ électrique uniforme $E = 1\,\mathrm{V/m}$ traversant une surface plane $A = 1\,\mathrm{m}^2$ perpendiculaire au champ est 1 Vm.

$[\Phi] = \mathrm{Vm}$

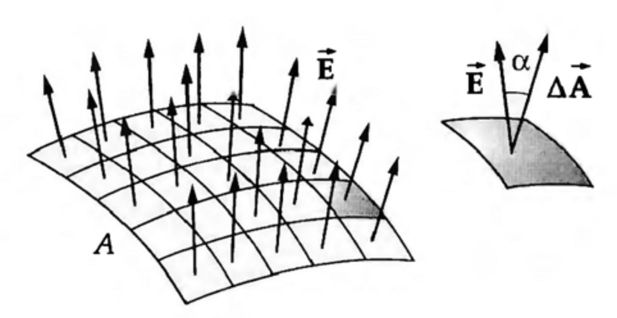


Fig. 15.9 : *Flux électrique Φ au travers de la surface A et au travers d'un élément de surface orienté $\Delta\vec{\mathbf{A}}$*

2. Propriétés du flux

Le signe du flux de déplacement dépend de l'orientation de la surface A.

- Un carré de surface $A = 1\,\mathrm{dm}^2$ dont la normale est tournée de $\alpha = 30°$ par rapport à la direction du champ est placé dans un champ électrique uniforme $E = 100\,\mathrm{V/m}$. Le flux électrique traversant cette surface est :
  $\Phi = E \cdot A \cdot \cos\alpha = 100\,\mathrm{V/m} \cdot 0,01\,\mathrm{m}^2 \cdot \cos 30° = 0,866\,\mathrm{Vm}$

3. Théorème de Gauss

Le flux de déplacement traversant une surface sphérique O entourant une charge ponctuelle Q est égal au flux de déplacement traversant cette surface pour une distribution arbitraire de charge totale Q :

$$\Phi = \oint_O \vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Pour une surface fermée quelconque placée dans le champ électrique :

- Le flux de déplacement traversant une surface fermée est proportionnel à la charge qu'elle contient. La constante de proportionnalité est la réciproque de la permittivité ε_0.

$$\Phi = \oint_O \vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

- Si une surface fermée, ne contenant aucune charge, est placée dans un champ électrique, les flux électriques traversant chaque élément de cette surface peuvent être différents les uns des autres. Cependant, le flux total à travers cette surface est égal à zéro, car elle ne contient pas de charge :

$$\Phi = \oint_A \vec{\mathrm{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0} = 0$$

■ Le flux Φ traversant une surface sphérique contenant une charge ponctuelle $Q = 10^{-6}\,\mathrm{C}$ est :

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{10^{-6}\,\mathrm{C}}{8,854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As/Vm}} = 1,13 \cdot 10^5\,\mathrm{Vm}$$

15.5.4 Déplacement électrique dans le vide

1. Séparation des charges par influence

Deux plaques conductrices carrées de même taille et de même surface ΔA sont ajustées l'une sur l'autre et placées dans un champ électrique uniforme perpendiculaire aux plaques. Si les plaques sont séparées puis sorties du champ électrique, on constate qu'elles sont chargées avec une densité surfacique de charge σ (Fig. 15.10). Par influence, des charges ont été déplacées d'une plaque vers l'autre.

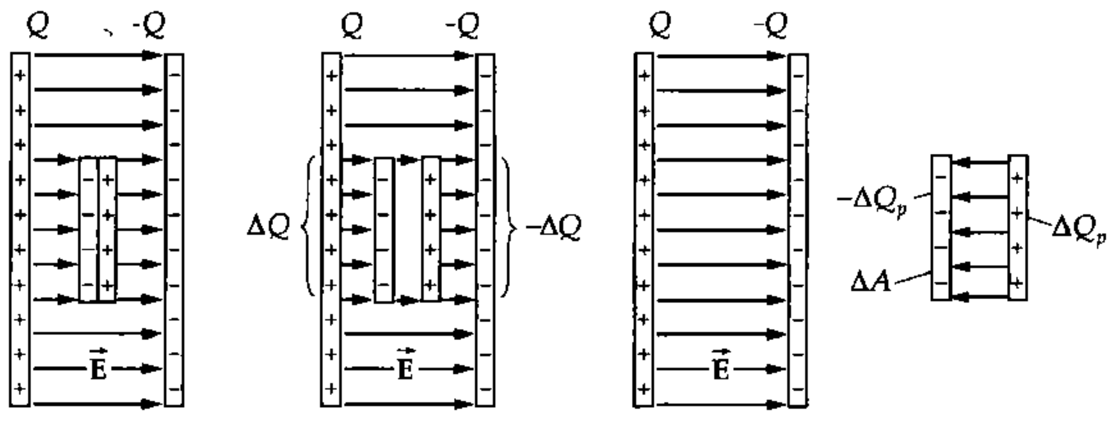


Fig. 15.10 : *Séparation de charges par influence*

2. Déplacement

Encore appelé **densité de flux électrique $\vec{\mathbf{D}}$**, grandeur vectorielle qui mesure la quantité de charge ΔQ par élément de surface ΔA déplacée par influence. L'amplitude du déplacement est égale à la densité surfacique de charge σ. Dans le vide, la direction du vecteur déplacement est égale à celle du champ.

Si la charge du déplacement ΔQ n'est pas constante au travers de l'élément de surface ΔA alors on doit passer au rapport différentiel :

$$D = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A}$$

Déplacement $= \dfrac{\textbf{quantité de charge}}{\textbf{surface}}$				$\mathbf{L^{-2}TI}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$D = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}A} = \sigma$	D	C/m^2	grandeur du déplacement	
	$\mathrm{d}Q$	C	charge sur l'élément de surface $\mathrm{d}A_\perp$	
	$\mathrm{d}A$	m^2	élément de surface infinitésimal	
	σ	C/m^2	densité surfacique de charge	

Coulomb/(mètre carré) C/m^2 : unité SI de déplacement électrique $\vec{\mathbf{D}}$. Le déplacement est $1\ \mathrm{C/m^2}$ si la charge $Q = 1\ \mathrm{C}$ est déplacée au travers d'une surface $A = 1\ \mathrm{m^2}$ perpendiculaire aux lignes de champ électrique.

$[\vec{\mathbf{D}}] = \mathrm{C/m^2}$

3. Propriétés du déplacement

Le déplacement dépend de l'orientation de la surface dans le champ électrique. La charge déplacée est proportionnelle au cosinus de l'angle entre le champ électrique et la normale à la surface.

▷ Si la normale à la surface est perpendiculaire au champ électrique, le déplacement devient nul.

● L'intégrale du déplacement sur une surface fermée A est égal à la charge englobée par cette surface :

$$\oint_A \vec{\mathbf{D}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = Q$$

4. Proportionnalité entre déplacement et champ

● Le déplacement est proportionnel à l'intensité d'un champ électrique externe.

Permittivité : facteur de proportionnalité entre le déplacement et l'intensité du champ. En tout point, même dans des champs non uniformes on a :

Déplacement $\propto$ champ électrique				$\mathbf{L^{-2}TI}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \cdot \vec{\mathbf{E}}$	$\vec{\mathbf{D}}$	C/m^2	déplacement	
	ε_0	As/Vm	permittivité du vide	
	$\vec{\mathbf{E}}$	V/m	champ électrique	

▷ Dans la matière, la relation entre le déplacement et le champ électrique est plus compliquée. Dans ce cas, une quantité dépendante du matériau apparaît qui peut dépendre de la fréquence, de la température ou d'autres quantités physiques. En particulier, cette constante du matériau peut dépendre de l'intensité du champ électrique externe. Ceci conduit à des effets non-linéaires. Enfin, la direction du déplacement peut différer de la direction de l'intensité du champ électrique (→ *polarisation électrique*).

■ Un champ électrique uniforme $E = 400\,\mathrm{V/m}$ produit dans le vide un déplacement :
$D = \varepsilon_0 \cdot E = 8,854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As/Vm} \cdot 400\,\mathrm{V/m} = 3,54 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C/m^2}$
Deux plaques métalliques de surface $A = 1\,\mathrm{cm^2}$ sont superposées et placées perpendiculairement à la direction du champ, $\alpha = 0°$; la charge des plaques est alors :
$Q = D \cdot A \cdot \cos\alpha = 3,54 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C/m^2} \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2} \cos 0° = 3,54 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{C}$

15.6 Polarisation électrique

1. Polarisation d'un diélectrique

Le fait de placer un isolant entre les plaques d'un condensateur maintenues à une différence de potentiel constante, peut changer la charge du condensateur et de ce fait sa capacité. Ceci s'accompagne d'un changement du champ électrique. Le matériau introduit devient polarisé. À cause de la polarisation, un champ électrique apparaît, qui s'oppose au champ original ; le champ électrique dans le condensateur est diminué.

On distingue les types de polarisation suivants :

Polarisation de déplacement : déplacement de charges électriques dans des atomes ou des molécules neutres. Ceci donne naissance à un moment dipolaire (Fig. 15.11 (a)).

Polarisation d'orientation : les moments dipolaires présents dans le matériau s'orientent suivant le champ électrique (Fig. 15.11 (b)).

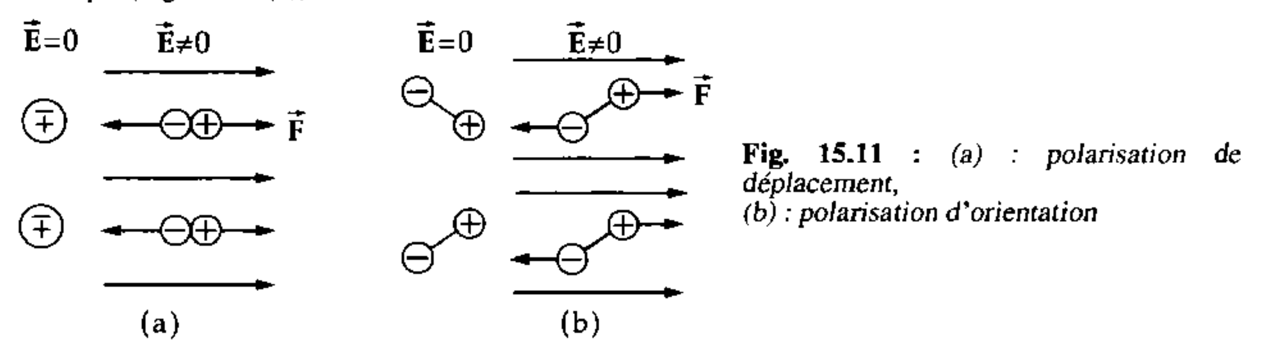


Fig. 15.11 : *(a) : polarisation de déplacement,*
(b) : polarisation d'orientation

2. Vecteur polarisation

La **polarisation $\vec{P}$** caractérise la densité de charges de polarisation à la surface d'un diélectrique. C'est un vecteur qui pointe dans la direction du moment dipolaire des charges de polarisation, orienté des charges négatives vers les charges positives. La grandeur de $\vec{P}$ est égale à la densité surfaciques σ_p des charges de polarisation :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}, \quad |\vec{P}| = \sigma_p$$

Polarisation $\vec{P}$ et champ électrique $\vec{E}$ pointent dans la même direction. Les lignes du champ électrique $\vec{E}_{pol}$ produit par les charges de polarisation, vont des charges surfaciques positives vers les charges négatives du diélectrique ; elles sont opposées aux lignes du champ polarisant $\vec{E}$ (Fig. 15.12).

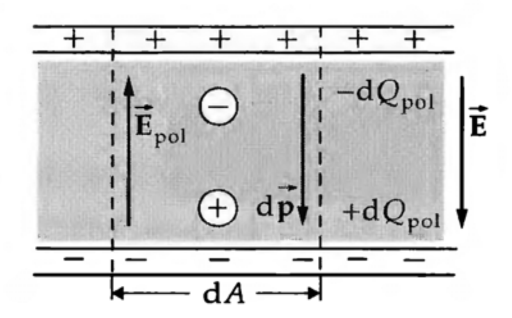


Fig. 15.12 : *Polarisation d'un diélectrique.* $\pm dQ_{pol}$ *: charges de polarisation,* $d\vec{p}$ *: moment dipolaire des charges de polarisation,* $\vec{E}_{pol}$ *: champ produit par les charges de polarisation,* $\vec{E}$ *: champ polarisant extérieur*

Dans le cas de la polarisation de déplacement, on a :

$$\vec{P} = n\alpha\vec{E}$$

où n est le nombre par unité de volume et α la **polarisabilité** des molécules ou atomes de l'isolant. La polarisabilité est une caractéristique d'une molécule.

15.6.1 Diélectrique

Diélectrique : isolant, substance non conductrice polarisable par un champ électrique.

▷ Certaines cires, polarisées à l'état fluide puis solidifiées, conservent une polarisation permanente. Ce type de diélectrique, appelé **électret**, a de nombreuses applications (microphones à électret).

1. Permittivité relative

Encore appelée **constante diélectrique relative** ε_r : quantité sans dimension dépendant du matériau, caractérise la décroissance de l'intensité du champ électrique après l'introduction d'un diélectrique dans ce champ. C'est le rapport de la permittivité ε du matériau à celle du vide ε_0 :

$$[\varepsilon_r] = \frac{[\varepsilon]}{[\varepsilon_0]} = 1$$

▷ La permittivité relative du vide est $\varepsilon_r = 1$. La permittivité relative de l'air peut être prise approximativement égale à 1.

▷ Pour la plupart des diélectriques ε_r est compris entre 1 et 100. Il y a des diélectriques avec ε_r allant jusqu'à 10000.

2. Permittivité

Ou **constante diélectrique** ε : produit de la permittivité du vide et de la permittivité relative :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

Ampère·seconde/volt·mètre As/(Vm) : unité SI pour la permittivité ε. Ceci correspond à une charge $Q = As$ divisée par une tension V, soit une capacité C. C'est pourquoi on utilise parfois l'unité Farad/mètre pour désigner la permittivité. $[\varepsilon]$=As/(Vm)=F/m

3. Déplacement dans un diélectrique

On a l'équation constitutive :

Déplacement = permittivité × champ électrique			**$L^{-2}TI$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$	$\vec{D}$	C/m²	déplacement dans la matière
	$\vec{E}$	V/m	intensité du champ électrique dans la matière
	ε	As/Vm	permittivité (constante dielectrique) du matériau

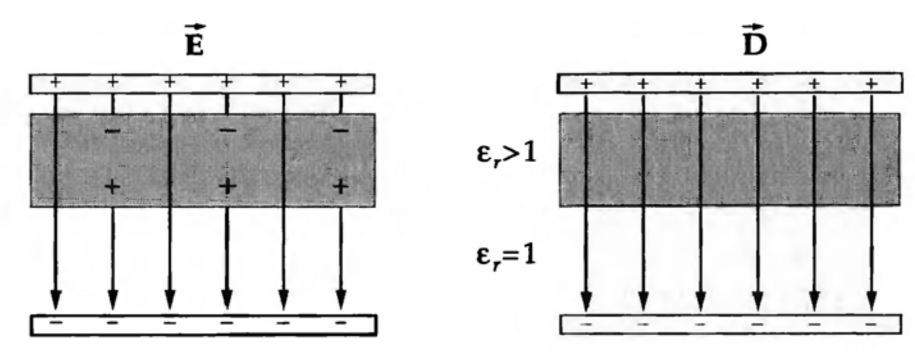


Fig. 15.13 : *Déplacement $\vec{D}$ et champ $\vec{E}$ dans un condensateur plan parallèle, partiellement rempli d'un diélectrique*

■ La permittivité relative de l'eau pure est $\varepsilon_r = 81$. Si de l'eau est placée dans un champ électrique uniforme alors l'intensité du champ électrique est réduite de $1/81$ par rapport à sa valeur initiale à cause de la polarisation des charges contenues dans l'eau.

▷ La permittivité relative (constante diélectrique relative) ε_r de différents matériaux est donnée dans les Tableaux 19.2/1 et 19.2/6. Pour des céramiques, ε_r est donnée dans le Tableau 19.2/2, pour des verres dans le Tableau 19.2/3, et pour des polymères dans le Tableau 19.2/4.

Électrostriction : variation de volume et de forme d'un d'électrique sous l'action d'un champ électrique. Dans des isolants solides, les variations de volume (contractions) sont généralement proportionnelles au carré du champ :

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \sim \varepsilon E^2$$

$\Delta V/V$ variation relative de volume, ε permittivité, E intensité du champ.

15.7 Capacité

Capacité C d'un ensemble de conducteurs : grandeur scalaire, mesure la quantité de charge qui peut être accumulée sur les conducteurs lorsqu'on leur applique une tension U :

Capacité $= \dfrac{\textbf{charge}}{\textbf{tension}}$				$\mathbf{L^{-2}T^4M^{-1}I^2}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$C = \dfrac{Q}{U}$	C	F	capacité du condensateur	
	Q	C	charge du condensateur	
	U	V	tension appliquée	

Condensateur : assemblage de deux conducteurs isolés électriquement l'un de l'autre et qui sont portés à des potentiels différents.

Farad F : unité SI de la capacité. Un condensateur a une capacité $C = 1\,\text{F}$ si, pour une tension $U = 1\,\text{V}$ appliquée à ses bornes, il peut accumuler une charge $Q = 1\,\text{C}$.

$[C] = \text{F} = \text{C/V}$

▷ 1 F est une valeur très grande. Les capacités sont typiquement de l'ordre de 1 pF à 1 mF. Pour les hautes tensions, on construit aussi des condensateurs avec des capacités de l'ordre de 10 F.

15.7.1 Condensateur à plaques planes parallèles

1. Capacité d'un condensateur plan parallèle

La dimension des plaques doit être grande comparée à leur séparation pour que les effets de bords soient négligeables. La capacité C est proportionnelle à la surface A des plaques et décroît quand on augmente la distance d qui les sépare :

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Pour augmenter la capacité, on peut introduire un matériau diélectrique entre les plaques du condensateur. Pour un diélectrique de permittivité ε, la capacité est donnée par :

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}$$

▷ La capacité d'un condensateur est augmentée par l'introduction d'un diélectrique entre les plaques du condensateur.

■ Un condensateur dont les plaques sont des feuilles de surface $A = 10\,\mathrm{cm}^2$ séparées de $d = 0,1\,\mathrm{mm}$ a la capacité :

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{8,854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m} \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}}{10^{-4}\,\mathrm{m}} = 8,854 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{F} \approx 90\,\mathrm{pF}$$

Si, entre les feuilles, il y a un papier de permittivité $\varepsilon = 4$, alors la capacité est quatre fois plus grande :

$$C \approx 360\,\mathrm{pF}$$

▷ Si on applique une tension trop importante aux bornes du condensateur, il se produit un claquage qui détruit le condensateur.

▷ Un condensateur chargé se décharge avec le temps, parce que le diélectrique situé entre les plaques n'est pas un isolant parfait et possède une résistance finie (résistance de fuite).

2. Utilisations de condensateurs

- Séparation de la composante continue d'un courant alternatif, lissage des perturbations d'un courant continu.
- unité RC dans les circuits retardateurs.
- stockage de charges.
- règlage des circuits oscillants dans les postes de radio.

Types particuliers de condensateurs :

- Condensateur électrolytique, condensateur polarisé dont le diélectrique, constitué d'oxyde d'aluminium ou d'oxyde de tantale, a été formé par électrolyse. Lors de son utilisation, il faut veiller à la polarité de façon à ne pas inverser le processus d'électrolyse. On peut obtenir des capacités élevées. Ils sont utilisés pour des applications de stockage de charge, par exemple : flashs, lasers.
- Condensateurs ajustables, condensateurs variables. Une partie des plaques est fixe (stator), une seconde partie est mobile (rotor). Les condensateurs variables sont utilisés dans la syntonisation des circuits oscillants.

15.7.2 Montage de condensateurs en parallèle

Montage de condensateurs en parallèle : la même tension est appliquée aux bornes de tous les condensateurs ce qui revient à considérer l'ensemble comme un seul condensateur de surface plus grande (Fig. 15.14). La capacité d'un ensemble de condensateurs montés en parallèle est égale à la somme de toutes les capacités :

$$C_{\text{éq.}} = C_1 + C_2 + \dots C_n$$

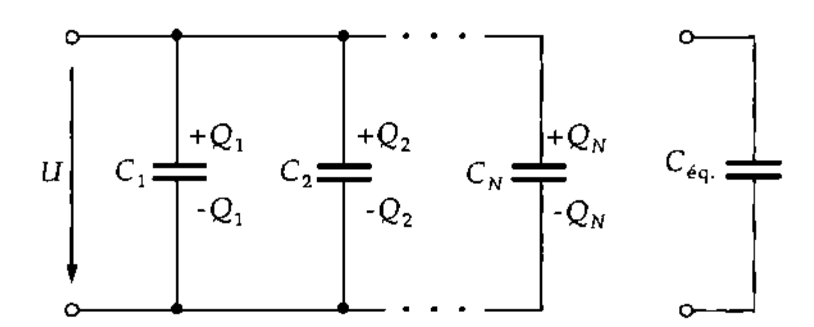


Fig. 15.14 : *Montage de condensateurs en parallèle*

15.7.3 Montage de condensateurs en série

Montage de condensateurs en série : les charges pour chaque condensateur sont égales (Fig. 15.15). De ce fait, la valeur réciproque de la capacité totale est égale à la somme des valeurs réciproques de chaque capacité :

$$\frac{1}{C_{\text{éq.}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \frac{1}{C_n}$$

C_1 C_2 C_N $C_{\text{éq.}}$
$+Q_1$ $-Q_1$ $+Q_2$ $-Q_2$ $+Q_N$ $-Q_N$
U U_1 U_2 U_N

Fig. 15.15 : *Montage de condensateurs en série*

15.7.4 Capacités de quelques montages simples

1. Condensateur cylindrique

La capacité est proportionnelle à la longueur l du condensateur cylindrique et inversement proportionelle au logarithme du rapport des rayons extérieur R et intérieur r du cylindre :

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{l}{\ln(R/r)}$$

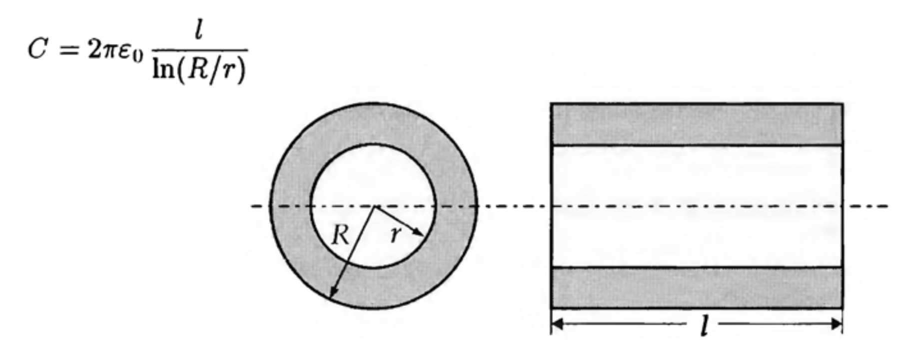


Fig. 15.16 : *condensateur cylindrique*

2. Condensateur sphérique

La capacité est proportionnelle à la différence des valeurs réciproques du rayon externe R et du rayon interne r :

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

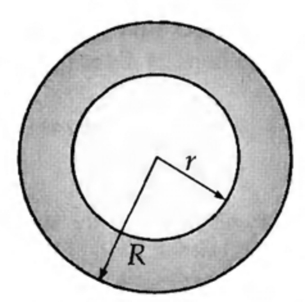


Fig. 15.17 : *Condensateur sphérique*

3. Ligne bifilaire

La capacité est proportionnelle à la longueur l des conducteurs et inversement proportionnelle au logarithme du rapport entre la distance qui sépare les deux fils d et le rayon des conducteurs r :

$$C = \pi\varepsilon_0 \frac{l}{\ln(d/r)}$$

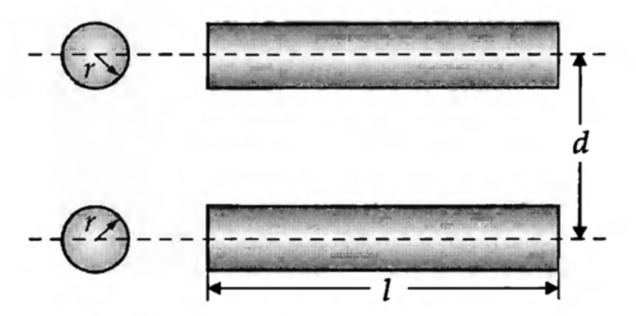


Fig. 15.18 : *Ligne bifilaire*

4. Deux sphères de mêmes rayons

La capacité de deux sphères de rayon r placées à une distance l l'une de l'autre est donnée par :

$$C = 2\pi\varepsilon_0 l \left[1 + \frac{r(r^2 - l^2)}{r(r^2 - rl - l^2)}\right]$$

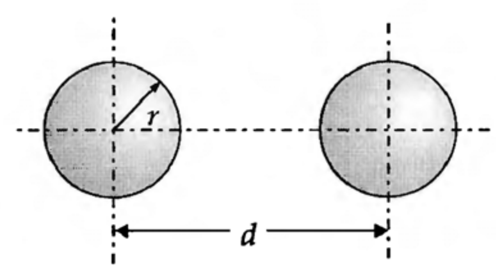


Fig. 15.19 : *Capacité de deux sphères de mêmes rayons r et séparées d'une distance d*

15.8 Énergie et densité d'énergie du champ $\vec{E}$

1. Densité d'énergie du champ électrique

La densité d'énergie électrique w_e est l'énergie électrique ΔW_e par unité de volume ΔV. Si la distribution d'énergie ne dépend pas de la position, alors la densité d'énergie est donnée par :

$$w_e = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta W_e}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}V}$$

En général, la densité d'énergie électrique est l'intégrale de l'intensité du champ électrique sur le déplacement $\vec{D}$:

$$\int_0^{D_{\max}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{D}$$

Si il y a une relation linéaire entre l'intensité du champ électrique et le déplacement alors :

Densité d'énergie du champ électrique			$L^{-1}T^{-2}M$
	Symbole	Unité	Dénomination
$w_e = \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}$	w_e	J/m^3	densité d'énergie
	$\vec{D}$	C/m^2	déplacement
	$\vec{E}$	V/m	intensité du champ

2. Énergie du champ électrique

L'énergie W_e, dans un volume V de l'espace est le résultat de l'intégration de la densité d'énergie sur ce volume :

$$W_e = \int_V w_e \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}} \, \mathrm{d}V$$

L'énergie W d'un condensateur plan chargé est proportionnelle au carré de la tension appliquée aux bornes du condensateur :

Énergie ∼ charge × (tension)²				$\mathrm{L^2T^{-2}M}$
		Symbole	Unité	Dénomination
$W = \frac{1}{2}CU^2$		W	J	énergie
		Q	C	charge
$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$		C	F	capacité
		U	V	tension

L'énergie W_e d'une sphère chargée uniformément est proportionnelle au carré de la charge Q et inversement proportionelle à son rayon R.

Énergie d'une sphère				$\mathrm{L^2T^{-2}M}$
		Symbole	Unité	Dénomination
$W_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}$		W_e	J	énergie
		Q	C	charge
		R	m	rayon de la sphère

15.9 Champ électrique aux interfaces

Pour une transition d'un milieu de permittivité ε_1 à un autre milieu de permittivité ε_2 on observe à l'interface :

1. Composantes du champ électrique

La composante tangentielle du champ électrique ne change pas lors de la transition (Fig. 15.20) :

$$E_{t1} = E_{t2} \quad \text{ou} \quad \frac{D_{t1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_2}$$

La composante normale du champ électrique est discontinue.

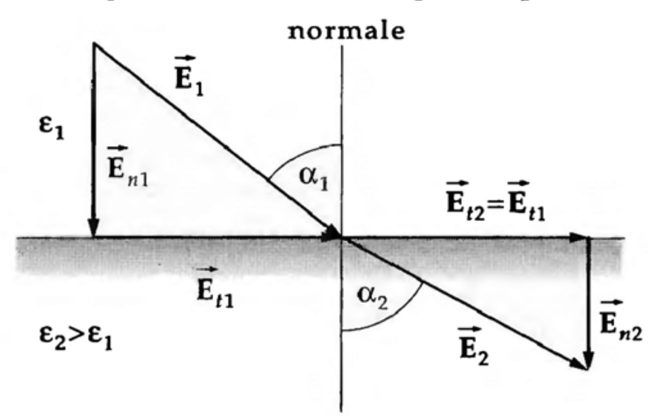


Fig. 15.20 : *Champ électrique* $\vec{\mathbf{E}}$ *à l'interfacede deux milieux*

2. Composantes du vecteur déplacement électrique

- La composante normale du déplacement électrique ne change pas lors de la transition (Fig. 15.21) :

  $D_{n1} = D_{n2}$ ou $E_{n1} \cdot \varepsilon_1 = E_{n2} \cdot \varepsilon_2$

  La composante tangentielle du déplacement électrique est discontinue.

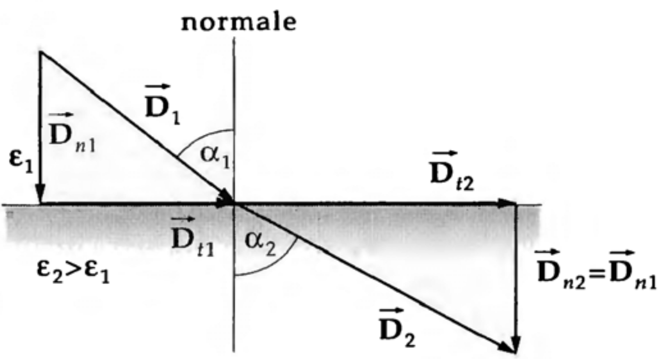


Fig. 15.21 : *Déplacement électrique $\vec{D}$ à l'interface de deux milieux*

3. Relations angulaires à l'interface

Si α_1 représente l'angle entre la perpendiculaire (la normale à la surface de l'interface) et la direction du champ électrique dans le premier milieu et α_2 l'angle entre la perpendiculaire et le champ électrique dans le second milieu, alors on a la relation entre les tangentes des angles et les permittivités :

Champ électrique à l'interface			
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}$$	α_1	1	angle dans le milieu 1
	α_2	1	angle dans le milieu 2
	ε_1	As/(Vm)	permittivité du milieu 1
	ε_2	As/(Vm)	permittivité du milieu 2
	ε_{r1}	1	permittivité relative 1
	ε_{r2}	1	permittivité relative 2

- Lors de la transition d'un milieu de faible permittivité vers un milieu de permittivité plus élevée, la direction du champ électrique s'éloigne de la perpendiculaire.

- Lors de la transition d'un milieu de forte permittivité vers un milieu de permittivité plus faible, la direction du champ électrique se rapproche de la perpendiculaire.

15.10 Champ magnétique

La **magnétostatique** traite des phénomènes causés par des courants continus sur leur environnement.

Les conducteurs parcourus par un courant sont entourés par un champ magnétique qui exerce une force sur les autres conducteurs parcourus par un courant. Ce champ magnétique est porteur d'une certaine énergie.

On peut faire un distinction entre différents matériaux selon leur comportement dans un champ magnétique.

Les matériaux magnétiques produisent leur propre champ magnétique.

Champ magnétique variant dans le temps : se produit lorsqu'un conducteur transporte un courant dépendant du temps. Ce champ magnétique autour du conducteur induit une tension dans ce conducteur et

dans les autres. L'énergie dépensée pour produire de tels champs magnétique est emmagasinée sous forme d'énergie magnétique et peut être restituée.

On peut trouver des applications associée aux courants alternatifs en électrotechnique, dans la construction de moteurs et de générateurs, dans la technologie des courants triphasés, et dans la construction des transformateurs.

15.11 Magnétisme

1. Aimants

Aimants permanents : matériaux magnétiques qui exercent des forces entre eux et sur le Fer, le Nickel, le Cobalt et différents alliages dits ferromagnétiques.

■ Des matériaux utilisés pour fabriquer des aimants permanents sont : AlNiCo, alliage d'aluminium, de nickel et de fer, des alliages CoPt et FePt ainsi que des ferrites à base de Sr ou de Ba.

▷ Un aimant permanent coupé en deux donne à nouveau naissance à deux aimants possédant chacun un pôle nord et un pôle sud.

Électro-aimants : bobines de fils conducteurs produisant un champ magnétique lorsqu'elles sont parcourues par un courant.

Comme les dipôles électriques, les aimants ont deux pôles désignés par :

- **pôle nord magnétique**
- **pôle sud magnétique**

Comme pour les dipôles électriques :

● Deux pôles semblables de deux aimants se repoussent.

● Deux pôles contraires de deux aimants s'attirent.

Les forces magnétiques agissent à longue distance, même s'il y a du vide entre les deux aimants.

2. Dipôle magnétique

Tout aimant est un dipôle magnétique, il n'existe pas de monopôle magnétique (il n'y a pas de charge magnétique libre). Le moment dipolaire magnétique $\vec{m}$ est un vecteur dirigé le long de l'axe du dipôle et pointant vers le pôle nord. Le moment magnétique d'une substance peut être déterminé par la mesure du couple produit par l'action d'un champ magnétique externe.

Champ magnétique : région soumise à l'action d'une force provenant d'un aimant ou d'un conducteur parcouru par un courant.

■ Le champ magnétique produit par un aimant permanent (barreau aimanté) est représenté sur la Figure 15.22.

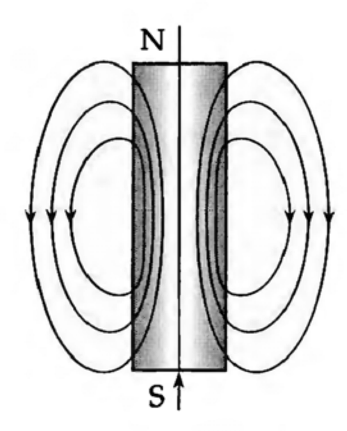


Fig. 15.22 : *Champ magnétique d'un barreau aimanté*

15.11.1 Lignes de champ magnétique

1. Lignes de champ magnétique

Permettent de visualiser le champ magnétique de la même façon que pour le champ électrique. On observe les conventions suivantes :

- La direction des lignes de champ est par convention du pôle nord vers le pôle sud en dehors de l'aimant (Fig.15.22).
- La tangente en un point à une ligne de champ donne la direction que prendrait un aimant d'essai placé en ce point.

Elles ont les propriétés :

- Les lignes de champ sont toujours fermées. Il n'existe pas de charges magnétiques (monopôles magnétiques) libres.
- La densité des lignes de champ magnétique est une mesure de la densité de flux magnétique.
- Les lignes de champ dessinent des cercles concentriques autour d'un fil conducteur parcouru par un courant. Leur orientation peut être déduite de la règle de la main droite.
- Dans un champ magnétique uniforme, les lignes de champ sont parallèles les unes aux autres.

▷ On peut visualiser le champ magnétique avec de la limaille de fer. Les particules de fer s'alignent avec le champ magnétique, forment des chaînes et donc matérialisent les lignes de champ magnétique.

2. Champ magnétique terrestre

On attribue l'origine du champ magnétique terrestre à l'existence de courants électriques dus à des mouvements de convection dans le noyau externe essentiellement composé de fer en fusion. Ce champ magnétique subit des variations quasi-périodiques dans le domaine de quelques secondes à quelques jours dus à des processus qui se produisent dans l'ionosphère et le Soleil (orages magnétiques).

▷ La comparaison entre le champ mesuré et le champ calculé en supposant une aimantation régulière de la Terre, révèle des anomalies. Celles-ci résultent de la présence de masses rocheuses aux propriétés magnétiques particulières. Ces anomalies peuvent apporter des renseignements sur la structure de la Terre et sont utilisées pour la prospection minière.

■ L'aiguille aimantée d'une boussole indique la direction du champ magnétique terrestre tangent à la surface de la terre. Le pôle magnétique terrestre SUD se trouve au voisinage du pôle Nord géographique (Fig. 15.23). L'aiguille d'une boussole peut aussi être utilisée pour déterminer la direction d'un champ magnétique généré par une distribution de courant.

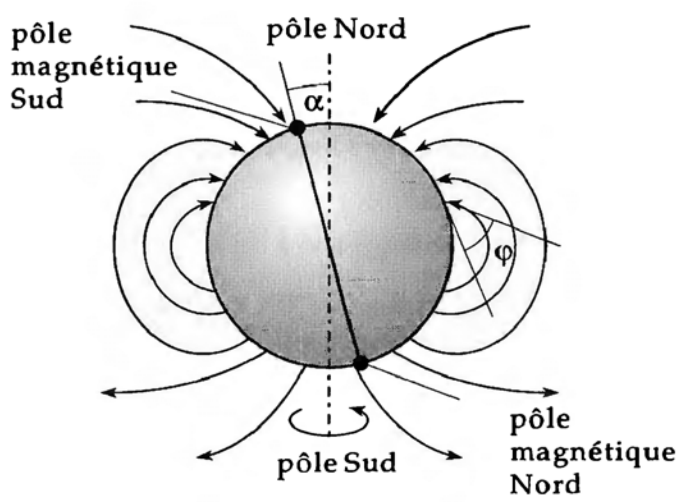


Fig. 15.23 : *Champ magnétique terrestre*

Déclinaison : en tout point du globe, le champ magnétique terrestre est caractérisé par l'angle qu'il fait avec le Nord géographique. En France, la déclinaison est d'environ 2° ouest.
Les **isogones** sont les courbes qui relient les lieux d'égale déclinaison.
L'inclinaison désigne l'angle du champ magnétique avec l'horizontale.
Les **isoclines** sont les lignes qui relient les points d'égale inclinaison.

3. Champ magnétique d'un fil parcouru par un courant

Les lignes de champ magnétique sont concentriques à l'axe du fil rectiligne. Le sens du champ se déduit de la **règle de la main droite** ou de la **règle du tire-bouchon** :

- Si le pouce pointe dans la direction du courant, alors les autres doigts pointent dans la direction de la densité de flux magnétique, donc dans la direction des lignes de champ (Fig. 15.24).

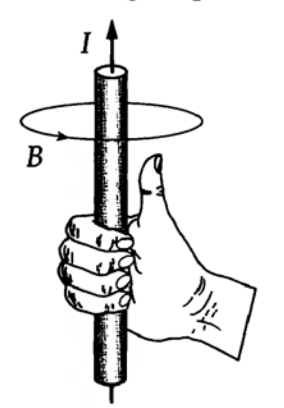


Fig. 15.24 : *Règle de la main droite : le pouce pointe dans la direction du courant, les autres doigts dans la direction du champ magnétique*

15.12 Induction ou densité de flux magnétique

1. Densité de flux magnétique

Plus couramment appelé **induction magnétique** $\vec{B}$, quantité vectorielle. L'amplitude B donne l'intensité du champ magnétique, la direction de la densité de flux magnétique est mesurée par l'alignement d'un aimant d'essai et est orientée du pôle sud vers le pôle nord de cet aimant. Une charge en mouvement est soumise à une force proportionnelle à la densité de flux magnétique et sa vitesse.

Tesla T : unité SI de la densité de flux magnétique $\vec{B}$.

$[\vec{B}] = \mathrm{T} = \mathrm{Vs/m^2}$

▷ Un aimant suspendu dans le champ magnétique de la terre s'oriente de façon à ce que son pôle nord pointe vers le Nord et que son pôle sud pointe vers le Sud (d'où les noms donnés aux pôles d'un aimant). Du fait que des pôles contraires s'attirent mutuellement, le pôle Sud magnétique de la terre est situé dans le voisinage du pôle Nord géographique et le pôle Nord magnétique est situé dans le voisinage du pôle Sud géographique.

Le champ magnétique d'un aimant permanent provient de moments magnétiques à l'échelle atomique.

M La mesure de la densité de flux magnétique $\vec{B}$ est basée sur la mesure du flux magnétique qui peut être faite à l'aide d'une bobine d'induction (voir mesure du flux magnétique).

Effet Hall : dans un conducteur parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique apparaît une tension U_H, la tension Hall, qui est proportionnelle à la densité de flux magnétique B_z (Fig. 15.25)

$$U_H = \frac{B_z I_x}{ned}$$

Ici, I_x est le courant circulant dans le conducteur d'épaisseur d, n est la densité de porteurs de charge et e est la charge élémentaire. Dans une **sonde à effet Hall** on utilise un matériau semiconducteur du fait que la densité de porteurs de charge n est faible, ce qui conduit à une tension de Hall forte.

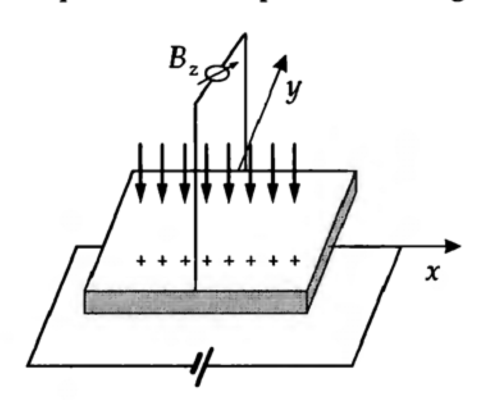


Fig. 15.25 : *Sonde à effet Hall*

2. Force de Lorentz

Le champ magnétique n'exerce une force que sur les charges en déplacement. La force est proportionnelle à la vitesse v des charges, à la grandeur de la charge Q, à la densité de flux magnétique et dépend de l'angle entre le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur densité de flux $\vec{B}$.

La force $\vec{F}$ est donnée par un produit vectoriel :

Force de Lorentz			**$LT^{-2}M$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{F} = Q\vec{v} \wedge \vec{B}$ $F = Q \cdot v \cdot B \cdot \sin\alpha$	$\vec{F}$	N	force de Lorentz
	Q	C	charge électrique
	$\vec{v}$	m/s	vitesse des charges
	$\vec{B}$	T=Vs/m^2	induction magnétique
	α	1	angle

● **Règle des trois doigts** : si le pouce de la main droite pointe dans la direction de déplacement des porteurs de charge positive, l'index dans la direction du champ magnétique (pôle nord vers pôle sud) alors la direction de la force agissant sur les porteurs de charge est donnée par le majeur (Fig. 15.26).

▷ Action de la force sur des charges négatives : la main droite doit être remplacée par la main gauche.

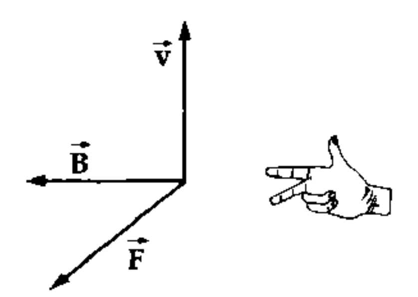


Fig. 15.26 : *Règle des trois doigts : le pouce pointe dans la direction de déplacement d'une charge positive, l'index pointe dans la direction du champ magnétique (du pôle nord vers le pôles sud) ; la force agit dans la direction du majeur*

La force sur une charge q est maximale lorsque la vitesse v est perpendiculaire à l'induction magnétique B :

$$F_{max} = Q \cdot v \cdot B$$

À partir de la force maximale on obtient l'induction magnétique :

$\textbf{Densité de flux} = \dfrac{\textbf{force maximale}}{\textbf{charge} \times \textbf{vitesse}}$				$T^{-2}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$B = \dfrac{F_{max}}{q \cdot v}$	F_{max}	N	force de Lorentz	
	q	C	charge électrique	
	v	m/s	vitesse de la charge	
	B	$T = V/(Am^2)$	induction magnétique	

3. Propriétés de la force de Lorentz

La force de Lorentz ne modifie pas la direction de la vitesse $\vec{v}$, mais sa grandeur. Une particule de masse m, de charge Q, placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$, perpendiculaire à sa vitesse, décrit une trajectoire circulaire de rayon R :

$$R = \frac{mv}{QB}$$

Le rayon de la trajectoire est inversement proportionnel à l'induction magnétique et proportionnel à la quantité de mouvement de la particule.

Si, en plus, la particule est placée dans un champ électrique $\vec{E}$, la résultante des forces est :

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

Si les champs électriques et magnétiques sont parallèles entre eux, la trajectoire de la particule est une hélice autour de la direction des champs.

Un conducteur rectiligne de longueur l, parcouru par le courant I et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ est soumis à la force :

$$\vec{F} = I\,(\vec{l} \times \vec{B})$$

$\vec{l}$ est un vecteur de grandeur l orienté dans la direction du courant. La force $\vec{F}$ est perpendiculaire au plan formé par $\vec{l}$ et $\vec{B}$, sa grandeur est :

$$F = I \cdot l \cdot B \cdot \sin\alpha$$

où α est l'angle formé par $\vec{\mathbf{I}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$. L'intensité de la force est maximale si l'induction magnétique est perpendiculaire au courant.

15.13 Flux Magnétique

1. Flux Magnétique

Le **flux magnétique** Φ est une quantité scalaire qui mesure la densité de flux magnétique traversant une surface placée dans un champ magnétique. Pour une surface plane située dans un champ magnétique uniforme et perpendiculaire à la densité de flux magnétique (la normale à la surface est parallèle à la densité de flux) le flux magnétique Φ est égal au produit de la densité de flux magnétqtue B par la surface ΔA et le cosinus de l'angle entre $\vec{\mathbf{B}}$ et $\Delta\vec{\mathbf{A}}$ (Fig. 15.27). Si la normale à la surface est parallèle à la densité de flux, le flux tend vers zéro. Le flux dépend de l'angle α entre la densité de flux et la normale à la surface.

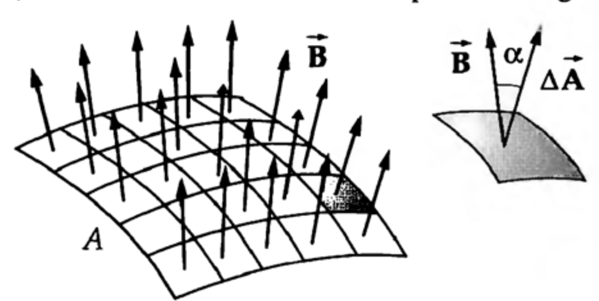


Fig. 15.27 : *Flux magnétique au travers de la surface* ΔA

$$\Phi = B \cdot \Delta A \cdot \cos\alpha = \vec{\mathbf{B}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}$$

Une surface A de forme quelconque, placée dans un champ magnétique non uniforme, est divisée en éléments de surface plans ΔA_i de manière à ce que la densité de flux magnétique les traversant puisse être considérée comme constante sur chacun de ces éléments. Le flux total traversant la surface A est obtenu en prenant la somme des flux élémentaires :

$$\Phi = \sum_i \Delta\Phi_i = \sum_i \vec{\mathbf{B}}_i \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}_i$$

2. Forme intégrale du flux

En affinant de plus en plus la subdivision, on obtient un flux magnétique correspondant à l'intégrale de la densité de flux sur la surface totale.

Flux = intégrale de la densité de flux sur la surface			**$ML^2T^{-1}Q^{-1}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Phi = \int_A \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$	Φ	Wb=Vs	flux magnétique
	$\vec{\mathbf{B}}$	T=Vs/m^2	induction magnétique traversant A
	$\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$	m^2	élément infinitésimal de surface
	A	m^2	surface totale

Weber Wb : unité SI pour le flux magnétique Φ. 1 Wb correspond à l'intensité d'un flux magnétique au travers d'une surface $A = 1\,\mathrm{m}^2$ si l'intensité du champ magnétique est $B = 1\,\mathrm{Vs/m}^2$.
$[\Phi] = \mathrm{Wb} = \mathrm{Vs}$

3. Absence de masses magnétiques libres

- **Solénoïdalité du flux magnétique** : Le flux magnétique au travers d'une surface fermée A est égal à zéro :
  $$\Phi = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$
  Ceci signifie que les lignes de champ sont fermées et qu'il n'existe pas de charges magnétiques (monopôles).

Cette relation constitue une des **équations de Maxwell**. Soit, sous forme différentielle :

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0$$

4. Détermination de la densité de flux magnétique (induction)

L'amplitude de la densité de flux magnétique est obtenue à partir du flux magnétique $\Delta\Phi$ traversant une surface $\Delta A_\perp$ perpendiculaire au flux. Si le flux magnétique dépend de la position, alors ΔA est diminuée jusqu'à ce que le flux magnétique soit distribué uniformément au travers de la surface. Ceci correspond à la limite :

$$B = \lim_{\Delta A_\perp \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta A_\perp} = \frac{d\Phi}{dA_\perp}$$

■ Un flux magnétique $\Phi = 0,2\,\mathrm{Wb}$ au travers d'une surface $A = 6\,\mathrm{cm}^2$ perpendiculaire au flux correspond à une densité de flux magnétique :

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{0,2\,\mathrm{Wb}}{6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 333,3\,\mathrm{T}$$

[M] Le flux magnétique peut être mesuré par une bobine d'induction composée d'un nombre donné n de spires. En plongeant la bobine dans un champ magnétique B, on mesure une impulsion de tension induite qui est proportionnelle au flux :

$$\int_0^T U_{\mathrm{ind}}\, dt = n\Phi = n \cdot B \cdot A$$

Si, de plus, la surface de la bobine d'induction est connue alors on peut aussi déterminer l'induction magnétique. Si la bobine d'induction est sortie du champ magnétique, une impulsion négative de tension est induite.

15.14 Champ magnétique

1. Champ magnétique

$\vec{H}$: quantité vectorielle. On la désigne aussi par le terme de champ magnétique. Dans les matériaux magnétiques isotropes $\vec{B}$ est proportionnel à $\vec{H}$.

Champ magnétique = induction magnétique / perméabilité			$L^{-1}I$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$	H	A/m	champ magnétique
	B	T=Vs/m²	densité de flux magnétique
	μ_0	Vs/(Am)	perméabilité magnétique

Ampère/mètre A/m : unite SI de champ magnétique $\vec{H}$.

$[\vec{H}] = \mathrm{A/m}$

On remarquera les unités :

- intensité du champ magnétique, en relation avec le courant : A/m
- intensité du champ électrique, en relation avec la tension : V/m

2. Perméabilité magnétique

Perméabilité magnétique du vide			**$LT^{-2}MI^{-2}$**
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} = 1,257 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$	Symbole	Unité	Dénomination
	μ_0	As/(Vm)	perméabilité du vide

▷ En réalité, on pourrait supposer que, par analogie avec le champ électrique, l'intensité du champ magnétique $\vec{H}$ devrait être la notion de base et la densité de flux magnétique $\vec{B}$, comme le déplacement électrique $\vec{D}$ par rapport à l'intensité du champ électrique, c'est-à-dire des quantités déduites. Mais il faut noter que les champs électriques et magnétiques sont détectés par leur action sur les charges ; dans les formules de calcul de ces forces il apparaît *le champ électrique* et la *densité de flux magnétique* et non le champ magnétique comme on aurait pu s'y attendre.

3. Potentiel vecteur

$\vec{A}$: grandeur vectorielle pour le calcul de la densité de flux magnétique (induction) $\vec{B}$. De l'absence de masses magnétiques ($\operatorname{div}\vec{B} = 0$), on déduit que l'induction magnétique peut être exprimée par le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0\,, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ se déduit de la densité de courant $J(\vec{r})$ par l'équation différentielle :

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\,\vec{J}(\vec{r})$$

soit :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}V'$$

La densité de flux magnétique est alors :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}V'$$

Les potentiels φ et $\vec{A}$ peuvent être déterminés à partir de deux équations différentielles couplées, si la densité volumique de charge ρ et la densité de courant $\vec{J} = \rho\vec{v}$ sont données en fonction de la position $\vec{r}$ et du temps t :

$$be\Delta\vec{A}(\vec{r},t) - \mu_0\varepsilon_0\,\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\mu_0\,\vec{J}(\vec{r},t)\,, \quad \Delta\varphi(\vec{r},t) - \mu_0\varepsilon_0\,\frac{\partial^2\varphi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = -\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$$

▷ Pour une particule de masse m, de charge Q, et de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ placée dans un champ électromagnétique, les fonctions de Lagrange L et de Hamilton H sont :

$$L = \frac{m}{2}v^2 + Q\vec{v}\cdot\vec{A} - Q\varphi\,, \quad H = \frac{(\vec{p} - Q\vec{A})^2}{2m} + Q\varphi$$

15.15 Potentiel magnétique et circuit magnétique

1. Différence de potentiel magnétique

La **différence de potentiel magnétique** V_{AB} entre deux points A et B, est égale à l'intégrale du champ magnétique $\vec{\mathrm{H}}$ suivant le chemin s (circulation de $\vec{\mathrm{H}}$).

d.d.p. magnétique = intégrale du champ suivant le chemin			I
	Symbole	Unité	Dénomination
$V_{AB} = \int_A^B \vec{\mathrm{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$	V_{AB}	A	potentiel magnétique
	$\vec{\mathrm{H}}$	A/m	champ magnétique
	$\mathrm{d}\vec{s}$	m	élément de déplacement

Ampère A : unité SI pour la différence de potentiel magnétique V.

$[V] = 1\,\mathrm{A}$

M **Bobine de Rogowski** ou **ceinture magnétique** : une fine bobine longue et flexible servant à mesurer la différence de potentiel magnétique. La bobine est placée dans un champ magnétique. En commutant le champ magnétique, une impulsion de tension proportionnelle à la différence de potentiel magnétique entre les deux extrémités de la bobine est générée dans la bobine.

2. Circuit magnétique et résistance magnétique

On appelle **circuit magnétique**, une suite de substances destinées à canaliser le flux magnétique. Le circuit est dit **fermé** lorsqu'il ne comprend que des ferromagnétiques. S'il est interrompu par des intervalles ou **entrefers**, il est dit **ouvert**. Les diverses substances constituant le circuit sont caractérisées par leur résistance magnétique.

Résistance magnétique R_m : rapport de la différence de potentiel magnétique V sur le flux magnétique dans un milieu :

Résistance magnétique = $\dfrac{\textbf{d.d.p. magnétique}}{\textbf{flux magnétique}}$			$\mathrm{L^{-2}T^{2}M^{-1}I^{2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$R_m = \dfrac{V}{\Phi}$	R_m	A/Wb	résistance magnétique
	V	A	différence de potentiel magnétique
	Φ	Wb	flux magnétique

Ampère/Weber A/Wb : unité SI pour la résistance magnétique R_m.

$[R_m] = \mathrm{A/Wb} = \mathrm{A/(Vs)}$

3. Loi des nœuds et loi des mailles dans un circuit magnétique

Par analogie avec les lois de Kirchhoff, on a les relations suivantes pour les circuits magnétiques :

- **Loi des mailles dans un circuit magnétique** : la somme des différences de potentiel d'une maille d'un circuit magnétique est égale à la différence de potentiel magnétique totale :

  $V_{\mathrm{tot.}} = V_1 + V_2 + \ldots V_n = \Theta$

- **Loi des nœuds dans un circuit magnétique** : la somme des flux magnétiques en un nœud du circuit magnétique est égale au flux total :

  $\Phi_{tot.} = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n$

De ce fait, il existe des règles similaires entre les montages en série et en parallèle de résistance magnétique et de résistances électriques :

4. Montages en série de résistances magnétiques

Le flux magnétique traverse différents matériaux, l'un derrière l'autre, possédant des résistances magnétiques distinctes $R_{m1}, \ldots, R_{mN}$ (Fig. 15.28). La résistance totale est :

$$R_{tot.} = R_{m1} + \ldots + R_{mN}$$

5. Montage en parallèle de résistances magnétiques

Le flux magnétique se divise dans plusieurs branches dans un circuit magnétique composé des résistances $R_{m1}, \ldots, R_{mN}$. La valeur réciproque de la résistance magnétique totale est égale à la somme des valeurs réciproques des résistances :

$$\frac{1}{R_{tot.}} = \frac{1}{R_{m1}} + \ldots + \frac{1}{R_{mN}}$$

En technologie, ces règles sont appliquées lors du calcul de circuits magnétiques dans lesquels le flux magnétique est guidé au travers de différents matériaux, situés l'un derrière l'autre.

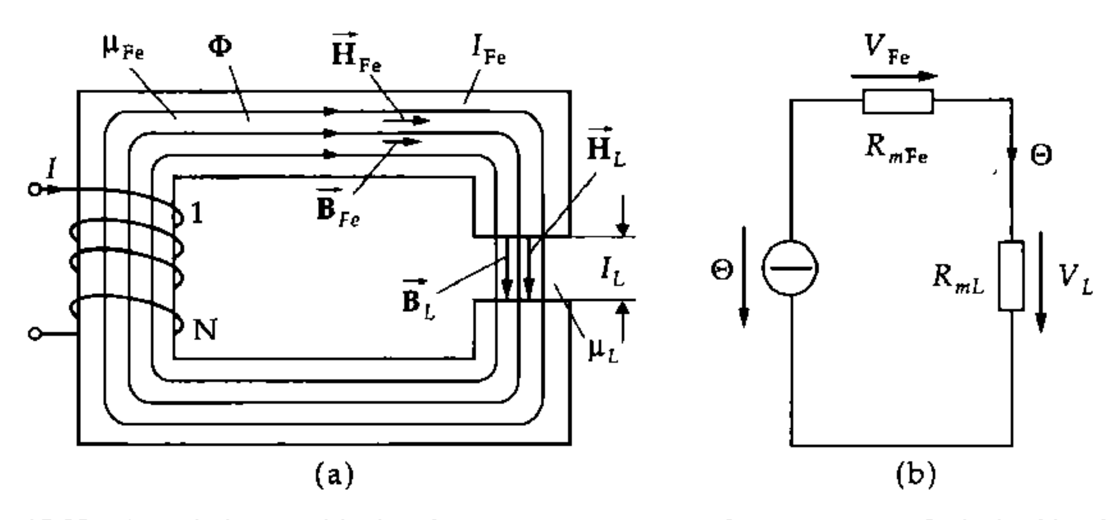


Fig. 15.28 : *Association en série de substances. (a) : noyau en fer avec un entrefer à air, (b) : circuit équivalent*

■ Pour un circuit magnétique constitué d'un noyau en fer doux et d'un entrefer à air (Fig. 15.28) la résistance magnétique totale est :

$R_m(\text{fer}) + R_m(\text{air}) = R_m(\text{total})$

15.15.1 Théorème d'Ampère

1. Circulation du vecteur $\vec{H}$

La circulation du vecteur $\vec{H}$ le long d'une courbe fermée s est égale à la somme Θ des courants électriques réels qui traversent une surface A limitée par le contour s.

Θ est le courant traversant une surface définie par un contour s. Pour calculer Θ, le contour s est divisé en éléments rectilignes Δs, puis on calcule le produit de la composante du champ magnétique dans la direction de l'élément Δs par la longueur de cet élément :

$$H \cdot \Delta s \cos\alpha = \vec{\mathbf{H}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{s}}$$

La direction donnée par le vecteur Δs correspond à la direction de parcours du chemin. La somme sur tous les éléments de déplacement donne Θ :

$$\sum H_i \, \Delta s_i = \Theta$$

Pour un chemin arbitraire dans un champ magnétique non uniforme, le chemin est subdivisé jusqu'à ce que les éléments de déplacement puissent être considérés comme rectilignes et que le champ magnétique soit uniforme sur chacun de ces éléments. On obtient alors la **loi d'Ampère**.

- L'intégrale de l'intensité du champ suivant un contour fermé est égale à Θ au travers de la surface définie par le contour :

Intégrale de l'intensité du champ suivant le contour = Θ			**I**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\oint_s \vec{\mathbf{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = \Theta$$	$\vec{\mathbf{H}}$	A/m	intensité du champ magnétique
	$\mathrm{d}s$	m	élément infinitésimal de déplacement
	s	m	déplacement total
	Θ	A	

Ampère A : unité SI pour Θ.

$[\Theta] = \mathrm{A}$

2. Conséquences du théorème d'Ampère

- Si le contour renferme la totalité du courant, le résultat est indépendant du chemin.
- Si le chemin entoure un fil parcouru par du courant, alors Θ est égal au courant circulant dans le fil :
  $\Theta = I$
- Si le chemin entoure un nombre N de fils parcourus par du courant, alors Θ est égal à la somme des courants I_n de chaque fil conducteur :
  $$\Theta = \sum_{n=0}^{N} I_n$$
- Si le chemin entoure un nombre N de spires d'une bobine, alors Θ est égal au courant I dans la bobine multiplié par le nombre de spires enfermées par le chemin :
  $\Theta = N \cdot I$
- Si le chemin entoure une distribution de courant caractérisée par une densité de courant $\vec{\mathbf{J}}$, alors Θ est égal au flux de la densité de courant traversant la surface A définie par le contour :
  $$\Theta = \int_A \vec{\mathbf{J}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$

Les relations précédentes peuvent aussi être écrites sous forme différentielle :

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathbf{H}} = J$$

▷ Le théorème d'Ampère permet le calcul de champs magnétiques générés par des distributions simples de courant.

15.15.2 Loi de Biot-Savart

1. Loi de Biot-Savart

La **loi de Biot-Savart** permet le calcul de l'intensité du champ magnétique pour des conducteurs filiformes de n'importe quelle géométrie.

La contribution de l'élément conducteur ds à l'intensité du champ magnétique est proportionnelle au courant I et inversement proportionnelle au carré de la distance r. La direction du champ magnétique produit par ds est obtenue en effectuant le produit vectoriel du vecteur $\vec{r}$ par la direction de l'élément de conducteur $\mathrm{d}\vec{s}$.

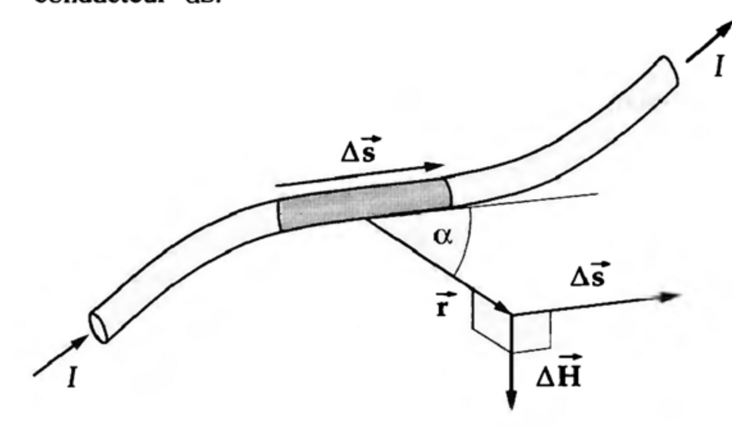


Fig. 15.29 : *Loi de Biot-Savart*

L'intensité du champ total est l'intégrale sur toutes les contributions :

Loi de Biot-Savart			**$L^{-1}I$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\vec{H} = \int_s \frac{I\,\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r}}{4\pi r^3}$$	$\vec{H}$	A/m	champ magnétique
	I	A	courant traversant le conducteur
	$\mathrm{d}\vec{s}$	m	élément de conducteur
	$\vec{r}$	m	rayon vecteur
	r	m	distance

2. Moment magnétique d'une densité de courant

Soit une densité de courant $\vec{J}(\vec{r})$, son moment magnétique est défini par :

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \vec{r} \wedge \vec{J}(\vec{r})\,\mathrm{dV}$$

Le champ magnétique, au premier ordre, est donné par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right]$$

▷ Le champ magnétique d'une densité de courant (stationnaire) est équivalent au champ électrique d'un dipôle.

3. Exemples d'application de la loi de Biot-Savart

a) **boucle de courant fermée** : Un courant I circule dans un circuit fermé plan d'aire A. Un champ d'induction $\vec{B}$ produit un couple $\vec{M}$ sur ce circuit tel que :

$$\vec{M} = I(\vec{A} \wedge \vec{B})$$

Le moment magnétique $\vec{m}$ étant défini par $\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, le moment magnétique de la boucle de courant est :

$$\vec{m} = I \cdot \vec{A}$$

b) **Charge décrivant une orbite circulaire** : Une particule de masse m et de charge Q, qui décrit une trajectoire circulaire avec une quantité de mouvement $\vec{p}$, correspond à une boucle de courant de moment magnétique :

$$\vec{m} = \frac{Q}{2m}\vec{l}, \quad \vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

Le moment magnétique $\vec{m}$ est proportionel au moment cinétique $\vec{l}$.

4. Force et énergie du moment magnétique

Un champ magnétique **uniforme** $\vec{B}$ produit sur un corps de moment magnétique $\vec{m}$ un couple $\vec{M}$:

$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Un champ magnétique **non uniforme** $\vec{B}$ produit sur un corps de moment magnétique $\vec{m}$ une force $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \left(\vec{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right) \vec{B}$$

L'énergie potentielle E_{pot} d'un corps de moment magnétique $\vec{m}$ est :

$$E_{pot} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

5. Exemples de moments magnétiques

Le **moment magnétique d'un barreau aimanté** est défini comme le produit du flux magnétique Φ par la distance fictive des pôles d :

$$\vec{m} = \Phi \cdot \vec{d}$$

Le vecteur $\vec{d}$ pointe du pôle Sud vers le pôle Nord.

Moment magnétique de Coulomb : défini par $\vec{m}_C = \Phi\, \vec{d}$.

Moment magnétique d'Ampère : défini par $\vec{m}_A = \vec{m}_C/\mu_0 = \Phi\, \vec{d}/\mu_0$. Principalement utilisé en physique atomique.

15.15.3 Champ magnétique d'un conducteur rectiligne

1. Intensité du champ magnétique

Le champ magnétique produit par un conducteur rectiligne en un point de l'espace est proportionnel au courant I dans le conducteur et inversement proportionnel à sa distance r au conducteur. La direction du

champ magnétique suit des cercles concentriques autour du conducteur (règle de la main droite) :

Intensité du champ magnétique $= \dfrac{\textbf{courant}}{2\pi \cdot \textbf{rayon}}$				$\mathbf{L^{-1}I}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$H = \dfrac{I}{2\pi r}$	H	A/m	intensité du champ à la distance r du conducteur	
	I	A	courant traversant le conducteur	
	r	m	distance du conducteur	

■ Un fil rectiligne transporte le courant $I = 4$ A. Le champ magnétique à la distance $r = 1$ m est :

$$H = \frac{4\,\text{A}}{2\pi \cdot 1\,\text{m}} \approx 0,64\,\text{A/m}.$$

Si la distance est doublée, l'intensité du champ est réduite de moitié.

2. Forces entre conducteurs parcourus par des courants

Le champ magnétique exerce une force sur les conducteurs parcourus par un courant. Ceci est utilisé dans la définition de l'unité de courant Ampère.

La force F qui s'exerce entre deux conducteurs rectilignes, parallèles, de même longueur l et séparés de la distance a, respectivement parcourus par les courants I_1 et I_2 est :

$$F = \mu_0 \frac{l}{2\pi a} I_1 I_2$$

Si les courants sont de même sens les conducteurs s'attirent, si les courants sont de sens opposés ils se repoussent (Fig. 15.30).

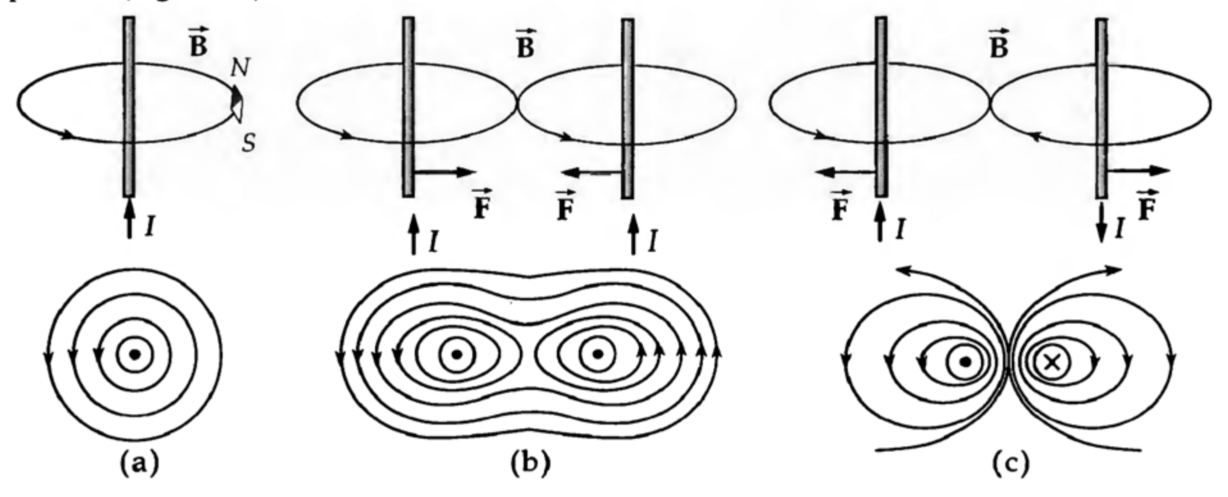


Fig. 15.30 : *Lignes de champ magnétique et forces pour des conducteurs rectilignes parcourus par un courant. (a) : conducteur isolé, (b) : deux conducteurs parallèles, courants de mêmes sens, (c) : deux conducteurs parallèles, courants de sens opposés*

15.15.4 Champs magnétiques de diverses distributions de courant

La loi de Biot-Savart et le théorème d'Ampère permettent de calculer l'intensité des champs magnétiques de distributions simples de courant :

1. Champ magnétique d'un solénoïde infiniment long

- Le champ magnétique produit par un **solénoïde long** (bobine cylindrique) est égal au produit du courant I dans la bobine par le nombre de spires n divisé par la longueur l de la bobine :

Intensité du champ $=\dfrac{\textbf{nombre de spires} \times \textbf{courant}}{\textbf{longueur}}$				$L^{-1}I$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$H = \dfrac{nI}{l}$	H	A/m	champ magnétique à l'intérieur de la bobine	
	I	A	courant traversant la bobine	
	l	m	longueur de la bobine	
	n	1	nombre de spires	

Le champ magnétique à l'intérieur de la bobine est uniforme et dirigé suivant l'axe longitudinal de la bobine.

2. Champ magnétique d'un fil rectiligne

Intensité du champ magnétique H produit à une distance r d'un conducteur rectiligne infiniment long, de section circulaire de rayon R et parcouru par le courant I :

Région à l'extérieur du conducteur ($r \geq R$)				$L^{-1}I$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$H(r) = \dfrac{I}{2\pi r}$	H	A/m	champ magnétique à l'extérieur du conducteur	
	I	A	courant dans le conducteur	
	r	m	distance	

Région à l'intérieur du conducteur ($r \leq R$)				$L^{-1}I$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$H(r) = \dfrac{I}{2\pi R^2}\, r$	H	A/m	champ magnétique à l'intérieur du conducteur	
	I	A	courant dans le conducteur	
	r	m	distance	
	R	m	rayon du conducteur	

L'intensité du champ magnétique augmente linéairement jusqu'à la surface du conducteur et décroît de manière hyperbolique à l'extérieur du conducteur.

3. Champ magnétique sur l'axe d'une bobine cylindrique courte

L'intensité du champ magnétique sur l'axe d'une bobine cylindrique courte est proportionnelle au produit du courant I dans la bobine par le nombre n de spires divisé par le rayon R de la bobine :

Intensité du champ $= \dfrac{\textbf{nombre de spires} \times \textbf{courant}}{2 \times \textbf{rayon de la bobine}}$				$L^{-1}I$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$H = \dfrac{nI}{2R}$	H	A/m	champ magnétique	
	n	1	nombre de spires	
	I	A	courant dans la bobine	
	R	m	rayon de la bobine	

15.16 La matière dans le champ magnétique

Si de la matière est placée dans un champ magnétique d'intensité H, la densité de flux magnétique B dans la région de l'espace occupée par la matière est modifiée. Cette modification est caractéristique du matériau introduit dans le champ.

1. Perméabilité relative

μ_r : rapport entre l'induction magnétique B dans la matière et l'induction magnétique B_0 dans le vide pour le même champ magnétique H :

$$\mu_r = \frac{B}{B_0}$$

▷ μ_r est donné dans le Tableau 19.4/3 pour certains alliages magnétiques.

Perméabilité μ : produit de la perméabilité μ_0 du vide par la perméabilité relative μ_r :

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$$

● Pour les matériaux magnétiques isotropes, la densité de flux magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ est proportionnelle à l'intensité du champ magnétique $\vec{\mathbf{H}}$.

Le facteur de proportionnalité est la perméabilité :

Densité de flux magnétique = perméabilité × champ				$T^{-2}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\vec{\mathbf{B}} = \mu\vec{\mathbf{H}} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{\mathbf{H}}$	$\vec{\mathbf{B}}$	Vs/m^2	densité de flux magnétique	
	μ	Vs/Am	perméabilité	
	μ_0	Vs/Am	perméabilité du vide	
	μ_r	1	perméabilité relative	
	$\vec{\mathbf{H}}$	A/m	champ magnétique	

2. Susceptibilité magnétique

Susceptibilité magnétiqued'un matériau χ_m : différence entre la perméabilité relative μ_r du matériau et la perméabilité relative du vide $\mu_{0r} = 1$:

$$\chi_m = \mu_r - 1$$

χ_m est sans dimension : $[\chi] = 1$

- Susceptibilités magnétiques de matriaux :
  diamagnétiques :
  Cu $-1 \cdot 10^{-5}$, Bi $-1.5 \cdot 10^{-4}$, H_2O $-7 \cdot 10^{-6}$
  paramagnétiques :
  Al $2.4 \cdot 10^{-5}$, O_2 (gazeux) $3.6 \cdot 10^{-3}$
  ferromagnétiques :
  Fe 10^4, alliage AlNiCo 3, Ferrite (dure) 0.3

▷ Les susceptibilités magnétiques molaires des éléments sont données dans le Tableau 19.4/1 et pour quelques composés inorganiques dans le Tableau 19.4/2.

3. Aimantation, (magnétisation)

L'**aimantation** $\vec{M}$ est égale au produit de la susceptibilité magnétique χ_m par l'intensité du champ magnétique $\vec{H}$:

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H}$$

Ampère/mètre A/m : unité SI pour l'aimantation M.

$[\vec{M}] = \mathrm{A/m}$

Courbe d'aimantation : représentation graphique de la dépendance de la densité de flux magnétique (induction) B par rapport à l'intensité du champ magnétique H.

4. Polarisation magnétique

La **polarisation magnétique** $\vec{J}$ est le produit de la susceptibilité magnétique χ_m par la densité de flux magnétique (induction) du vide $\vec{B}_0$. C'est aussi la différence entre l'induction $\vec{B}_m$ dans la matière et celle du vide $\vec{B}_0$:

$$\vec{J} = \chi_m \cdot \vec{B}_0 = \chi_m \mu_0 \cdot \vec{H} = \vec{B}_m - \vec{B}_0 = (\mu_r - 1) \cdot \vec{B}_0$$

Volt·seconde/mètre carré, $\mathrm{Vs/m^2}$: unité SI pour la polarisation magnétique.

$[\vec{J}] = \mathrm{Vs/m^2}$

15.16.1 Diamagnétisme

Diamagnétisme : propriété de tous les matériaux. Un comportement diamagnétique ne peut être observé que s'il n'est pas couvert par un autre type de magnétisme.

- Si un matériau diamagnétique est placé dans un champ magnétique non uniforme, alors il est déplacé vers les régions de plus **faible** intensité du champ.

En introduisant un matériau diamagnétique dans un champ magnétique, on induit des courants circulaires dans les atomes qui s'opposent au champ magnétique exteme suivant la loi de Lenz (→ *induction*). Des dipôles sont induits dans le matériau dont le pôle positif est orienté vers le pôle positif du champ externe et dont le pôle négatif est orienté vers le pôle négatif du champ magnétique externe. De ce fait, le champ magnétique résultant est réduit et le matériau est poussé en dehors du champ magnétique.

- La perméabilité relative des matériaux diamagnétiques est inférieure à 1 :
  $\mu_r < 1, \quad -10^{-4} < \chi_m < -10^{-9}$

▷ Les vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{M}$ sont de sens opposés. La densité des lignes de champ $\vec{B}$ est plus faible dans le matériau qu'à l'extérieur.

● Le diamagnétisme dépend de la température.

■ Le diamagnétisme peut être observé sur les corps suivants : Cu, Bi, Au, Ag, H_2

15.16.2 Paramagnétisme

Paramagnétisme : s'observe lorsque le moment magnétique des électrons n'est pas compensé. Ceci est le cas lorsque les niveaux électroniques des atomes ne sont pas complètement remplis. Dans un champ magnétique, les moments magnétiques, qui à l'origine étaient orientés aléatoirement, vont s'aligner sur le champ.

● La perméabilité des matériaux paramagnétiques est supérieure à 1 :
$\mu_r > 1, \quad 10^{-6} < \chi_m < 10^{-4}$

▷ Les vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{M}$ sont de mêmes sens. La densité des lignes de champ $\vec{B}$ est plus grande dans le matériau qu'à l'extérieur.

Loi de Curie : décrit la dépendance de la susceptibilité χ_m en fonction de la température absolue T dans le cas du paramagnétisme :

$$\chi_m = \frac{C}{T}$$

C dépend du matériau.

■ Le paramagnétisme peut être observé sur les corps suivants : Al, O_2, W, Pt, Sn

15.16.3 Ferromagnétisme

1. Ferromagnétisme

Le **ferromagnétisme** est généré par l'alignement de la direction de magnétisation des domaines de Weiss dans la direction du champ. La courbe de magnétisation des matériaux ferromagnétiques est non-linéaire (cycle d'hystérésis). Les substances ferromagnétiques conservent une aimantation rémanente après leur première aimantation.

Domaine de Weiss : région d'un cristal ferromagnétique de magnétisation uniforme, de dimension 10 μm à 1 m. Dans l'état non magnétisé, leur distribution est statistique.

Cloison de Bloch : zone de transition entre domaines de Weiss voisins d'aimantations différentes. L'aimantation d'une substance ferromagnétique se produit par des déplacements réversibles ou irréversibles des cloisons (parois) de Bloch.

● La perméabilité relative des matériaux ferromagnétiques dépend de l'intensité du champ magnétique et est beaucoup plus grande que 1 :
$\mu_r \gg 1, \quad \chi_m \gg 1$

▷ Les vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{M}$ sont de mêmes sens. La densité des lignes de champ $\vec{B}$ est plus grande dans le matériau qu'à l'extérieur.

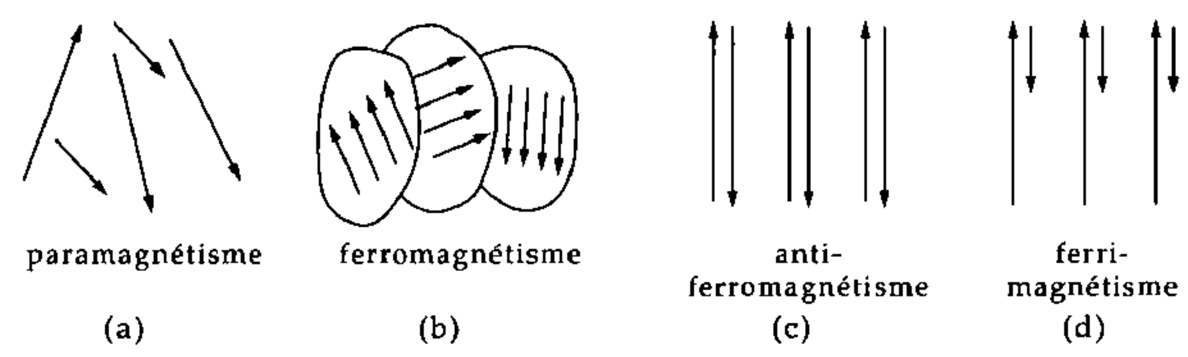


Fig. 15.31 : *Strucrure de substances magnétiques. (a) : paramagnétisme, distribution irrégulière des moments magnétiques, (b) : ferromagnétisme, moments magnétiques alignés dans un domaine de Weiss, (c) : antiferromagnétisme, sous-réseaux de moments magnétiques anti-parallèles d'égales grandeurs, (d) : ferrimagnétisme, sous-réseaux de moments magnétiques anti-parallèles de grandeurs différentes*

2. Courbe d'hystérésis

Courbe de magnétisation des matériaux ferromagnétiques (→ *physique de l'état solide*). La surface définie par la courbe d'hystérésis est une mesure de l'énergie de magnétisation nécessaire pour aligner les domaines de Weiss. La courbe de magnétisation dépend de l'état magnétique initial du matériau ferromagnétique. La courbe d'hystérésis est symétrique par rapport à l'origine, ce qui correspond à une symétrie par inversion de la direction du champ magnétique.

Des matériaux ferromagnétiques sont **magnétiquement durs** si leur courbe d'hystérésis est large (Fig. 15.32 (b)). Alors, un travail important est nécessaire à leur remagnétisation.

Des matériaux ferromagnétiques sont **magnétiquement doux** si leur courbe de magnétisation est étroite. (Fig. 15.32 (a)) Alors, un travail faible est nécessaire à leur remagnétisation.

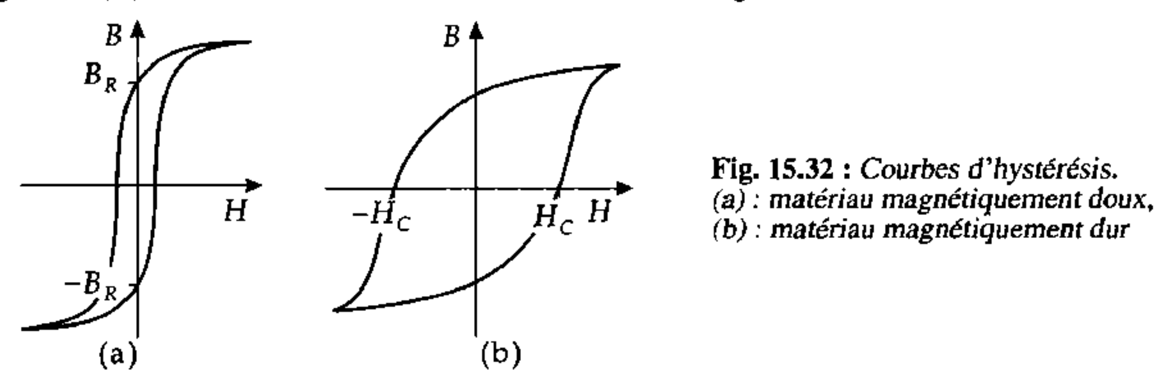


Fig. 15.32 : *Courbes d'hystérésis.*
(a) : matériau magnétiquement doux,
(b) : matériau magnétiquement dur

■ Les matériaux magnétiquement durs sont adaptés à la production d'aimants car ils gardent un champ magnétique rémanent pendant une longue periode, même dans le cas de perturbations, par exemple par d'autres champs magnétiques (bandes magnétiques).
Les matériaux magnétiquement doux sont utilisés dans les noyaux de transformateurs, car d'une part ils ont une densité de flux élevée, et d'autre part la perte d'énergie par remagnétisation est faible (têtes d'enregistrement).

3. Courbe de première aimantation, induction de saturation

Courbe de première aimantation : pour un matériau non magnétisé, la densité de flux magnétique $\vec{B}$ est nulle en l'absence de champ magnétique $\vec{H}$. La courbe de première aimantation passe alors à travers le cycle d'hystérésis B–H (Fig. 15.33).

▷ Une fois le matériau aimanté, la courbe de première aimantation ne peut plus être reproduite. Un

matériau peut être démagnétisé en parcourant un grand nombre de cycles d'hystérésis en diminuant progressivement le champ $\vec{H}$.

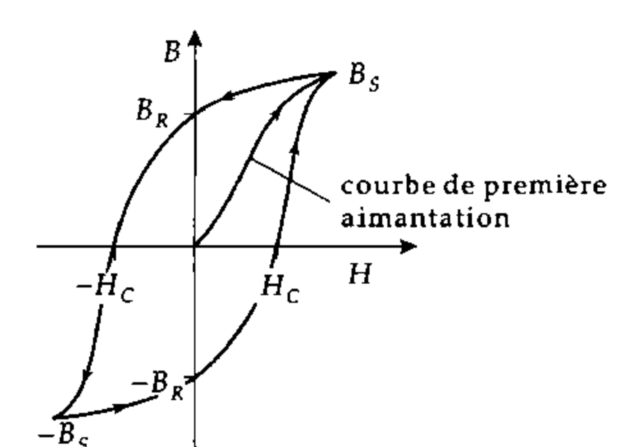


Fig. 15.33 : *Courbe d'hystérésis et de première aimantation*

Induction de saturation B_S : densité de flux pour laquelle tous les moments magnétiques d'un matériau ferromagnetique sont alignés le long du champ. Au delà de ce point, l'aimantation ne peut plus être augmentée de façon appréciable.

4. Rémanence et champ coercitif

Rémanence, ou **induction rémanente** B_R : densité de flux magnétique restant dans le matériau après que l'on a coupé le champ magnétique externe.

Champ coercitif H_C : champ à appliquer pour démagnétiser le matériau ferromagnétique.

▷ La rémanence et le champ coercitif sont donnés dans le Tableau 19.4/3 pour certains alliages magnétiques.

5. Dépendance en température du ferromagnétisme

Le ferromagnétisme décroît avec l'augmentation de la température. Ensuite le matériau ferromagnétique devient paramagnétique.

Loi de Curie-Weiss : décrit la dépendance en température de la susceptibilité χ_m des matériaux ferromagnétiques (Fig. 15.34)

$$\chi_m = \frac{C}{T - \theta_C}$$

Ici, θ_C est la **température ferromagnétique de Curie** et C est une constante du matériau.

● Au dessus de la température de Curie, le matériau est paramagnétique.

▷ La température de Curie de différents éléments ferromagnétiques ainsi que de certains alliages binaires Fer – Nickel est donnée dans les Tableaux 19.5/1, 19.5/2 et 19.5/3.

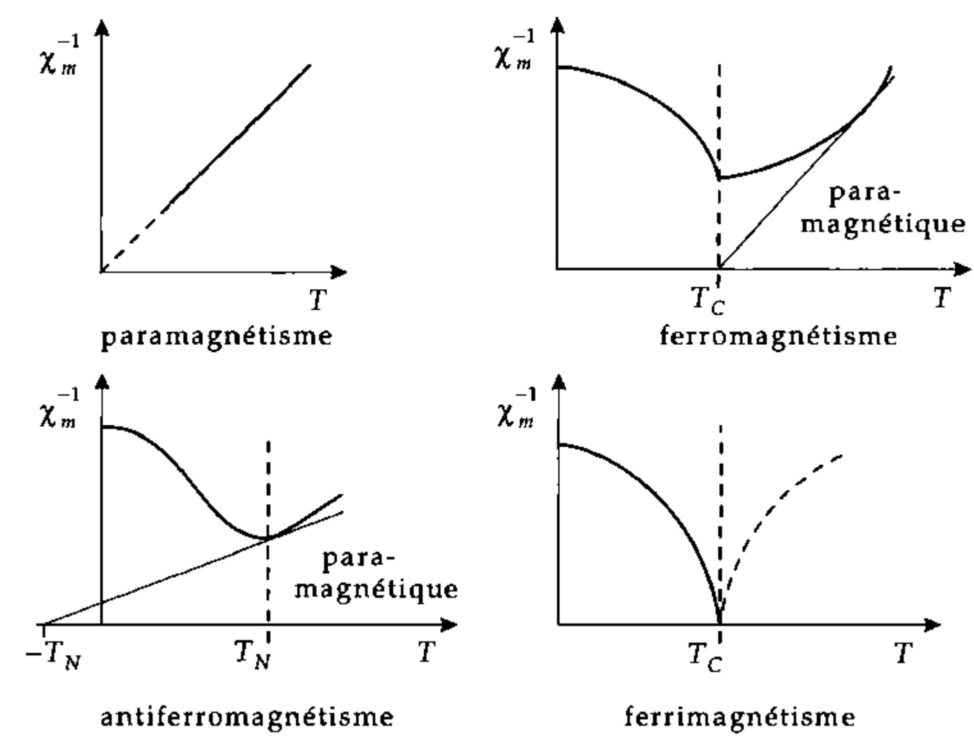


Fig. 15.34 : *Dépendance en température de la susceptibilité magnétique. T_C : température de Curie, T_N : température de Néel*

6. Magnétostriction

Sous l'action d'un champ magnétique, les substances ferromagnétiques subissent des changement de formes dus à la translation ou à la rotation des cloisons de Bloch. Il en résulte des contractions ou des allongements.

Magnétostriction volumique : modification de volume sans changement de forme.

Magnétostriction de Joule : changement de forme sans modification de volume. Elle est généralement plus importante que la magnétostriction volumique.

Magnétostriction inverse : modification de l'aimantation provoquée par changement des tensions mécaniques.

15.16.4 Antiferromagnétisme

L'**antiferromagnétisme** se produit lorsque dans un cristal il y a deux sous-réseaux de moments magnétiques d'égale amplitude alignés de façon anti-parallèle.

- La perméabilité relative des matériaux antiferromagnétiques est supérieure à 1 :
  $\chi_m > 1$

La **loi de Néel** décrit l'effet de la température sur les matériaux antiferromagnétiques, :

$$\chi_m = \frac{C}{T + T_N}$$

T_N est appelée la **température de Néel.** C est une constante du matériau.

▷ Température de Néel et susceptibilité magnétique de quelques matériaux antiferromagnétiques sont données dans le Tableau 19.7/1.

15.16.5 Ferrimagnétisme

Le **ferrimagnétisme** se produit lorsque, dans un matériau, il y a deux sous-réseaux de moments magnétiques d'amplitudes différentes conduisant à un moment magnétique résultant non nul. De ce fait, on observe des propriétés ferromagnétiques comme l'hystérésis aussi bien que des propriétés antiferromagnétiques lorsque les moments magnétiques des deux sous-réseaux sont de directions opposées.

Ferrites : matériaux ferrimagnétiques qui sont presque dépourvus de courants tourbillonnaires à cause de leur résistance spécifique élevée. Les ferrites sont des céramiques utilisées comme noyau dans les bobines pour hautes fréquences comme par exemple, les antennes à ferrite.

▷ Substances aux propriétés ferrimagnétiques :
$NiFe_2O_3$, $CoFe_2O_3$, ferrites hexagonales $BaO \cdot 6Fe_2O_3$, $PbO \cdot Fe_2O_3$,
grenats $3Ce_2O_3 \cdot 5Fe_2O_3$, $3Sm_2O_3 \cdot 5Fe_2O_3$.

▷ Les propriétés de quelques ferrites sont données dans le Tableau 19.6/1.

15.17 Champs magnétiques aux interfaces

À la transition entre un milieu de perméabilité μ_1 et un autre milieu de perméabilité μ_2, séparés par une interface ne transportant pas de courant, on a sur l'interface :

1. Composantes du champ magnétique $\vec{H}$

● La composante tangentielle du champ magnétique H_t ne varie pas lors de la transition :
$H_t^1 = H_t^2$
La composante normale du champ magnétique est discontinue (Fig. 15.35).

2. Composantes de la densité de flux magnétique $\vec{B}$

● La composante normale de la densité de flux magnétique B_n ne change pas lors de la transition :
$B_n^1 = B_n^2$
La composante tangentielle de la densité de flux magnétique est discontinue (Fig. 15.36).

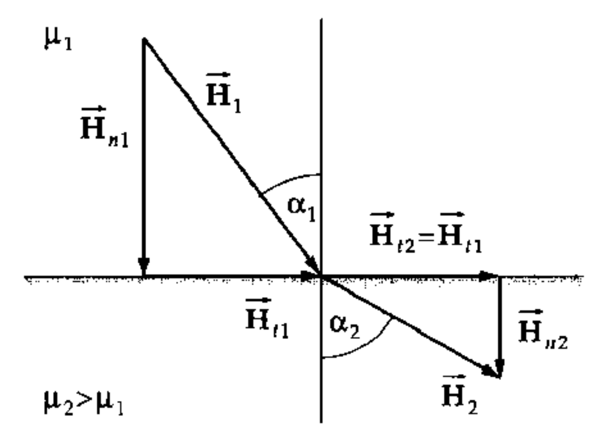


Fig. 15.35 : *Intensité du champ magnétique à l'interface*

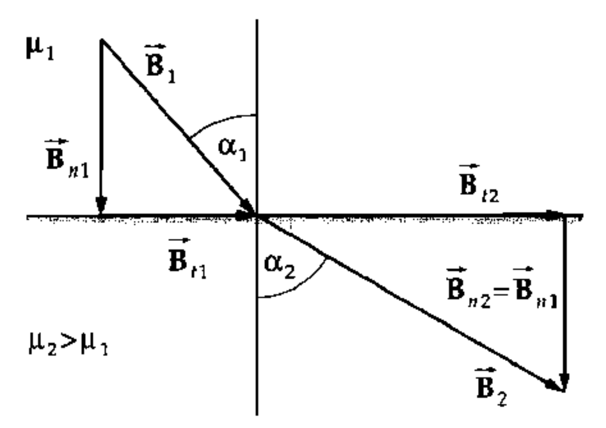


Fig. 15.36 : *Intensité du flux magnétique à l'interface*

3. Relations angulaires à l'interface

α représente l'angle entre la perpendiculaire (la normale à l'interface) et la direction du champ magnétique. Alors, les tangentes des angles α_1 dans le premier milieu et α_2 dans le second milieu sont reliées comme les perméabilités μ_1 et μ_2 ou les perméabilités relatives μ_{r1} et μ_{r2} :

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$

- Dans la transition d'un milieu de perméabilité μ_1 vers un milieu de perméabilité plus élevée μ_2 :
  $\alpha_1 < \alpha_2$
  Lors de la transition, la direction du champ magnétique s'éloigne de la perpendiculaire.
- Dans la transition d'un milieu de perméabilité μ_1 vers un milieu de perméabilité plus faible μ_2 :
  $\alpha_1 > \alpha_2$
  Lors de la transition, la direction du champ magnétique se rapproche de la perpendiculaire.

15.18 Induction

Induction : génération d'une tension (**force électromotrice induite : f.é-m.**) aux bornes d'un conducteur ou d'une bobine par la modification du flux magnétique traversant le conducteur ou la bobine.

- La tension induite u_{ind} est égale au produit de la variation du flux magnétique Φ par rapport au temps, par le nombre de spires n de la bobine :

Tension induite = nbre. de spires × $\frac{\textbf{variation du flux}}{\textbf{intervalle de temps}}$				$L^2T^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$u_{\text{ind}} = -n\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$	u_{ind}	V	tension induite	
	$\mathrm{d}\Phi$	Vs	variation du flux magnétique	
	$\mathrm{d}t$	s	intervalle de temps	
	n	1	nombre de spires	

On distingue :

- induction due à un déplacement.
- induction due à une variation de champ produite par celle d'un courant : transformateur.

15.18.1 Induction de déplacement

Dans un champ d'induction constant $\vec{B}$, le déplacement $\mathrm{d}\vec{s}$ d'un élément $\mathrm{d}\vec{l}$ de circuit, produit aux bornes de $\mathrm{d}\vec{l}$ une f.é.m.

$$du = -\frac{1}{\mathrm{d}t}(\,\mathrm{d}\vec{s} \wedge \,\mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{B}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\,\mathrm{d}\Phi)$$

où $\mathrm{d}\Phi$ est le flux balayé par $\mathrm{d}\vec{l}$ lors du déplacement $\mathrm{d}\vec{s}$. Dans une partie finie du circuit apparaît la f.é.m. :

$$u = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

La variation du flux magnétique est déterminée par la surface $\Delta A = \,\mathrm{d}\vec{s} \wedge \,\mathrm{d}\vec{l}$ balayée par le conducteur lors de son déplacement :

$$\Delta\Phi = \vec{\mathbf{B}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}$$

et la tension induite est :

Tension ~ $\frac{\text{variation de surface}}{\text{intervalle de temps}}$ × densité de flux				$L^2T^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$u_{ind} = -n\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B}$	u_{ind}	V	tension induite	
	$d\vec{A}$	Vs	variation de surface	
	dt	s	intervalle de temps	
	$\vec{B}$	Vs/m²	densité de flux magnétique	
	n	1	nombre de spires du conducteur	

■ Lors de la rotation d'une bobine dans un champ magnétique uniforme, le flux magnétique est proportionnel au cosinus de l'angle α entre la direction du champ magnétique $\vec{B}$ et la normale à la surface A (Fig. 15.37). Si la bobine tourne avec une vitesse angulaire constante ω, une tension alternative de fréquence $f = \omega/(2\pi)$ est induite aux bornes de la bobine.
La tension induite est :
$u_{ind}(t) = A \cdot B \cdot \omega \sin \omega t = \hat{u}_{ind} \cdot \sin \omega t$
où $\hat{u}_{ind}$ est l'amplitude de la tension alternative.

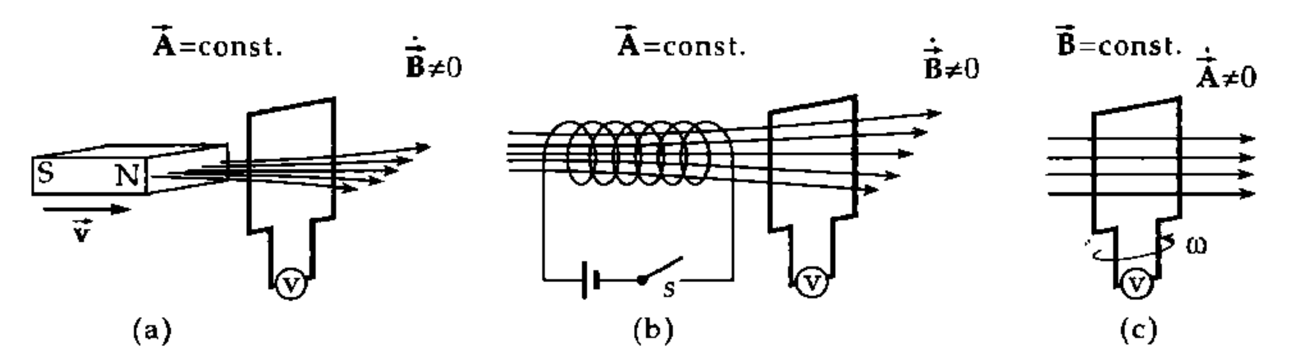


Fig. 15.37 : *Induction de tension dans un bobine conductrice*

▷ Le fonctionnement des générateurs de tension (alternateurs, dynamo ...) est fondé sur l'induction de déplacement.

1. Courants de Foucault

Courants électriques tourbillonnaires induits dans un conducteur placé dans un champ magnétique variable. Les lignes de courant dans le conducteur forment des boucles (tourbillons) fermées sur elles mêmes.

■ **Freins à courants de Foucault** : les courants de Foucault sont induits dans un conducteur se déplaçant dans un champ magnétique. Le champ magnétique agit sur ces courants et produit une force qui s'oppose à la cause qui les produits, donc au mouvement du conducteur. Un disque conducteur tournant est subitement ralenti si on applique un champ magnétique perpendiculaire à sa surface.

2. Effet de peau

Les courants alternatifs de haute fréquence ($f > 10^7$ Hz) ne circulent pas uniformément à travers toute la surface de section droite d'un conducteur, mais uniquement dans une mince couche près de la surface du conducteur. Le champ magnétique variable, produit par le courant alternatif, induit, dans le volume du

conducteur, une tension qui diminue vers la surface du conducteur et qui s'oppose au courant. Ceci entraîne une augmentation de la densité de courant $\vec{\mathbf{J}}$ près de la surface du conducteur :

$$J(r,t) = \hat{J}(r)\cos(2\pi ft + \phi(r)), \quad \hat{J} = \hat{J}(R)\,\mathrm{e}^{h(r)}$$

avec

$$h(r) = -\frac{\delta^2 R^4}{4}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^4\right]$$

$$\phi(r) = \phi(R) + \frac{\delta^2 R^4}{4}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

$$\delta = \mu_0\,\kappa\,\omega$$

où R est le rayon du conducteur, r la distance à l'axe du conducteur et κ la conductance.

15.18.2 Induction par variation de champ

Induction par variation de champ : induction de tension dans un conducteur par la variation du champ magnétique environnant. La variation du flux magnétique $\Delta\Phi$ est déterminée par la variation du champ magnétique ΔB :

$$\Delta\Phi = \Delta B \cdot A\cos\alpha$$

où α est l'angle entre la direction du flux et la normale à la surface.

Tension $\sim \frac{\textbf{variation de flux}}{\textbf{intervalle de temps}} \times$ **surface**				$\mathbf{L^2T^{-3}MI^{-1}}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$u_{\mathrm{ind}} = -n\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{B}}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{\mathbf{A}}$	u_{ind}	V	tension induite	
	$\mathrm{d}\vec{\mathbf{B}}$	Vs/m²	variation de la densité de flux	
	$\mathrm{d}t$	s	intervalle de temps	
	$\vec{\mathbf{A}}$	Vs	surface	
	n	1	nombre de spires du conducteur	

■ Une bobine d'essai est placée dans une bobine parcourue par un courant. Ce courant, et donc le champ magnétique qui en résulte, est interrompu. En conséquence, on observe une tension induite dans la bobine d'essai.

▷ Des **pertes par courants de Foucault** dans un transformateur sont causées par la variation de flux dans le noyau de fer doux. De l'énergie est dissipée par effet Joule par les boucles de courant de Foucault qui s'établissent dans le volume du noyau du transformateur et se manifestent par son échauffement. Elles peuvent être réduites si le noyau est constitué d'une superposition de tôles minces séparées par une couche isolante de faible épaisseur empêchant l'établissement de boucles de courants de Foucault.

● **Loi de Lenz** : le champ magnétique produit par un courant induit s'oppose à la variation du champ magnétique total.

15.19 Auto-induction

1. Définition de l'auto-induction

La variation du courant I dans une bobine de n spires conduit à un changement du flux magnétique la traversant et par conséquent, induit une tension dans cette bobine. La tension induite est proportionnelle à

la variation du courant.

Inductance L : propriété de la bobine, facteur de proportionnalité entre la tension induite et la variation de courant.

- Selon la loi de Lenz, la tension induite s'oppose à la tension initiale.

Tension = nbre de spires × $\frac{\textbf{variation du flux}}{\textbf{intervalle de temps}}$				$L^2T^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$u_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$	u_{ind}	V	tension induite	
	dI	Vs	variation du flux magnétique	
	dt	s	intervalle de temps	
	L	H=Vs/A	inductance	

Henry H : unité SI de l'inductance L.

$[L] = \mathrm{H} = \mathrm{Vs/A}$

Les inductances utilisées en pratique sont de l'ordre de $1\,\mu\mathrm{H} = 10^{-6}$ H à 1 H.

- L'inductance d'une bobine est égale au produit du carré du nombre de spires n par la conductance magnétique Λ_m :

$$L = n^2 \cdot \Lambda_m$$

2. Flux d'induction

Le flux d'induction traversant une bobine, Φ est le produit du flux magnétique Φ par le nombre de spires n. Le flux d'induction est proportionnel au courant i dans la bobine. Le facteur de proportionnalité est l'inductance :

Flux d'induction = inductance × courant				$L^2T^{-2}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\Psi = L \cdot I = n \cdot \Phi$	Ψ	Wb=Vs	flux d'induction	
	L	H=Vs/A	inductance de la bobine	
	I	A	courant dans la bobine	
	n	1	nbre de spires de la bobine	
	Φ	Wb=Vs	flux magnétique traversant la bobine	

Weber Wb : unité SI pour le flux d'induction.

$[\Psi] = \mathrm{Wb} = \mathrm{Vs}$

3. Association d'inductances en série

- **Montage d'inductances en série** : l'inductance totale L_{tot} d'un montage d'inductances en série est égale à la somme de toutes les inductances $L_1, \ldots, L_N$ (Fig. 15.38) :

$$L_{tot} = L_1 + L_2 + \ldots + L_N$$

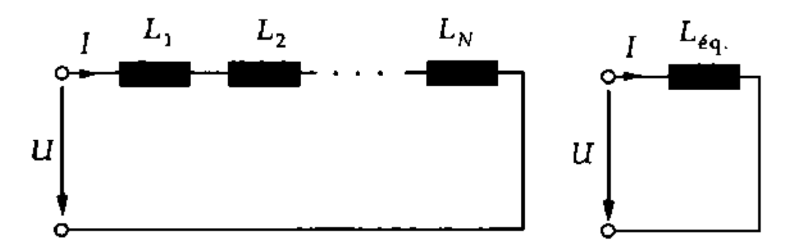


Fig. 15.38 : *Montage d'inductances en série*

4. Association d'inductances en parallèle

- **Montage d'inductances en parallèle** : la réciproque de la valeur de l'inductance totale L_{tot} d'un montage d'inductances en parallèle est égale à la somme des valeurs réciproques de toutes les inductances $L_1, \ldots, L_N$ (Fig. 15.39) :

$$\frac{1}{L_{\text{ges}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_N}$$

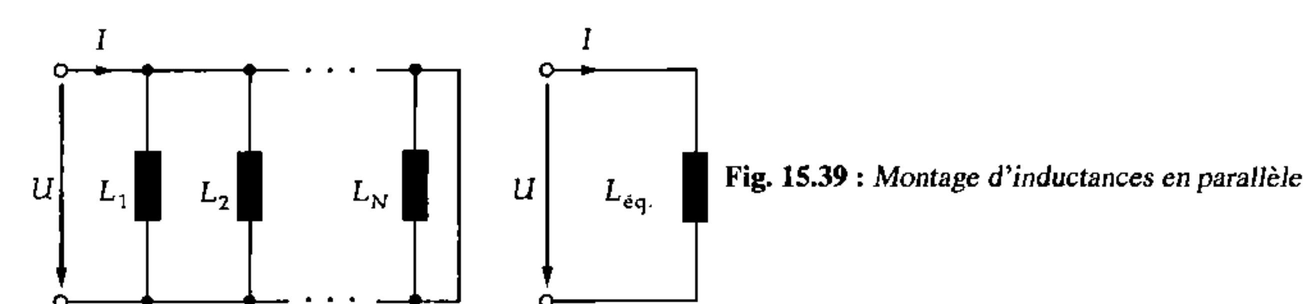


Fig. 15.39 : *Montage d'inductances en parallèle*

15.19.1 Inductances de quelques montages

a) Ligne conductrice

L'inductance d'une ligne conductrice de longueur l et de rayon r (Fig. 15.40 (a)) est donnée par :

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\ln \frac{2l}{r} - \frac{3}{4} \right)$$

b) Ligne bifilaire de section circulaire

L'inductance d'une ligne bifilaire de section circulaire de longueur l, de fils de rayonr r séparés par la distance d (Fig. 15.40 (b)), se calcule à partir de :

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\ln \frac{d}{r} - \frac{1}{4} \right)$$

c) Ligne bifilaire de section rectangulaire

L'inductance d'une ligne bifilaire de section rectangulaire, de longueur l, de fils de côtés a, b séparés par la distance d (Fig. 15.40 (c)), se calcule à partir de :

$$L = \frac{\mu l}{\pi} \frac{2a}{a+b} \qquad a \ll b, \qquad d \ll b$$

$$L = \frac{2\mu l}{\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{a+b} \right) \qquad d \ll a, \qquad d \ll b$$

d) Conducteur torique : l'inductance d'un tore de rayon R et de section r, (Fig. 15.40 (d)), se calcule à partir de :

$$L = \mu R \left[\ln\left(\frac{R}{r}\right) + \frac{1}{4}\right]$$

e) Ligne coaxiale (Fig. 15.40 (e)) :

$$L = \frac{\mu l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$ r_1 : rayon intérieur r_2 : rayon extérieur, l : longueur

f) Solénoïde long $l \gg r$ (Fig. 15.40 (d)) :

$$L \approx \frac{\mu}{l} AN^2$$ l : longueur, A : surface de section droite N : nombre de tours

L'inductance est proportionnelle à l'aire de la section A de la bobine, au carré du nombre N de spires et inversement proportionnelle à la longueur l de la bobine.

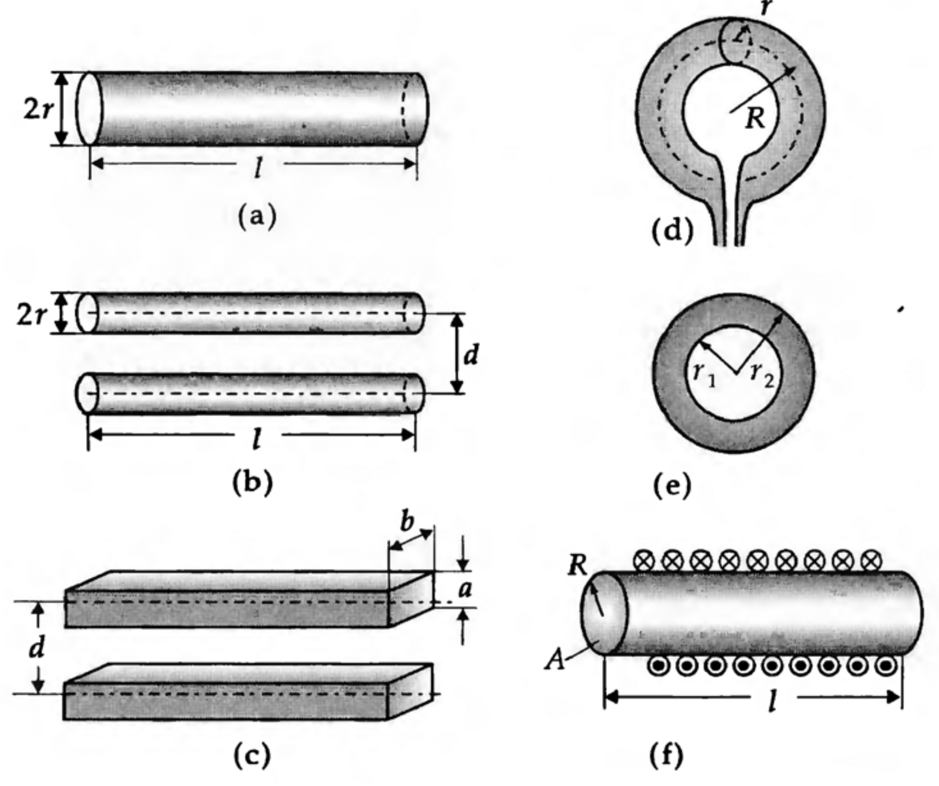


Fig. 15.40 : *Inductance de diverses formes de conducteurs. (a) : ligne simple, (b) : ligne bifilaire de section circulaire, (c) : ligne bifilaire de section rectangulaire, (d) : bobine torique, (e) : ligne coaxiale, (f) : solénoïde*

g) Bobine plate, courte, à une couche de spires :

$$L = f \frac{\mu}{l} AN^2, \quad f \approx \frac{1}{1 + r/l}$$

l : longueur, r : rayon d'une spire, f : facteur de forme de la bobine

15.19.2 Inductance magnétique

Conductance magnétique Λ_m : quantité dépendant de la géométrie et de la perméabilité du circuit magnétique qui peut être calculée dans des cas simples. Dans le cas du noyau d'une bobine, la conductance magnétique est généralement donnée par le constructeur.

Henry H : unité SI pour l'inductance magnétique Λ_m.

$[\Lambda_m] = \mathrm{H} = \mathrm{Vs/A}$

La conductance magnétique d'une bobine torique dépourvue de noyau est déduite à partir de la section A traversée par le champ magnétique, la longueur moyenne des lignes de champ l, et la perméabilité μ_0 :

$$\Lambda_m = \mu_0 \cdot \frac{A}{l}$$

L'inductance magnétique d'une bobine torique avec noyau de fer doux se déduit de la section A traversée par le champ magnétique, la longueur moyenne des lignes de champ l, la perméabilité μ_0 et la perméabilité relative μ_r du fer :

$$\Lambda_m = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{A}{l}$$

Résistance magnétique R_m : valeur réciproque de la conductance magnétique :

$$R_m = \frac{1}{\Lambda_m}$$

▷ La résitance magnétique est employée dans le calcul de circuits magnétiques.

■ Une bobine avec un noyau de fer a une conductance magnétique $\Lambda_m = 5\,\mu\mathrm{H}$ et 40 spires. L'inductance dans la bobine vaut :
$L = n^2 \cdot \Lambda_m = 40^2 \cdot 5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{H} = 8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H} = 8\,\mathrm{mH}$.

15.20 Induction mutuelle

1. Couplage magnétique

Un **couplage magnétique** de deux bobines apparaît si chaque bobine est traversée par le même flux magnétique (Fig. 15.41 et 15.42).

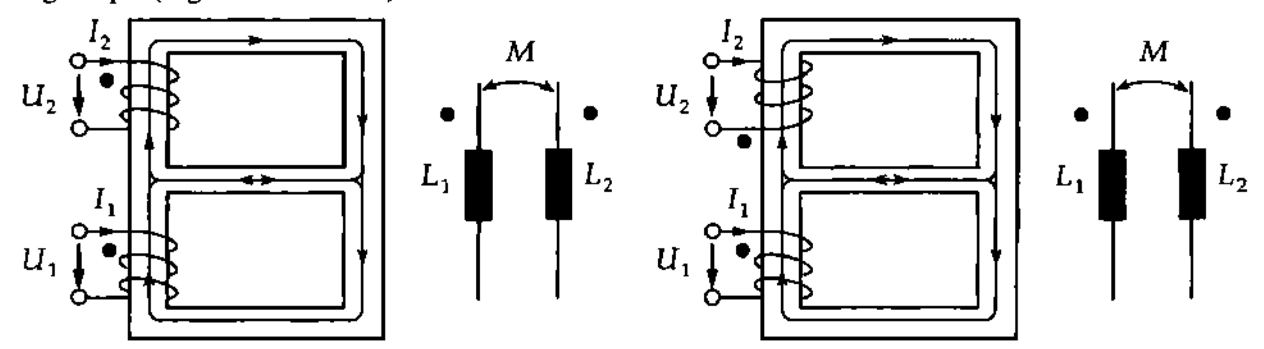


Fig. 15.41 : *Couplage magnétique de deux bobine enroulées dans le même sens*

Fig. 15.42 : *Couplage magnétique de deux bobine enroulées dans des sens opposés*

Si le flux magnétique traversant une des deux bobines couplées change, une tension est induite dans l'autre bobine.

En partant de la première bobine dans laquelle le courant I_1 produit le flux magnétique Φ_1, on introduit les notations suivantes :

Flux utile Φ_N : partie du flux magnétique qui traverse la seconde bobine :

$$\Phi_N = k_1 \cdot \Phi_1$$

Coefficient de couplage k_1 : représente la fraction de flux magnétique traversant la seconde bobine.

Flux parasite Φ_S : partie du flux magnétique qui est perdue :

$$\Phi_S = \Phi_1 - \Phi_N = (1 - k_1) \cdot \Phi_1$$

■ Dans un transformateur réel, une partie du flux magnétique est perdue comme flux parasite.

2. Inductance mutuelle

L'**inductance mutuelle** M est le flux d'induction dans la deuxième bobine causé par le courant I_1 dans l'enroulement de la première bobine. L'inductance mutuelle est proportionnelle au produit des nombres de spires n_1 et n_2 des deux bobines, de la conductance magnétique de la première bobine et du coefficient de couplage k_1.

Inductance mutuelle			$L^2T^{-2}MI^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$M = k_1 \cdot \Lambda_1 \cdot n_1 \cdot n_2$	M	H	inductance
	Λ_1	H	conductance magnétique
	n_1	1	nombre de spires bobine 1
	n_2	1	nombre de spires bobine 2
	k_1	1	coefficient de couplage

Henry H : unité SI de l'inductance mutuelle M.

$[M] = \text{H}$

● En supposant la perméabilité constante, les inductances mutuelles de deux bobines couplées sont égales.

15.20.1 Transformateur

1. Transformateur

Un transformateur transforme des basses tensions en tensions plus élevées et inversement. Un transformateur est constitué d'une bobine primaire et d'une bobine secondaire traversées par un même flux magnétique (Fig. 15.43).

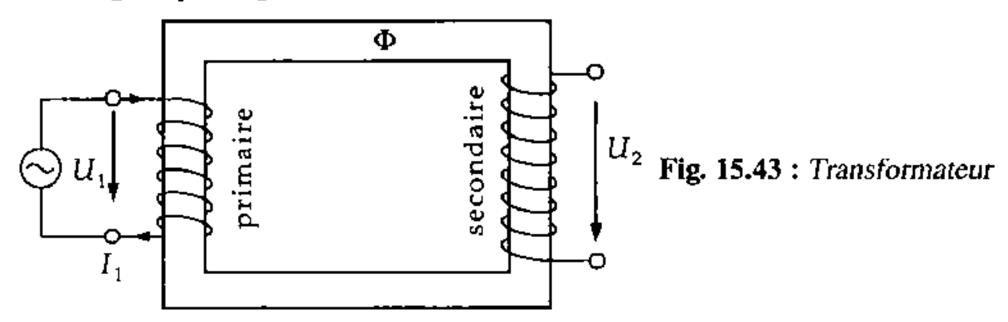


Fig. 15.43 : *Transformateur*

Enroulement primaire : bobine aux bornes de laquelle on applique la tension à transformer.

Enroulement secondaire : bobine aux bornes de laquelle on récupère la tension de sortie.

Transformateur idéal : transformateur sans pertes.

Efficacité d'un transformateur réel : supérieure à 95% pour les bons transformateurs, c'est-à-dire que les pertes dans le transformateur sont faibles.

- Si un courant alternatif est appliqué dans la bobine primaire, alors le flux magnétique traversant cette bobine change et une tension est induite dans la bobine secondaire.

2. Rapport de transformation

On appelle rapport de transformation n, le rapport entre la tension du côté primaire et la tension du côté secondaire. Si n est supérieur à un, il se produit une diminution de la tension (transformateur abaisseur) ; si n est inférieur à un, il se produit une augmentation de la tension (transformateur élévateur). Le déphasage de la tension est 180°.

Pour des transformateurs idéaux, le rapport des tensions est :

$$\frac{U_1}{U_2} = n = \frac{N_1}{N_2}$$

et le rapport des courants :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

- Le rapport des tensions de la bobine primaire et de la bobine secondaire est égal à la valeur réciproque du rapport des courants.

▷ Si la tension à transformer contient une composante continue alors, celle-ci n'est pas transformée : la tension induite du côté secondaire est une tension purement alternative. En conséquence, un transformateur est aussi utilisé pour séparer un courant continu d'un courant alternatif. On utilise ce principe notamment dans les amplificateurs.

3. Exemple de calcul d'un transformateur

■ La bobine primaire d'un transformateur a $N_1 = 100$ spires, la bobine secondaire en a $N_2 = 250$. Soit la tension d'entrée $U_1 = 12\,\mathrm{V}$ alors la tension du côté secondaire est :

$$U_2 = \frac{N_2}{N_1} \cdot U_1 = \frac{250}{100} \cdot 12\,\mathrm{V} = 30\,\mathrm{V}$$

Si on applique une résistance de charge $R = 300\,\Omega$ aux bornes de la bobine secondaire, un courant $I_2 = 0,1\,\mathrm{A}$ circule dans cette bobine. Le courant du côté primaire est :

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} \cdot I_2 = \frac{250}{100} \cdot 0,1\,\mathrm{A} = 0,25\,\mathrm{A}$$

15.21 Énergie du champ magnétique

1. Densité d'énergie du champ magnétique

La densité d'énergie du champ magnétique désigne l'énergie magnétique ΔW_m par unité de volume ΔV. Si l'énergie est distribuée de façon non uniforme dans le milieu, alors on diminue ΔV jusqu'à ce que l'énergie y soit distribuée uniformément :

$$w_m = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta W_m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}V}$$

En général, la densité d'énergie est l'intégrale de l'intensité du champ $\vec{H}$ par la densité de flux magnétique $\vec{B}$:

$$w_m = \int_0^{B_{max}} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{B}$$

Si la courbe de magnétisation est linéaire, c'est-à-dire que l'induction magnétique B varie linéairement avec l'intensité du champ magnétique H, la densité d'énergie w_m est proportionnelle au produit de B par H :

Densité d'énergie magnétique $= \dfrac{\textbf{énergie}}{\textbf{élément de volume}}$				$ML^{-1}T^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$w_m = \dfrac{1}{2} B \cdot H$	w_m	J/m³	densité d'énergie magnétique	
	$\vec{B}$	Vs/m²	induction magnétique	
	$\vec{H}$	A/m	champ magnétique	

La densité d'énergie est proportionnelle à la surface ombrée de la Figure 15.44.

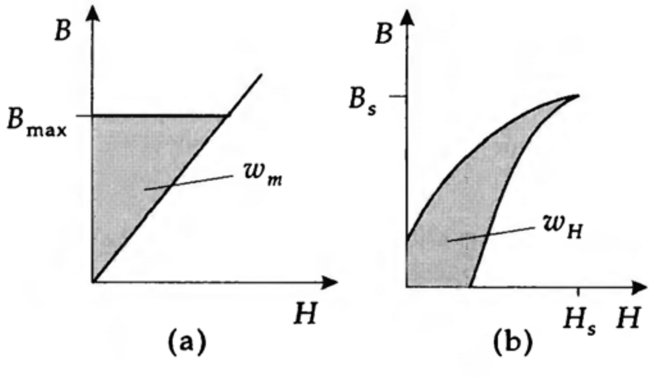


Fig. 15.44 : *(a) : Densité d'énergie pour une courbe de magnétisation linéaire, (b) : énergie de magnétisation d'une courbe d'hystérésis. B_S et H_S désignent respectivement l'induction et la champ de saturation*

Perte par Hysteresis : l'énergie reçue lors de la magnétisation est supérieure à celle libérée lors de la démagnétisation. La différence d'énergie est dissipée sous forme de chaleur. La surface définie par la courbe d'hystérésis représente la perte d'énergie (Fig. 15.44).

2. Énergie du champ magnétique

L'**énergie du champ magnétique** est obtenue par intégration sur le volume V occupé par le champ. Pour le champ magnétique dans un matériau possédant une courbe de magnétisation linéaire, l'énergie du champ magnétique est :

$$W_m = \int_V w_m \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} \, \mathrm{d}V$$

L'**énergie du champ d'une bobine** W_m : est proportionnelle au courant I dans la bobine :

Énergie $\propto$ **inductance** $\times$ **courant**²				$L^2T^{-2}M$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$W_m = \dfrac{1}{2} L I^2$	W_m	J	énergie magnétique	
	L	H	inductance	
	I	A	courant dans la bobine	

3. Analogies entre grandeurs électriques et magnétiques

Champ électrique	Unité	Champ magnétique	Unité
permittivité du vide $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	As/(Vm)	perméabilité du vide $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$	Vs/(Am)
intensité du champ $E = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}$	V/m	intensité du champ $H = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}l}$	A/m
différence de potentiel $U_{AB} = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}}\,\mathrm{d}\vec{s}$	V	potentiel $V_{AB} = \int_A^B \vec{\mathbf{H}}\,\mathrm{d}\vec{s}$	A
courant $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$	A	f.é.m. induite $U = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$	V
charge $Q = \int I(t)\,\mathrm{d}t$	As	flux magnétique $\Phi = BA$	Vs
permittivité $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$	As/(Vm)	perméabilité $\mu = \mu_0\mu_r$	Vs/(Am)
permittivité rel. ϵ_r	1	perméabilité rel. μ_r	1
déplacement $\vec{\mathbf{D}} = \epsilon\vec{\mathbf{E}}$	$\mathrm{As/m^2}$	densité de flux magn. $\vec{\mathbf{B}} = \mu\vec{\mathbf{H}}$	$\mathrm{Vs/m^2}$
force de Coulomb $\vec{\mathbf{F}} = Q\vec{\mathbf{E}}$	N	force de Lorentz $\vec{\mathbf{F}} = Q(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}})$	N
moment dipolaire $p = Ql$	As m	moment dipolaire $m = \Phi l$	Vs m
capacité $C = \frac{Q}{U}$	F	inductance $L = -\frac{U}{\mathrm{d}I/\mathrm{d}t}$	H
densité d'énergie $w_e = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{D}}\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}\epsilon\vec{\mathbf{E}}^2$	$\mathrm{Ws/m^3}$	densité d'énergie $w_m = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{B}}\vec{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}\mu\vec{\mathbf{H}}^2$	$\mathrm{Ws/m^3}$
énergie électrique d'un condensateur $W_e = \frac{1}{2}CU^2$	J	énergie magnétique d'une bobine $W_m = \frac{1}{2}LI^2$	J

15.22 Équations de Maxwell

- Il y a quatre équations de Maxwell.

1. Grâce à l'électrostatique, on peut affirmer que le champ électrique est un champ de source. Le flux électrique traversant une surface fermée S est égal à la charge contenue dans le volume défini par cette surface :

$$Q = \int_V \rho \, \mathrm{d}V = \varepsilon_0 \oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \oint_S \vec{\mathbf{D}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$

2. Le fait que, jusqu'à maintenant, aucun monopôle magnétique n'ait été observé suggère que le champ magnétique est sans source. Le flux de l'induction magnétique au travers d'une surface fermée est nul :

$$\oint_S \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = 0$$

▷ Cette équation devrait être modifiée si un jour des charges magnétiques étaient détectées. Par analogie avec la charge électrique, l'intégrale sur la densité de charge magnétique apparaîtrait du côté droit de l'équation.

3. À partir de la loi d'induction, on obtient qu'une variation de flux magnétique traversant un conducteur devrait produire une tension aux bornes de ce conducteur. Si les bornes de ce conducteur sont court-circuitées, un courant tourbillonnaire apparaît. La loi d'induction peut aussi être écrite sous la forme générale :

$$\oint_s \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\int_A \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{B}}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$

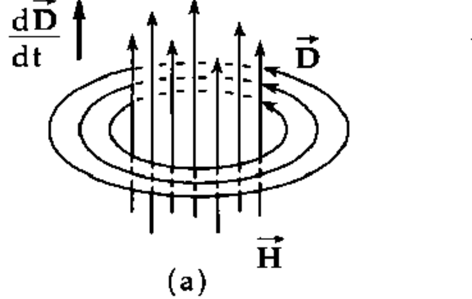
La variation de l'induction magnétique $\vec{\mathbf{B}}$, intégrée sur la surface A, est égale à l'intégrale de l'intensité du champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ sur le chemin fermé s.

- Tout champ magnétique variable produit un champ électrique tourbillonnaire (Fig. 15.45).

4. La dernière équation de Maxwell est obtenue en introduisant le courant de déplacement :

$$I + \int_A \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{D}}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \int_A (\vec{\mathbf{J}} + \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{D}}}{\mathrm{d}t}) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \oint_s \vec{\mathbf{H}} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

- Tout champ électrique variable génère un champ magnétique tourbillonnaire (Fig. 15.45).



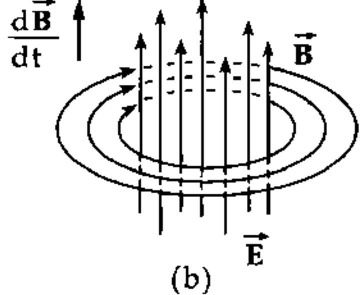


Fig. 15.45 : *(a) : Un champ électrique variable génère un champ magnétique tourbillonnaire. (b) : Un champ magnétique variable génère un champ électrique tourbillonnaire*

15.22.1 Courant de déplacement

Le champ magnétique est un champ tourbillonaire. Ceci est exprimé par le fait que l'intégrale du champ $\vec{\mathbf{H}}$ le long d'un parcours s est égale à la somme I des courants enlacés par s :

$$I = \int_A \vec{\mathbf{J}} \cdot \, \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \oint_s \vec{\mathbf{H}} \cdot \, \mathrm{d}\vec{s}$$

Le courant I résulte de l'intégrale de la densité de courant $\vec{\mathbf{J}}$ sur la surface définie par le chemin A.

1. Courant de déplacement

Correspond à la variation du déplacement électrique $\vec{\mathbf{D}}$ par rapport au temps. Dans un circuit avec un condensateur, un courant circule jusqu'à ce que le condensateur soit chargé. Le courant est entouré d'un champ magnétique. Durant le chargement du condensateur, l'intensité du champ électrique aux bornes du condensateur varie. Si il y a un diélectrique entre les plaques du condensateur, les charges présentes dans le diélectrique sont déplacées sous l'effet de la polarisation. Mais ce déplacement de charges produit à nouveau un champ magnétique. Avec le courant de déplacement, la dernière équation de Maxwell devient :

$$I + \int_A \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{D}}}{\mathrm{d}t} \cdot \, \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \int_A (\vec{\mathbf{J}} + \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{D}}}{\mathrm{d}t}) \cdot \, \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \oint_s \vec{\mathbf{H}} \cdot \, \mathrm{d}\vec{s}$$

▷ Le système des équations de Maxwell n'est complété que par l'introduction du courant de déplacement.

2. Forme intégrale et différentielle des équations de Maxwell

Équations de Maxwell		
Signification	Forme intégrale	Forme différentielle
Solénoïdalité du champ magnétique	$\oint_O \vec{\mathbf{B}} \cdot \, \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = 0$	$\mathrm{div}\vec{\mathbf{B}} = 0$
Le flux traversant une surface est égal à la charge intérieure	$\oint_O \vec{\mathbf{D}} \cdot \, \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = Q$	$\mathrm{div}\vec{\mathbf{D}} = \rho$
Loi de Faraday : un champ magnétique variable génère un champ électrique	$\oint_S \vec{\mathbf{E}} \cdot \, \mathrm{d}s = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{\mathbf{B}} \cdot \, \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$	$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$
Théorème d'Ampère (Maxwell) : un champ électrique variable génère un champ magnétique	$\oint_S \vec{\mathbf{H}} \cdot \, \mathrm{d}s = \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{\mathbf{D}} \cdot \, \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} + I$	$\mathrm{rot}\vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{j}}$

15.22.2 Ondes électromagnétiques

À partir des équations de Maxwell, on peut déduire qu'un conducteur, dans lequel des charges oscillent, est entouré par des champs magnétiques et électriques oscillants. Le champ électrique oscillant génère un champ magnétique et réciproquement.

1. Ondes électromagnétiques

Propagation des champs électriques et magnétiques dans l'espace. Les ondes électromagnétiques se propagent, elles sont la solution des équations de Maxwell. Les ondes transportent de l'énergie.

Les ondes électromagnétiques vont des grandes ondes radio jusqu'aux énergies plus hautes du rayonnement γ de la désintégration nucléaire et du rayonnement cosmique (→ *Table des ondes radio*).

2. Solution de l'équation d'onde

Équations d'onde des champs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{H}}$ dans le vide ($\rho = 0$, $\vec{\mathbf{J}} = 0$) :

$$\Delta\vec{\mathbf{E}} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0\,, \quad \Delta\vec{\mathbf{H}} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2} = 0$$

Solutions monochromatiques :

- Pour une onde se propageant dans la direction $\vec{\mathbf{k}}$:
  $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}})}$, $\quad \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{H}}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t - \vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}})}$
- Ondes sphériques se propageant **du point** $\vec{\mathbf{r}} = 0$ (signe supérieur), respectivement **vers le point** $\vec{\mathbf{r}} = 0$ (signe inférieur) :
  $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t \mp kr)}$, $\quad \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{H}}_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t \mp kr)}$

Les vecteurs $\vec{\mathbf{E}}_0$ et $\vec{\mathbf{H}}_0$ déterminent l'intensité et la direction de polarisation de l'onde électromagnétique.

3. Vitesse de la lumière dans le vide

La vitesse de la lumière dans le vide c_0 est une constante fondamentale :

Vitesse de la lumière dans le vide			**LT^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$c_0 = 299792458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	c_0	m/s	vitesse de la lumière dans le vide

La propagation des ondes électromagnétiques dans le vide se fait à la vitesse de la lumière. La vitesse de la lumière détermine la permittivité ε_0 et la constante de perméabilité μ_0 :

Vitesse de la lumière dans le vide			**LT^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$	c_0	m/s	vitesse de la lumière dans le vide
	ε_0	Am/(Vs)	permittivité
	μ_0	Vm/(As)	constante de perméabilité

4. Vitesse de la lumière dans la matière

c : vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans la matière. Ici, la permittivité du vide doit être remplacée par la permittivité $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ et la perméabilité du vide par la perméabilité du matériau :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} \cdot c_0$$

▹ Les ondes électromagnétiques dans le domaine radio peuvent être générées par des circuits oscillants.

5. Énergie électrodynamique

À partir des équations de Maxwell, on déduit la relation :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{\mathbf{E}}\cdot\vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{H}}\cdot\vec{\mathbf{B}}}{2}\right) + \operatorname{div}(\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}) = -\vec{\mathbf{J}}\vec{\mathbf{E}}$$

Le premier terme du membre de gauche décrit la variation temporelle de la densité d'énergie w du champ électromagnétique :

$$w = w_e + w_m = \frac{\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}} + \vec{\mathbf{H}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{2}$$

Le deuxième terme du membre de gauche est la divergence de la densité d'énergie magnétique $\vec{\mathbf{S}}$ (vecteur de Poynting) du champ électromagnétique :

$$\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}$$

Le membre de droite de l'équation représente la transformation de l'énergie électromagnétique en d'autres formes d'énergie par unité de volume et de temps.

15.22.3 Vecteur de Poynting

Vecteur de Poynting $\vec{\mathbf{S}}$: donne l'amplitude et la direction du transport d'énergie dans les champs électromagnétiques. Le vecteur de Poynting en un point de l'espace est obtenu par le produit vectoriel de l'intensité du champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ par l'intensité du champ magnétique $\vec{\mathbf{H}}$ en ce point. Il a la dimension de la densité d'un courant d'énergie :

Vecteur de Poynting = champ électrique ∧ champ magnétique			$\mathrm{T^{-3}M}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{H}}$	$\vec{\mathbf{S}}$	$\mathrm{W/m^2}$	vecteur de Poynting
	$\vec{\mathbf{E}}$	V/m	champ électrique
	$\vec{\mathbf{H}}$	A/m	champ magnétique

Watt/mètre carré, $\mathrm{W/m^2}$: unité SI pour le vecteur de Poynting $\vec{\mathbf{S}}$. 1 Watt/mètre carré est l'amplitude du vecteur de Poynting en un point de l'espace, si l'intensité du champ électrique est $E = 1\ \mathrm{V/m}$ et l'intensité du champ magnétique $H = 1\ \mathrm{A/m}$ en ce point et les vecteurs des intensités des champs sont orthogonaux.

$[\vec{\mathbf{S}}] = \mathrm{W/m^2}$

L'énergie W transportée par unité de temps $\mathrm{d}t$ au travers de la surface A se déduit de l'intégrale de vecteur de Poynting sur cette surface :

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \int_A \vec{\mathbf{S}} \cdot \mathrm{d}A$$

Pour des ondes électromagnétiques libres :

- L'amplitude du vecteur de Poynting est le produit de la densité d'énergie de l'onde électromagnétique par la vitesse de la lumière :

  $$S = \frac{c}{2}(w_e + w_m)$$

16 Applications à l'électrotechnique

1. Circuit électrique

Un **circuit électrique** est composé de **sources** et de **récepteurs**, reliés entre eux de sorte qu'un courant électrique circule dans ce circuit.

Dans les circuits électriques, la source de tension produit un champ électrique qui met en mouvement les porteurs de charges et donne naissance à un courant électrique qui circule du potentiel le plus élevé vers le potentiel le plus bas (convention). Ce sens du courant correspond en réalité au sens du déplacement des porteurs de charges positives. Le sens du déplacement des électrons (charges négatives) est opposé à celui du courant électrique.

Les circuits électriques sont généralement étudiés par la **théorie des réseaux**. Les sources et les charges sont appelés les **éléments du réseau**. Ces éléments, suivant leur nombre de bornes de raccordements, sont appelés des bipôles, quadripôles etc.

Bipôle élémentaire : élément à deux bornes de raccordement.

- **Bipôle actif** : bipôle qui est en mesure de fournir de l'énergie électrique (source de tension ou de courant).
- **Bipôle passif** : bipôle qui ne peut pas fournir de l'énergie, il peut être sans perte ou avec perte (ex. résistance ohmique).

■ Une résistance ohmique est un bipôle passif avec perte (Fig. 16.1)

■ Les sources de tension ou de courant sont des bipôles actifs.

■ Les capacités et les inductances sont généralement des bipôle passifs sans perte si on néglige leur résistance. Elles peuvent se comporter comme des bipôles actifs : un condensateur comme une source de tension, lors de sa décharge, une inductance comme une source de courant, lorsqu'on ouvre le circuit.

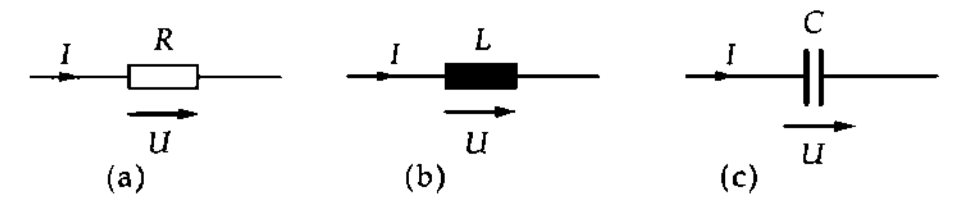


Fig. 16.1 : *Symboles graphiques. (a) : résistance, (b) : inductance, (c) : capacité*

Quadripôle : élément comportant quatre bornes de raccordement : deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie. On dit encore qu'un quadripôle possède deux accès, ou portes, d'où le nom de bi-porte donné aux quadripôles.

2. Sources de tension et de courant

Pour les sources de courant et de tension, on distingue les sources idéales et les sources réelles.

Les **sources de tension idéales** ou générateurs de tension, délivrent une tension dont la valeur est indépendante de la valeur du courant débité.

● La résistance interne d'un générateur de tension idéal est nulle.

Les **sources de courant idéales** ou générateurs de courant, délivrent un courant dont la valeur est indépendante de celle de sa tension aux bornes.

- La résistance interne d'un générateur de courant idéal est infinie.

▷ En général, l'hypothèse de sources idéales de tension ou de courant n'est pas applicable. Il faut tenir compte des valeurs finies des résistances internes et considérer des sources réelles (générateur de Thévenin et générateur de Norton).

Les symboles graphiques des sources idéales de tension et de courant représentés sur la Figure 16.2 (a).

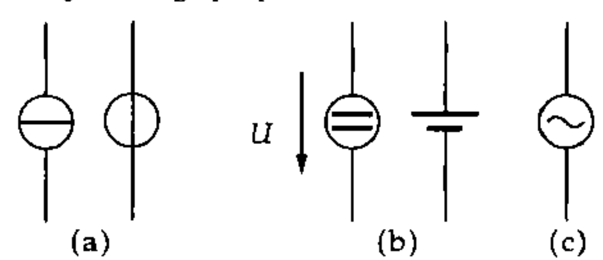


Fig. 16.2 : *Symboles, (a) : sources idéales de tension et de courant, (b) : sources de tensions continues, (c) : source de tension alternative*

Un **générateur de tension continue** délivre une tension dont la valeur est constante dans le temps (**tension continue**). La figure 16.2 (b) en représente les symboles.

Un **générateur de tension alternative** délivre une tension dont l'amplitude varie au cours du temps, généralement périodiquement suivant une loi en sinus (**tension alternative**) dont le symbole est représenté sur la Figure 16.2 (c). D'autres loi de variation sont utilisées en électronique et en automatisme (dent de scie, rectangle, carré ...).

Suivant la nature de la source principale d'énergie, on distingue :

- **Circuit en courant continu**
- **Circuit en courant alternatif**

16.1 Circuit en courant continu

1. Tension et courant continus

Tension continue : tension électrique dont la valeur et la polarité sont constants dans le temps.

Il faut distinguer une tension continue d'une **tension alternative redressée**, dont la valeur à une polarité constante mais dont l'amplitude comporte des **ondulations résiduelles** (ripple). Le redressement d'une tension alternative est obtenue à l'aide d'un circuit redresseur utilisant généralement des diodes semi-conductrices.

Courant continu : courant électrique dont la valeur et le sens sont constants dans le temps.

Les tensions continues sont réalisées à partir de réactions électrochimiques, par exemple dans les piles ou les accumulateurs.

- Une tension U est symbolisée par une flèche pointant du potentiel le plus bas vers le plus haut.
- Le courant électrique circule du pôle positif vers le pôle négatif à l'extérieur d'un générateur. À l'intérieur du générateur, du pôle moins vers le pôle plus.

Charge, récepteur : dans le récepteur, le sens du courant et de la tension sont identiques.

La puissance dans le récepteur est par conséquent comptée positivement.

$$P_V = U \cdot I > 0\,\mathrm{W}$$

Dans la source de tension, tension et courant sont de sens opposés. La puissance y est par conséquent négative.

$$P_Q = U \cdot I < 0\,\mathrm{W}$$

2. Force électromotrice et tension aux bornes d'un générateur

La **force électromotrice** U_0 : désigne la différence de potentiel aux bornes d'un générateur idéal.

La **tension aux bornes** U_b : désigne la différence de potentiel du générateur réel telle qu'elle est vue par le récepteur. Elle est égale à la force électromotrice diminuée de la chute de potentiel aux bornes de la résistance interne du générateur.

Source de tension idéale : générateur de tension dont la tension aux bornes est indépendante du courant débité dans le récepteur (charge). Sa résistance interne est nulle.

● Pour un générateur de tension idéal, la tension aux bornes est égale à la force électromotrice.

3. Réseau

Un réseau est constitué de l'association de plusieurs dipôles élémentaires (Fig. 16.3) :

- **nœud** : point de rencontre d'au moins trois liaisons
- **branche** : association de dipôles élémentaires entre deux nœuds
- **maille** : circuit fermé de branche et de nœuds

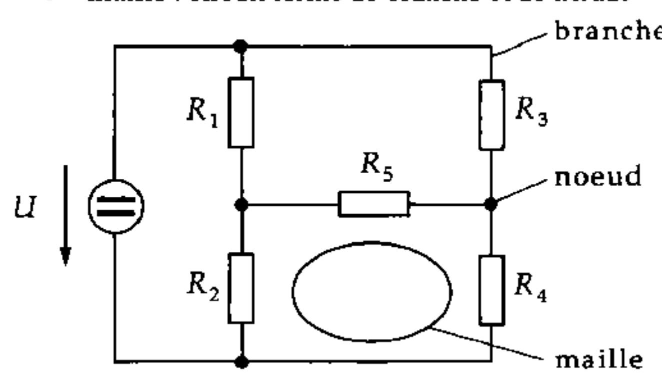


Fig. 16.3 : *Réseau : mailles, branches et nœuds*

16.1.1 Lois de Kirchhoff en courant continu

Les lois de Kirchhoff permettent le calcul de réseaux en courant continu.

1. Première loi de Kirchhoff, loi des nœuds

● La somme algébrique des courants à un nœud est nulle ; la somme des courants arrivant au nœud est égale à la somme des courants partant du nœud. Un nœud n'est ni une source, ni un puits de courant.

$$I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_N = 0$$

Les courants partant du nœud sont comptés positivement, les courants qui y arrivent négativement.

▷ La loi des nœuds se déduit de la conservation de la charge électrique.

2. Deuxième loi de Kirchhoff, loi des mailles

● La somme de toutes les tensions dans une maille est nulle :

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N = 0$$

Les tensions qui ont même sens que le sens de parcours de la maille sont comptées positivement, les tensions de sens opposé sont comptées négativement.

▷ Une tension indique le travail par unité de charge. La loi des mailles est donc une conséquence de la conservation de l'énergie (→ *Électrodynamique*).

16.1.2 Résistance dans un circuit en courant continu

Nous pouvons appliquer les lois de Kirchhoff pour calculer la résistance totale équivalente d'un réseau de résistances associées en série ou en parallèle.

1. Association de résistances en série

Le **montage en série** de N résistances est représenté sur la figure 16.4. Chaque résistance est parcourue par le même courant I ; selon la loi des mailles, les chutes de potentiels U_i aux bornes des résistances s'additionnent pour donner la tension totale U aux bornes du circuit.

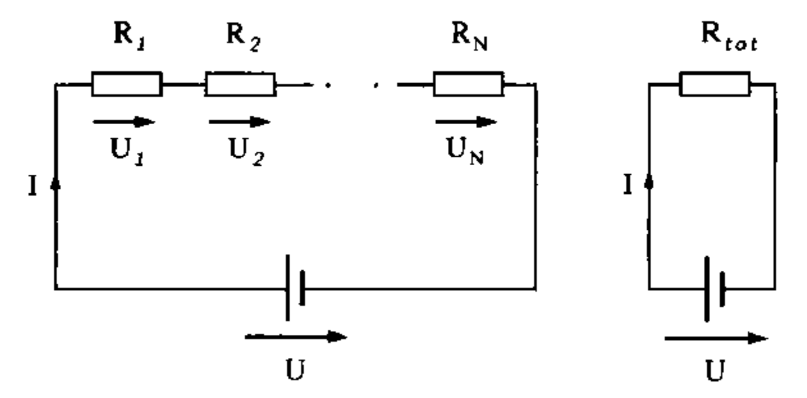


Fig. 16.4 : *Montage en série de N résistances et circuit équivalent*

- La résistance totale équivalente à une association de résistance en série est égale à la somme des résistances individuelles :

Montage de résistances en série			$L^2T^{-3}MI^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$R_{tot} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N$	R_{tot}	Ω	résistance équivalente
	R_i	Ω	résistance individuelle

Les N résistances R_i en série peuvent être remplacées par la résistance équivalentes R_{tot}.

Diviseur de tension :

- Le rapport de la tension partielle U_i aux bornes d'une des résistances individuelles à la tension totale U est égal à celui de cette résistance R_i à la résistance totale R_{tot} :

$$\frac{U_i}{U} = \frac{R_i}{R_{tot}}$$

- Deux tensions partielles U_i et U_j sont dans le même rapport que les résistances correspondantes R_i et R_j.

$$\frac{U_i}{U_j} = \frac{R_i}{R_j}$$

Un **diviseur de tension ou montage potentiométrique**, est constitué d'un montage de résistances en série auquel est appliquée la tension totale U. Les résistances sont choisies de façon à obtenir à leurs bornes la fraction U_i souhaitée.

2. Association de résistances en parallèle

Le **montage en parallèle** de N résistances est représenté sur la figure 16.5. La tension aux bornes U est la même pour chacune des résistances individuelles ; selon la loi des nœuds les courants circulant dans chaque résistance s'additionnent pour donner le courant total I débité par le générateur.

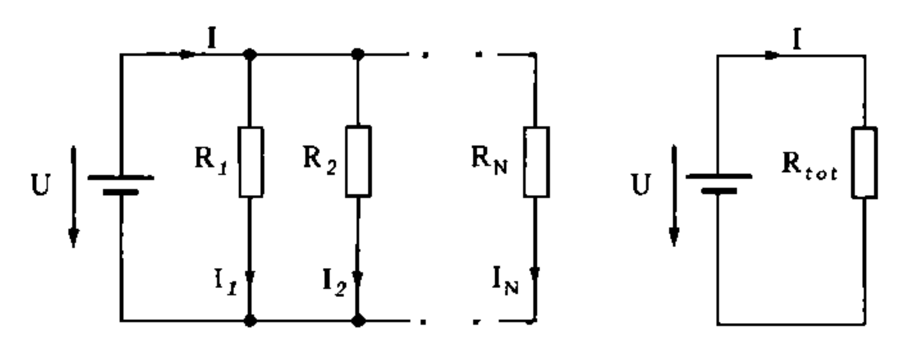


Fig. 16.5 : *Association en parallèle de N résistances et shéma équivalent*

- L'inverse de la résistance (conductance) totale d'une association de résistances en parallèle, est égale à la somme des inverses des résistances (conductances) individuelles :

Montage de résistances en parallèle			**$L^{-2}T^{3}M^{-1}I^{2}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{1}{R_{\text{tot}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}$$ $$G_{\text{tot}} = G_1 + G_2 + \cdots + G_N$$	R_{tot}	Ω	résistance équivalente
	R_i	Ω	résistances individuelles
	G_{tot}	S	conductance totale
	G_i	S	conductances individuelles

Exprimé à l'aide des conductances (inverse de la valeur d'une résistance), on a :

- La conductance totale d'une association en parallèle de résistances, est égale à la somme des conductances individuelles.

La mise en parallèle de deux résistances R_1 et R_2 est éqivalente à la résistance :

$$R_{\text{tot}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

▷ Les N résistances R_i peuvent être remplacées par la résistance totale équivalente R_{tot}.

Diviseur de courant :

- Le rapport des courants partiels I_i circulant dans les résistances individuelles R_i au courant total I est égal au rapport des conductances individuelles G_i à la conductance totale G_{tot} :

$$\frac{I_i}{I} = \frac{G_i}{G_{\text{tot}}} = \frac{R_{\text{tot}}}{R_i}$$

- Deux courants partiels I_i et I_j sont dans le rapport des conductances individuelles correspondantes G_i et G_j :

$$\frac{I_i}{I_j} = \frac{G_i}{G_j} = \frac{R_j}{R_i}$$

16.1.3 Générateur de tension réel, générateur de Thévenin

1. Générateur de tension réel

Un générateur de tension réel (**générateur de Thévenin**) est caractérisé par une résistance interne $R_i \neq 0$.

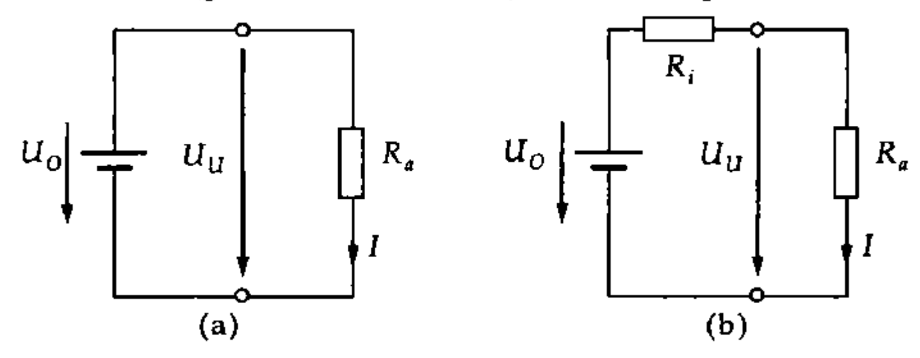


Fig. 16.6 : *Récepteur alimenté par un générateur de tension, (a) : idéal, (b) : réel*

L'intensité du courant dans le circuit est déterminée par la force électromotrice U_0, la résistance de la charge R_a et la résistance interne R_i du générateur (Fig. 16.7)

$$I = \frac{U_q}{R_A + R_i}$$

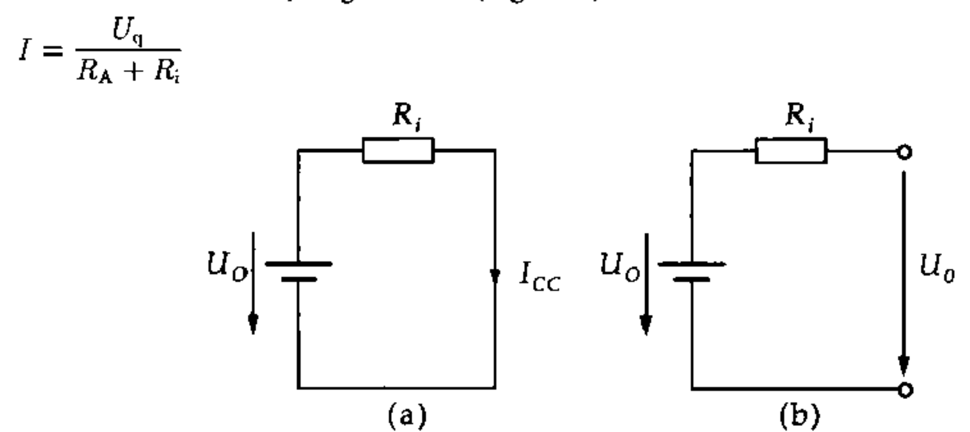


Fig. 16.7 : *Générateur de tension réel, (a) : en court-circuit, (b) : en circuit ouvert*

- La tension aux bornes des sources de tensions réelles varie avec la valeur de la charge (résistance interne du récepteur). La tension aux bornes U_b d'un générateur de tension réel est égale à sa force électromotrice U_0 multipliée par le rapport de la résistance de charge R_a à la somme des résistances de charge R_a et interne R_i du générateur.

$$U_b = \frac{R_a}{R_a + R_i} U_0$$

2. Courant de court-circuit et tension en circuit ouvert

Le **courant de court-circuit** I_{cc} circule si la résistance de charge R_a est égale à 0. Ce courant est égal au rapport de la force électromotrice U_0 du générateur de tension à sa résistance interne R_i :

$$I_{cc} = \frac{U_0}{R_i}$$

▷ Pour une force électromotrice donnée, le courant de court circuit ne dépend que de la résistance interne du générateur de tension.

La **tension à vide (tension en circuit ouvert)** U_L, est présente aux bornes du générateur lorsqu'aucune charge n'est reliée à sa sortie (ou si la résistance de charge $R_a \to \infty$. Le courant débité par le générateur de tension est alors nul :

$$U_L = U_0$$

M De la mesure du courant de court-circuit et de la tension à vide d'un générateur de tension réel, on peut déduire la valeur de sa résistance interne R_i. Les appareils de mesure ayant des résistances internes de valeurs finies, les résultats de ces mesures ne sont qu'approchés.

16.1.4 Générateur de courant réel, générateur de Norton

1. Générateur de courant réel

Un générateur de courant réel (**générateur de Norton**) est caractérisé par une résistance interne infinie $R_i \to \infty$.

Le courant qu'il débité est alors indépendant de la différence de potentiel à ses bornes. Un générateur de Norton peut être représenté par une source de courant idéale en parallèle avec sa résistance interne R_i.

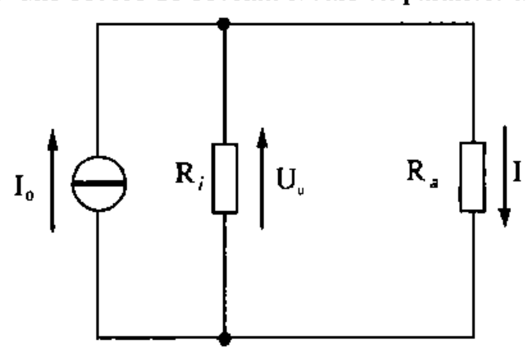


Fig. 16.8 : *Générateur de courant réel*

Le courant I reçu par le récepteur, dépend de la différence de potentiel U_u à ses bornes, et n'est égal au courant I_0 débité par le générateur que si la résistance interne R_i du générateur tend vers lm'infini :

$$I = I_0 - \frac{U_u}{R_i}$$

16.1.5 Puissance et énergie en courant continu

1. Puissance dans un circuit à courant continu

Dans un circuit à courant continu, un récepteur dont la tension aux bornes est U et qui est parcouru par le courant I, absorbe la puissance P :

Puissance = Tension × Intensité du courant			$L^2T^{-3}M$
	Symbole	Unité	Dénomination
$P = U \cdot I$	P	W	puissance
	U	V	tension
	I	A	intensité du courant

Si R est la résistance ohmique du récepteur, en vertu de la → *loi d'Ohm*, nous avons les relations suivantes :

$$P = R \cdot I^2 = \frac{1}{R} \cdot U^2$$

2. Énergie dans un circuit à courant continu

L'énergie W produite ou dissipée pendant l'intervalle de temps Δt est proportionelle à la puissance P et à l'intervalle de temps Δt.

Énergie = puissance × intervalle de temps			**$L^2T^{-2}M$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$W = P \cdot \Delta t = U \cdot I \cdot \Delta t$	W	J	énergie
	P	W	puissance
	Δt	s	intervalle de temps
	U	V	tension
	I	A	intensité du courant

L'énergie peut être exprimée à l'aide de la → *loi d'Ohm* :

$$W = R \cdot I^2 \cdot \Delta t = \frac{1}{R} \cdot U^2 \cdot \Delta t$$

Si la charge est une résistance ohmique pure, cette énergie est dissipée sous forme de chaleur (**effet Joule**).

▷ Les composants résistifs peuvent être endommagés par une trop forte élévation de température. La puissance dissipable est généralement mentionnée sur le composant par un code de couleurs.

Une partie seulement de la puissance délivrée par le générateur est absorbée par le récepteur, l'autre partie est dissipée par la résistance interne du générateur (Fig. 16.9).

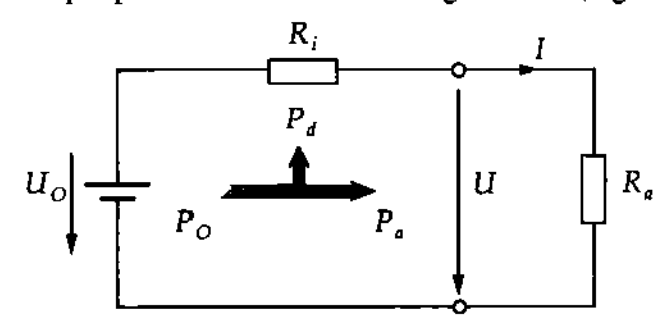


Fig. 16.9 : *La puissance du générateur est partiellement absorbée par le récepteur (P_a), et partiellement dissipée par la résistance interne du générateur (P_d)*

3. Puissance utile, puissance dissipée

La **puissance utile** P_a est la puissance absorbée par le récepteur :

$$P_a = \frac{R_a}{(R_a + R_i)^2} U_0^2$$

La **puissance dissipée** P_d est la puissance dissipée par la résistance interne R_i du générateur :

$$P_d = \frac{R_i}{(R_a + R_i)^2} U_0^2$$

Bilan de puissance : la puissance fournie par le générateur P_0 est égale à la somme de la puissance utile P_a et de la puissance dissipée P_d :

$$P_0 = P_a + P_d$$

4. Rendement

Le rendement η est le rapport de la puissance utile P_a à la puissance fournie par le générateur P_0 :

$\textbf{Rendement} = \dfrac{\textbf{puissance utile}}{\textbf{puissance fournie}}$				1
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\eta = \dfrac{P_a}{P_0} = \dfrac{P_a}{P_a + P_d} = \dfrac{R_a}{R_a + R_i}$	η	1	rendement	
	P_a	W	puissance utile	
	P_0	W	puissance fournie	
	P_V	W	puissance dissipée	
	R_a	Ω	résistance de charge	
	R_i	Ω	résistance interne du générateur	

16.1.6 Adaptation de puissance

Dans un circuit en courant continu, le récepteur absorbe le maximum de puissance lorsque la résistance de charge (du récepteur) R_a est égale à la résistance interne R_i du générateur :

$$R_a = R_i$$

Dans ce cas, le rendement maximum est :

$$\eta = \frac{R_a}{2R_a} = 50\%$$

16.1.7 Mesure de courant et de tension

16.1.7.1 Mesure de courant

M Les **instruments de mesure de courant** ou **Ampèremètres** sont placés en série dans la branche où on veut mesurer le courant. Pour ne pas perturber le circuit, il faut par conséquent que la résistance interne de l'ampèremètre soit aussi faible que possible.

Extension de la gamme de mesure : Si l'intensité I du courant à mesurer est supérieure à la gamme de l'ampèremètre, on peut étendre cette gamme en dérivant une partie du courant I dans une **résistance de shunt** R_s montée en parallèle sur l'ampèremètre. Cette résistance doit avoir une valeur adaptée de façon à ce que le courant circulant dans l'ampèremètre I_i corresponde à la gamme de l'instrument de mesure. Le courant I peut alors être calculé à partir du courant mesuré I_i et des résistances interne R_i et de shunt R_s :

Extension de la gamme de mesure d'un ampèremètre				I
	Symbole	Unité	Dénomination	
$I = \left(1 + \dfrac{R_i}{R_s}\right) \cdot I_i$	I	A	courant à mesurer	
	I_i	A	courant dans l'ampèremètre	
	R_i	Ω	résistance interne de l'ampèremètre	
	R_s	Ω	résistance de shunt	

16.1.7.2 Mesure de tension

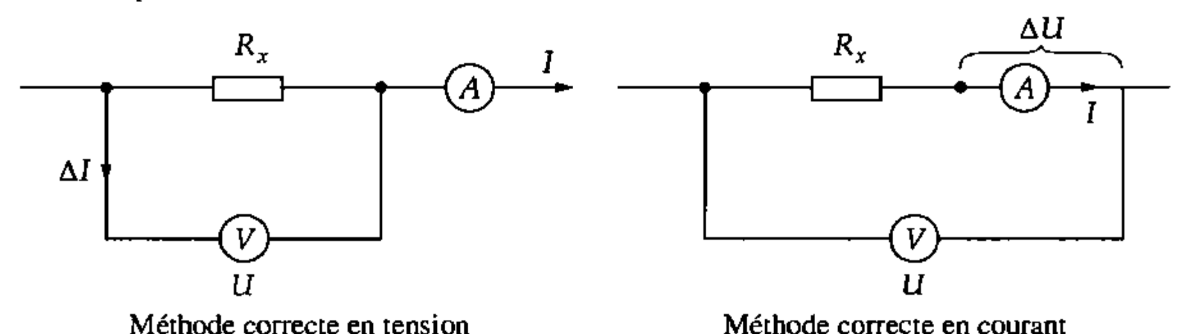
M Les **instruments de mesure de tension** ou **voltmètres** sont placés en parallèle sur les nœuds aux bornes desquels on veut mesurer la tension. Pour ne pas perturber le circuit, il faut par conséquent que la résistance interne du voltmètre soit aussi élevée que possible.

Extension de la gamme de mesure : si la tension à mesurer U excède la gamme du voltmètre, on peut placer une résistance R_n **en série** avec le voltmètre. La valeur de cette résistance est choisie de sorte que la tension restant aux bornes du voltmètre corresponde à la gamme de ce dernier. La tension U peut être déterminée à partir de la tension mesurée et des valeurs de la résistance série R_n et de la résistance interne R_i du voltmètre :

Extension de la gamme de mesure d'un voltmètre			$L^2T^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$$U = \left(1 + \frac{R_n}{R_i}\right) \cdot U_i$$	U	V	tension à mesurer
	U_i	V	tension mesurée au voltmètre
	R_i	Ω	résistance interne du voltmètre
	R_n	Ω	résistance série

16.1.7.3 Mesures de puissance

Lors de **mesures de puissance**, ainsi que de **mesures de résistance** ou de la détermination de **caractéristiques courant-tension** à l'aide d'ampèremètres et de voltmètre, il y a plusieurs méthodes de raccordement possibles :



Méthode correcte en tension — Méthode correcte en courant

Méthode correcte en tension : l'ampèremètre est en série et le voltmètre est en parallèle sur la charge R_x (Fig. 16.1.7.3). Une partie du courant ΔI est dérivé vers le voltmètre, ceci fausse la mesure du courant I. Pour minimiser l'erreur il faut utiliser un voltmètre à très grande résistance interne. La tension U est mesurée correctement.

Méthode correcte en courant : le voltmètre mesure la tension aux bornes de branche constituée de la charge R_x en série avec l'ampèremètre (Fig. 16.1.7.3). La chute de potentiel ΔU aux bornes de l'ampèremètre dépend de la résistance interne de ce dernier qui doit être aussi faible que possible. Le courant I est mesuré correctement.

16.1.8 Mesures de résistances par la méthode de comparaison

La méthode de comparaison (méthode de zéro) permet des mesures plus précises de résistances.

La valeur de la résistance R_x est déterminée par **comparaison** à une résistance R_N de valeur connue à l'aide d'un pont de mesure (Fig. 16.10).

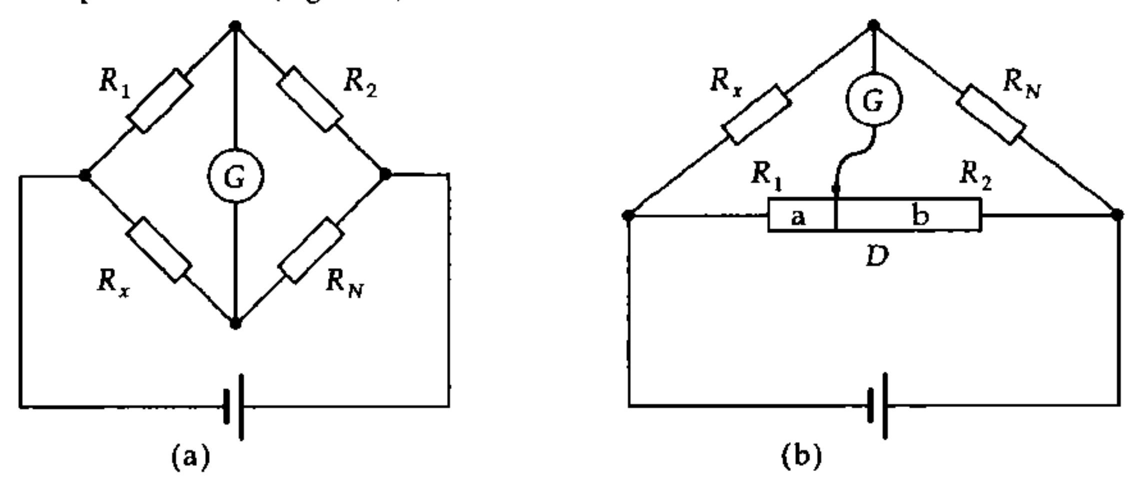


Fig. 16.10 : *Pont de Wheatstone. (a) : schéma de principe, (b) : montage "potentiométrique" utilisant un fil résistif*

M **Pont de Wheatstone** : la résistance R_N est ajustée de sorte qu'aucun courant ne circule dans le galvanomètre G. On dit que l'on utilise une **méthode de zéro.**
La valeur R_x de la résistance inconnue s'obtient à partir des valeurs connues des résistances R_1, R_2 et R_N :

Mesure de résistances à l'aide du pont de Wheatstone			$L^2T^{-3}MI^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_N$	R_x	Ω	résistance à mesurer
	R_N	Ω	résistance de comparaison
	R_1, R_2	Ω	résistances connues

▷ Les résistances constituant le pont sont des résistances de précision dont les valeurs sont connues avec précision. Pour des mesures de haute précision il faut tenir compte d'éventuelles variations dues à la température.

M On peut également choisir une valeur fixe pour la résistance R_N et faire varier le rapport de R_1 à R_2 pour éqilibrer le pont. En pratique on utilise un fil résistif D, sur lequel on déplace un curseur jusqu'à obtenir l'équilibre du pont de mesure (courant nul dans le galvanomètre). Si le fil résistif est homogène, le rapport des résistances R_1 et R_2 est dans le rapport des longueurs a et b du fil. La valeur R_x de la résistance inconnue s'obtient alors à partir d'une mesure de longueur (Fig. 16.10).

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} = \frac{a}{b} \cdot R_N$$

▷ La précision de la méthode est d'autant plus grande que la valeur de la résistance R_N est proche de celle de la résistance R_x à mesurer.

16.1.9 Charge et décharge d'un condensateur

La **tension aux bornes d'un condensateur** est proportionelle à l'intégrale du courant $i(t)$ de charge ou de décharge :

$$u_C(t) = \frac{Q}{C} = \int_0^t i(t')\ \mathrm{d}t'$$

Constante de temps τ : intervalle de temps pendant lequel la tension aux bornes du condensateur a varié du facteur $1/\mathrm{e} \approx 1/3$ de sa valeur initiale. La constante de temps est le produit de la capacité C du condensateur par la résistance R à travers laquelle le condensateur se charge ou se décharge.

$$\tau = R \cdot C$$

■ Un condensateur de capacité $C = 1$ mF se décharge à travers une résistance $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$. La constante de temps de décharge est alors :
$$\tau = 1\,\mathrm{k\Omega} \cdot 1\,\mathrm{mF} = 1\,\mathrm{s}$$

1. Décharge d'un condensateur

Les armatures d'un condensateur de capacité C sont court-circuitée par une résistance R. D'après la loi des mailles, la somme des tensions aux bornes du condensateur $U_C(t)$ et de la résistance $U_R(t)$ est nulle :

$$0 = U_C(t) + U_R(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(t')\ \mathrm{d}t' + I(t) \cdot R$$

D'où nous déduisons l'équation différentielle du courant de décharge :

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau} I(t) \quad , \qquad I(0) = -\frac{U_0}{R} = I_0$$

Le **courant de décharge** $I(t)$ et la **tension aux bornes du condensateur** $U_C(t)$ sont alors :

$$I(t) = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \quad , \qquad U_C(t) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \quad , \qquad \tau = R \cdot C$$

- Le courant de décharge décroît exponentiellement de sa valeur initiale $I_0 = -U/R$ vers zéro avec la constante de temps τ (Fig. 16.11 (b)).
- La tension aux bornes du condensateur décroît exponentiellement avec la même constante de temps τ.

2. Charge d'un condensateur

Un condensateur de capacité C est relié à une source de tension U_0 à travers une résistance R (Fig. 16.11 (a)). Selon la loi des mailles, la somme des tensions aux bornes du condensateur $U_C(t)$ et de la résistance $U_R(t)$ est égale à U_0 :

$$U_0 = U_C(t) + U_R(t) = \int_0^t I(t)\ \mathrm{d}t + I(t) \cdot R$$

D'où l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau} I(t) \quad , \qquad I(0) = \frac{U}{R} = I_0$$

Le **courant de charge** $I(t)$ ainsi que la tension aux bornes du condensateur sont :

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau} \quad , \qquad U_C(t) = U_0 \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad , \qquad \tau = R \cdot C$$

- Le courant de charge décroît exponentiellement de sa valeur initiale $I_0 = U/R$ avec la constante de temps τ (Fig. 16.11 (c)).
- La tension aux bornes du condensateur augmente exponentiellement de zéro jusqu'à U_0 avec la même constante de temps τ.

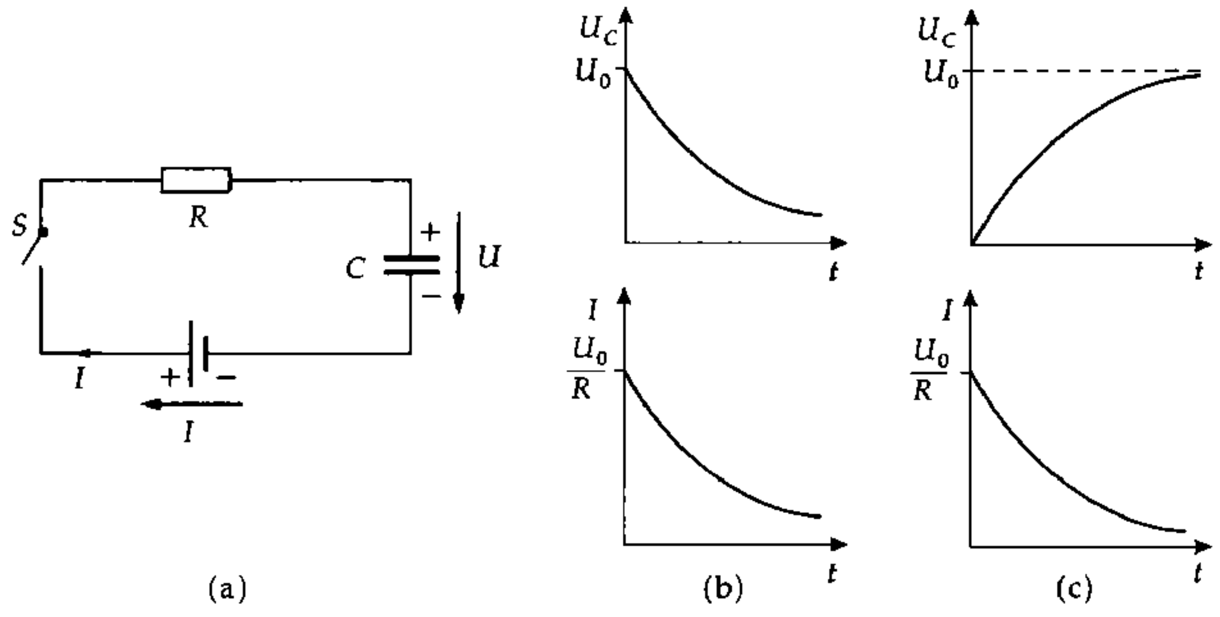


Fig. 16.11 : *Charge et décharge d'un condensateur. (a) : schéma du montage, (b) : tension et courant lors de la décharge, (c) : tension et courant lors de la charge. La constante de temps est* $\tau = R \cdot C$

16.1.10 Courant dans un circuit RL

La **tension aux bornes d'une inductance** $U_L(t)$ est proportionelle à la variation du courant $I(t)$ par rapport au temps :

$$U_L(t) = -L\,\frac{dI(t)}{dt}$$

Constante de temps τ : intervalle de temps pendant lequel la tension aux bornes de l'inductance varie d'un facteur $1/e \approx 1/3$. La constante de temps est le rapport de la valeur L de l'inductance à celle de la résistance R à travers laquelle circule le courant $I(t)$.

$$\tau = \frac{L}{R}$$

- À une inductance $L = 100\,\mathrm{mH}$ court-circuitée par une résistance $R = 10\,\Omega$, correspond une constante de temps :
$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{100\,\mathrm{mH}}{10\,\Omega} = 0{,}01\,\mathrm{s}$$

1. Établissement du courant

Une inductance L, en série avec une résistance R, est reliée à un générateur de tension U_0. D'après la loi des mailles, la somme des tensions $-U_L(t)$ aux bornes de l'inductance et $U_R(t)$ aux bornes de la résistance

est égale à la tension U_0 :

$$U_0 = -U_L(t) + U_R(t) = L\,\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + R \cdot I(t)$$

D'où l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}\,I(t) + \frac{U}{L} \quad , \qquad I(0) = 0$$

Le courant dans l'inductance $I(t)$ et la tension à ses bornes $U_L(t)$ sont alors :

$$I(t) = I \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \quad , \qquad U_L(t) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \quad , \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

- Le courant $I(t)$ augmente exponentiellement avec la constante de temps τ jusqu'à la valeur $I = U/R$.
- La tension $U_L(t)$ décroît exponentiellement de sa valeur initiale $U_0 = -R \cdot I$ avec la même constante de temps τ.

2. Coupure du courant

Après la coupure du courant, une inductance L est court-circuitée par un résistance R. Selon la loi des mailles, la tension aux bornes de l'inductance $U_L(t)$ est égale à celle aux bornes de la résistance $U_R(t)$:

$$0 = -U_L(t) + U_R(t) = L\,\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + R \cdot I(t)$$

Le courant $I(t)$ se déduit alors de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}\,I(t) \quad , \qquad i(0) = I$$

D'où le courant $I(t)$ et la tension $U_L(t)$:

$$I(t) = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \quad , \qquad U_L(t) = U_0 \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \quad , \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

- Le courant décroît exponentiellement de sa valeur initiale $I_0 = U/R$ vers zéro, avec la constante de temps τ.
- La tension aux bornes de l'inductance décroît exponentiellement avec la même constante de temps τ.

16.2 Circuits en courant alternatif

Dans l'étude des circuits en courant alternatif, on s'intéresse au comportement de résistances, de capacités et d'inductances parcourues par un courant alternatif. Les courants et tensions alternatives sont des grandeurs variables avec le temps.

Ces grandeurs variables peuvent être représentées par des nombres complexes, ce qui facilite le calcul des grandeurs physiques dans les circuits en courant alternatif.

Elles sont généralement représentées graphiquement par des vecteurs dans le plan complexe (représentation de Fresnel).

16.2.1 Grandeurs alternatives

Une **grandeur alternative** est une grandeur physique dont la valeur est une fonction périodique du temps.

1. Caractéristiques des grandeurs alternatives

Valeur instantanée : valeur de la grandeur alternative à un instant t donné.

Période : intervalle de temps T au bout duquel la grandeur alternative $x(t+T)$ reprend la même valeur $x(t)$ qu'à l'instant t.

$$x(t+T) = x(t)$$

Fréquence f : valeur réciproque de la période T :

$$f = \frac{1}{T}$$

Les fonctions périodiques les plus simples sont la **fonction sinus** ou la **fonction cosinus.**

2. Grandeurs alternatives sinusoïdales

Une grandeur alternative, définie par une fonction sinusoïdale, est entièrement déterminée par les quantités suivantes :

- **Amplitude** ou **module** ou **valeur de crête**, $\hat{x}$: valeur maximale que la grandeur alternative $x(t)$ peut prendre. Elle est parfois notée par un "chapeau" sur la grandeur concernée.
- **Pulsation** ou dans certains cas **vitesse angulaire** : la fréquence multipliée par 2π : $\omega = 2\pi f$.
- **Phase à l'origine** : angle de phase à l'instant $t = 0$: φ_0

La fonction cosinus ne diffère de la fonction sinus que par une différence de phase de $\pi/2 = 90°$.

Fonctions sinus et cosinus		
	Symbole	Dénomination
$x(t) = \hat{x}\sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$	$x(t)$	valeur instantanée
$= \hat{x}\cos(\omega \cdot t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2})$	$\hat{x}$	amplitude, valeur de crête
	ω	pulsation
	t	temps
	φ_0	phase initiale

3. Tension alternative et courant alternatif

Une **tension alternative** $u(t)$ est décrite par :

$$u(t) = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_u)$$

$\hat{u}$ désigne l'amplitude, φ_u la phase à l'origine de la tension alternative (Fig. 16.12).

Un **courant alternatif** $i(t)$ est décrit par :

$$i(t) = \hat{i}\sin(\omega t + \varphi_i)$$

$\hat{i}$ désigne l'amplitude, φ_i l'angle de phase initiale du courant alternatif.

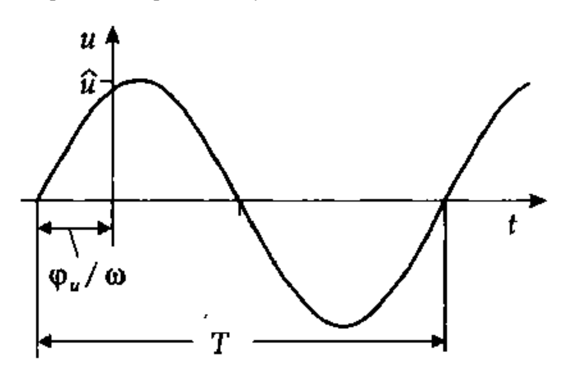


Fig. 16.12 : *Période et phase à l'origine de la fonction sinus*

Des fonctions périodiques de formes diverses peuvent être construites par la combinaison linéaire de plusieurs fonctions sinusoïdales (série de Fourier).

16.2.1.1 Valeur moyenne de fonctions périodiques

1. Valeur moyenne de grandeurs alternatives

Valeur moyenne : caractérise une grandeur alternative $x(t)$ (courant $i(t)$ ou tension $u(t)$, ...) sans préciser sa dépendance en temps.

Il y a plusieurs possibilités pour définir une valeur moyenne :

Valeur moyenne arithmétique	$\overline{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\ \mathrm{d}t$
Valeur moyenne absolue	$\overline{\lvert x\rvert} = \frac{1}{T}\int_0^T \lvert x(t)\rvert\ \mathrm{d}t$
Valeur moyenne efficace	$X = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2\ \mathrm{d}t}$

Facteur de crête : rapport de l'amplitude à la valeur efficace :

$$k_e = \frac{\hat{x}}{X}$$

Facteur de forme : rapport de la valeur efficace à la valeur moyenne absolue :

$$k_f = \frac{X}{\lvert\bar{x}\rvert}$$

2. Valeurs moyennes de grandeurs sinusoïdales

Pour une grandeur sinusoïdale, les valeurs moyennes et les facteurs de forme sont :

Moyenne arith.	Moyenne abs.	Valeur efficace	Facteur de crête	Facteur de forme
$\overline{x} = 0$	$\overline{\lvert x\rvert} = \frac{2}{\pi}\hat{x}$ $\approx 0,637\,\hat{x}$	$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{x}$ $\approx 0,707\,\hat{x}$	$k_s = 1,414$	$k_f = 1,111$

Taux de distorsion : mesure la déviation d'une forme d'onde de la forme sinusoïdale.

3. Puissance dissipée par une résistance pure

Pour calculer la dissipation de chaleur d'une résistance ohmique parcourue par un courant alternatif, il faut tenir compte de la valeur efficace de la tension ou du courant. Dans une résistance ohmique pure, tension et courant sont en phase. La puissance dissipée due à la composante continue du développement en série

de Fourier est :

$$P = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} = \frac{\hat{u}^2}{2R} = \frac{U^2}{R}$$
$$= I^2 \cdot R$$

Cette puissance dissipée correspond à celle d'une résistance en courant continu d'intensité égale à la valeur efficace du courant alternatif.

4. Mesure de tensions et courants alternatifs

M Les tensions et courant alternatifs peuvent être mesurés à l'aide d'instruments à cadre mobile munis d'un circuit redesseur. Ces appareils sont généralement étalonnés de façon à indiquer la valeur efficace d'une grandeur sinusoïdale. Dans le cas de grandeurs non sinusoïdales, il faut appliquer un coefficient correcteur.

■ La tension du courant électrique à usage domestique est mesurée avec un voltmètre à cadre mobile et a pour valeur $U = 220\,\text{V}$, l'amplitude de la tension alternative est alors :
$\hat{u} = \sqrt{2} \cdot U = \sqrt{2} \cdot 220\,\text{V} = 311\,\text{V}$

16.2.2 Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale

● Les grandeurs obéissant à une fonction sinusoïdale peuvent être représentées dans le plan complexe.

Dans un système de coordonnées cartésiennes planes x-y, si un point P décrit un cercle de rayon r autour de l'origine avec une vitesse angulaire constante, sa projection de ce point sur l'axe y est une fonction sinus et sa projection sur l'axe x une fonction cosinus (Fig. 16.13).

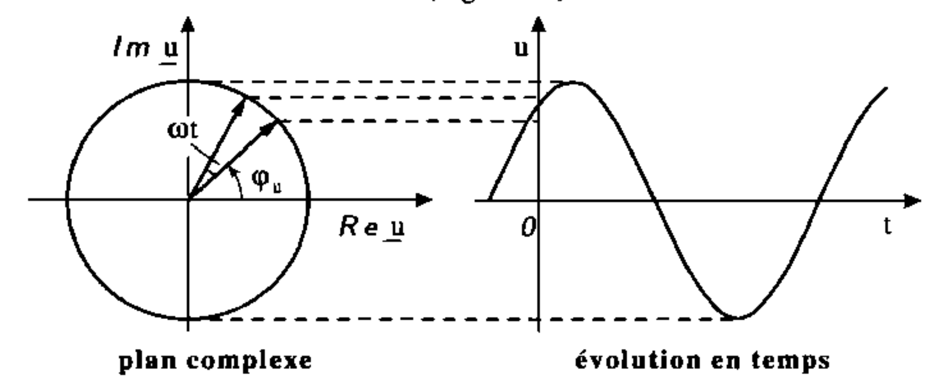


Fig. 16.13 : *Relation entre la représentation complexe et la fonction sinus*

Sens positif de rotation : sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique).

1. Représentation complexe

Dans le plan complexe (x, jy), le rayon du cercle correspond au module de la grandeur sinusoïdale et l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec l'axe Ox correspond à l'angle de phase.

Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est entièrement défini par ses projections a et b respectivement sur l'axe x et y. Il est représenté par un nombre complexe :

$$\underline{z} = a + jb$$

Le symbole j désigne l'unité imaginaire $(j)^2 = -1$. a est appelée la **partie réelle** et b la **partie imaginaire** de $\underline{z}$.

▷ Un nombre réel x est un nombre complexe $\underline{z}$ dont la partie imaginaire est nulle.

$$\underline{z} = x + \mathrm{j}0$$

■ Le nombre complexe $3 + \mathrm{j}\,4$ a une partie réelle $a = 3$ et une partie imaginaire $b = 4$.

2. Fonction exponentielle complexe

Une **fonction exponentielle complexe** peut être introduite par la **formule d'Euler** :

Formule d'Euler		
	Symbole	Dénomination
$e^{\mathrm{j}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi$	φ	phase
	$\mathrm{j} = \sqrt{-1}$	unité imaginaire

▷ De même que les fonction sinus et cosinus, la fonction exponentielle complexe est de période 2π.

$$\underline{z} = r \cdot e^{\mathrm{j}\varphi}$$

r désigne le module, et φ la phase du nombre complexe.

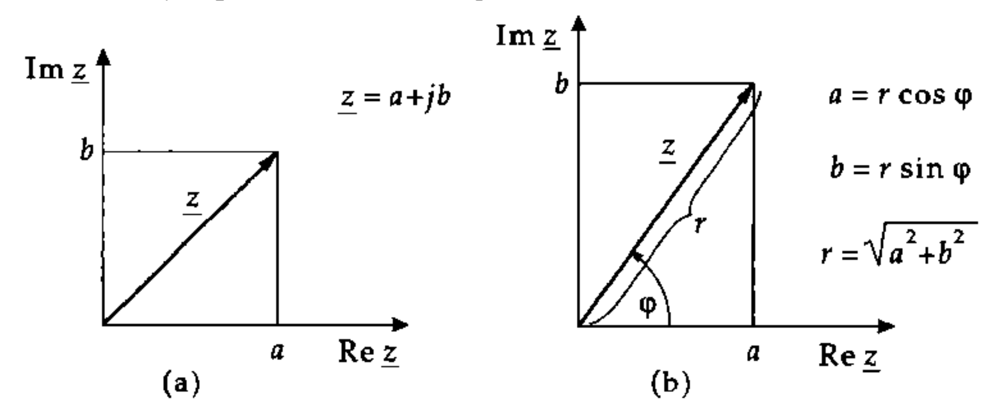


Fig. 16.14 : *Représentation d'une grandeur complexe. (a) : représentation cartésienne, (b) : représentation exponentielle*

3. Correspondance entre les deux représentations

$$a = r\cos\varphi \quad , \qquad b = r\sin\varphi$$

et

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

● Le module r du nombre complexe est égal à l'amplitude de la grandeur alternative.

▷ Les grandeurs complexes sont écrites soulignées par une barre $\underline{Z}$.

■ Un courant alternatif $i(t)$ est représenté par $\underline{i}(t)$.

●
$$x(t) = \hat{x}\sin(\omega t + \varphi_0) \longrightarrow \underline{z}(t) = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi_0) + \mathrm{j}\hat{x}\sin(\omega t + \varphi_0) = \hat{x}\,e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_0)}$$

Le calcul est effectué en complexe, par la suite on extrait la partie imaginaire du nombre complexe :

$$\underline{z}(t) = \hat{x}\,e^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_0)} = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi_0) + \mathrm{j}\hat{x}\sin(\omega t + \varphi_0) \longrightarrow x(t) = \hat{x}\sin(\omega t + \varphi_0)$$

Le calcul avec les nombres complexes est généralement plus simple que la manipulation des fonctions trigonométriques.

- Un courant alternatif :
  $i(t) = \hat{i}\,\sin(\omega t + \varphi_i)$
  est représenté par :
  $\underline{i}(t) = \hat{i}\,e^{j(\omega t+\varphi_i)}$

- Une tension alternative :
  $u(t) = \hat{u}\,\sin(\omega t + \varphi_u)$
  est représenté par :
  $\underline{u}(t) = \hat{u}\,e^{j(\omega t+\varphi_u)}$

16.2.3 Règles de calcul pour les nombres complexes

1. Addition

On additionne respectivement les parties réelles et les parties imaginaires :

Addition de deux nombres complexes		
	Symbole	Dénomination
$\underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2)$	$\underline{z}_1 = a_1 + jb_1$	premier terme
$= (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$	$\underline{z}_2 = a_2 + jb_2$	deuxième terme
$= \underline{z}$	$\underline{z}$	somme

- La somme de deux nombres complexes $\underline{z}_1 = 3 + j4$ et $\underline{z}_2 = 2 + j5$ est :
  $\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (3 + j4) + (2 + j5) = (3 + 2) + j(4 + 5) = 5 + j9$
  La partie réelle est $a = 5$ et la partie imaginaire $b = 9$.

2. Soustraction de nombres complexes

Soustraction de deux nombres complexes		
	Symbole	Dénomination
$\underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2)$	$\underline{z}_1 = a_1 + jb_1$	premier terme
$= (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$	$\underline{z}_2 = a_2 + jb_2$	terme à soustraire
$= \underline{z}$	$\underline{z}$	différence

- Du nombre complexe $\underline{z}_2 = 3 + j4$, on soustrait $\underline{z}_1 = 2 + j5$.
  $\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = 3 + j4 - (2 + j5) = (3 - 2) + j(4 - 5) = 1 - j$
  La partie réelle est $a = 1$ et la partie imaginaire $b = -1$.

3. Multiplication de nombres complexes

La multiplication de deux nombres complexes s'effectue plus simplement dans la représentation exponentielle. Les modules sont multipliés entre eux et les phases s'additionnent.

Multiplication de deux nombres complexes		
	Symbole	Dénomination
$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = r_1\,e^{j\varphi_1} \cdot r_2\,e^{j\varphi_2}$	$\underline{z}_1 = r_1\,e^{j\varphi_1}$	premier terme
$= r_1 \cdot r_2\,e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$	$\underline{z}_2 = r_2\,e^{j\varphi_2}$	deuxième terme
$= \underline{z}$	$\underline{z}$	produit

4. Division de nombres complexes

La division de deux nombres complexes, comme la multiplication, est plus simple dans la représentation exponentielle. Les modules sont divisés tandis que les phases sont soustraites.

Division de deux nombres complexes	Symbole	Dénomination
$\dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \dfrac{r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}}{r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)} = \underline{z}$	$\underline{z}_1 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}$	dividande
	$\underline{z}_2 = r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}$	diviseur
	$\underline{z}$	quotient

5. Conjugué d'un nombre complexe

Le **complexe conjugué** $\underline{z}^*$ du nombre complexe $\underline{z}$ a le même module, mais la phase est de signe opposé :

$$\underline{z}^* = |\underline{z}| \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} \quad \text{pour} \quad \underline{z} = |\underline{z}| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

Dans la représentation cartésienne, le complexe conjugué s'écrit :

$$\underline{z}^* = a - \mathrm{j}b \quad \text{pour} \quad \underline{z} = a + \mathrm{j}b$$

- Le complexe conjugué d'un nombre complexe est représenté par son symétrique par rapport à l'axe réel.

La répétition de la conjugaison complexe redonne le nombre complexe initial.

$$(\underline{z}^*)^* = \underline{z}$$

6. Inversion d'un nombre complexe

L'**inversion** peut être considérée comme un cas particulier de la division de nombres complexes. Le module de l'inverse du nombre complexe $\underline{z}$ est égal à l'inverse de son module ($1/|\underline{z}|$), le signe de la phase est changé :

$$\frac{1}{\underline{z}} = \frac{\underline{z}^*}{|\underline{z}|^2}$$

Dans la représentation exponentielle :

$$\frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi} \quad \text{pour} \quad \underline{z} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

Dans la représentation cartésienne :

$$\frac{1}{\underline{z}} = \frac{a - \mathrm{j}b}{a^2 + b^2} \quad \text{pour} \quad \underline{z} = a + \mathrm{j}b$$

■ Soit une impédance $\underline{Z}$, l'admittance complexe $\underline{Y}$ est son inverse :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{Z}^*}{|\underline{Z}|^2}$$

et réciproquement.

7. Différentiation de variables complexes

Une grandeur complexe $\underline{z}$ est caractérisée par son module z, sa phase initiale φ, et sa pulsation ω :

$$\underline{z}(t) = z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)}$$

Sa dérivée par rapport au temps est :

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = \mathrm{j}\omega \underline{z} = \omega\, z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})}$$

- La dérivation par rapport au temps correspond à une rotation de $+\pi/2$ dans le plan complexe.

8. Intégration de variables complexes

Soit la variable complexe :

$$\underline{z}(t) = z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}$$

son intégrale sur le temps est :

$$\int z(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\cdot z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega}\underline{z} = \frac{1}{\omega} z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})}$$

- L'intégration correspond à une rotation de $-\pi/2$ dans le plan complexe.

16.2.4 Technologie du courant alternatif

16.2.4.1 Impédance complexe

1. Impédance

Une impédance $\underline{Z}$ détermine :

- le rapport de l'amplitude de la tension à celle du courant, ou le rapport de la valeur efficace de tension à celle de courant
- la différence de phase (déphasage) entre la tension et le courant.

Impédance = **tension complexe** / **courant complexe**			$L^2T^{-3}MI^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\underline{Z} = \dfrac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$	$\underline{Z}$	Ω	impédance complexe
	$\underline{u}(t)$	V	tension complexe
	$\underline{i}(t)$	A	courant complexe

Ohm Ω : unité SI de l'impédance $\underline{Z}$.

$[\underline{Z}] = \Omega$

▷ Si la tension et le courant sont caractérisés par la même fonction du temps, la valeur de l'impédance est indépendante du temps.

2. Représentation cartésienne d'une impédance complexe

L'impédance complexe $\underline{Z}$, se compose de :

- la **résistance** R : partie réelle de l'impédance
- la **réactance** X : partie imaginaire de l'impédance.

Impédance, forme cartésienne			$L^2T^{-3}MI^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$	$\underline{Z}$	Ω	impédance complexe
	R	Ω	résistance
	X	Ω	réactance

3. Représentation exponentielle

La valeur de l'impédance complexe $\underline{Z}$ se déduit :

- du **Module** Z :
  $Z = |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$
- de l'**argument** φ_Z, déduit du rapport de la réactance X à la résistance R :
  $\varphi_Z = \arctan \dfrac{X}{R}$

Forme exponentielle d'une impédance complexe			$L^2T^{-3}MI^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\underline{Z} = Z \cdot e^{\mathrm{j}\varphi_Z}$	$\underline{Z}$	Ω	impédance complexe
	Z	Ω	module de l'impédance
	φ_Z	1	argument, angle de phase

L'impédance Z donne le rapport de la valeur de la tension $\hat{u}$ à celle du courant $\hat{i}$ (ou le rapport des valeurs efficaces de la tension U et du courant I), sans tenir compte de leur déphasage :

$$Z = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{U}{I}$$

L'angle de phase (déphasage) φ_Z est la différence entre la phase de la tension φ_u et de celle du courant φ_i :

$$\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i$$

4. Représentation d'une impédance dans le plan complexe

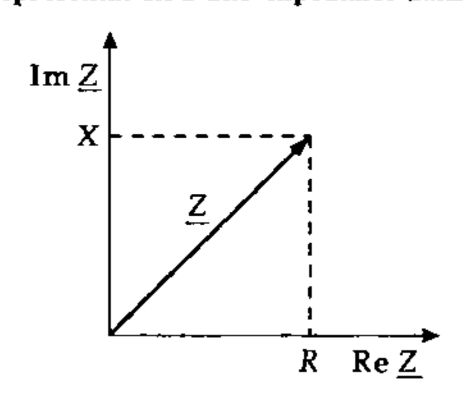


Fig. 16.15 : *Représentation d'une impédance. R résistance, X réactance*

■ Soit une impédance complexe $\underline{Z} = (50 + \mathrm{j}22)\,\Omega$. Son module (ou impédance) est alors :

$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{50^2 + 22^2}\,\Omega = 54,6\,\Omega$

et son angle de phase :

$\varphi_Z = \arctan \dfrac{X}{R} = \arctan \dfrac{22\,\Omega}{50\,\Omega} = 23,7°$

16.2.4.2 Loi d'Ohm en courant alternatif

● Pour une résistance ohmique (pure), le courant complexe $\underline{i}$ est proportionel à la tension complexe $\underline{u}$. Le facteur de proportionalité est la valeur de la résistance R.

Tension complexe = résistance × courant complexe			$L^2T^{-3}MI^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\underline{i}(t) = R \cdot \underline{i}(t)$	$\underline{u}(t)$	V	tension complexe
	R	Ω	résistance ohmique
	$\underline{i}(t)$	A	courant complexe

● Aux bornes d'une résistance ohmique, le courant et la tension sont en phase.

$$\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i = 0$$

16.2.4.3 Admittance complexe

1. Admittance

L'admittance $\underline{Y}$ détermine :

- le rapport de l'amplitude du courant à celle de la tension (respectivement le rapport des valeurs efficaces correspondantes)
- le déphasage entre courant et tension.

L'admittance complexe est la réciproque de l'impédance complexe :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{Z}^*}{Z^2} = \frac{\underline{i}(t)}{\underline{u}(t)}$$

$\underline{Z}^*$ est le complexe conjugué de l'impédance complexe.

2. Forme cartésienne de l'admittance complexe

L'admittance $\underline{Y}$ se compose de :

- la **conductance** G, qui est la partie réelle de l'admittance.
- la **susceptance** B, qui est la partie imaginaire de l'admittance.

Admittance complexe, forme cartésienne			$L^{-2}T^3M^{-1}I^2$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\underline{Y} = G + \mathrm{j}B$	$\underline{Y}$	S	admittance complexe
	G	S	conductance
	B	S	susceptance

Siemens S : unité SI de l'admittance complexe $\underline{Y}$.

$[\underline{Y}] = S$

3. Forme exponentielle de l'admittance complexe

Dans sa forme exponentielle, l'admittance complexe se compose :

- du **module de l'admittance** Y :
  $Y = |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2}$

- de l'**angle de phase** φ_Y, déduit du rapport de la susceptance B à la conductance G :
  $\varphi_Y = \arctan \frac{B}{G}$

Admittance complexe, forme exponentielle				$L^{-2}T^3M^{-1}I^2$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\underline{Y} = Y \cdot e^{j\varphi_Y}$	$\underline{Y}$	S	admittance complexe	
	Y	S	module de l'admittance	
	φ_Y	1	angle de phase	

Le module de l'admittance Y détermine le rapport de l'amplitude $\hat{i}$ du courant à celle $\hat{u}$ de la tension (respectivement le rapport des valeurs efficaces de courant I et de tension U), sans tenir compte de leur déphasage :

$$Y = \frac{\hat{i}}{\hat{u}} = \frac{I}{U}$$

Déphasage φ_Y : différence entre les phases φ_i du courant et de la tension φ_u :

$$\varphi_Y = \varphi_i - \varphi_u$$

4. Représentation de l'admittance dans le plan complexe

L'admittance complexe est la réciproque du complexe conjugué de l'impédance. Il s'ensuit que :

- Une susceptance positive B correspond à une réactance X négative.
- La phase d'une admittance complexe est égale à l'opposé de la phase de l'impédance correspondante.

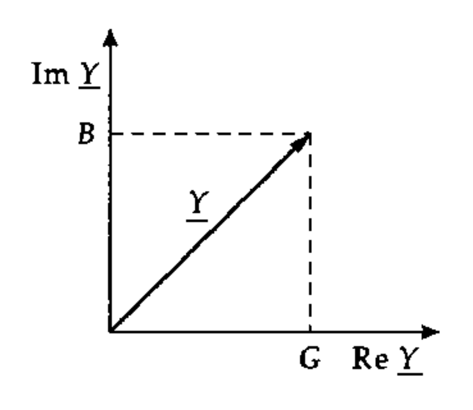


Fig. 16.16 : *Représentation d'une admittance complexe*

- Soit une admittance complexe $\underline{Y} = (12 + j27)$ S. Le module de son admittance est :
  $Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{12^2 + 27^2}\,\text{S} = 29,5\,\text{S}$
  et le déphasage :
  $\varphi_Y = \varphi_i - \varphi_u = \arctan \frac{B}{G} = \arctan \frac{27\,\text{S}}{12\,\text{S}} = 66°$
  Le courant est par conséquent en avance sur la tension de 66°.

16.2.4.4 Puissance dans les circuits en courant alternatif

1. Puissance alternative

La puissance $p(t)$ est le produit du courant $i(t)$ par la tension $u(t)$:

Puissance = courant × tension			$L^2T^{-3}M$
	Symbole	Unité	Dénomination
$p(t) = i(t) \cdot u(t)$	$p(t)$ $i(t)$ $u(t)$	W A V	puissance courant tension

● La puissance dans un circuit en courant alternatif est généralement une fonction du temps.

Pour un courant sinusoïdal de pulsation ω :

$$i(t) = \hat{i} \sin \omega t$$

et une tension sinusoïdale déphasée de φ :

$$u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi)$$

la puissance se compose d'une partie indépendante du temps et d'une partie dépendante du temps de pulsation double :

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos\varphi - U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi)$$

avec les valeurs efficaces de la tension $U = \hat{u}\sqrt{2}$ et du courant $I = \hat{i}\sqrt{2}$.

2. Puissance active et puissance réactive

La puissance active P, pour des courants et tensions sinusoïdales, désigne la partie indépendante du temps de la puissance :

$$P = U \cdot I \cos\varphi$$

Coefficient de puissance $\cos\varphi$: cosinus du déphasage courant-tension φ.

■ Pour une résistance ohmique (pure), $\cos\varphi = 1$, et la puissance active :
$P = U \cdot I$
Pour une inductance ou une capacité pure (sans résistance), on a $\cos\varphi = 0$, la puissance active est nulle :
$P = 0$

La puissance réactive Q est la partie dépendante du temps de la puissance. Pour des courants et des tensions sinusoïdales :

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi$$

Facteur de réactance $\sin\varphi$: c'est le sinus du déphasage courant-tension φ.

Puissance effective S : produit des valeurs efficaces du courant I et de la tension U :

$$S = U \cdot I$$

16.2.4.5 Puissance complexe

1. Puissance

Puissance complexe $\underline{S}$: produit de la tension complexe $\underline{u}$ par le complexe conjugué $\underline{i}^*$ du courant $\underline{i}$:

$$\underline{S} = \underline{u} \cdot \underline{i}^*$$

- **Puissance active** P : partie réelle de la puissance complexe.
- **Puissance réactive** Q : partie imaginaire de la puissance complexe.

Puissance complexe, forme cartésienne			$L^2T^{-3}M$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\underline{S} = P + jQ$	$\underline{S}$	W	puissance complexe
	P	W	puissance active
	Q	W=var	puissance réactive

Watt W : unité SI de la puissance complexe $\underline{S}$.

$[\underline{S}] = W$

Autres unités de puissance (unités non légales) :

Voltampère-réactif var : unité de la puissance réactive Q.

$[Q] = \text{var} = \text{V} \cdot \text{A}$

Voltampère VA : unité de la puissance efficace S.

$[S] = \text{VA} = \text{V} \cdot \text{A}$

Puissance complexe, forme exponentielle			$L^2T^{-3}M$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\underline{S} = S\,e^{j\varphi_S}$	$\underline{S}$	W	puissance complexe
	S	W=VA	puissance efficace
	φ_S	1	angle de phase

Facteur de puissance $\cos\varphi_S$: désigne le rapport de la puissance active P à la puissance efficace S :

$$\cos\varphi_S = \frac{P}{S}$$

■ Dans le cas des moteurs électriques, le déphasage φ_S et par conséquent le facteur de puissance $\cos\varphi_S$, dépendent de la charge du moteur. Le $\cos\varphi_S$ indiqué par le constructeur vaut pour la pleine charge admissible.

16.2.4.6 Loi de Kirchhoff pour les circuits en alternatif

1. Loi des nœuds

La somme des courants complexes $\underline{i}_n$ à un nœud est nulle ; la somme des courants arrivant au nœud est égale à la somme des courants partant du nœud :

$$\underline{i}_1 + \underline{i}_2 + \underline{i}_3 + \ldots + \underline{i}_n = 0$$

▷ Si dans le plan complexe, on reporte les vecteurs représentatifs des courants, on obtient un polygone fermé (Fig. 16.17 (b)).

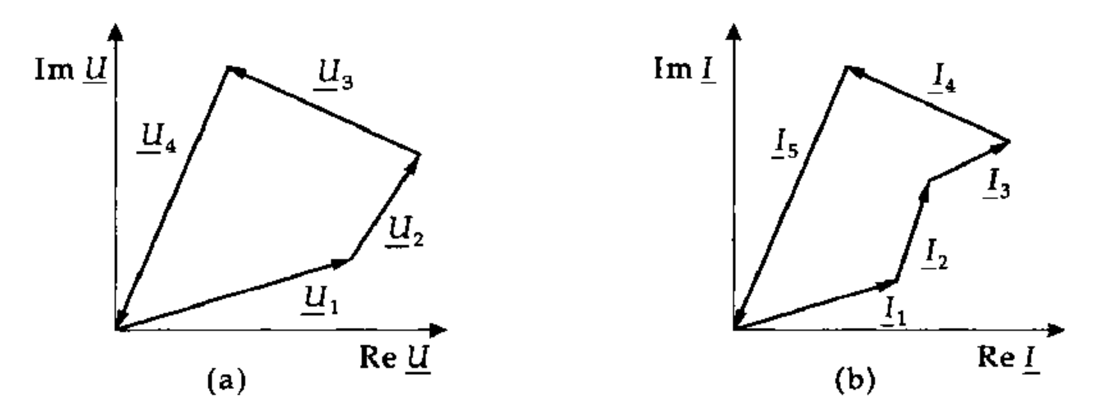


Fig. 16.17 : *Addition des vecteurs (a) : de tensions dans une maille, (b) : de courants à un nœud*

2. Loi des mailles

La somme de toutes les tensions complexes dans une maille est nulle :

$$\underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \underline{u}_3 + \ldots + \underline{u}_n = 0$$

▷ Si dans le plan complexe on reporte les vecteurs représentatifs des tensions dans une maille, on obtient un polygone fermé (Fig. 16.17 (a)).

16.2.4.7 Association en série d'impédances

Tous les éléments sont parcourus par le même courant.

- L'impédance complexe équivalente est égale à la somme de toutes les impédances complexes individuelles :
  $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \ldots + \underline{Z}_n$

Fig. 16.18 : *Montage série d'impédances complexes*

16.2.4.8 Association en parallèle d'impédances

Les tensions aux bornes de tous les éléments sont égales.

- L'admittance équivalente est égale à la somme de toutes les admittances individuelles :
  $\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \ldots + \underline{Y}_n$

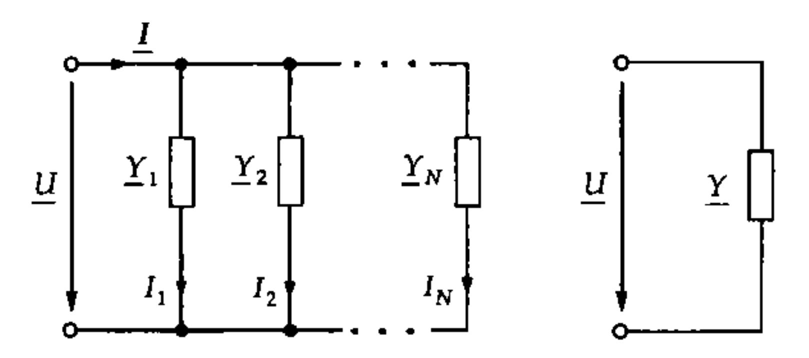


Fig. 16.19 : *Montage en parallèle d'impédances*

16.2.5 Bipôles élémentaires en alternatif

Les **bipôles élémentaires** :

- résistance
- capacité
- inductance

présentent des caractéristiques particulières de leur impédance qui est généralement une fonction de la fréquence du courant alternatif qui y circule.

16.2.5.1 Résistance ohmique

L'impédance $\underline{Z}$ d'une résistance ohmique pure est un réel dont la valeur est indépendante de la fréquence du courant alternatif.

- La réactance X d'une résistance ohmique pure est nulle.

Impédance complexe	Impédance	Résistance	Réactance
$\underline{Z} = R$	$Z = R$	R	$X = 0$

L'admittance complexe $\underline{Y}$ d'une résistance ohmique pure est également un réel indépendant de la fréquence du courant alternatif.

- La susceptance B d'une résistance ohmique pure est nulle.

Admittance complexe	Admittance	Conductance	Susceptance
$\underline{Y} = \frac{1}{R}$	$Y = \frac{1}{R}$	$G = \frac{1}{R}$	$B = 0$

- Aux bornes d'une résistance ohmique pure, courant et tension sont en phase. L'angle de phase d'une résistance est égal à zéro :
  $\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i = 0$

Dans un diagramme du plan complexe (Fig. 16.20 (c)), le courant et la tension pointent dans la même direction.

$\underline{i}$ $\underline{u}$ R (a) Im $\underline{Z}$ R Re $\underline{Z}$ (b) $\underline{i}$ $\underline{u}$ (c)

Fig. 16.20 : *Résistance dans les circuits en alternatif. (a) : symbole, (b) : représentation dans le plan complexe, (c) : courant et tension*

- La puissance dissipée par une résistance ohmique est un réel.

Puissance complexe	Puissance efficace	Puissance active	Puissance réactive
$\underline{S} = U \cdot I$	$S = U \cdot I$	$P = U \cdot I$	$Q = 0$

16.2.5.2 Capacité

Pour une **capacité** dans un circuit en courant alternatif, la tension $u(t)$ à ses bornes est égale à l'intégrale du courant $i(t)$ qui y circule, divisée par la valeur C de la capacité :

$$\underline{u}(t) = \frac{1}{C} \int \underline{i}(t)\ \mathrm{d}t$$

1. Impédance complexe d'une capacité

L'impédance complexe $\underline{Z}_C$ d'une capacité C (Fig. 16.21) est un imaginaire pur dépendant de la fréquence $f = \omega/(2\pi)$ du courant alternatif.

- La réactance d'une capacité est négative.

- La résistance R d'une capacité idéale est nulle.

L'impédance d'une capacité est inversement proportionelle à la fréquence f et à la capacité C et tend vers l'infini pour les fréquences faibles.

Impédance complexe	Impédance	Résistance	Réactance
$\underline{Z} = -\frac{\mathrm{j}}{\omega C}$	$Z = \frac{1}{\omega C}$	$R = 0$	$X = -\frac{1}{\omega C}$

▷ En courant continu ou aux très basses fréquences, l'impédance d'un condensateur tend vers l'infini. Aux fréquences élevées, un condensateur se comporte comme un court-circuit.

Les vecteurs tension et courant sont perpendiculaires, dans le plan complexe (Fig. 16.21 (c)).

- Le courant $i(t)$ est en avance de 90° sur la tension $u(t)$:
$\varphi_\mathrm{Z} = \varphi_\mathrm{u} - \varphi_\mathrm{i} = -90°$

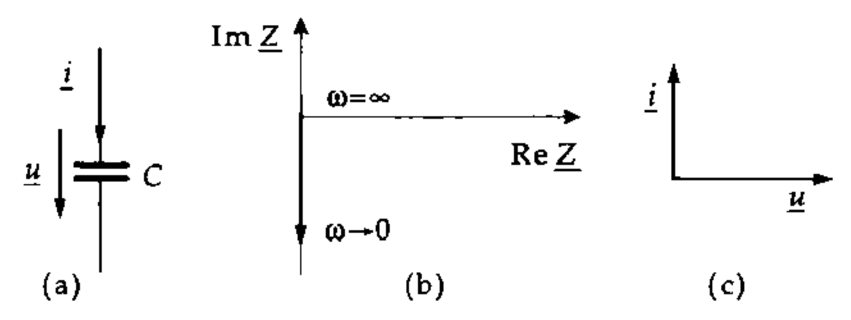


Fig. 16.21 : *Capacité dans un circuit en alternatif. (a) : symbole, (b) : représentation dans le plan complexe, (c) : courant $i(t)$ et tension $u(t)$*

L'admittance complexe $\underline{Y}_C$ d'un condensateur est un imaginaire pur, proportionnel à la fréquence $f = \omega/(2\pi)$ et à sa capacité C.

- La conductance d'une capacité est nulle.
- La susceptance d'un condensateur est positive.

L'impédance d'une capacité est proportionnelle à la fréquence f et à la capacité C.

Admittance complexe	Admittance	Conductance	Susceptance
$\underline{Y} = \mathrm{j}\omega C$	$Y = \omega C$	$G = 0$	$B = \omega C$

- La puissance complexe d'un condensateur est un imaginaire pur.
- La puissance réactive d'un condensateur est négative.

Puissance complexe	Puissance efficace	Puissance active	Puissance réactive
$\underline{S} = -\mathrm{j}U \cdot I$	$S = U \cdot I$	$P = 0$	$Q = -U \cdot I$

16.2.5.3 Inductance

Inductance : la tension $u(t)$ à ses bornes est égale au produit de la valeur L de son inductance par la dérivée du courant $i(t)$ qui y circule :

$$\underline{u}(t) = L\frac{\mathrm{d}\underline{i}(t)}{\mathrm{d}t}$$

L'impédance complexe $\underline{Z}_L$ d'une inductance L est un imaginaire pur et dépend de la fréquence (Fig. 16.22(b)).

- La résistance R d'une inductance idéale est nulle.
- La réactance X d'une inductance est positive.

La valeur de l'impédance Z_L d'une inductance est proportionnelle à la fréquence f et tend vers zéro avec $f \to 0\,\mathrm{Hz}$.

Impédance complexe	Impédance	Résistance	Réactance
$\underline{Z} = \mathrm{j}\omega L$	$Z = \omega L$	$R = 0$	$X = \omega L$

▹ Une inductance idéale ($R = 0$) constitue un court-circuit dans un circuit à courant continu ou à très basse fréquence. La valeur de la réactance d'une inductance, dans un circuit à courant alternatif de haute fréquence, tend vers l'infini.

Dans le plan complexe (Fig. 16.22(c)), le courant $i(t)$ est perpendiculaire à la tension $u(t)$.

- La tension $u(t)$ est en avance de 90° sur le courant $i(t)$:

  $\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i = 90°$

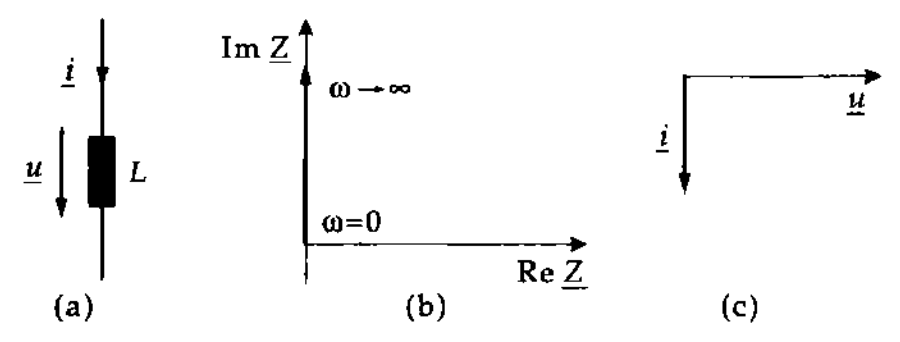


Fig. 16.22 : *Inductance en courant alternatif. (a) : symbole, (b) : représentation dans le plan complexe, (c) : diagramme tension-courant*

L'admittance complexe $\underline{Y}_L$ d'une inductance est imaginaire pure et inversement proportionelle à la fréquence $f = \omega/(2\pi)$ et à la valeur L de l'inductance :

- La conductance d'une inductance pure est nulle.

- La susceptance d'une inductance est positive.

La valeur de l'admittance est inversement proportionnelle à la fréquence f et à l'inductance L :

Admittance complexe	Admittance	Conductance	Réactance
$\underline{Y} = -\frac{j}{\omega L}$	$Y = \frac{1}{\omega L}$	$G = 0$	$B = -\frac{j}{\omega L}$

- La puissance complexe d'une inductance est un imaginaire pur.

- La puissance réactive est positive.

Puissance complexe	Puissance efficace	Puissance active	Puissance réactive
$\underline{S} = jU \cdot I$	$S = U \cdot I$	$P = 0$	$Q = U \cdot I$

16.2.5.4 Impédance complexe des bipôles élémentaires

Grandeur	Résistance R	Capacité C	Inductance L
$\overline{Z} = R + \mathrm{j}X$	R	$-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}$	$\mathrm{j}\omega L$
R	R	0	0
X	0	$-\frac{1}{\omega C}$	ωL
$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$	R	$\frac{1}{\omega C}$	ωL
$\phi_Z = \arctan(X/R)$	0	$-\pi/2$	$\pi/2$
$\overline{Y} = G + \mathrm{j}B$	$\frac{1}{R}$	$\mathrm{j}\omega C$	$-\mathrm{j}\frac{1}{\omega L}$
G	$\frac{1}{R}$	0	0
B	0	ωC	$-\frac{1}{\omega L}$
$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$	$\frac{1}{R}$	ωC	$\frac{1}{\omega L}$
$\phi_Y = \arctan(B/G)$	0	$\pi/2$	$-\pi/2$

16.2.6 Montage série d'une résistance et d'un condensateur

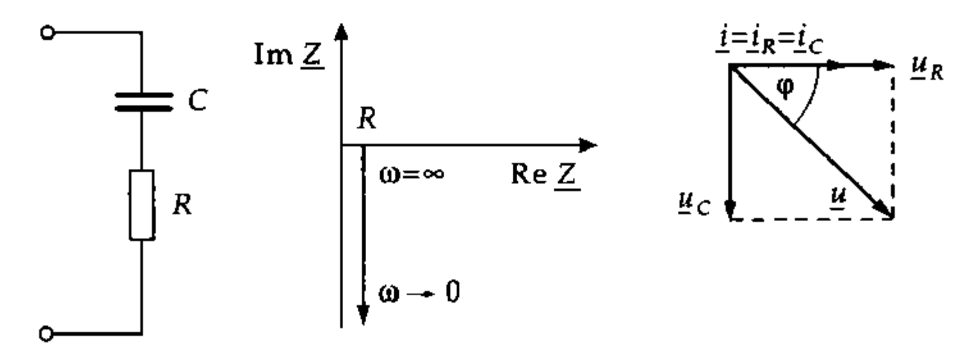


Fig. 16.23 : *Montage en parallèle d'une résistance et d'un condensateur. (a) : symbole, (b) : représentation dans le plan complexe, (c) : diagramme tension-courant*

Le calcul de l'impédance complexe équivalente est effectué à l'aide de la loi des mailles, la tension complexe aux bornes du montage est égale à la somme des tensions aux bornes de la résistance et du condensateur.

L'impédance complexe équivalente est :

Impédance du montage en série de R et C			$\mathrm{L^2T^{-3}MI^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\underline{Z} = R - \frac{\mathrm{j}}{\omega C}$$	$\underline{Z}$	Ω	impédance complexe
	R	Ω	résistance ohmique
	ω	$\mathrm{s^{-1}}$	pulsation
	C	F	capacité
	j	1	unité imaginaire

La réactance X est égale à la réactance de la capacité C :

$$X = -\frac{1}{\omega C}$$

La valeur de l'impédance équivalente au montage série est :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

- Le déphasage (Fig. 16.23 (c)) est compris entre 0° et −90°. Il tend vers 0° pour les fréquences élevées et vers −90° pour les basses fréquences :

$$\varphi_Z = \varphi_u - \varphi_i = -\arctan\frac{1}{\omega RC}$$

16.2.7 Montage parallèle d'une résistance et d'un condensateur

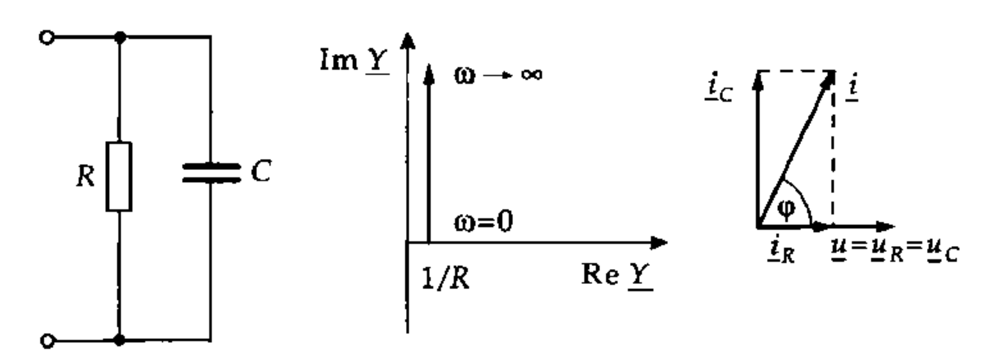


Fig. 16.24 : *Montage en parallèle d'une résistance et d'un condensateur. (a) : symbole, (b) : représentation dans le plan complexe, (c) : diagramme tension-courant*

▹ Le calcul de l'impédance complexe équivalente est effectué en utilisant la loi des nœuds : le courant complexe total est égal à la somme des courants complexes circulant dans chaque élément du montage.

La valeur de l'admittance complexe équivalente est :

Admittance du montage en parallèle de R et C			$L^{-2}T^{3}M^{-1}I^{2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C$	$\underline{Y}$	S	admittance complexe
	R	Ω	résistance ohmique
	ω	s^{-1}	pulsation
	C	F	capacité
	j	1	unité imaginaire

La conductance équivalente G est égale à la réciproque de la résistance ohmique R :

$$G = \frac{1}{R}$$

La susceptance équivalente est égale à la susceptance de la capacité C :

$$B = \omega C$$

La valeur de l'admittance équivalente au montage en parallèle est :

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C)^2}$$

- Le déphasage est compris entre 0° et −90°. Pour les fréquences élevées, il tend vers −90° et pour les basses fréquences vers 0° :
  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \arctan \omega RC$

16.2.8 Montage parallèle d'une résistance et d'une inductance

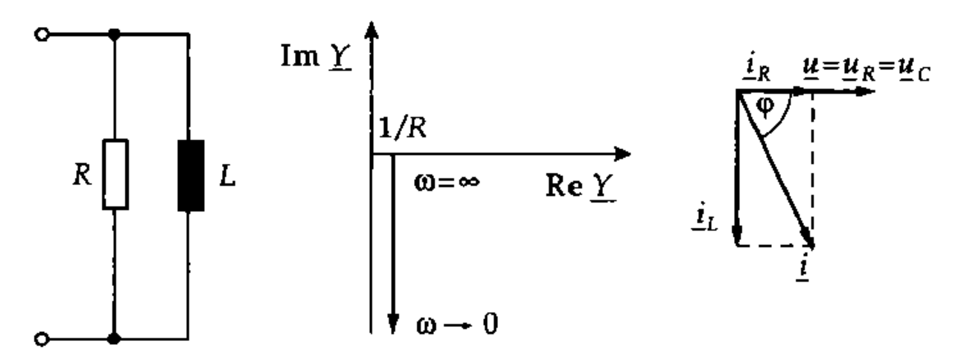


Fig. 16.25 : *Montage en parallèle d'une résistance et d'une inductance. (a) : symbole, (b) : représentation dans le plan complexe, (c) : diagramme tension-courant*

▹ Le calcul de l'impédance complexe équivalente est effectué en utilisant la loi des nœuds : le courant complexe total est égal à la somme des courants complexes circulant dans chaque élément du montage.

L'admittance complexe équivalente est :

Admittance du montage en parallèle de R et L			$L^{-2}T^{3}M^{-1}I^{2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\underline{Y} = \frac{1}{R} - \frac{\mathrm{j}}{\omega L}$	$\underline{Y}$ R ω C j	S Ω s^{-1} H 1	admittance complexe résistance ohmique pulsation inductance unité imaginaire

La conductance équivalente G est égale à la réciproque de la résistance ohmique R.

$$G = \frac{1}{R}$$

La susceptance B est égale à la réciproque de l'inductance L :

$$B = -\frac{1}{\omega L}$$

La valeur de l'admittance est :

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

- Le déphasage est compris entre 0° et 90°. Pour les fréquences élevées, il tend vers 0° et vers 90° pour les basses fréquences :

  $$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\arctan \frac{R}{\omega L}$$

16.2.9 Montage en série d'une résistance et d'une inductance

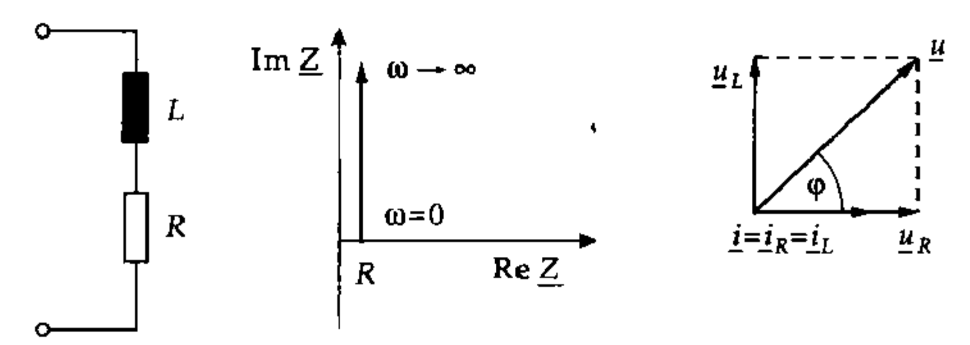


Fig. 16.26 : *Montage en série d'une résistance et d'une inductance. (a) : symbole, (b) : représentation dans le plan complexe, (c) : diagramme tension-courant*

▷ Le calcul de l'impédance complexe équivalente est effectué en utilisant la loi des mailles : la tension complexe aux bornes du montage est égale à la somme des tensions complexes aux bornes de la résistance et de l'inductance.

L'impédance complexe équivalente est :

Impédance du montage en série de R et L			$L^2T^{-3}MI^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\underline{Z} = R + j\omega L$	$\underline{Z}$	Ω	admittance complexe
	R	Ω	résistance ohmique
	ω	s^{-1}	pulsation
	L	[illegible]	inductance
	j	1	unité imaginaire

La résistance équivalente est égale à la résistance ohmique R.

La réactance équivalente est égale à la réactance de l'inductance L :

$$B = \omega L$$

La valeur de l'impédance équivalente est :

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

- Le déphasage est compris entre 0° et 90°. Pour les fréquences élevées, il tend vers 0° et vers −90° pour les basses fréquences :

  $$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

16.2.10 Circuit oscillant série

1. Circuit oscillant série

Un circuit oscillant série est constitué du montage en série d'une résistance, d'une inductance et d'une capacité (Fig. 16.27). Le calcul de l'impédance complexe équivalente est effectué à l'aide de la loi des mailles.

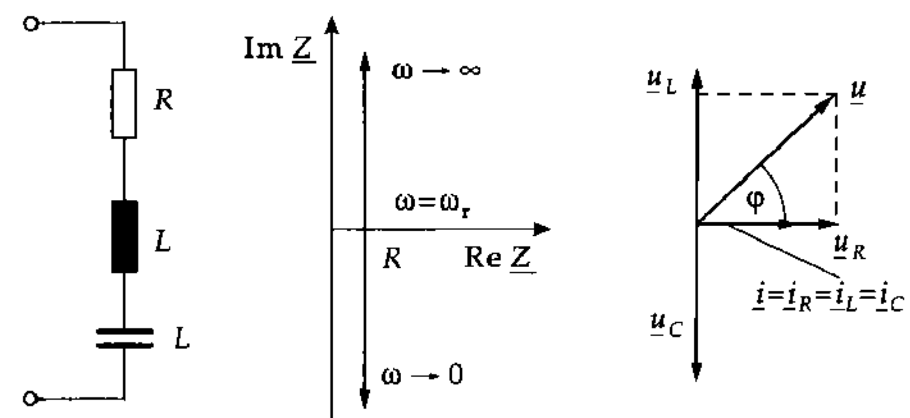


Fig. 16.27 : *Circuit oscillant série. (a) : schéma du montage, (b) : représentation dans le plan complexe, (b) : diagramme tension-courant*

L'impédance complexe équivalente est :

Circuit oscillant série			$L^2T^{-3}MI^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$	$\underline{Z}$	Ω	impédance complexe équivalente
	R	Ω	résistance ohmique
	ω	s^{-1}	pulsation
	L	H	inductance
	C	F	capacité
	j	1	unité imaginaire

La résistance équivalente est égale à la résistance ohmique R.

La réactance équivalente X est égale à la somme des réactances de l'inductance L et de la capacité C :

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

La réactance est fonction de la fréquence $f = \omega/(2\pi)$.

La valeur de l'impédance équivalente est :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

L'angle de phase φ_Z vaut :

$$\varphi_Z = \arctan\left(\frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}\right)$$

2. Résonance

La résonance se produit lorsque les réactances de la capacité et de l'inductance se compensent. Dans ce cas, l'impédance équivalente est réelle et égale à la résistance ohmique R. Pour une tension donnée, le courant est alors maximal.

Résonance série : désigne le phénomène de résonance dans un circuit oscillant série.

Fréquence de résonance : sa valeur, pour une inductance L et une capacité C vaut :

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Dans un circuit oscillant série, à la fréquence de résonance, le courant atteint un maximum et la phase change de 180° (Fig. 16.28).

- À la résonance, la résistance équivalente du circuit série est réelle et sa valeur est minimale (=R).
- Pour les fréquences plus basses que la fréquence de résonance, le courant $i(t)$ est en avance sur la tension $u(t)$, tandis que pour les fréquences supérieures à la fréquence de résonance, la tension est en avance sur le courant.
- À la résonance, le courant et la tension sont en phase.

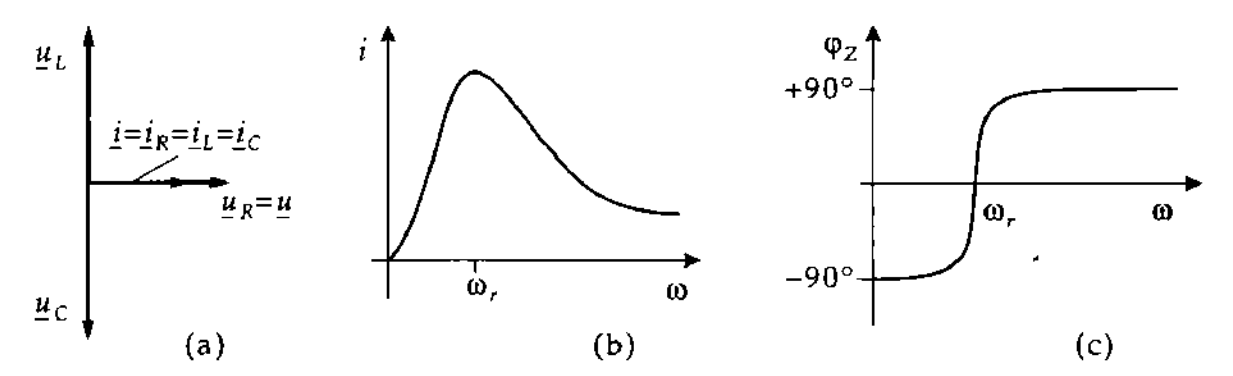


Fig. 16.28 : *Circuit oscillant série. (a) : diagramme tension-courant à la résonance, (b) : courant $i(t)$ en fonction de la fréquence, (c) : diagramme de phase*

Facteur de qualité Q_R du circuit oscillant série : rapport de la réactance $X_0 = X_C = X_L$ de la capacité ou de l'inductance à la résonance, à la valeur de la résistance R :

$$Q_R = \frac{X_0}{R}$$

- Le facteur de qualité détermine l'amortissement du circuit oscillant : plus Q est faible plus l'oscillation s'amortit rapidement. La courbe de résonance est alors plus large.

Facteur d'amortissement d'un circuit oscillant série d_R : valeur réciproque du facteur de qualité Q_R

$$d_R = \frac{1}{Q_R}$$

16.2.11 Circuit oscillant parallèle

1. Circuit oscillant parallèle

Un circuit oscillant parallèle est constitué d'une résistance, d'une inductance et d'une capacité associés en série (Fig. 16.29). Le calcul de son impédance complexe est effectué à l'aide de la loi des nœuds.

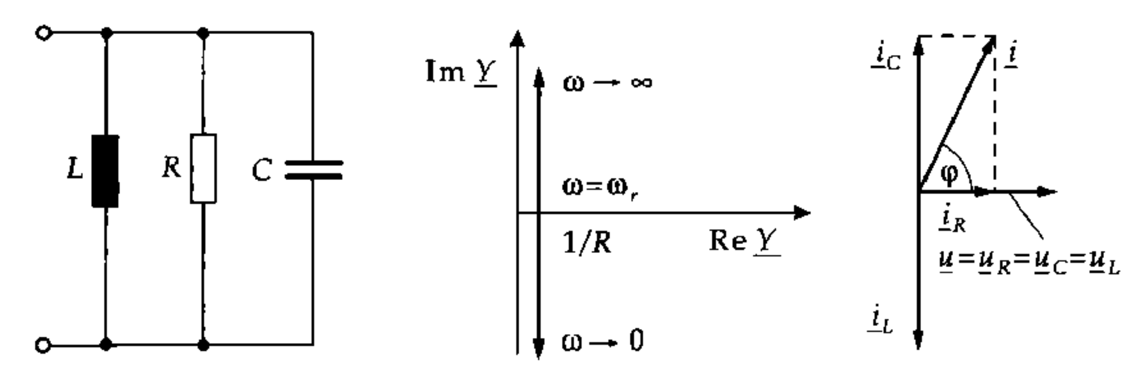


Fig. 16.29 : *Circuit oscillant parallèle. (a) : schéma du montage, (b) : représentation dans le plan complexe, (b) : diagramme tension-courant*

L'admittance complexe s'écrit :

Circuit oscillant parallèle			$L^{-2}T^3M^{-1}I^2$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$	$\underline{Y}$	S	admittance complexe
	R	Ω	résistance ohmique
	ω	s^{-1}	pulsation
	L	H	inductance
	C	F	capacité
	j	1	unité imaginaire

La conductance équivalente G est égale à la valeur réciproque de la résistance ohmique R :

$$G = \frac{1}{R}$$

La susceptance équivalente B est égale à la somme des susceptances de la capacité C et de l'inductance L :

$$B = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

La susceptance est une fonction de la fréquence $f = \omega/(2\pi)$.

La valeur de l'admittance équivalente est :

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

La phase de l'admittance complexe vaut :

$$\varphi_Y = \arctan\left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)$$

2. Résonance

La résonance se produit à la pulsation ω pour laquelle les susceptances de l'inductance et de la capacité se compensent.

- À la résonance, l'admittance équivalente est réelle et égale à la résistance ohmique R.

Résonance parallèle : désigne la résonance d'un circuit résonant parallèle.

Fréquence de résonance f_r : fréquence à laquelle se produit la résonance :

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Dans un circuit oscillant parallèle, à la résonance, le courant $i(t)$ est minimum et la phase φ_R change de 180° (Fig. 16.30).

- À la résonance, l'impédance équivalente devient réelle et maximale.

▷ Le circuit oscillant parallèle se comporte comme un **circuit bouchon**.

- Pour les fréquences inférieures à la fréquence de résonance, la tension $u(t)$ est en avance sur le courant $i(t)$. Pour les fréquences supérieures à la fréquence de résonance, le courant est en avance sur la tension.

- À la résonance, courant et tension sont en phase.

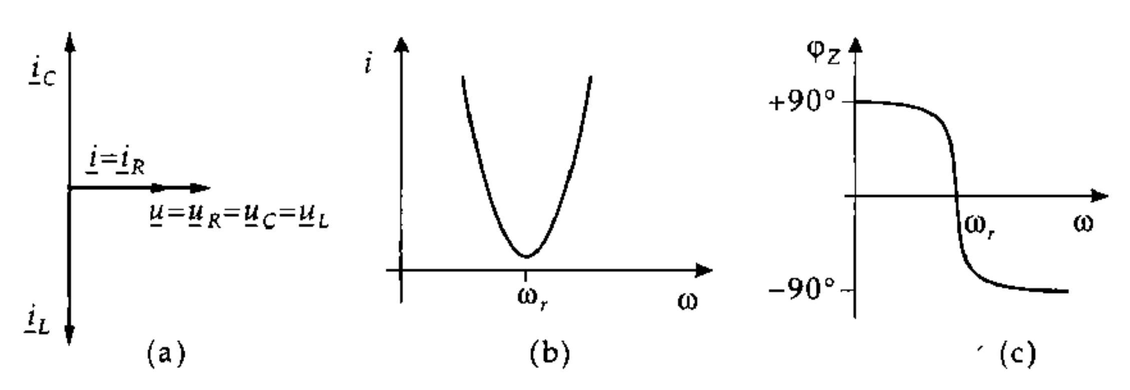


Fig. 16.30 : *Circuit oscillant parallèle. (a) : diagramme tension-courant à la résonance, (b) : courant $i(t)$ en fonction de la fréquence, (c) : diagramme de phase*

Facteur de qualité Q_P d'un circuit oscillant parallèle : rapport de la valeur de l'admittance $Y_0 = Y_C = Y_L$ au voisinage de la résonance, à celle de la conductance G :

$$Q_P = \frac{Y_0}{G}$$

L'oscillation est d'autant plus amortie que le facteur de qualité est faible, la courbe de résonance présente un minimum d'autant plus large.

Facteur d'amortissement d_P d'un circuit oscillant parallèle : valeur réciproque du facteur de qualité Q_P :

$$d_P = \frac{1}{Q_P}$$

16.2.12 Équivalence entre circuits série et parallèle

1. Équivalence

Un circuit composé d'une résistance ohmique et de réactances (capacité et/ou inductance) peut – pour une pulsation ω donnée – être représenté par un circuit parallèle de propriétés équivalentes (Fig. 16.31).

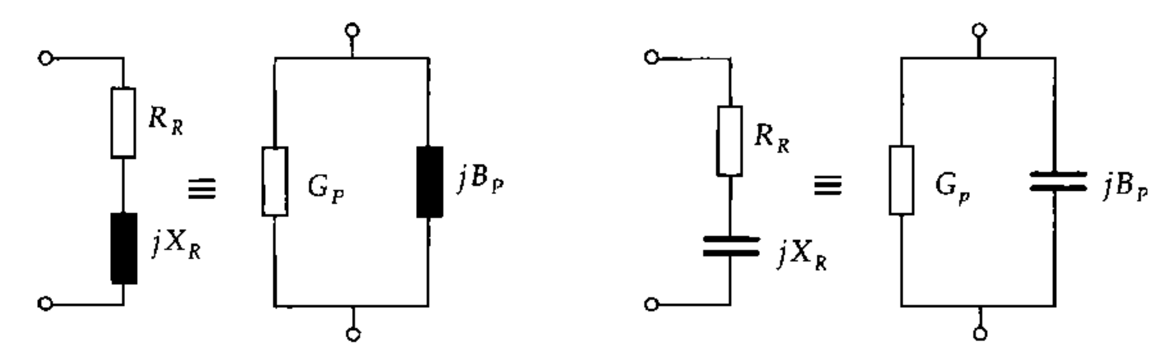


Fig. 16.31 : *Équivalence entre circuits série et parallèle pour une pulsation ω donnée*

- Deux circuits oscillants, respectivement parallèle et série, se comportent de façon identiques si leurs impédances complexes sont égales.
- L'équivalence n'a lieu que pour une fréquence $\omega/2\pi$ donnée. Pour des fréquences différentes, les impédances complexes des deux circuits ne sont pas égales.
- L'équivalence ne vaut que pour des tensions ou courants sinusoïdaux purs. Tout autre signal est constitué d'une superposition de fréquences harmoniques.

2. Transformation d'un circuit parallèle en circuit série équivalent

Circuit parallèle $\Longrightarrow$ circuit série			$\mathbf{L^2T^{-3}MI^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$R_S = \dfrac{G_P}{G_P^2 + B_P^2}$	R_S	Ω	résistance du circuit série
	X_S	Ω	réactance du circuit série
$X_S = \dfrac{B_P}{G_P^2 + B_P^2}$	G_P	S	conductance du circuit parallèle
	G_B	S	susceptance du circuit parallèle

3. Transformation d'un circuit série en circuit parallèle

Circuit série $\Longrightarrow$ circuit parallèle			$\mathbf{L^{-2}T^3M^{-1}I^2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$G_P = \dfrac{R_S}{R_S^2 + X_S^2}$	G_P	S	conductance du circuit parallèle
	B_P	S	susceptance du circuit parallèle
$B_P = \dfrac{X_S}{R_S^2 + X_S^2}$	R_S	Ω	résistance du circuit série
	X_S	Ω	réactance du circuit série

16.2.13 Ondes radioélectriques

1. Émission et réception d'ondes électromagnétiques

Les circuits oscillants sont utilisés pour la production et la réception **d'ondes électromagnétiques**. L'émission comme la réception s'effectue à l'aide d'antennes.

Modes de fonctionnement :

Oscillateur linéaire, ou **oscillateur de Hertz** ou **dipôle de Hertz** : distribution oscillante de charges électriques qui produit un champ électromagnétique dans son environnement. Les propriétés de ce champ

électromagnétique sont décrites par les → *équations de Maxwell* (Fig. 16.32). À partir d'une distance de quelques longueurs d'ondes du dipôle oscillant, le champ est une **onde transversale**

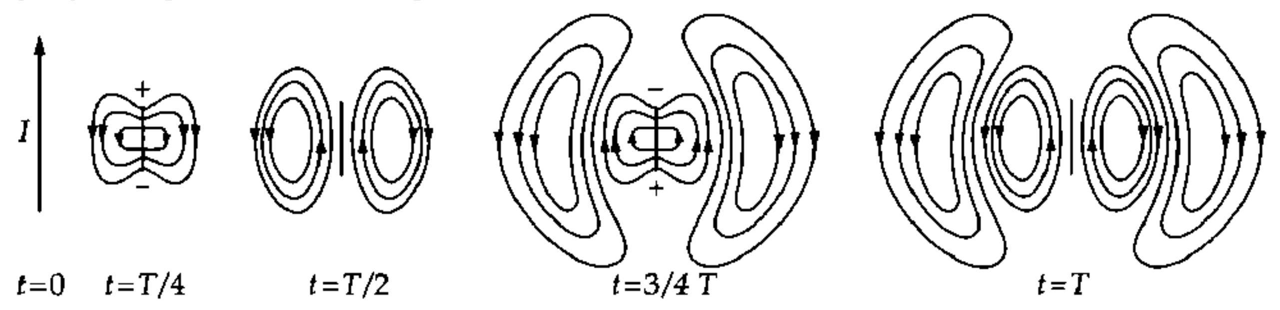


Fig. 16.32 : *Solution du champ électromagnétique produit par un dipôle de Hertz*

▷ Un dipôle de Hertz peut être constitué par un circuit oscillant dont l'inductance est une *bobine* à une spire réalisée par un fil recourbé et la capacité est le *condensateur* formé par les deux extrémités du fil.

Les **oscillations électromagnétiques** à haute fréquence sont amorties, en particulier par les pertes d'énergie par **rayonnement électromagnétique**. Ces pertes doivent être compensées par l'énergie électrique fournie à l'oscillateur.

La **fréquence de résonance d'un oscillateur linéaire** est inversement proportionnelle à sa longueur l.

Fréquence de résonance $\sim \dfrac{1}{\textbf{longueur du dipôle}}$			$\mathbf{T^{-1}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$f = \dfrac{c}{2l}$	f	Hz=1/s	fréquence de résonance
	c	m/s	vitesse de la lumière
	l	m	longueur du conducteur

2. Ondes électromagnétiques : propagation et applications

▷ La propagation des ondes électromagnétiques dépend fortement de leur longueur d'ondes.

Longueur d'onde	Fréquence	Dénomination, application
Haute fréquence		
30 km – 2 km	10 kHz – 150 kHz	ondes très longues, VLF (Very Low Frequency) liaisons sous-marines
2000 m – 600 m	150 kHz – 500 kHz	ondes longues, OL, LW radiodiffusion
600 m – 200 m	500 kHz – 1,5 MHz	ondes moyennes, OM, MW radiodiffusion
100 m – 10 m	3 MHz – 30 MHz	ondes courtes, OC, SW radiodiffusion, radio-amateurs
10 m – 1 m	30 MHz – 300 MHz	ondes ultra-courtes, VHF (Very High Frequency) radiodiffusion, télévision, police, navigation aérienne
1 m – 10 cm	300 MHz – 3 GHz	ondes décimétriques, UHF (Ultra High Frequency) télévision, guidage
10 cm – 1 cm	3 GHz – 30 GHz	ondes centimétriques radar, satellites
10 mm – 1 mm	30 GHz – 300 GHz	ondes millimétriques
Ondes lumineuses		
1 mm – 1 μm	$3 \cdot 10^{11} - 3 \cdot 10^{14}$	infrarouge, rayonnement thermique
760 nm	$3,95 \cdot 10^{14}$ Hz	rouge
589 nm	$5,09 \cdot 10^{14}$ Hz	jaune
527 nm	$5,70 \cdot 10^{14}$ Hz	vert
486 nm	$7,65 \cdot 10^{14}$ Hz	violet
100 nm – 10 nm	$3 \cdot 10^{15}$ Hz – $3 \cdot 10^{16}$ Hz	ultraviolet
Rayons X		
1 nm – 100 pm	$3 \cdot 10^{17}$ Hz – $3 \cdot 10^{19}$ Hz	
Rayons γ		
100 pm – 0,1 pm	$3 \cdot 10^{19}$ Hz – $3 \cdot 10^{22}$ Hz	

▷ Les fréquences des rayonnements X et γ se chevauchent en partie. Ces rayonnements se distinguent par leur mode de production : les rayons X sont dus à des réarrangements dans les couches électroniques des atomes, les rayons γ à des transitions dans les noyaux.

16.3 Machines électriques

Les **machines électriques** transforment de l'énergie électrique en énergie mécanique (moteurs électriques) ou fournissent de l'énergie électrique à partir d'une autre forme d'énergie (générateurs). Leur principe est fondé sur les lois de l'induction et la loi de Laplace pour construire des moteurs ou des générateurs. Il existe d'autres formes de générateurs, tels que les piles électrochimiques ou les générateurs isotopiques qui utilisent les rayonnements émis par des isotopes radioactifs comme source d'énergie.

Un **moteur** transforme de l'énergie électrique en énergie mécanique de rotation (ou parfois de translation).

Un **générateur** transforme de l'énergie mécanique (généralement de rotation) en énergie électrique.

- Dans son principe, une machine électrique est réversible, elle peut fonctionner en moteur ou en générateur.

▷ L'avantage de la transformation de l'énergie par des machines électriques réside dans le fait que les pertes sont réduites, de sorte que des rendements proches de 99% peuvent être atteints.

16.3.1 Principe de fonctionnement

Le déplacement d'une spire de fil conducteur dans un champ magnétique induit une tension U_{ind} à ses bornes. Un courant électrique s'établit, le conducteur est alors soumis à une force F (force de Laplace) qui s'oppose à son déplacement. La tension induite est appelée **force contre-électromotrice** ou parfois **tension à l'état bloqué**.

Courant en charge, I : circule dans la spire conductrice fermée sur une charge (résistance ou récepteur).

■ Technique : les enroulements de conducteurs et les aimants sont disposés de façon à se déplacer les uns par rapport aux autres. Soit les aimants tournent à l'intérieur des enroulements de conducteurs fixes, soit les spires conductrices tournent entre les aimants fixes.

Stator : partie fixe de la machine électrique.

Rotor : partie mobile, tournante de la machine électrique.

Induit, bobinage : ensemble des enroulements conducteurs dans lequel circule le courant induit.

Le flux magnétique ϕ_{E} est produit soit par des aimants permanents, soit par un enroulement parcouru par le **courant d'excitation** I_{E}. Le flux magnétique d'excitation est dirigé par des pôles en fer doux entre stator et rotor, l'entrefer étant aussi petit que possible.

1. Tension induite et couple moteur

La **tension induite,** U_{ind} est directement proportionelle au flux magnétique ϕ_{E} et au nombre n de tours par unité de temps (vitesse de rotation).

Tension induite ~ flux d'excitation × nbre. de tours			$L^2T^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$U_{\text{ind}} = k_1 \cdot \phi_{\text{E}} \cdot n$	U_{ind}	V	tension induite
	k_1	1	paramètre de la machine
	ϕ_{E}	Wb=Vs	flux d'excitation
	n	min^{-1}	nombre de tours/minute

Le paramètre k_1 tient compte des spécificité de construction de chaque machine.

La force de Laplace agit sur les enroulements du rotor et produit un couple.

Couple ~ courant en charge × flux d'excitation			$L^2T^{-2}M$
	Symbole	Unité	Dénomination
$M = k_2 \cdot I \cdot \phi_{\text{E}}$	M	Nm	couple
	k_2	1	paramètre de la machine
	I	A	courant en charge
	ϕ_{E}	Wb=Vs	flux d'excitation

Le **couple** est directement proportionel au courant en charge I_1 et au flux magnétique d'excitation ϕ_E. Le paramètre k_2 dépend des caractéristiques de la machine.

Ces deux relations peuvent s'appliquer à différents types de machines.

Tension aux bornes, U_{Kl} : tension aux connexions du moteur. R_A désigne la résistance interne de l'enroulement de l'induit et I_A le courant dans l'induit. Dans un générateur, la tension induite (force électromotrice) est diminuée de la valeur de la chute de potentiel due à la résistance de l'induit :

Tension aux bornes d'un générateur			$L^2T^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$U_{Kl} = U_{ind} - I_A \cdot R_A$	U_n	V	tension aux bornes
	U_{ind}	V	tension induite
	I_A	A	courant dans l'induit
	R_A	Ω	résistance de l'induit

Dans un moteur, une partie de la tension aux bornes est compensée par la tension induite :

Tension aux bornes d'un moteur			$L^2T^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$U_n = U_{ind} + I_A \cdot R_A$	U_n	V	tension aux bornes
	U_{ind}	V	tension induite
	I_A	A	courant dans l'induit
	R_A	Ω	résistance de l'induit

16.3.2 Machines à courant continu

La Figure 16.33 représente une coupe d'une **machine à courant continu** à quatre pôles, ici en moteur.

Le stator externe comporte les pôles principaux avec les enroulement de l'excitatrice et des pôles auxiliaires plus petits. Le rotor, sur lequel est bobiné l'induit, tourne à l'intérieur du stator. Lorsque l'induit tourne entre deux pôles, le courant dans l'induit change de sens chaque fois que l'induit change de secteur polaire, il faut par conséquent inverser le sens du courant dans l'induit à l'aide d'un commutateur.

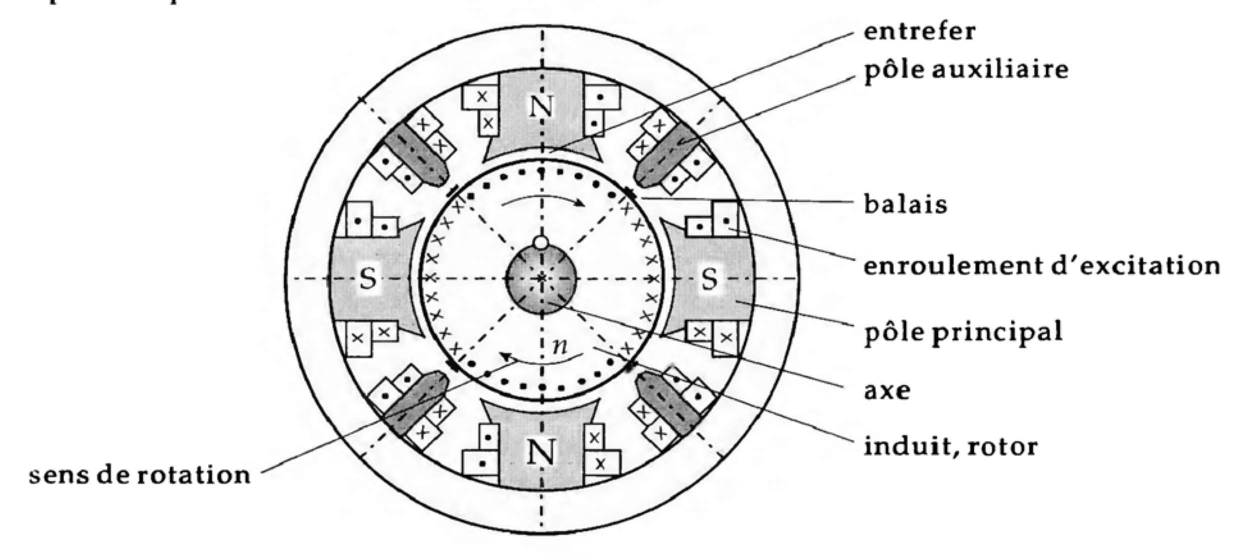


Fig. 16.33 : *Principe d'un moteur à courant continu (coupe transversale)*

Commutateur ou **collecteur** : composé d'une bague métallique en deux (ou plusieurs) parties, montée sur l'arbre de l'induit. Les deux moitiés de la bague, isolées l'une de l'autre, constituent les bornes pour l'enroulement de l'induit. Lorsque le moteur tourne en entraînant le commutateur, des balais fixes en métal ou carbone appuient sur le commutateur et conduisent le courant vers l'induit. Chaque balais entre alternativement en contact avec l'une ou l'autre moitié de la bague inversant ainsi le sens du courant.

Vitesse de rotation d'un moteur à courant continu : en augmentant la tension U_u aux bornes du moteur ou en diminuant le flux d'excitation ϕ_E, on peut augmenter le nombre n de tours par minute du moteur :

Vitesse de rotation d'un moteur à courant continu			**T^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$n = \dfrac{U_u - I_A \cdot R_A}{k_1 \cdot \phi_E}$	n	min^{-1}	nombre de tours/minute
	U_{Kl}	V	tension aux bornes
	I_A	A	courant de l'induit
	R_A	Ω	résistance interne de l'induit
	k_1	1	paramètre de la machine
	ϕ_E	Wb=Vs	flux d'excitation

▷ Si le flux d'excitation devient trop faible, la vitesse de rotation peut devenir trop importante! On dit que le moteur s'emballe.

1. Démarrage d'un moteur à courant continu

Pour démarrer un moteur à courant continu, le courant d'excitation I_E devrait être aussi fort que possible pour obtenir un couple de démarrage important. Cependant, lorsque l'induit est immobile, il ne possède qu'une très faible résistance et constituerait un court-circuit qui pourrait endommager l'induit. Pour éviter une telle détérioration et pour limiter le courant dans l'induit, on branche une résistance de démarrage (rhéostat) en série avec l'induit. Lorsque le moteur atteint son régime, il produit une force contre-électromotrice et on peut réduire la valeur de la résistance de démarrage et régler la vitesse de rotation du moteur.

2. Connexion des moteurs à courant continu

Plusieurs modes de connexions sont possibles (Fig. 16.34) :

Moteur à excitation shunt : les circuits d'excitation (E_1, E_2) et d'induit (A_1, B_2) sont alimentés en parallèle par ($U_{\mathbf{Al}}$) (Fig. 16.34 (a)).

Moteur à excitation séparée : l'enroulement de l'excitatrice (F_1, F_2) est alimenté par une source de tension externe (U_E) (Fig. 16.34 (b)).

Les moteurs à excitation shunt ou à excitation séparée, ont des comportements similaires. Leur vitesse de rotation peut être ajustée en agissant sur le flux d'excitation. La vitesse de rotation est peu dépendante de la charge du moteur.

Moteur à excitation série : l'enroulement d'excitation (D_1, D_2) est en série avec l'induit (A_1, B_2) (Fig. 16.34 (c)). Lorsque la charge du moteur augmente, le courant augmente ainsi que le flux d'excitation. Ceci a pour conséquence d'augmenter le couple moteur, mais de diminuer la vitesse de rotation. Lorsque la charge diminue, la vitesse augmente à nouveau et peut aller jusqu'à l'emballement du moteur.

▷ Un moteur à excitation série ne doit être utilisé que si sa charge ne peut jamais devenir nulle!

■ Les moteurs à excitation série sont utilisés comme démarreurs de moteurs à explosion, comme moteur de grues ou de trains.

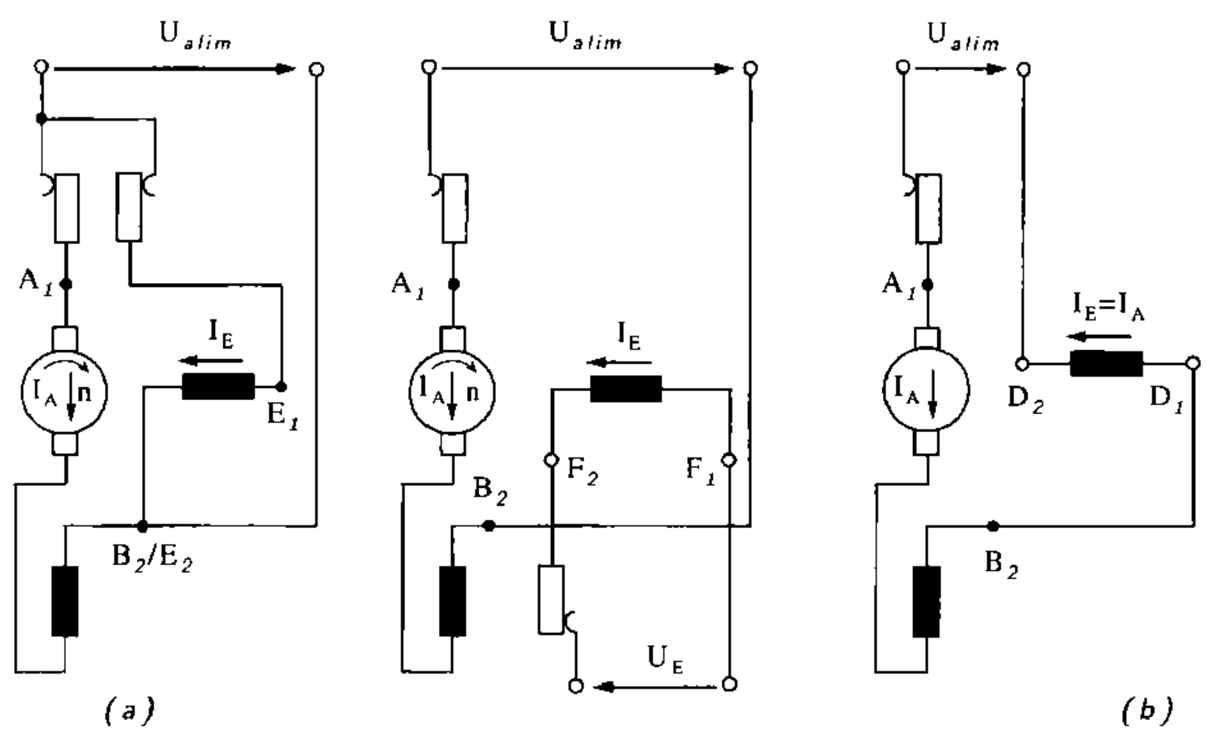


Fig. 16.34 : *Montages des moteurs à courant continu. (a) : excitation shunt, (b) : excitation externe, (c) : excitation série*

Moteurs à excitation compound : l'alimentation de l'excitateur est une combinaison du montage shunt et du montage série avec des enroulements séparés pour chaque type d'excitation. De ce fait, les variations de vitesse de rotation en fonction de la charge sont minimisées. La partie série de l'excitation interdit l'emballement du moteur si la charge devient nulle.

3. Inversion du sens de rotation

Pour inverser le sens de rotation d'un moteur à courant continu, on peut soit inverser le sens du courant d'excitation, soit le courant dans l'induit. Remarquons que dans un moteur à excitation série, un changement de sens du courant d'alimentation se répercute à la fois sur l'excitation et l'induit. Par conséquent, le sens de rotation du moteur n'est pas modifié.

En conséquence, les moteurs à courant continu à excitation série peuvent aussi être alimentés en courant alternatif **moteur universel** .

16.3.3 Moteurs à courant alternatif

Les **moteurs à courant alternatif** se répartissent en :

- **moteurs synchrones**
- **moteurs asynchrones moteur à induction** ou à champ tournant)

suivant que l'induit tourne de façon synchrone ou asynchrone avec la fréquence du courant alternatif d'alimentation.

Fig. 16.35 : *Coupe d'un moteur synchrone*

16.3.3.1 Moteur synchrone

1. Principe de fonctionnement

Les enroulements de l'induit sont fixés dans le stator, le rotor comporte plusieurs pôles (par exemple quatre). Ceci a comme avantage que le courant intense dans l'induit est amené par des bornes fixes, alors que le courant d'excitation, plus faible, peut être amené par deux bagues sur l'axe du rotor (Fig. 16.35).

Les enroulements de l'induit, au nombre de trois, sont décalés de 120°. Les champs magnétiques créés par le courant alternatif se combinent alors pour produire un **champ tournant** synchrone à la fréquence du courant. Les pôles du rotor sont entraînés par ce champ tournant, le rotor tourne en synchronisme avec la fréquence du courant d'alimentation.

2. Vitesse de rotation

Un moteur synchrone tourne à une vitesse de rotation fixe. Le nombre n_{sync} de tours par minute est déterminé par la fréquence f du courant d'alimentation divisé par le nombre p de paires de pôles du rotor :

$$\textbf{Nombre de tours} = \frac{\textbf{fréquence}}{\textbf{nbre. de paires de pôles}} \qquad \mathrm{T}^{-1}$$

	Symbole	Unité	Dénomination
$n_{\text{sync}} = \dfrac{f \cdot 60}{p}$	n_{sync}	min^{-1}	nombre de tours/minute
	f	Hz	fréquence du courant
	p	1	nombre de paires pôles du rotor

■ Le moteur représenté (Fig. 16.35) possède deux paires de pôles. Alimenté par un courant de fréquence $f = 50\,\text{Hz}$, sa vitesse de rotation sera de $n_{\text{sync}} = 1500\,\text{min}^{-1}$.

▷ Au contraire des moteurs à courant continu, les variations du courant d'excitation n'ont pas d'influence sur la vitesse de rotation du moteur synchrone.

3. Mise en oeuvre de machines synchrones

- Une machine synchrone utilisée en **générateur** ne doit être raccordée au secteur ou à d'autres générateurs que si les conditions suivantes sont remplies :
  - même tension
  - même fréquence
  - même phase
- Une machine synchrone utilisée comme **moteur** ne doit être démarrée que si l'enroulement d'excitation est court-circuité, afin d'éviter des détériorations mécaniques par une accélération trop forte ou des tensions induites trop importantes dans l'induit.

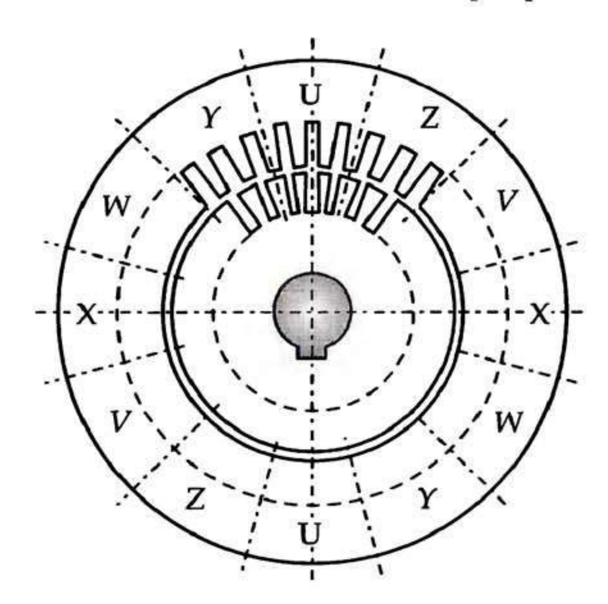


Fig. 16.36 : *Coupe d'un moteur asynchrone*

16.3.3.2 Moteur asynchrone

1. Principe de fonctionnement

Le stator d'un moteur asynchrone (par exemple pour un moteur à quatre pôles Fig. 16.36), est muni de trois enroulements décalés de 120° comme pour le moteur synchrone. Ces enroulement produisent un champ tournant synchrone au courant d'alimentation qui entraîne le rotor. Le rotor est de forme cylindrique, réalisé par un empilement de tôles de fer doux dans lequel sont insérés une série de gros conducteurs en court-circuit, disposés en boucles autour de l'arbre **cage d'écureuil**. Le champ tournant induit une tension dans les tiges de court-circuit de la cage du rotor. Le courant induit qui en résulte produit un champ magnétique qui est en retard de phase de 90° sur le champ tournant, et provoque l'accélération du rotor qui tend à suivre le champ tournant.

Lorsque la vitesse du rotor tend vers celle correspondante à la fréquence du courant alternatif, l'induction ne se produit plus et l'accélération du rotor cesse.

- La vitesse de rotation du rotor est par conséquent légèrement inférieure à celle du champ tournant, donc asynchrone.

2. Vitesse synchrone

La vitesse synchrone ou **vitesse du champ tournant**, n_{sync}, est déterminée par le nombre p de paires de pôles de l'enroulement du stator :

Vitesse synchrone d'un moteur asynchrone				T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$n_{sync} = \dfrac{f \cdot 60}{p}$	n_{sync}	min^{-1}	nombre de tours par minute	
	f	Hz	fréquence du secteur	
	p	1	nombre de paires de pôles	

3. Glissement

Le glissement s mesure le retard du rotor par rapport au champ tournant. Le glissement est fonction de la charge du moteur.

■ Sous la charge nominale, le glissement d'un moteur asynchrone est compris entre 0,5% et 10%.

● Le glissement s est déduit de la différence entre le nombre de tours n_{sync} du champ tournant et du nombre de tours effectif n par rapport à n_{sync} :

Glissement d'un moteur asynchrone				1
	Symbole	Unité	Dénomination	
$s = \dfrac{n_{sync} - n}{n_{sync}} = 1 - \dfrac{n}{n_{sync}}$	s	1	glissement	
	n	min^{-1}	nombre de tours effectif	
	n_{sync}	min^{-1}	nombre de tours synchrone	

▷ Puisque le rotor en forme de cylindre d'un moteur asynchrone ne comporte pas de pôles, le nombre de tours synchrone est uniquement déterminé par la façon d'alimenter les enroulements du stator. Divers systèmes de commutations permettent d'obtenir deux vitesses de rotations différentes.

● Le couple de démarrage d'un moteur asynchrone est inférieur à son couple moteur nominal. Dans les moteurs de forte puissance, on dispose dans le rotor des enroulements supplémentaires couplés à des résistances de démarrage.

● Les moteurs asynchrones sont robustes, fiables et nécessitent peu d'entretien.

17 Conduction dans les liquides, les gaz et le vide

Au contraire des solides, le courant électrique dans les liquides et les gaz n'est pas seulement transporté par les électrons, mais aussi par des ions positifs et négatifs. Par ailleurs, le courant électrique entraîne la décomposition des liquides.

17.1 Électrolyse

17.1.1 Quantité de matière

Mole, n : unité fondamentale de quantité de matière. Mesure le nombre d'entités élémentaires identiques entre elles (atomes, molécules, ions, électrons, ions), indépendamment de leur masse.

Mole = nombre de particules/nombre d'Avogadro				N
$n = \frac{N}{N_A}$	Symbole	Unité	Dénomination	
	n	mol	mole	
$N_A = 6.022\,136\,7 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$	N	1	nombre de particules	
	N_A	1/mol	constante d'Avogadro (nombre de Loschmidt)	

Mol, mol : unité SI de la mole. 1 mol est la quantité de matière qui contient un nombre de particules égal au nombre d'atomes de Carbone 12 dans 0.012 kg de ^{12}C.
Nombre d'Avogadro, N_A : parfois appelé nombre de Loschmidt dans les pays germanophones, nombre de particules dans une quantité de matière égale à 1 mol.

17.1.2 Ions

1. Ionisation et Ions

Ionisation : modification du nombre d'électrons dans un atome neutre, ou rupture de liaisons dans une molécule. Lorsqu'on arrache des électrons à des atomes neutres, on forme des **ions positifs** ; en attachant des électrons supplémentaires à des atomes neutres, on forme des **ions négatifs**.

Ions : atomes ou molécules dont la charge n'est pas globalement nulle.

- Les ions peuvent être chargés aussi bien positivement que négativement.
- Les ions peuvent porter une ou plusieurs charges électriques élémentaires.
- Les ions sont produits par transfert d'électrons, par exemple par la **dissociation** de molécules polaires ($H_2O \rightarrow OH^- + H^+$).
- Les ions positifs sont souvent des atomes de métaux ionisés.
- Les ions négatifs sont souvent des groupes de molécules (radicaux) non métalliques.

■ **Cations** : ions positifs : Na^+, Ca^{++} (Métaux) ; H^+.
Anions : ions négatifs : SO_4^{--}, Cl^-, NO_3^-.

2. Propriétés des Ions

Les anions, sous l'action d'une différence de potentiel, se déplacent vers l'anode (pôle positif), les cations se déplacent vers la cathode (pôle négatif).

▷ Les sels sont généralement constitués de cristaux ioniques. Lorsqu'ils se dissolvent dans l'eau, ils se dissocient en ions positifs et négatifs, par exemple : ($NaCl \rightarrow Na^+ + Cl^-$).

Charge ionique, z : la valeur algébrique de la différence entre le nombre de charges positives et celui des charges négatives d'un ion.

■ Li^+ $z = 1$
Li^{2+} $z = 2$
Cl^- $z = -1$
U^{92+} $z = 92$

▷ La charge ionique z ne doit pas être confondue avec le **nombre de charges d'un noyau** Z, qui désigne le nombre de protons du noyau indépendamment du cortège électronique.

17.1.3 Électrodes

Électrode : partie d'un conducteur fixe, permettant l'arrivée ou le départ du courant électrique dans un solide, un liquide, un gaz ou le vide.

Électrode électrochimique : système bi-phases, constitué d'un élément et d'une solution de ses ions, par exemple : une tige de Cuivre en présence d'une solution saline de sulfate de cuivre. Une électrode de **première espèce** consiste en un métal M au contact d'une solution d'un sel A contenant le cation M. Une électrode de **deuxième espèce** consiste en un métal M au contact d'un de ses sels solides MA et d'une solution d'un sel AC contenant l'anion A ($Hg/HgCl_2/KCl$).

Électrode normale à Hydrogène E.N.H. : électrode en Platine immergée dans une solution acide à pH=0, saturée d'Hydrogène (électrode standard).

Anode : électrode positive.

Cathode : électrode négative.

● Les anodes recueillent des électrons, les cathodes cèdent des électrons. Les anions se déchargent à l'anode, les cations à la cathode.

17.1.4 Électrolyte

Électrolyte : liquide ou solution saline qui conduit le courant électrique. Le courant électrique est porté par les ions mobiles, cations et anions (double transport de charge).

▷ L'eau pure est un mauvais conducteur de courant, car elle n'est que faiblement dissociée en cations et anions. Sa conductibilité peut être fortement augmentée en y dissolvant des sels.

Hydratation : en solution aqueuse, les cations sont entourés de molécules d'eau qui leur sont liés par des forces électrostatiques s'exerçant entre la charge de l'ion et le moment dipolaire électrique de la molécule d'eau.

Électronégativité : aptitude des atomes à fixer des électrons. L'électronégativité croît de la colonne 1 à la colonne 7 du tableau périodique des éléments, les métaux étant les moins électronégatifs.

Le Fluor et l'Oxygène posséde la plus grande, le Rubidium et le Césium la plus faible électronégativité.

▷ À cause de sa forme spatiale et des électronégativités différentes de l'Hydrogène et de l'Oxygène, l'eau possède un moment dipolaire permanent, c'est une **molécule polaire**. Les molécules polaires sont de bons solvants.

17.1.4.1 Conduction dans les électrolytes

1. Mobilité des ions dans un électrolyte

Dans un électrolyte, les ions soumis à un champ électrique $\vec{E}$ **migrent** (dérivent) avec une vitesse constante (Fig. 17.1).

Vitesse de dérive des ions v_{dr} dans les électrolytes : vitesse moyenne des ions soumis à un champ électrique $\vec{E}$ dans un électrolyte.

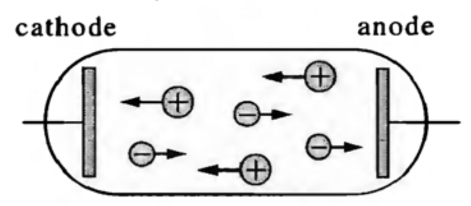


Fig. 17.1 : *Mobilité des ions soumis à un champ électrique dans un électrolyte*

Vitesse de dérive des ions dans un électrolyte				**LT^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$v_{dr} = \mu E$	v_{dr}	m/s	vitesse de dérive	
	μ	$m^2/V\ s$	mobilité des ions	
	E	V/m	intensité du champ électrique	

- Selon le signe de leur charge, les ions se déplacent parallèlement ou anti-parallèlement à la direction du champ électrique.

La mobilité des ions dépend à la fois de la nature de l'ion et du milieu dans lequel ils se déplacent.

La mobilité des ions dans les électrolytes est plus faible d'environ 4 ordres de grandeur que leur mobilité dans les gaz.

Les pertes d'énergie par choc entre les ions en mouvement et les molécules de l'électrolyte compensent l'énergie due au champ électrique appliqué. De ce fait s'établit un mouvement uniforme avec une vitesse moyenne constante.

2. Conductivité d'un électrolyte

γ : conductivité par unité de longueur dans un électrolyte (Fig. 17.2) :

Conductivité électrique d'un électrolyte				**$L^{-3}T^3M^{-1}I^2$**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\gamma = ze(\mu_+ n_- + \mu_- n_-)$	γ	S/m	conductivité électrique	
	z	1	nombre de charge de l'ion	
	e	C	charge élémentaire	
	$\mu_\pm$	$m^2/(Vs)$	mobilité de l'ion	
	$n_\pm$	$1/m^3$	nombre d'ions par unité de volume	

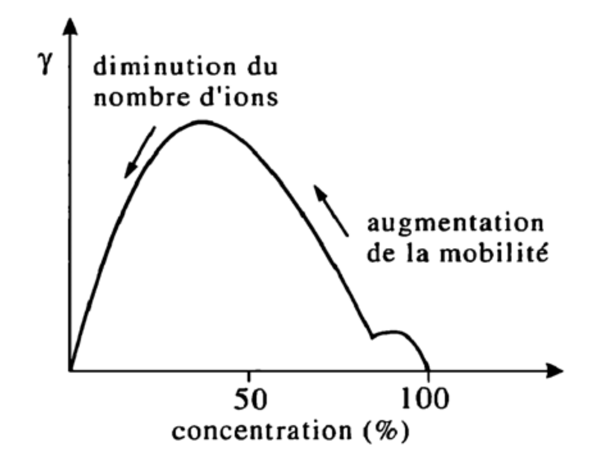


Fig. 17.2 : *Conductivité électrique de H_2SO_4 en fonction de sa concentration dans l'eau*

Les ions positifs et les ions négatifs participent au courant électrique dans l'électrolyte ; leurs mobilités, fonctions de leur charge et de leur rayon, sont différentes.

Conductivité équivalente, Λ, d'un électrolyte : quotient de sa conductivité γ par sa concentration molaire c (nombre de molécules par unité de volume) :

$$\Lambda = \frac{\gamma}{c}$$

▹ Dans un électrolyte, le courant électrique entraîne des réactions chimiques, dans son milieu et aux électrodes, qui peuvent conduire à sa décomposition.

Électrolyse : passage du courant électrique dans un électrolyte dissous, fondu ou solide. Les ions perdent leur charge au contact des électrodes et donnent des atomes ou des groupes d'atomes recueillis sous forme d'éléments chimiques ou qui réagissent avec les électrodes ou le solvant.

■ L'électrolyse de l'eau produit sa décomposition en molécules de gaz Hydrogène et Oxygène près des électrodes.

17.1.4.2 Loi de Faraday

1. Première loi de Faraday

La quantité de matière décomposée et les quantités de matières libérées à chacune des électrodes sont proportionnelles à la quantité d'électricité qui a traversé l'électrolyte.

Masse libérée = charge/constante de Faraday			**M**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$m = \frac{MQ}{zF}$$	m M Q z F	kg kg/mol C 1 C/mol	masse libérée masse molaire charge transportée valence d'une molécule constante de Faraday

2. Constante de Faraday

Constante de proportionnalité entre la quantité de matière et la charge électrique transportées. C'est le produit de la charge élémentaire e et du nombre d'Avogadro N_A :

Constante de Faraday			**ITN^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$F = e \cdot N_A = 9.648\,530\,9 \times 10^4 \text{ C/mol}$$	F e N_A	C/mol C 1/mol	constante de Faraday chage élémentaire nombre d'Avogadro

■ Constante de Faraday de quelques corps (en C/mol) : Hydrogène 96 364, Oxygène 96 486, Nickel 96 515, Étain 96 482.

3. Transport de masse et électrodéposition

La masse transportée par l'électrolyse se dépose aux électrodes, soit sous forme de dépôt métallique, soit sous forme de dégagement de gaz.

● La masse transportée est indépendante de la géométrie de la cathode ou de la concentration de l'électrolyte.

▷ Jusqu'en 1948, la définition de l'unité de quantité de charge (Coulomb) était fondée sur le fait que la masse déposée lors d'une électrolyse est indépendante des conditions extérieures (1 C = 1 As).

■ Un courant $I = 1\,\mathrm{A}$, qui circule pendant 1 s, dans une solution de nitrate d'argent ($AgNO_3$), libère $n = 1/96\,485$ mole $= 1.036 \times 10^{-5}$ mole d'Argent, ce qui correspond à 1.118 mg d'Argent.

■ L'électrolyse est couramment utilisée pour produire des métaux de grande pureté, par exemple le **cuivre électrolytique**.

■ **Micromécanique** : éléments mécanique de très petites dimensions (→ *Micromécanique*). Les **micromoteurs** et les **microcapteurs** sont souvent réalisés à l'aide de l'électrolyse (procédés galvaniques).

4. Équivalent électrochimique

A : masse d'un électrolyte déposée par unité de quantité de charge (Coulomb) :

Équivalent électrochimique			**$MT^{-1}I^{-1}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$A = \frac{m}{Q}$$	A	kg/C	équivalent électrochimique
	m	kg	masse déposée
	Q	C	charge électrique transportée

On peut aussi définir l'équivalent électrochimique à partir de la masse molaire :

$$A = \frac{M}{zF}$$

■ Équivalents électrochimiques de quelques corps (en 10^{-3} g/C) : Hydrogène 0.010 46, Oxygène 0.082 91, Nickel 0.304 15, Platine 0.505 88, Argent 1.118 17.

5. Deuxième loi de Faraday

Les masses électrodéposées par une même quantité de charge sont dans le rapport de leurs équivalents électrochimiques :

Rapport des masses électrodéposées par une même quantité de charge			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1}{A_2}$$	m_i	kg	masse électrodéposée
	A_i	C/kg	équivalents électrochimiques

17.1.4.3 Couches électriques doubles

Une **double couche électrique** se produit à l'interface de deux matériaux qui ont des concentrations de porteurs de charges différentes (Fig. 17.3 (a)). Elle compense localement la différence de potentiel due aux différences de concentrations.

■ Des doubles couches électriques se produisent par frottement au contact de deux solides (triboélectricité), entre un métal et un électrolyte, mais également entre électrolytes de concentrations ioniques différentes séparés par une paroi perméable.

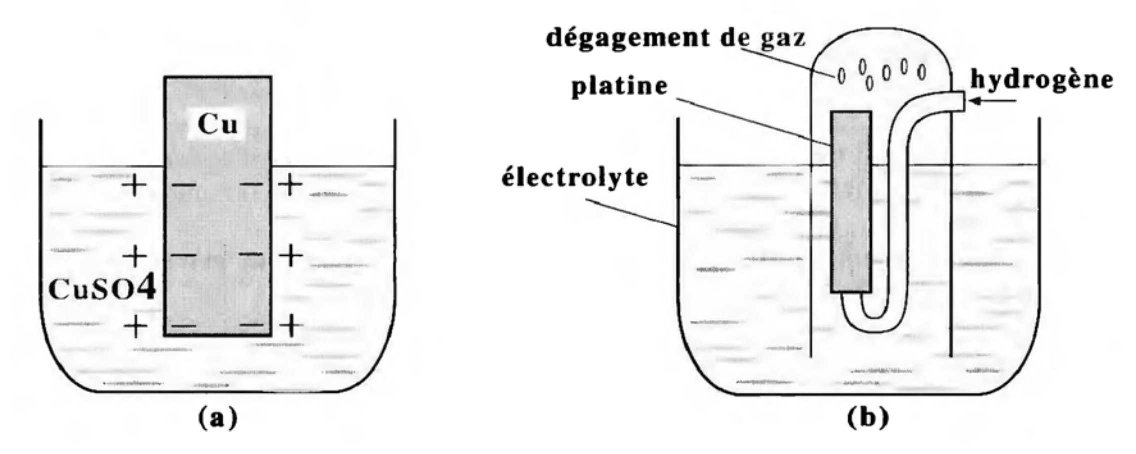


Fig. 17.3 : *(a) : double couche électrique à l'interface électrode-électrolyte, (b) : électrode normale à hydrogène E.N.H.*

17.1.4.4 Formule de Nernst

La différence de potentiel à l'interface entre deux électrolytes contenant des concentrations différentes des mêmes ions, est proportionnelle au logarithme du rapport des concentrations.

Formule de Nernst : différence de potentiel			$L^2T^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Delta U = -\frac{kT}{e_0} \ln \frac{c_1}{c_2}$	ΔU	V	différence de potentiel
	k	J/K	constante de Boltzmann
	T	K	température
	e_0	C	charge élémentaire
	c_i	mol/kg	concentrations ioniques

1. Force électromotrice, potentiel métal-solution, potentiel normal

Différence de potentiel d'équilibre entre un métal et une solution normale d'un de ses sels.

M Il faut une deuxième électrode pour mesurer le potentiel métal-solution ; on ne peut mesurer que la différence des potentiels normaux de deux électrodes.

2. Électrode normale à Hydrogène E.N.H.

Électrode de référence pour la mesure de tensions. Elle est constituée d'une plaque en Platine dans une solution ionique normale H_3O^+, saturée d'Hydrogène gazeux à la pression de 1 atmosphère (Fig. 17.3 (b)).

Par définition, on attribue le potentiel 0 à l'électrode normale à Hydrogène.

▷ Les potentiels normaux d'électrodes sont données de manière analogue pour des métalloïdes ou des molécules.

3. Série des tensions

Les valeurs V_0 obtenues pour les potentiels normaux d'autres métaux forment la **série des tensions** (en Volts) ; les valeurs négatives correspondent à un départ d'électrons, les valeurs positives à une acceptation d'électrons.

■ Éléments de la série des tensions (en Volts) : Li/Li^+ : -3.02, Mg/Mg^{2+} : -2.38, Zn/Zn^{2+} : -0.76, Pb/Pb^{2+} : -0.126, Cu/Cu^+ : $+0.35$, Pt/Pt^{2+} : $+1.2$.

▷ À un atome, par rapport à divers ions, peuvent correspondre différentes tensions normales.

■ L'Or (Au) par rapport à Au^+ a une tension normale de +1.42 V, par rapport à Au^{3+} une tension normale de +1.5 V

17.1.5 Éléments galvaniques, piles

Entre deux électrodes constituées de métaux différents, plongées dans un même électrolyte, s'établit une différence de potentiel qui correspond à la différence des potentiels normaux des deux électrodes (Fig. 17.4).

■ Entre une électrode de Cuivre et une électrode de Zinc, plongées dans une solution acide, s'établit une différence de potentiel U :
$U = (0.35 - (-0.76))\ \mathrm{V} = 1.11\ \mathrm{V}$

Lorsqu'on relie les deux électrodes par un fil conducteur, un courant électrique y circule.

Métal "plus noble" : dans un élément galvanique, le métal le plus électronégatif. Les électrodes, dans la série des tensions, sont classés par électronégativité décroissante (Tab.19.1/5). Un élément **plus noble** accepte des électrons d'un élément **moins noble**. Le métal le plus noble constitue l'anode, le moins noble la cathode.

Le circuit électrique se ferme dans l'électrolyte par le flux d'ions. Les ions positifs se déplacent dans le sens conventionnel du courant électrique I, les ions négatifs dans le sens opposé.

Lors d'une électrolyse, la cathode se dissout au cours du temps, tandis que l'anode se charge du métal le plus noble (si ses ions sont encore présents dans l'électrolyte). Cette électrodéposition permet la production de métaux purs.

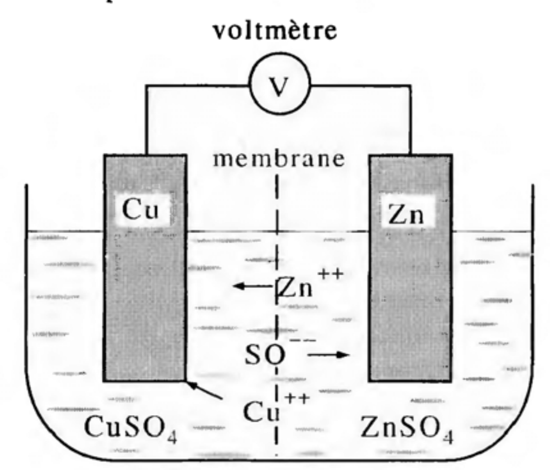


Fig. 17.4 : *Élément galvanique*

Capacité, K, d'un élément galvanique : mesurée en Ampères-heure (Ah), indique le temps (en heures) pendant lequel l'élément peut débiter un courant constant (en Ampères).

17.1.5.1 Polarisation

Polarisation électrolytique : diminution de la tension d'un élément galvanique qui résulte des modifications dans la composition de l'électrolyte et des électrodes. Les causes diverses sont l'irréversibilité des réactions d'oxydo-réduction, les variations de concentration au voisinage des électrodes ou la formation de couches plus ou moins conductrices sur les électrodes.

■ Sur l'anode et la cathode en Platine, dans une solution saline aqueuse, se forment, par électrolyse de l'eau, des couches respectivement de $Pt\text{-}O_2$ et de $Pt\text{-}H_2$. Ces couches forment, à leur tour, des éléments galvaniques, dont la tension vient en opposition à celle de l'élément primaire.

Pile sèche : élément galvanique dans lequel l'électrolyte et le dépolarisant sont incorporés dans une pâte.

■ **Pile zinc-charbon, pile Leclanché** : pile sèche, constituée d'une tige en Carbone (charbon des cornues) et d'une enveloppe cylindrique en zinc. L'électrolyte est du chlorure d'ammonium sous forme pâteuse. La tige de charbon est entourée d'une gaine de bioxyde de manganèse (MnO_2) qui oxyde l'hydrogène qui se dégage sur l'électrode de charbon et dépolarise ainsi la pile (Fig. 17.5). La force électromotrice ne diminue que lorsque le zinc est consommé. La pâte électrolytique qui peut alors s'échapper est fortement corrosive.

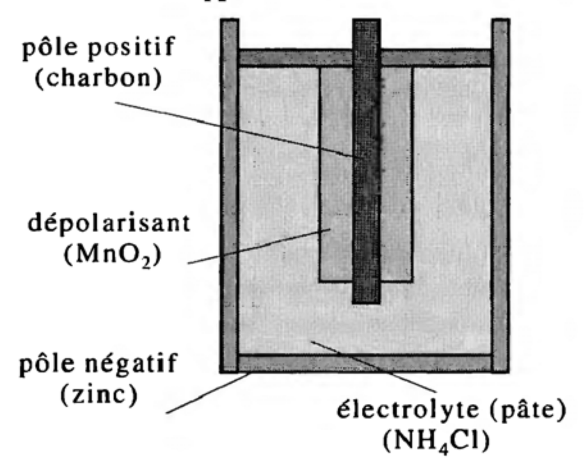


Fig. 17.5 : *Pile zinc- charbon ou pile Leclanché*

17.1.5.2 Piles à combustible

Pile à combustible : générateur d'électricité qui transforme directement l'énergie chimique en énergie électrique. Il se distingue des générateurs thermiques par le fait que le processus de combustion est séparé dans l'espace en deux étapes simultanées : une réaction d'oxydation du combustible sur une anode et une réaction de réduction du comburant sur une cathode. Il se différencie des piles et des accumulateurs par la nature de ses électrodes qui ne subissent aucune modification de structure au cours des réactions électrochimiques, mais servent uniquement de support à ces réactions. L'alimentation en combustible et comburant se fait à partir de l'extérieur, ce qui permet un fonctionnement en continu (Fig. 17.6).

Une cellule à combustible est constituée d'une paroi poreuse (anode), sur laquelle le combustible (H_2) est réduit ($H_2 \longrightarrow 2H^+ + 2e^-$) et d'une cathode poreuse où se produit l'oxydation ($2H^+ + 2e^- + \frac{1}{2}O_2 \longrightarrow H_2O$). Les deux électrodes sont séparées par un électrolyte qui permet le transport des ions (H^+) de l'anode vers la cathode. Les électrons circulent vers la cathode par le circuit utilisateur extérieur.

La force électromotrice d'une telle cellule est de 1 Volt. Les piles à combustible ont une caractéristique courant-tension favorable, un excellent rendement et un grand rapport puissance sur masse.

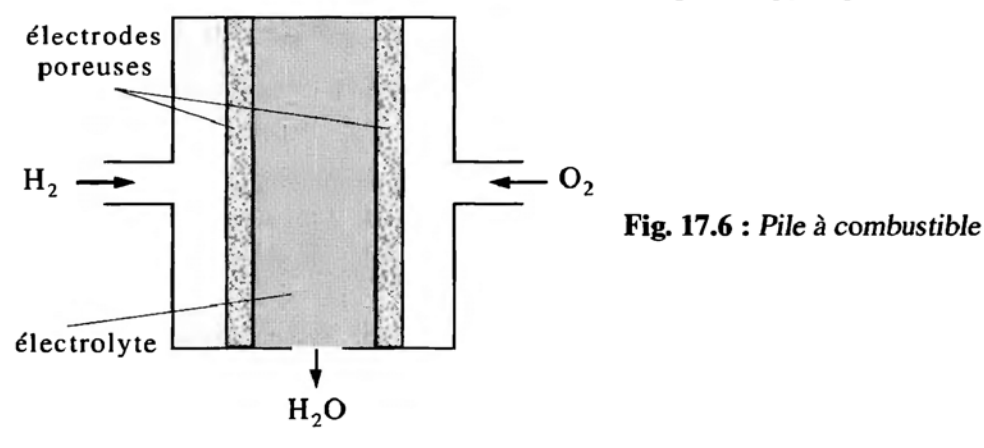


Fig. 17.6 : *Pile à combustible*

M Deux électrodes en platine, plongées dans de l'acide sulfurique dilué, respectivement baignées d'oxygène et d'hydrogène, sont reliées par un conducteur électrique extérieur. À l'électrode à hydrogène se forment des ions hydrogène. Les électrons se déplacent vers l'autre électrode par le conducteur extérieur, où avec l'oxygène qui s'y trouve, ils consumment les ions hydrogène qui ont migré à travers l'électrolyte :
$O_2 + 4\,H^+ + 4\,e^- \rightarrow 2\,H_2O$.
L'énergie libérée de 286,2 kJ/mol est utilisable sous forme d'énergie électrique.

▷ Le rendement de cette conversion directe d'énergie chimique en énergie électrique est de 60 %. Les molécules d'eau formées lors de la combustion, sont les seuls "déchets" de cette conversion.

17.1.5.3 Accumulateurs électriques

Les accumulateurs se distinguent des piles par leur aptitude à la *recharge* et sont parfois appelés des **générateurs secondaires** par opposition aux piles galvaniques appelées **générateurs primaires**.

Un accumulateur électrique est une cellule électrolytique dans laquelle le passage d'un courant électrique produit des réactions chimiques qui modifient les électrodes et l'électrolyte (polarisation). L'accumulateur ainsi *chargé* se comporte comme une pile et se *décharge* par des réactions chimiques qui tendent à rétablir l'état avant charge (dépolarisation).

1. Accumulateurs au plomb

Un **accumulateur au plomb** est constitué de deux électrodes en plomb plongées dans de l'acide sulfurique. Une gaine de sulfate de plomb ($PbSO_4$) se forme sur les électrodes. Lors de la *charge*, l'anode s'oxyde en PbO_2 et la cathode se réduit en plomb métallique.

■ **Anode** :
$PbSO_4 + 2OH^- \rightarrow PbO_2 + H_2SO_4 + 2e^-$
Cathode :
$PbSO_4 + 2H^+ + 2e^- \rightarrow Pb + H_2SO_4$

L'élément galvanique ainsi formé délivre une tension de 2,02 V. Lors de la *décharge*, les réactions inverses se produisent jusqu'à rétablir un état voisin de l'état initial.

▷ Environ 75 % de l'énergie chimique emmagasinée est restituée sous forme d'énergie électrique.

▷ Les accumulateurs au plomb du commerce sont généralement "préformés", c'est à dire que l'anode est constituée de peroxyde de plomb PbO_2 et la cathode de plomb métallique spongieux. L'acide sulfurique a une densité de $1,26$ (30ème Baumé).

2. Accumulateurs alcalins

Les accumulateurs alcalins utilisent un hydroxyde alcalin comme électrolyte. Les électrodes peuvent être les couples Fer-Nickel, oxyde d'Argent-Zinc ou Nickel-Cadmium, ce dernier étant le plus répandu.

Accumulateur Nickel-Cadmium

■ **Anode** :
$2Ni(OH)_2 + 2OH^- \rightarrow 2Ni(OH)_3 + 2e^-$
Cathode :
$Cd(OH)_2 + 2H^+ + 2e^- \rightarrow Cd + 2H_2O$

17.1.5.4 Associations d'éléments galvaniques

1. Association en parallèle

Les **cathodes** des différents éléments identiques sont réunies entre elles, de même leurs **anodes**.

● La tension aux bornes des éléments mis en parallèle est égale à la tension aux bornes de chaque élément individuel. La capacité K est la somme des capacités individuelles K_e.

Force électromotrice et capacité de l'association en parallèle	Symbole	Unité	Dénomination
$U = U_e$	U	V	f.é.m de l'association en parallèle
$K = nK_e$	K	Ah	capacité de l'association en parallèle
	n	1	nombre d'éléments mis en parallèle
	U_e	V	f.é.m de chaque élément identique
	K_e	Ah	capacité d'un élément

■ L'association en parallèle d'éléments de mêmes forces électromotrices, permet d'obtenir un système de même force électromotrice, mais de capacité en Ampères-heures bien supérieure. Ce montage est utilisé, par exemple, pour les accumulateurs servant au démarrage de moteurs.

2. Association en série

L'**anode** d'un élément est reliée à la **cathode** de l'élément suivant.

● La force électromotrice résultante du montage est égale à la somme algébrique des forces électromotrices individuelles. La capacité du système ne peut pas être supérieure à celle de l'élément de plus faible capacité.

Force électromotrice et capacité de l'association en série	Symbole	Unité	Dénomination
$U = nU_e$	U	V	f.é.m de l'association en série
$K = K_e$	K	Ah	capacité de l'association en série
	n	1	nombre d'éléments mis en série
	U_e	V	f.é.m de chaque élément
	K_e	Ah	capacité d'un élément

17.1.6 Effets électrocinétiques

Les particules chargées dans un liquide peuvent être mises en mouvement par un champ électrique extérieur. La charge de ces particules peut être préalable (ions résultant de la dissociation) ou être induite par la polarisation.

17.1.6.1 Électrophorèse

Électrophorèse : mouvement de particules colloïdales chargées en suspension dans un solvant non conducteur sous l'action d'un champ électrique extérieur. Le champ électrique est produit par une différence de potentiel appliquée à deux électrodes plongées dans le solvant.

La charge des particules en suspension produit, par influence, un nuage d'ions de charge opposée. Par conséquent, la force qui s'exerce sur les particules ne dépend pas seulement de leur charge, mais aussi de la concentration ionique du solvant.

■ L'électrophorèse trouve une application dans les techniques d'**assèchement des murs** humides.

M **Électrophorèse sur papier** : une suspension de molécules est déposée en ligne sur une feuille de papier ou d'acétate de cellulose. Une différence de potentiel pouvant atteindre plusieurs kV est appliquée et fait migrer les molécules en suspension. Les vitesses de dérive de diverses molécules étant très différentes, on arrive à séparer de cette manière les différentes fractions de molécules présentes dans la suspension. Cette technique est très utilisée en biochimie pour le dosage des protéines (lypoprotéines et glycoprotéines).

17.1.6.2 Électro-osmose

Électro-osmose ou osmose électrique : passage d'un liquide à travers une paroi poreuse de part et d'autre de laquelle est établie une différence de potentiel électrique. À l'interface paroi-liquide se forment des couches doubles électriques dont la partie liquide se sépare et se déplace sous l'action du champ électrique. Par suite des frottements internes, toute la masse fluide se met en mouvement. Les ions libérés par la paroi jouent un rôle dans ce phénomène. Le déplacement du liquide peut aussi être parallèle à la paroi si le champ électrique agit dans cette direction.

▷ Lors de l'électro-osmose, seules les charges d'un même signe se déplacent, alors que dans l'électrophorèse les charges positives et négatives sont mises en mouvement.

▷ Lorsqu'on force le passage d'un liquide à travers une paroi poreuse, on observe un courant électrique dans la direction du déplacement. Ce phénomène, inverse de l'électro-osmose, est dû au détachement d'une partie de la couche double électrique formée près de la paroi.

17.2 Conduction dans les gaz

Les gaz sont normalement isolants ; ils ne deviennent conducteurs que par l'ionisation de leurs molécules. Les ions positifs qu'ils contiennent servent alors comme porteurs de charges. L'ionisation des gaz peut être produite de diverses manières : dissociation à haute température, rayonnements ionisants électromagnétiques ou corpusculaires. Les rayonnements ionisants naturels (rayons cosmiques, radiocativité naturelle), dans notre environnement, produisent une certaine quantité d'ions.
Décharge dans les gaz : passage d'un courant dans le gaz suite à la neutralisation des ions qu'ils contient.

17.2.1 Décharge semi-autonome

La décharge dans un gaz est appelée **décharge semi-autonome** si la conductivité disparaît avec l'action ionisante extérieure, autrement dit si l'ionisation du gaz est due à une cause extérieure.

Causes extérieures d'ionisation :

- flamme à haute température
- surface métalliques chaudes
- rayons cosmiques de la haute atmosphère
- sources d'ions
- canons à électrons
- rayonnements électromagnétiques de haute fréquence (UV et rayons X)
- radioactivité

Décharge obscure : décharge dans un gaz qui ne correspond qu'à un faible courant, insuffisant pour déclencher une décharge autonome. Elle ne peut être entretenue que par une source ionisante externe.

Les décharges obscures n'entraînent qu'une faible production de lumière dans le gaz. Elles se produisent pour des densités de courant $J < 10^{-9}$ A/m^2.

Les ions dans le gaz, sous l'action d'un champ électrique, se déplacent avec une vitesse constante, car leur augmentation d'énergie due au champ électrique est compensée par la perte d'énergie lors des chocs avec les molécules de gaz.

17.2.1.1 Vitesse de dérive des ions dans les gaz

Vitesse de dérive, v_{dr}, des ions dans un gaz sous l'ation d'un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$:

Vitesse de dérive des ions dans un gaz			**LT^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$v_{dr} = \mu E$	v_{dr}	m/s	vitesse de dérive
	μ	m^2/(Vs)	mobilité des ions
	E	V/m	intensité du champ électrique

- Selon le signe de leur charge, les ions se déplacent parallèlement ou antiparallèlement à la direction du champ électrique.

La mobilité des ions dépend de la nature des ions et du milieu dans lequel ils se déplacent.

La mobilité des ions dans les gaz est plus grande d'environ 4 ordres de grandeurs que leur mobilité dans les électrolytes. La vitesse de dérive de ions est souvent faible devant la vitesse d'agitation thermique.

- Mobilité μ des ions dans l'air dans les conditions TPN : Hydrogène $5,7 \cdot 10^{-2}$ m^2/(Vs) pour les ions positifs et $8,6 \cdot 10^{-2}$ m^2/(Vs) pour les ions négatifs,
  Azote $1,29 \cdot 10^{-2}$ m^2/(Vs) pour les ions positifs et $1,82 \cdot 10^{-2}$ m^2/(Vs) pour les ions négatifs.

- Dans un champ électrique $E = 1\,\mathrm{kV/m}$ un ion H_2^+ migre vers la cathode (dans l'air dans les conditions TPN) avec la vitesse $v_{dr} = 5,7 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^2/Vs} \cdot 1000\ \mathrm{V/m} = 57\ \mathrm{m/s}$

17.2.1.2 Conductivité électrique des gaz

La **conductivité électrique d'un gaz** , γ, est la conductivité par unité de longueur d'une colonne de gaz :

Conductivité électrique d'un gaz			**$L^{-3}T^3M^{-1}I^2$**
	Symbole	Unité	Dénomination
	z	1	nombre de charge de l'ion
$\gamma = ze(\mu_+ n_- + \mu_- n_-)$	e	C	charge élémentaire
	$\mu_\pm$	m^2/(Vs)	mobilité des ions
	$n_\pm$	1/m^3	nbre. d'ions par unité de volume

Les ions positifs et les ions négatifs participent à la conduction électrique dans les gaz ; leurs mobilités, cependant, sont différentes.

- L'air, près du sol, a une conductivité $\gamma \approx 1 \times 10^{-14}$ S/m.

17.2.1.3 Recombinaison

Recombinaison : processus inverse de l'ionisation. Les ions positifs et les électrons se recombinent pour former des atomes ou des molécules électriquement neutres.

La recombinaison dans les gaz procède essentiellement par collisions thermiques.

Durée de vie des ions, τ : temps moyen pendant lequel un ion peut exister dans un environnement d'autres ions.

Coefficient de recombinaison, α_i : facteur de proportionnalité entre la valeur réciproque de la durée de vie des ions et leur nombre par unité de volume. Le coefficient de recombinaison dépend principalement de la température, de la pression et de la nature des ions.

Durée de vie des ions			**T**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\tau = \frac{1}{\alpha_i n_0}$	τ	s	durée de vie des ions
	α_i	m^3/s	coefficient de recombinaison
	n_0	$1/m^3$	nbre. d'ions par unité de volume à $t = 0$

Cette relation n'est valable que s'il n'y a pas de nouvelles ionisations pendant la décroissance de l'ion.

17.2.1.4 Caractéristique courant-tension d'un gaz

Le courant d'ionisation I varie en fonction de la différence de potentiel U appliquée entre deux électrodes plongées dans le gaz. La loi d'Ohm linéaire ne s'applique dans les gaz que pour des tensions relativement faibles. En fonction de la tension appliquée, on distingue trois régions principales de la caractéristique : Fig. 17.7.

1. Régions caractéristiques de fonctionnement

Région de recombinaison : domaine de tension dans lequel le courant varie proportionnellement à la tension. La loi d'Ohm, dans cette région, s'écrit :

Caractéristique courant-tension : région de recombinaison			**I**
	Symbole	Unité	Dénomination
$I = \gamma \frac{A}{d} U$	I	A	courant
	γ	S/m	conductivité électrique
	A	m^2	aire des électrodes
	d	m	distance des électrodes
	U	V	tension

Région de saturation : domaine de fonctionnement pour lequel pratiquement tous les ions produits atteignent les électrodes. Le courant I est indépendant de la tension appliquée U.

Dans la région de saturation, les pertes d'ions par recombinaison sont négligeables.

Région de proportionnalité , domaine pour lequel l'énergie cinétique acquise par les ions est suffisante pour ioniser des atomes et molécules neutres du gaz par choc (ionisation secondaire). Le courant I augmente proportionnellement à l'ionisation primaire.

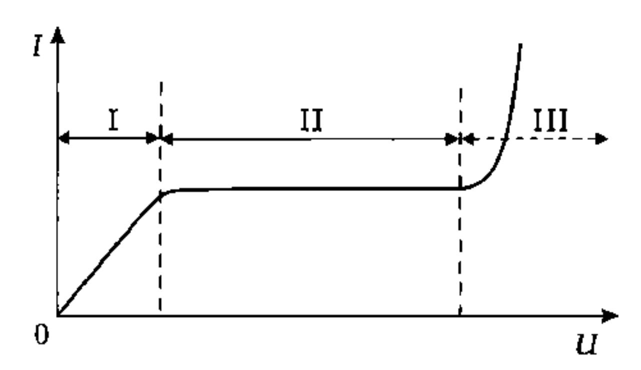


Fig. 17.7 : *Caractéristique courant-tension d'une décharge semi-autonome dans un gaz. I : région de recombinaison, II : région de saturation, III : région de proportionnalité. Au-delà, on atteint le régime de décharge autonome*

2. Application à la mesure des rayonnements ionisants

[M] **Chambre d'ionisation** : dispositif destiné à la mesure de l'intensité d'un rayonnement ionisant. Enceinte fermée par une fenêtre mince, remplie d'un gaz dans lequel se trouvent deux électrodes. La différence de potentiel aux bornes des électrodes est choisie pour un fonctionnement dans la région de saturation. Le nombre d'ions collectés sur les électrodes et, par conséquent, le courant électrique est directement proportionnel au nombre de rayonnements ionisants qui ont pénétré la chambre d'ionisation.

Temps mort : temps nécessaire, après la détection d'un premier évènement, pour qu'un détecteur à ionisation reprenne son état initial et soit apte à enregistrer un nouvel évènement. C'est le temps pendant lequel il est "insensible" à un nouveau rayonnement ionisant. Le temps mort est fonction de la vitesse des ions dans le gaz, il détermine la résolution en temps du détecteur (plus petit intervalle de temps, entre deux évènements consécutifs, que le détecteur est capable de discerner).

[M] **Compteur Geiger-Müller, Compteur à implusions** : compteur gazeux destiné au comptage une à une de particules ionisantes. Un compteur Geiger-Müller est constitué d'une enceinte fermée par une fenêtre mince et de deux électrodes entre lesquelles on établit, à travers une résistance de quelques MΩ une différence de potentiel suffisante pour entraîner une avalanche d'ionisations secondaires par collisions. Chaque particule ionisante pénétrant dans le compteur y produit une avalanche d'ions (amplification gazeuse). Le courant correspondant produit une impulsion électrique aux bornes de la résistance (Fig. 17.8). Le temps d'un compteur Geiger-Müller est relativement long, de l'ordre de quelques millisecondes.

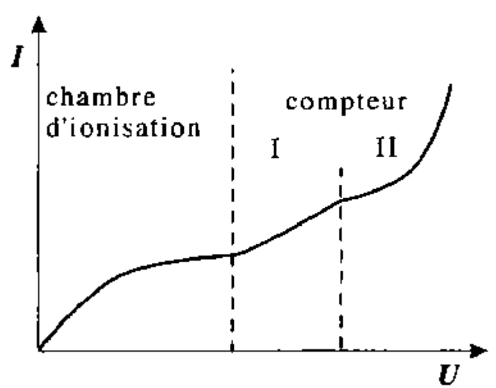


Fig. 17.8 : *Régimes de fonctionnement des détecteurs gazeux. U : tension aux bornes des électrodes du détecteur, I : courant d'ionisation,* I *: régime proportionnel,* II *: régime de Geiger-Müller*

Compteur proportionnel : la différence de potentiel aux électrodes est choisie de manière à opérer dans la région de proportionnalité. Le nombre d'ions secondaires reste proportionnel au nombre d'ions créés par l'ionisation primaire (Fig. 17.8, région I). L'amplitude de l'impulsion électrique créée par le courant d'ions est aussi proportionnelle à l'énergie ΔE déposée dans le détecteur par la particule ionisante. Le temps de collection des ions est relativement bref. De ce fait, un compteur

proportionnel a une très bonne résolution en temps et permet de mesurer des flux de particules importants.

17.2.2 Décharges autonomes

Décharge autonome : décharge dans un gaz lors de laquelle les porteurs de charges sont créés par une tension élevée établie aux bornes des électrodes (**potentiel explosif** ou **potentiel disruptif**). C'est le champ électrique intense qui produit l'ionisation des atomes et molécules du gaz contenu dans le compteur.

17.2.2.1 Types de décharges autonomes dans les gaz

1. Décharge à lueur

Décharge dans un gaz qui s'accompagne de phénomènes lumineux dus à l'excitation électronique des ions et les molécules. Elle se produit à des densités de courant moyennes (10^{-9} A/m^2 $< I <$ 10^{-4} A/m^2). Les ions qui atteignent la cathode y libèrent des électrons qui rejoignent l'anode par le circuit extérieur.

À cause de la différence de mobilité des ions positifs et négatifs, des zones de différentes charges d'espace se forment dans l'espace entre les électrodes. De ce fait, l'émission de lumière n'est pas uniforme le long du tube à décharge.

- **Tubes fluorescents** : lampes qui, par décharge dans un gaz raréfié, produisent de la lumière. Les rayonnements ultraviolets produits par la décharge sont utilisés pour exciter les atomes d'une couche réémettant de la lumière visible. Selon la nature des couches fluorescentes, on peut obtenir différents spectres d'émission.

2. Décharge par arc

Passage d'un courant dans le vide ou dans un gaz, entre deux électrodes conductrices (carbone, métal) entre lesquelles existe une différence de potentiel V de l'ordre de quelques dizaines de volts. Cette décharge qui se produit avec des densités de courant élevées $J > 10^{-4}$ A/m^2 entraîne l'émission d'une lumière intense. Le courant intense produit l'échauffement de la cathode qui, par incandescence et émission de champ émet des électrons supplémentaires.

- **Lampe à arc au charbon** : lampe dans laquelle un arc s'établit entre deux électrodes en charbon.

- **Lampe à vapeur de mercure** : lampe dans laquelle un arc s'établit dans une atmosphère de vapeurs de mercure à haute pression. Ces lampes ont un grand rendement lumineux.

3. Décharge par étincelles

Décharge autonome par un trait lumineux continu, rectiligne ou non, qui unit, pendant un bref instant, dans un gaz ionisé, deux conducteurs à des potentiels différents.

La **tension d'amorçage** de la décharge par étincelles dépend de la forme et de la distace des électrodes ainsi que de la pression du gaz.

▷ La lumière émise lors de diverses décharges par étincelles provient de l'excitation des atomes de gaz lors de collisions avec des électrons.

Décharge Corona : décharge qui se produit lorsqu'un corps est à un potentiel assez grand pour que son champ électrique puisse produire l'excitation et l'ionisation des molécules du gaz avoisinant. Des effets lumineux accompagnent la décharge Corona. Elle se manifeste, par exemple, près des câbles à très haute tension ou à la pointe des mâts de bateaux lors d'orages (**feu de Saint Elme**).

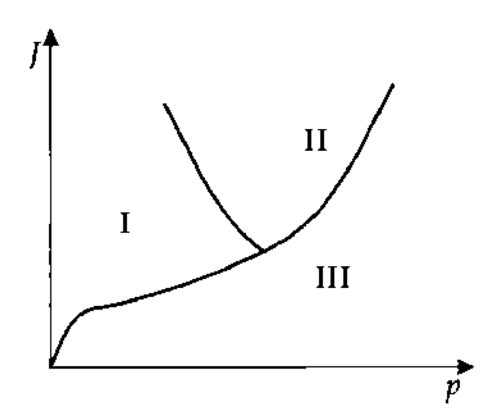


Fig. 17.9 : *Types de décharges dans les gaz. I : décharge à lueur, II : décharge par arc, III : décharge obscure*

17.2.2.2 Caractéristique courant-tension d'une décharge dans un gaz

Tension d'amorçage : tension entre deux électrodes, à laquelle une **décharge obscure** se modifie en **décharge à lueur**.

Les décharges autonomes dans les gaz ont une caractéristique négative de résistance électrique, la résistance différentielle dU/dI est négative. Il est nécessaire de monter une résistance de protection en série dans le circuit électrique alimentant une décharge gazeuse ; lorsque l'alimentation se fait en courant alternatif, il faut utiliser une self de choc.

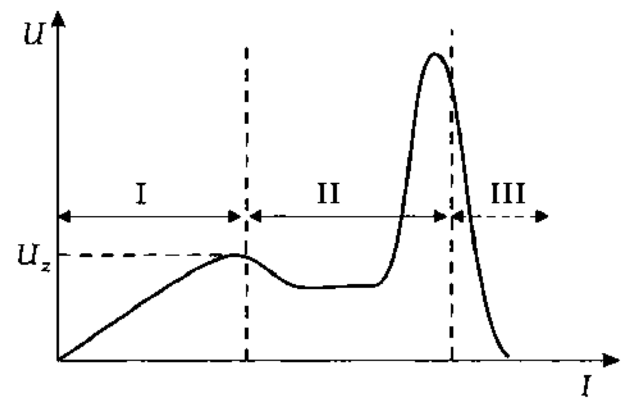


Fig. 17.10 : *Courbe tension-courant d'une décharge dans les gaz. U_z : tension d'amorçage. I : décharge obscure, II : décharge à lueur, III : décharge par arc*

17.3 Émission électronique

L'émission d'électrons par des métaux est à la base de divers dispositifs tels que les tubes à vide ou les photomultiplicateurs. Par l'apport d'énergie, des électrons peuvent être éjectés de la surface de métaux ou d'autres corps solides.

Travail de sortie ou travail d'extraction, W_A : énergie qu'il faut fournir à un électron de conduction pour l'extraire d'un métal vers le vide.

Le travail de sortie se situe entre 1 eV et 5 eV. Sa valeur dépend du type de métal et est particulièrement faible pour les métaux alcalins.

L'énergie d'agitation thermique des électrons de conduction à température ordinaire est de l'ordre de grandeur de 1% du travail de sortie W_A. Quelques électrons peuvent néanmoins surmonter cette barrière (probabilité faible, mais non nulle).

17.3.1 Émission thermo-ionique

Émission thermo-ionique : émission d'électrons par un métal chauffé au rouge. La partie du gaz

d'électrons dans le métal de la partie supérieure de la distribution des vitesses, dont l'énergie surpasse le travail de sortie W_A, augmente avec la température T proportionnellement à $T^2 e^{-W_A/(k_B T)}$.

- La densité de courant J des électrons émis en fonction de la température T et du travail de sortie W_A est donnée par la **formule de Richardson** :

Formule de Richardson (Dushman)			IL⁻²
	Symbole	Unité	Dénomination
$J = AT^2 e^{-\frac{W_A}{k_B T}}$	J	A/m²	densité de courant des électrons
	A	A/(m²K²)	constante de Richardson
	W_A	J	travail de sortie
	k_B	J/K	constante de Boltzmann
	T	K	température

La **constante de Richardson** A vaut :

$A \approx 6 \times 10^{-3}\ \mathrm{Am^{-2}K^{-2}}$

- La constante de Richardson a même valeur pour tous les métaux purs de surfaces émissives équivalentes.

M **Cathode thermo-ionique** : électrode chauffée directement (filament) ou indirectement (cathode indirecte), revêtue de BaO et de métaux alcalins, afin de réduire le travail de sortie W_A des életrons. Elle est utilisée comme cathode dans les tubes à vide.

17.3.2 Photoémission

Photoémission : libération d'électrons par des quanta de lumière d'énergie suffisante (voir Page 822).

Formule d'Einstein pour l'effet photoélectrique : donne l'énergie cinétique des électrons arrachés à un corps par un rayonnement électromagnétique en fonction de sa fréquence (Fig. 17.11) :

Formule d'Einstein pour l'effet photoélectrique			ML²T⁻²
	Symbole	Unité	Dénomination
$E_{cin} = hf - W_A$	E_{cin}	J	énergie cinétique des électrons émis
	h	Js	constante de Planck
	f	1/s	fréquence des photons
	W_A	J	travail de sortie

L'énergie des photoélectrons émis est indépendante de l'intensité du rayonnement incident. Seul le nombre d'électrons émis par unité de temps dépend de l'intensité du rayonnement incident.

Effet photoélectrique externe : émission vers l'extérieur d'électrons arrachés à la surface d'un corps.

M **Cellule photoélectrique** : instrument de mesure servant à la détermination d'un flux lumineux. La cellule photoélectrique contient deux électrodes, dont l'une (photocathode) reçoit le rayonnement à mesurer. Une différence de potentiel est appliquée entre la photocathode et la deuxième électrode (anode). Les électrons arrachés à la photocathode et collectés par l'anode produisent un courant électrique proportionnel au flux lumineux et mesurable dans le circuit extérieur.

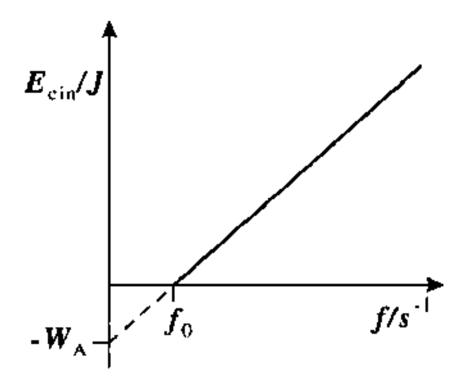


Fig. 17.11 : *Énergie cinétique des photoélectrons en fonction de la fréquence du rayonnement incident. f_0 correspond au seuil photoélectrique*

Effet photoélectrique interne : libération d'électrons par effet photoélectrique à l'intérieur d'un corps. Dans les semiconducteurs, par exemple, ces électrons modifient la conductivité électrique du semiconducteur.

■ **Photorésistance** : plaquette de semiconducteur dont la résistance varie en fonction de son éclairement. Plus l'éclairement est intense, plus on libère d'électrons, qui augmentent alors la conductivité d'où une baisse de la résistance électrique.

17.3.3 Émission froide, émission de champ

Émission froide ou **émission par champ électrique** : émission d'électrons au voisinage de la surface d'un métal, sous l'action d'un champ électrique intense.

L'émission froide nécessite des champs électriques de l'ordre de 10^9 V/m. De telles valeurs élevées peuvent être atteintes à l'extrémité de fines pointes chargées.

[M] **Microscope à émission de champ**, une pointe métallique dont le rayon de courbure est de quelques centaines d'angströms, produit en son voisinage un champ électrique intense. Les électrons arrachés par émission froide se propagent dans le vide et dessinent sur un écran fluorescent l'image des couches superficielles d'atomes de la pointe. On obtient une image très agrandie de structures atomiques. Le grandissement est de l'ordre de 10^6 et la résolution atteint $\approx 10Å$.

[M] **Microscope à balayage à effet tunnel** : utilisé dans la microscopie de champ proche.
L'objet est analysé point par point par balayage d'une pointe très fine, placée à quelques distances atomiques de sa surface. Le courant tunnel qui s'établit entre la surface de l'échantillon et la pointe décroît fortement avec leur distance. En maintenant la distance constante, on peut atteindre un pouvoir séparateur de 10^{-11} m. Il est possible de reconnaître individuellement les atomes.

17.3.4 Émission d'électrons secondaire

Émission d'électrons secondaire ou effet dynatron : émission d'électrons par un solide frappé par des électrons (primaires). Le choc des électrons primaires provoque l'ionisation des molécules du solide et la libération d'électrons qui, par un champ magnétique ou électrique, peuvent être extraits.

Par des chocs successifs, après accélération, les électrons secondaires d'énergie cinétique suffisante peuvent ioniser d'autres molécules et produire une avalanche d'électrons.

[M] **Multiplicateur à électrons secondaires** : dispositif pour l'amplification de courants d'électrons très faibles. Il est constitué d'une succession d'électrodes **dynodes** favorisant l'émission d'électrons secondaires. Un électron incident sur la première électrode, libère plusieurs électrons par émission secondaire qui, au moyen d'un champ électrique convenable, sont accélérés et dirigés vers une deuxième dynode où une nouvelle multiplication a lieu. Le processus se répète sur la succession

des dynodes, de sorte que le courant final peut être amplifié de plusieurs ordres de grandeur. La sensibilité, le bruit électronique et l'amplification ainsi obtenus sont bien meilleurs que ce que l'on pourrait obtenir avec un amplificateur électronique conventionnel de courant.

Photomultiplicateur : tube à vide utilisé pour la mesure de très faibles intensités lumineuses. Il se comporte comme une cellule photoélectrique dont le courant proportionnel à l'intensité lumineuse est fortement amplifié par effet dynatron. Il est constitué d'une enceinte en verre, vide d'air, munie d'une photocathode qui reçoit le flux lumineux à mesurer. Les photoélectrons émis par la photocathode sont dirigés sur une succession de p dynodes portées à des potentiels positifs croissants jusqu'à l'anode finale. Si à chaque dynode un électron incident envoie n électrons secondaires vers la dynode suivante, le gain en courant G_I de l'amplification finale sera :

$G_I = n^p$

17.4 Tubes électroniques

Tubes électroniques ou tubes à vide : enceintes en verre, évacuées, munies de plusieurs électrodes selon la fonction que l'on souhaite obtenir. Les différentes électrodes sont portées à divers potentiels de façon à produire ou réguler un flux d'électrons.

1. Cathode et anode dans les tubes électroniques

Cathode : électrode négative qui, dans un tube à vide, produit un flux d'électrons par émission thermo-électronique. Elle est chauffée soit directement, soit indirectement par un courant continu ou alternatif circulant dans un filament.

Les cathodes sont généralement revêtues d'une couche d'un oxyde d'alcalino-terreux, dont le travail de sortie est faible et augmente le rendement électronique.

Anode : électrode positive faisant face à la cathode.

▷ Les tubes électroniques sont évacués pour réduire le plus possible les collisions des électrons avec les molécules de gaz résiduel et empêcher l'oxydation de la cathode chaude. Au cours du temps, le vide se détériore par l'évaporation partielle de la cathode. Il y a vieillissement du tube électronique.

Tension d'anode, U_a : différence de potentiel entre anode et cathode.

Courant d'anode ou courant anodique, I_a : courant électrique entre anode et cathode, courant circulant dans le circuit d'alimentation de l'anode.

▷ Les tubes électroniques plus complexes peuvent comporter plusieurs autres électrodes en plus de la cathode et de l'anode. Ces électrodes complémentaires sont généralement des grilles.

2. Résistance interne et caractéristiques des tube électroniques

Résistance interne d'un tube, R_i : résistance interne équivalente du tube électronique, définie de manière analogue à la loi d'Ohm :

Résistance interne d'un tube électronique			$L^2T^{-3}MI^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$$R_i = \frac{U_a}{I_a}$$	R_i U_a I_a	Ω V A	résistance interne du tube tension d'anode courant anodique

▷ La résistance interne d'un tube électronique dépend généralement de ses conditions de fonctionnement.

Caractéristiques : diagrammes des propriétés électrique d'un tube électronique.

La plupart des tubes électroniques sont actuellement remplacés par des semiconducteurs aux caractéristiques similaires. Certaines applications particulières utilisent encore des tubes à vide : tube cathodique (écran de visualisation), tubes à rayons X, tubes de puissance pour les grosses installations électromécaniques, tubes de puissance utilisés dans les émetteurs.

▷ Au contraire des semiconducteurs, les tubes électroniques sont insensibles aux surtensions et aux rayonnements corpusculaires.

17.4.1 Diode à vide

Diode à vide : le plus simple et le plus ancien des tubes électroniques (1905), ensemble formé d'une cathode émettant des électrons et d'une anode qui les attire si elle est à un potentiel positif par rapport à la cathode, et les repousse si elle est négative. Les diodes sont utilisées dans les circuits redresseurs de tensions alternatives. Pour les tensions anode-cathode négatives, le champ électrique tend à freiner les électrons, et le courant anodique est nul, sauf dans la région située à quelques dixièmes de volt de l'origine. Dans cette **région exponentielle**, le courant croît exponentiellement pour atteindre une faible valeur pour $V_d = 0$. Ce courant est d'origine purement thermique, les électrons émis par la cathode à haute température, ont une énergie cinétique suffisante pour atteindre l'anode. Pour une tension d'anode positive, le courant augmente avec la tension d'anode, c'est la **région de charge d'espace** où le courant est limité par la répulsion que subissent les électrons émis par la cathode de la part des électrons déjà présents dans l'espace cathode-anode (charge d'espace). Par l'équilibre qui s'établit, le courant I varie de façon approximativement linéaire avec V (en réalité $I \propto V^{3/2}$). Pour des tensions positives plus élevées, on atteint le **régime de saturation** où tous les électrons émis par la cathode par unité de temps sont collectés par l'anode. Le courant I reste indépendant de V.

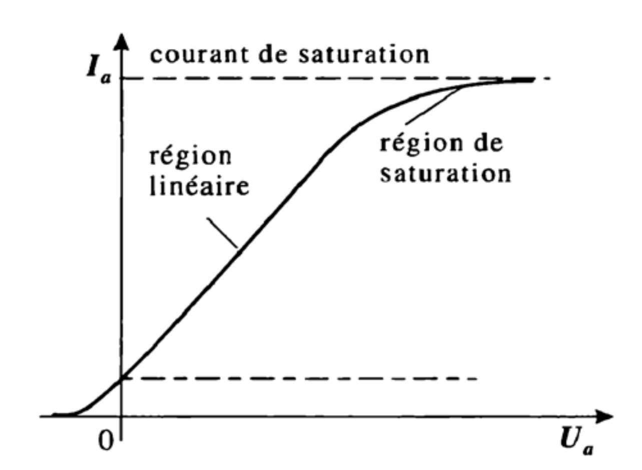




Fig. 17.12 : *Caractéristique d'une diode à vide.*

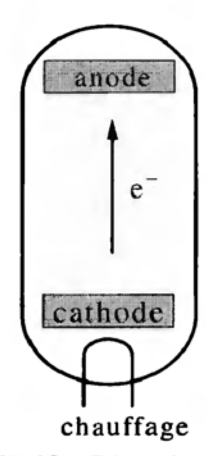


Fig. 17.13 : *Diode à vide*

17.4.2 Triode

Triode : tube électronique amplificateur, qui comprend une grille intercalée entre la cathode et l'anode (*Lee de Forest 1906*). La grille, proche de la cathode, peut par son potentiel voisin de la cathode exercer une action prépondérante sur le flux d'électrons émis par la cathode. Si la grille est négative par rapport à la cathode, elle repousse les électrons vers la cathode et le courant anodique est nul. Pour de faibles vaiations de sa tension positive, la grille produit de fortes variations de courant anodique, d'où son rôle d'amplificateur. La grille régule le courant d'anode par l'action du champ électrique entre grille et cathode,

mais elle capte peu d'électrons : le courant grille reste très faible. De ce fait, la puissance consommée par la grille est négligeable. Une tension électrique variable appliquée à la grille est amplifiée par la triode. La tension amplifiée peut être mesurée aux bornes d'une résistance placée en série, soit dans le circuit d'anode, soit de cathode.

▷ Les tubes comprenant des grilles supplémentaires (tétrode, pentode, ...) ont des propriétés similaires à celles de la triode.

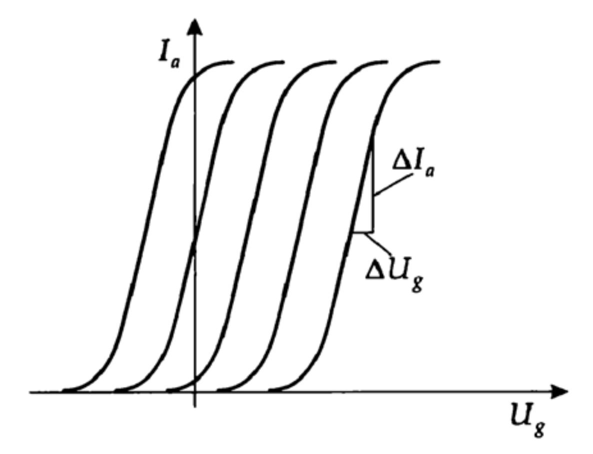


Fig. 17.14 : *Caractéristique d'un tube triode pour diverses valeurs de la tension d'anode.*

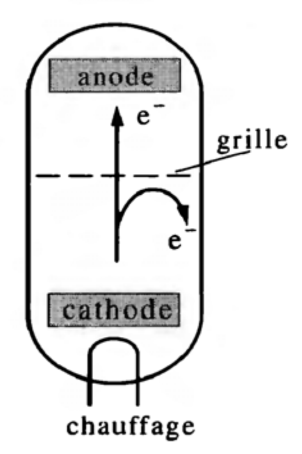


Fig. 17.15 : *Triode à vide ; polarisée par des tensions négatives, la grille repousse les électrons*

17.4.2.1 Paramètres caractéristiques des tubes électroniques

1. Tension de grille et pente

Tension de grille, U_g : différence de potentiel entre grille et cathode qui permet de réguler le courant anodique.

Pente de la caractéristique, S : correspond à la pente du réseau des courbes représentatives (Fig. 17.14) de la variation du courant d'anode I_a en fonction de la tension grille U_g pour une tension d'anode U_a constante :

Pente de la caractéristique : triode			**$L^{-2}T^{3}M^{-1}I^{2}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$R_i = \frac{U_a}{I_a}$	S	A/V	pente de la caractéristique
	I_a	A	courant d'anode
	U_g	V	tension de grille

La pente est indiquée pour une tension d'anode U_a constante. Cette relation n'est valable que dans la partie linéaire de la caractéristique. De manière générale, on écrit :

$$S = \frac{\partial I_a}{\partial U_g} \quad , \quad U_a = \text{const.}$$

▷ Pour une amplification la plus grande possible, la pente S doit être la plus grande possible.

2. Résistance interne

Résistance interne d'une triode, R_i : variation de la tension d'anode par rapport à la variation du courant

anodique pour une tension de grille constante :

$$R_i = \frac{\partial U_a}{\partial I_a} \qquad U_g = \text{const.}$$

Réaction d'un tube électronique, D : variation de la tension de grille U_g, produite par une variation de la tension d'anode U_a pour un courant anodique constant.

Réaction : triode			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$D = -\frac{\partial U_g}{\partial U_a}$ à $I_a = \text{const.}$	D	1	réaction
	U_g	V	tension de grille
	U_a	V	tension d'anode
	I_a	A	courant anodique

3. Tension de commande

Tension de commande, U_c : tension de la grille qui pilote effectivement le courant anodique d'une triode :

Tension de commande de la grille			**$L^2T^{-3}MI^{-1}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$U_c = U_g + DU_a$	U_c	V	tension de commande effective
	U_g	V	tension appliquée à la grille
	D	1	réaction
	U_a	V	tension d'anode

▷ La tension de commande U_c et le courant anodique I_a sont liés par la relation :
$I_a = SU_c$

4. Relation de Barkhausen

Relation entre la pente S, la réaction D et la résistance interne R_i d'une triode.

Relation de Barkhausen			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$SDR_i = 1$	S	A/V	pente
	D	1	réaction
	R_i	Ω	résistance interne

5. Gain en tension d'un tube électronique

A_V : quotient de la variation de la tension d'anode U_a et de la variation de la tension de grille U_g qui l'a produite :

Gain en tension : triode			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$A_V = \left\lvert\frac{U_a}{U_g}\right\rvert$	A_V	1	gain en tension d'un tube électronique
	U_a	V	tension variable d'anode
	U_g	V	tension variable de grille

Le gain en tension A_V d'un tube électronique dépend de la valeur de la résistance de charge R_a de son circuit d'anode (en négligeant la valeur de l'éventuelle résistance de cathode) :

Gain en tension : triode			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$$A_V = -S\frac{R_a R_i}{R_a + R_i}$$	A_V	1	gain en tension d'un tube électronique
	S	A/V	pente
	R_a	Ω	résistance dans le circuit d'anode
	R_i	Ω	résistance interne du tube

Une pente de valeur élevée est nécessaire pour obtenir un gain en tension élevé.

17.4.3 Tétrode

Tétrode : tube électronique qui comprend les éléments d'une triode auxquels s'ajoute une grille supplémentaire, la **grille écran**, placée entre entre la grille de commande et l'anode, portée à un potentiel positif fixe proche du potentiel moyen d'anode. Cet écran réduit fortement la capacité grille-anode, diminue la réaction (moins de risques d'oscillation) et permet d'obtenir un gain en tension plus élevé. Néanmoins, des limitations dues à l'émission d'électrons secondaires par l'anode interviennent. Afin de combattre cet effet, une grille supplémentaire, la **grille suppresseuse** est intercallée entre la grille écran et l'anode. On obtient ainsi une **pentode**.

17.4.4 Rayons cathodiques

Rayons cathodiques : flux d'électrons émis par la cathode d'un tube à décharge dans un gaz. À des pressions inférieures à 10^{-4} atmosphère, dans un espace libre de champs électromagnétiques, ils se propagent en ligne droite. Leurs trajectoires peuvent être déviées par des champs électriques et/ou magnétiques.

Les rayons cathodiques peuvent exciter la fluorescence de divers matériaux tels que des verres, des minéraux ou des substances chimiques.

■ **Tube de Braun** ou tube à rayons cathodiques : système dans lequel un faisceau de rayons cathodiques est dirigé vers un écran fluorescent à l'aide de champs électriques ou magnétiques. Il trouve son application dans les écrans de visualisation d'ordinateur, d'oscilloscope ou de télévision.

La vitesse des électrons dans le tube à rayons cathodiques est déterminée par la différence de potentiel entre la cathode qui émet les électrons et une anode disposée dans le tube.

Vitesse des rayons cathodiques			LT^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$v = \sqrt{\frac{2e_0U}{m_e}}$$	v	m/s	vitesse des rayons cathodiques
	e_0	C	charge élémentaire
	U	V	différence de potentiel anode-cathode
	m_e	kg	masse de l'électron

▷ La relation ne s'applique que dans le cas non relativiste $v \ll c$.

■ Pour une tension anode-cathode $U = 50$ V la vitesse des électrons du faisceau cathodique est $v = 4,19 \cdot 10^6$ m/s. Ce qui correspond à 1,4 % de la vitesse de la lumière dans le vide.

▷ Dans le tube cathodique d'un écran de téléviseur couleur, la tension d'accélération des électrons est de l'ordre de 40 kV, la vitesse des électrons est dans ce cas de l'ordre de 38 % de la vitesse de la lumière dans le vide.

17.4.5 Rayons canaux

Rayons canaux : flux de particules positives s'échappant par des canaux pratiqués dans la cathode d'un tube à décharge (Fig. 17.16).

Vitesse des rayons canaux			LT^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$v = \sqrt{\dfrac{2ze_0U}{m_I}}$	v	m/s	vitesse des rayons canaux
	e_0	C	charge élémentaire
	z	1	nombre de charge de l'ion
	U	V	différence de potentiel anode-cathode
	m_e	kg	masse de l'ion

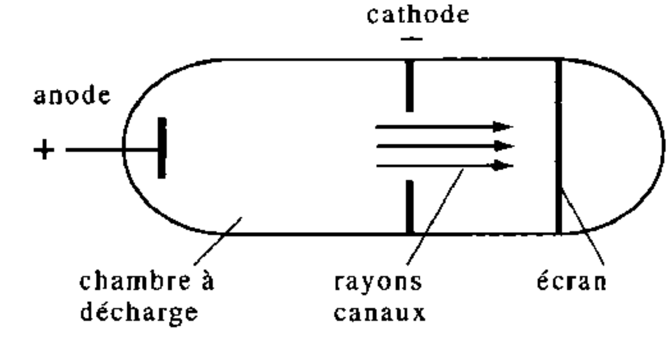


Fig. 17.16 : *Production de rayons canaux lors d'une décharge dans un gaz raréfié*

■ Pour une tension anode-cathode $U = 50$ V, la vitesse des rayons canaux constitués de noyaux d'Hydrogène (protons) est $v = 9,78 \cdot 10^4$ m/s et serait $v = 1,85 \cdot 10^4$ m/s pour des ions Azote N_2^+. Ces vitesses sont nettement plus faible que celle d'électrons soumis à la même différence de potentiel, à cause des différences de masse.

18 Physique du Plasma

Plasma : mélange sous forme gazeuse d'électrons libres, d'ions et de particules électriquement neutres, atomes, molécules et radicaux libres. Tous les constituants du mélange possèdent une énergie cinétique élevée, mais ne sont pas forcément en équilibre thermodynamique. L'interaction électromagnétique entre les divers constituants contribue à la conservation de l'équilibre du système.

■ Une grande partie de la matière visible de l'Univers se trouve à l'état de plasma, comme par exemple le Soleil.

☞ Le terme "plasma" a été introduit en 1923 par Langmuir et Tonks, pour désigner, dans les tubes à décharge, des zones contenant des gaz ionisés électriquement neutres.

18.1 Propriétés d'un plasma

En plus des propriétés thermodynamiques habituelles d'un gaz, comme la température et la pression, un plasma possède des particularités inhérentes à sa nature de mélange de particules chargées dans divers états excités.

Quasineutralité : propriété fondamentale d'un plasma : les plasmas sont des domaines macroscopiques électriquement neutres, spatialement et temporellement. À tout instant, chaque élément de volume contient approximativement autant de porteurs de charges positifs que de porteurs négatifs.

☞ L'énergie cinétique des particules d'un plasma est grande comparée à leur énergie potentielle due à une densité locale de charge.

18.1.1 Caractéristiques d'un plasma

Par la pluralité des types de particules interagissant dans un plasma, un grand nombre de paramètres sont nécessaires pour sa description.

18.1.1.1 Degré d'ionisation

Degré d'ionisation, x_r : partie des ions de numéro atomique Z dans un plasma d'atomes et d'ions positifs qui sont ionisés au moins r fois :

Degré d'ionisation			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$x_r = \dfrac{\sum_{i=r}^{Z} n_i}{\sum_{i=0}^{Z} n_i} \leq 1$	x_r	1	degré d'ionisation (ions r fois ionisé)
	n_i	mol/m^3	concentration en ions i fois ionisés
	Z	1	numéro atomique

☞ Le degré d'ionisation x_1 correspondant aux ions 1 fois ionisés, $r = 1$, est parfois simplement appelé degré d'ionisation x.

À cause de la condition de neutralité d'un plasma, la concentration des électrons est :

$$n_e = \sum_{i=1}^{Z} i\, n_i$$

Dans le cas où le plasma contient aussi des ions négatifs, cette relation doit être complétée par des termes correspondants.

Les plasmas sont classés d'après leur degré d'ionisation x_1 :

- **Plasma faiblement ionisé** : degré d'ionisation $x_1 \ll 1$.
- **Plasma fortement ionisé** ou **Plasma complètement ionisé** : degré d'ionisation $x_1 \approx 1$.

▷ Les plasmas peuvent aussi être classés en fonction du rapport de leur énergie cinétique à leur énergie potentielle. Les plasmas dont la température est $T < 10^5$ K sont appelés plasmas froids et ceux dont la température est $T > 10^6$ K sont appelés chauds. La fusion thermonucléaire n'est possible qu'avec des plasmas de température $T > 10^8$ K.

18.1.1.2 Fonctions de distribution des plasmas

Le contenu énergétique d'un plasma peut être distribué de diverses façons. À côté des excitations habituelles d'une molécule de gaz (rotation et vibration), se manifestent aussi des excitations électroniques.

1. Équilibre thermodynamique total

État idéal d'un plasma :

● À l'équilibre thermodynamique total, toutes les fonctions de distribution sont déterminées par une seule variable, la température T.

● **Principe de l'équilibre détaillé** : tous les processus sont équiprobables, de même que leur processus inverses.

En particulier :

- autant d'électrons atomiques sont excités qu'il y en a qui se désexcitent
- autant d'atomes sont ionisés que d'ions qui se recombinent à des électrons pour former des atomes neutres
- toutes les réactions chimiques sont à l'équilibre, conformément à la **loi d'action des masses**
- les réactions réversibles telles que les dissociations thermiques) se produisent dans les deux sens avec la même fréquence

2. Fonctions de distribution des plasmas à l'équilibre thermodynamique complet

a) Rayonnement électromagnétique d'un plasma : correspond au **rayonnement du corps noir** (voir Page 819).

Loi de Planck : distribution des photons d'énergie hf rayonnés par un corps noir à la température d'équilibre T :

Distribution spectrale du rayonnement d'un plasma			**MT^{-3}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$L_{e,f}(T) = \frac{2hf^3}{c^2}\frac{1}{e^{(hf)/(k_B T)} - 1}$$	$L_{e,f}(T)$	W/m^2	intensité spectrale du rayonnement émis
	h	Js	constante de Planck
	f	1/s	fréquence du rayonnement
	k_B	J/K	constante de Boltzmann
	T	K	température du plasma
	c	m/s	vitesse de la lumière dans le vide

b) **Distribution de vitesses de Maxwell** des particules (ions et électrons) à la même température T :

Distribution des vitesses dans un plasma à l'équilibre thermique			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} v^2 \left(\frac{m}{2k_\mathrm{B}T}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-mv^2/(2k_\mathrm{B}T)}$$	f	1	nbre. de particules de v à v+dv
	v	m/s	vitesse de la particule
	m	kg	masse de la particule
	k_B	J/K	constante de Boltzmann
	T	K	température du plasma

▷ Les différentes sortes de particules, à cause de leurs différences de masses, même à des températures égales, ont des distributions de vitesse différentes.

▷ La dégénérescence quantique des électrons n'est généralement pas négligeable, de sorte que pour les plasmas d'électrons dans les métaux ou dans des étoiles froides (naines blanches), il faut utiliser la **distribution de Fermi-Dirac**.

c) **Distribution de Boltzmann** : donne la population des états électroniques excités :

Distribution des états électroniques excités d'un plasma			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{n_j}{n} = \frac{g_j}{g_0} \mathrm{e}^{-E_j/(k_\mathrm{B}T)}$$	n_j	1	nbre. de particules dans le j-ème état excité
	n	1	nombre total de particules
	g_j	1	poids statistique de l'état excité j
	g_0	1	poids statistique de l'état fondamental
	E_j	J	énergie d'excitation du j-ème état excité
	k_B	J/K	constante de Boltzmann
	T	K	température du plasma

La somme des états intervenant au dénominateur a été approximée par son premier terme g_0. À chaque degré d'ionisation correspond une distribution propre.

3. Formule de Saha

Décrit l'équilibre thermique d'ionisation-recombinaison :

Formule de Saha			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{x^2}{1-x} = 2\frac{(2\pi m_\mathrm{e})^{3/2}}{h^3} \frac{g_1}{g_0 p} (k_\mathrm{B}T)^{5/2} \mathrm{e}^{-E_\mathrm{I}/(k_\mathrm{B}T)}$$	x	1	degré d'ionisation
	m_e	kg	masse de l'électron
	h	Js	constante de Planck
	g_i	1	poids statistique dans le i-ème état excité
	p	N/m^2	pression du gaz de Plasma
	E_I	J	énergie d'ionisation
	k_B	J/K	constante de Boltzmann
	T	K	température

La formule de Saha, sous cette forme simplifiée, ne vaut que pour l'équilibre entre fondamental et premier excité. Pour tenir compte d'états excités supérieurs, il faut résoudre simultanément un ensemble de

formules de Saha. Dans la formule ci-dessus, les sommes des états concernés ont été remplacées par leur premier terme. La diminution de l'énergie d'ionisation due au plasma a été négligée.

4. Plasmas réels

Les plasmas réels dévient généralement de l'équilibre thermodynamique. Cependant, selon quels équilibres partiels ne sont pas raliss, quelques unes des prévisions déduites de l'équilibre thermodynamique restent valables.

▷ Dans un plasma à réactivité chimique, il faut aussi tenir compte de l'équilibre des réactions chimiques. Dans un équilibre thermodynamique global, chaque réaction chimique satisfait à la loi d'action des masses.

Équilibre thermodynamique local E.T.L. : équilibre partiel, le rayonnement électromagnétique ne suit pas la loi de Planck, car il y a des discontinuités (spectre de raies d'émission et d'absorption). Il y a encore microréversibilité des processus uniquement lors des collisions entre particules du plasma. Pour une concentration électronique suffisamment élevée ($n_e > 10^{23}\,\mathrm{m}^{-3}$), les processus de collisions prédominent sur ceux d'absorption et d'émission, de sorte que le bilan des particules n'est pas influencé.

À l'équilibre thermodynamique local, le plasma est décrit par deux paramètres d'état, une température de la matière T_m et une température du rayonnement T_s.

Plasma hors de l'équilibre : nécessite l'introduction d'une température différente pour chaque processus élémentaire (corpusculaire ou radiatif), ainsi que pour chaque entité de particule (ions, électrons et molécules).

18.1.1.3 Énergie du plasma

Différentes formes d'énergie interviennent dans un plasma. À cause des multiples interactions entre particules du plasma, l'énergie du plasma peut continuellement passer d'une forme à une autre :

- énergie du champ électrique et magnétique
- énergie d'ionisation
- énergie cinétique de translation des particules neutres et des porteurs de charge
- énergie de liaison chimique et de dissociation
- énergie d'excitation électronique
- énergie de rotation et de vibration
- énergie du rayonnement
- énergie du mouvement collectif (oscillation de plasma et ondes)

La mise en place d'un équilibre thermodynamique entre les diverses formes d'énergie est déterminée par le couplage des diverses interactions.

▷ Les énergies cinétiques moyennes des atomes et des ions s'équilibrent rapidement par suite des collisions entre particules de masses similaires.

18.1.1.4 Conductivité électrique des plasmas

1. Migration des porteurs de charges dans un champ électrique

Dans un champ électrique extérieur, les porteurs de charges d'un plasma se déplacent avec une vitesse constante, parallèlement aux lignes de champ. À cause de leurs différences de masse, la vitesse de dérive des ions est plus faible que celle des électrons, de sorte que la conductivité est dominée par le transport des électrons (Fig. 18.1 (a)).

Logarithme coulombien : grandeur caractéristique d'un plasma, décrit les relations entre la température d'un plasma et sa densité électronique. Il précise l'importance des collisions lointaines et est généralement plus grand que l'unité.

Logarithme coulombien			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\ln\Lambda = \ln\left(\frac{aT^{3/2}}{\sqrt{n_e}}\right)$$	$\ln\Lambda$	1	logarithme coulombien
	a	$(\mathrm{Km})^{-3/2}$	constante de proportionnalité
	T	K	température
	n_e	$1/\mathrm{m}^3$	densité électronique

Le facteur de proportionnalité vaut $a \approx 10^7\,(Km)^{-3/2}$. Pour la plupart des plasmas $\ln\Lambda \approx 15\ldots20$.

Conductivité électronique d'un plasma			$\mathbf{I^2L^{-3}T^3M^{-1}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\sigma = \frac{e^2 n_e \tau_e}{m_e}$$	σ	S/m	conductivité électrique du plasma
	e	C	charge élémentaire
	n_e	$1/\mathrm{m}^3$	densité électronique
	τ_e	s	libre parcours moyen entre deux chocs
	m_e	kg	masse de l'électron

2. Propriétés de la conductivité électrique d'un plasma

Selon le degré d'ionisation, la conductivité électrique est déterminée par divers processus :
Plasmas faiblement ionisés : le libre parcours moyen est limité par les collisions entre électrons et particules neutres ; τ est indépendant de la densité électronique, alors $\sigma \sim n_e$.

Plasmas totalement ionisés : les collisions entre particules chargées sont déterminantes. Dans ce cas, on a $\tau \sim 1/n_e$, et σ est indépendant de n_e.

Formule de Spitzer : donne la conductivité électrique dans un plasma thermique totalement ionisé, en tenant compte des collisions électrons-ions. En incluant les collisions électrons-électrons, la valeur de σ est diminuée de moitié.

Formule de Spitzer			$\mathbf{I^2L^{-3}M^{-1}T^3}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\sigma = \frac{64\sqrt{2\pi}\epsilon_0^2\,(k_B T)^{3/2}}{e^2\sqrt{m_e}\quad\ln\Lambda}$$	σ	S/m	conductivité électrique du plasma
	ϵ_0	$\mathrm{C^2\,J^{-1}\,m^{-1}}$	permittivité du vide
	e	C	charge élémentaire
	m_e	kg	masse de l'électron
	k_B	J/K	constante de Boltzmann
	T	K	température du plasma
	$\ln\Lambda$	1	logarithme coulombien

■ Un plasma d'Azote, à $T = 10^4$ K, a une conductivité électrique (mesurée) $\sigma = 3000$ S/m.

18.1.1.5 Conductivité thermique d'un plasma

Dans un plasma, le transport de l'énergie thermique peut s'effectuer de deux manières différentes :

- par transfert de l'énergie cinétique de translation des particules présentes
- par transfert de l'énergie d'excitation, de dissociation et d'ionisation (**échange de chaleur de réaction**)

Le mécanisme d'échange de chaleur de réaction repose sur le fait qu'à haute température, l'énergie thermique produit l'excitation ou la dissociation. Les produits de la réaction diffusent vers des régions plus froides du plasma et y restituent de l'énergie thermique (Fig. 18.1 (b)).

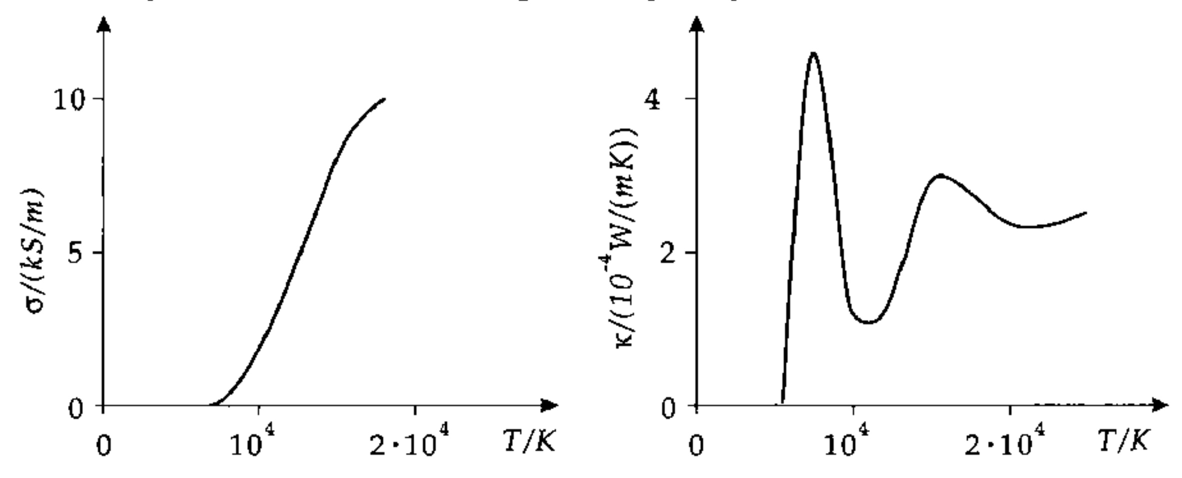


Fig. 18.1 : *(a) : conductivité électrique σ, (b) : conductivité thermique κ d'un plasma d'Azote*

18.1.1.6 Écrantage et longueur de Debye

1. Potentiel autour d'une particule chargée dans un plasma

Les surfaces équipotentielles autour d'une particule chargée dans un plasma sont notablement différentes de celles dans le vide. Autour d'une particule positive du plasma se forme un nuage de particules négatives, qui diminue considérablement la portée du potentiel : la gaine négative fait écran au potentiel de la particule positive. Au potentiel coulombien habituel il faut substituer un potentiel qui tient compte de cet écrantage :

Potentiel électrique écranté			$I^{-1}ML^2T^{-3}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r}e^{-r/\lambda_D}$$	φ	V	potentiel électrique
	r	m	distance au porteur de charge
	ε_0	$C^2\,J^{-1}\,m^{-1}$	permittivité du vide
	e	C	charge élémentaire
	λ_D	m	longueur de Debye

Cette expression du potentiel vaut pour un plasma de $Z = 1$, pour lequel $eV \ll kT$.

2. Longueur de Debye

λ_D : longueur caractéristique qui décrit l'écrantage du potentiel d'une particule chargée entourée d'un nuage de charge opposée. Pour une distance équivalente à la longueur de Debye, le valeur du potentiel est réduite du facteur 1/e.

Longueur de Debye			L
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{2e^2 n_e}}$$	λ_D	m	longueur de Debye
	ε_0	$C^2\ J^{-1}\ m^{-1}$	permittivité du vide
	k	J/K	constante de Boltzmann
	T	K	température
	e	C	charge élémentaire
	n_e	$1/m^3$	densité électronique

■ Pour un plasma d'Hydrogène à la température $T = 10^4$ K et un nombre $n_e = 10^{23}\ cm^{-3}$ d'électrons par unité de volume : $\lambda_D \approx 2 \times 10^{-5}$ m

3. Classification des plasmas en fonction de leur longueur de Debye

La longueur de Debye peut servir de base pour la classification des plasmas :

- **Plasma idéal** : plasma qui, dans une sphère de rayon égal à la longueur de Debye, contient un grand nombre de porteurs de charge. L'énergie potentielle électrique est, dans ce cas, nettement plus faible que l'énergie thermique.
- **Plasma non idéal** : plasma qui ne contient que peu de porteurs de charges dans une sphère de rayon égal à la longueur de Debye. Les plasmas non idéaux présentent des anomalies caractéristiques (transition de phase, conductivité électrique anormale).

■ Les plasmas denses sont souvent des plasmas non idéaux.

18.1.1.7 Fréquence des oscillations de plasma

Oscillations de plasma : le champ électrique local autour d'une distribution de charges d'équilibre, peut accélérer les électrons présents qui peuvent alors entraîner un mouvement pendulaire de la charge d'espace du plasma.

Fréquence de Langmuir, ω_{P_e} : fréquence propre des oscillation de plasma :

Fréquence de Langmuir			T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\omega_{P_e} = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}}$$	ω_{Pe}	$rad\ s^{-1}$	fréquence de Langmuir
	e	C	charge élémentaire
	n_e	$1/m^3$	densité électronique
	ε_0	$C^2\ J^{-1}\ m^{-1}$	permittivité du vide
	m_e	kg	masse de l'électron

▷ Pour les oscillations d'ions, la masse de l'électron m_e doit être remplacée par celle de l'ion m_i. Leur fréquence est beaucoup plus faible (facteur ≈ 45).

18.1.2 Rayonnement de plasma

1. Rayonnement de plasma

À cause de la grande énergie cinétique des particules et du grand nombre d'atomes et d'ions excités, les plasmas émettent des rayonnements électromagnétiques dans le domaine allant des ondes micrométriques jusqu'aux Rayon X durs (dans le cas de métaux fortement ionisés).

Les rayonnements émis par un plasma peuvent provenir de différentes transitions :

- transitions entre états liés
- transitions entre états non liés du continuum (rayonnement de freinage)
- transitions d'états non liés vers des états liés, lors de recombinaisons électrons-ions
- transitions d'états liés vers des états non liés, lors de la dissociation de l'état fondamental

▷ Les trois derniers types de transitions conduisent à des spectres d'émission continus.

2. Caractéristiques du rayonnement de plasma

Le rayonnement émis par un plasma est une conséquence de l'émission et de l'absorption spontanée et induite au sein du plasma.

Radiance spectrale, L_f : grandeur qui mesure l'énergie du rayonnement par intervalle de fréquence $\mathrm{d}f$, émis par un élément de volume du plasma.

Émittance, coefficient d'émission , ϵ_f : coefficient qui indique l'énergie du rayonnement émise par unité de volume et de temps dans un intervalle de fréquence donné.

▷ Le coefficient d'émission concerne l'émission spontanée, mais pas l'émission induite. Il est indépendant de la radiance spectrale, mais dépend de la fréquence.

Coefficient d'absorption effectif , κ' : coefficient qui décrit l'absorption, la diffusion et l'émission induite dans un milieu.

Profondeur optique, τ : désigne la transparence d'une épaisseur d'un milieu pour un rayonnement. C'est l'intégrale du coefficient d'absorption effectif sur l'épaisseur du milieu :

Profondeur optique			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\tau = \int_0^l \kappa'(x)\mathrm{d}x$	τ	1	profondeur optique
	l	m	épaisseur du milieu
	κ'	m^{-1}	coefficient d'absorption effectif
	x	m	position dans le milieu

Lors du passage à travers un milieu de profondeur optique $\tau = 1$, le flux lumineux est réduit du facteur 1/e.

18.1.3 Plasmas dans les champs électriques et magnétiques

18.1.3.1 Mouvement des particules chargées dans des champs externes

1. Forces agissant sur une particule chargée placée dans un champ

Pour analyser le comportement d'un plasma dans un champ externe, on peut étudier le mouvement de chaque particule qui le compose.

Une particule de charge q et animée d'une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$, placée dans un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ et un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$, subit la force de Lorentz :

$$\vec{\mathbf{F}}_\mathrm{L} = q\left(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}\right) + \vec{\mathbf{F}}$$

$\vec{\mathbf{F}}$ comprend toutes les forces externes, y compris celle $q\vec{\mathbf{E}}$ exercée par le champ électrique. Le mouvement peut se décomposer en deux composantes de mouvement :

- **gyration** : mouvement de rotation uniforme sur un cercle autour de l'axe (local) du champ magnétique
- **translation** du centre du cercle avec la **vitesse d'entraînement** $\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{F}$

Rayon de gyration, r_G, et fréquence de gyration, $\vec{\omega}_\mathrm{G}$ sont donnés par :

Rayon et fréquence de gyration			
	Symbole	Unité	Dénomination
$r_\mathrm{G} = \frac{mv_\perp}{qB}$	r_G	m	rayon de gyration
$\vec{\omega}_\mathrm{G} = -\frac{q}{m}\vec{\mathbf{B}}$	$\vec{\omega}_\mathrm{G}$	1/s	fréquence de gyration
	m	kg	masse de la particule
	$v_\perp$	m/s	composante de la vitesse de la particule perpendiculaire à l'axe du champ magnétique
	q	C	charge de la particule
	$\vec{\mathbf{B}}$	T	induction magnétique

Le moment magnétique de la rotation reste constant ; il est donné par :

$$\vec{\mu} = -m\frac{v_\perp}{2}\frac{\vec{\mathbf{B}}}{B^2}$$

▷ Le mouvement de la particule ne peut être décomposé exactement sous cette forme que dans un champ magnétique uniforme, indépendant du temps et pour $\vec{\mathbf{F}} = 0$.

Cas particuliers :

- $\vec{\mathbf{B}}$ constant dans le temps et l'espace (statique et uniforme), $\vec{\mathbf{F}} = 0$.
  La particule décrit une hélice autour des lignes de champ, la vitesse d'entraînement correspond à la vitesse de la particule le long du champ magnétique.
  Le rayon de gyration r_G diminue lorsque le champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ augmente. Les particules sont liées de plus en plus étroitement aux lignes de champ.
- $\vec{\mathbf{B}}$ constant dans le temps et l'espace (uniforme et statique), $\vec{\mathbf{F}} \neq 0$.
  En plus du mouvement hélicoïdal, il y a un mouvement de translation, perpendiculaire à $\vec{\mathbf{B}}$ et à la composante $\vec{\mathbf{F}}_\perp$ de la force orthogonale à $\vec{\mathbf{B}}$. La vitesse d'entraînement est :
  $$\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{F} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_\perp \times \vec{\mathbf{B}}}{qB^2}$$
- $\vec{\mathbf{B}}$ non uniforme, mais statique, $\vec{\mathbf{F}} = 0$
  Dérive de gradient : dérive d'une particule chargée dans un champ magnétique inhomogène dont le gradient est perpendiculaire au champ. La vitesse d'entraînement est :
  $$\vec{\mathbf{v}}_\mathrm{F} = \frac{v_\perp r_\mathrm{G}}{2B}\mathrm{grad}_\perp B$$
  Dans un champ magnétique dont le gradient est parallèle à la direction du champ, l'énergie de translation est convertie en énergie de rotation.
  Effet miroir : changement de signe de la vitesse d'entraînement dans un champ magnétique inhomogène dont le gradient est parallèle au champ.

Grâce à l'effet miroir, des ions peuvent être confinés à l'intérieur d'une région où règne un champ magnétique inhomogène cylindrique.

- $\vec{B}$ ni constant, ni uniforme.
  Dans un champ magnétique croissant, le rayon de gyration r_G, décroît ; dans tous les champs décroissants le rayon de gyration augmente.
  Le flux magnétique entouré par les particules lors de leur mouvement de gyration est approximativement constant.

18.1.3.2 Mouvement des porteurs de charge soumis à des chocs dans un champ magnétique

Les chocs subis par les particules les éloignent des lignes de champ autour desquelles elles tournent et les transfèrent autour d'autres lignes de champs. Il en résulte un mouvement de dérive perpendiculaire à la direction du champ.

L'action statistique des chocs peut être traitée par l'adjonction d'une force effective stochastique, qui agit comme une force de frottement.

Équation de Langevin : décrit le mouvement de particules subissant des collisions dans un champ magnétique en présence de forces externes supplémentaires.

Équation de Langevin			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) + \vec{F} - mf\vec{v}_m$$	m	kg	masse de la particule
	$\vec{v}$	m/s	vitesse de la particule
	t	s	temps
	q	C	charge de la particule
	$\vec{B}$	T	induction magnétique
	$\vec{F}$	N	force extérieure
	f	1/s	fréquence des collisions
	$\vec{v}_m$	m/s	vitesse moyenne

18.1.3.3 Dérive dans un champ électrique externe

Le mouvement dans un champ électrique externe couplé à d'autres champs indépendants du temps, peut être déterminé à partir de l'équation de Langevin. Pour un champ magnétique parallèle à l'axe z et un champ électrique orienté de façon à ce que $E_y = 0$:

- Dans la direction du champ magnétique, E_z produit un mouvement de dérive indépendant du champ magnétique.
- La composante E_x perpendiculaire à $\vec{B}$, produit une dérive dans la direction de l'axe x, mais avec la mobilité réduite :
  $$\mu_x = \frac{1}{1+\left(\omega_{Gy}^2/f_e^2\right)}\mu_z$$
  ω_{Gy} : fréquence de gyration, f_e : fréquence des collisions des électrons.
- La composante E_x induit une dérive dans la direction de l'axe y, bien que $E_y = 0$.

18.1.3.4 Théorie du continuum

Pour des interactions entre particules plus fortes, le modèle de particules indépendantes doit être remplacé par un modèle collectif d'un milieu continu. Pour ce faire, il y a deux possibilités :

- **Magnétodynamique des fluides** ou **magnétohydrodynamique** : étude du mouvement des fluides conducteurs de l'électricité (plasmas, métaux liquides) auxquels on applique un champ magnétique. Utilise les concepts de la dynamique des fluides et de l'électrodynamique.
- **Dynamique des plasmas** : basée sur la dynamique des fluides, les propriétés des électrons, des ions et des particules neutres étant simulées par divers fluides.

Des grandeurs analogues se déduisent pour les variables hydrodynamiques.

Pression magnétique : pression supplémentaire, due à l'interaction entre les composantes du plasma et le champ magnétique. Pression magnétique dans un champ magnétique stationnaire :

$$p_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad \mu_0 \text{ : perméabilité magnétique.}$$

18.1.4 Ondes du plasma

À cause des nombreuses interactions qui agissent dans un plasma, particulièrement lorsqu'il est loin de l'équilibre, il existe un grand nombre de possibilités d'excitation de vibrations. Des ondes peuvent être émises à partir de vibrations excitées par :

- un champ électrique E
- une densité volumique de charge ρ
- une induction magnétique B
- des concentrations de porteurs de charges et de particules neutres
- la température des ions et des électrons
- la vitesse de dérive des particules

▷ L'étude des ondes du plasma nécessite la résolution simultanée des équations de Maxwell et des équations de transport des porteurs de charges.

▷ Divers types d'ondes peuvent se propager dans un plasma, des ondes longitudinales analogues aux ondes acoustiques, des ondes transversales analogues aux ondes électromagnétiques et des ondes hybrides. Un plasma contient essentiellement deux types de particules : les électrons et les ions. Selon le type d'onde et le domaine de fréquence, l'un ou l'autre type de particule participe à l'onde.

18.1.4.1 Ondes acoustiques dans un plasma

1. Ondes électroniques du plasma

Ondes électroniques du plasma, ondes de Langmuir : ondes longitudinales, liées aux oscillations de Langmuir de la densité électronique.

Les ondes électroniques du plasma ne se manifestent pas dans les plasmas froids ($T_e = 0$). Elles ne sont pas influencées par des champs magnétiques parallèles à leur direction de propagation.

Relation de dispersion des ondes de Langmuir			T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\langle v_e\rangle^2 k^2 - \omega^2 + \omega_{p_e}^2 = 0$	$\langle v_e\rangle$	m/s	vitesse moyenne des électrons
	k	1/m	nombre d'onde
	ω	1/s	pulsation de l'onde
	ω_{p_e}	1/s	pulsation de Langmuir des électrons

2. Ondes ioniques du plasma

Ondes longitudinales qui se manifestent aux basses fréquences ($\omega \ll \omega_e$). Ce type d'onde est parfois appelé le **son ionique**. À côté des oscillations de la densité électronique, se produisent des oscillations de la densité des ions qui, malgré leur plus grande masse, participent également aux ondes qui se propagent dans le plasma. Aux très basses fréquences, les électrons et les ions vibrent solidairement. Les ondes dues aux ions ne subissent pas de dispersion, leur vitesse de phase est indépendante de la fréquence.

Vitesse du son ionique : vitesse de propagation des ondes ioniques du plasma.

Vitesse du son ionique			**LT^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$c_S = \langle v_i \rangle \sqrt{1 + \frac{T_e}{T_i}}$$	c_S	m/s	vitesse du son ionique
	$\langle v_i \rangle$	m/s	vitesse moyenne des ions
	T_e	K	température des électrons
	T_i	K	température des ions

La vitesse du son ionique est influencée à la fois par la température des ions et celle des électrons.

18.1.4.2 Ondes magnétohydrodynamiques

Ondes magnétohydrodynamiques : ondes hybrides dont les caractéristiques sont une combinaison des ondes hydrodynamiques et des ondes électromagnétiques. Leurs propriétés dépendent de l'orientation de la vitesse de déplacement des particules relativement au vecteur d'onde et à la direction du champ magnétique. Elles sont particulièrement influencées par le mouvement des densités de charges du plasma.

Ondes d'Alfvèn : ondes magnétohydrodynamiques dans un champ magnétique parallèle à la direction de propagation. Le vecteur d'onde est parallèle au champ magnétique. Ces ondes ne subissent pas de dispersion, leur vitesse de phase c_{Ph} est :

Vitesse de phase des ondes d'Alfvèn			**LT^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$c_{Ph} = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{\mu_0 c_0^2 \rho_m}{B_a^2}}}$$	c_{Ph}	m/s	vitesse de phase
	c_0	m/s	vitesse de la lumière dans le vide
	μ_0	Vs/Am	perméabilité du vide
	ρ_m	kg/m^3	masse volumique du plasma
	B_a	T	induction du champ externe

Les ondes d'Alfvèn peuvent être considérées comme des ondes électromagnétiques, qui se propagent dans un milieu de constante diélectrique relative ε_r augmentée :

$$\varepsilon_r = \sqrt{1 + \frac{\mu_0 c_0^2 \rho_m}{B_a^2}}$$

18.1.4.3 Ondes électromagnétiques dans les plasmas

La propagation des ondes électromagnétiques dans un plasma, à cause de la présence de porteurs de charges libres, est modifiée par rapport à leur propagation dans le vide. Pour $\omega \to \infty$, les ondes du plasma se comportent comme les ondes dans le vide, puisqu'aucun porteur de charges ne peut être entraîné, alors que pour $\omega \approx \omega_{Pe}$ et $\omega \approx \omega_{Gy}$ (ω_{Gy} : fréquence de gyration des électrons) de fortes déviations se produisent. De plus, la présence de champs magnétique et électrique externes, donne aux plasmas un caractère anisotrope

qui leur confère, entre autres, des propriétés biréfringentes. Pour des ondes polarisées circulairement, qui se propagent parallèlement à la direction d'un champ magnétique externe, on peut déduire des relations de dispersion simples :

Onde ordinaire : onde électromagnétique polarisée circulairement, dont le vecteur $\vec{\mathbf{E}}$ tourne dans le sens inverse de la gyration des électrons du plasma.

Onde extraordinaire : onde électromagnétique polarisée circulairement, dont le vecteur $\vec{\mathbf{E}}$ tourne dans le même sens que la gyration des électrons du plasma.

Relation de dispersion des ondes électromagnétiques du plasma			**T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$c_0^2 k^2 - \omega^2 + \frac{\omega_{\mathrm{Pe}}^2}{1 \pm \frac{\omega_{\mathrm{Gy}}}{\omega}} = 0$$	c_0	m/s	vitesse de la lumière dans le vide
	k	m^{-1}	nombre d'ondes
	ω	s^{-1}	pulsation de l'onde
	ω_{Pe}	s^{-1}	pulsation de Langmuir des électrons
	ω_{Gy}	s^{-1}	pulsation de gyration des électrons

Le signe *plus* vaut pour les ondes ordinaires, le signe *moins* pour les ondes extraordinaires.

Pour un plasma non soumis à un champ magnétique externe, l'indice de réfraction n est donné par la **relation d'Eccles** :

Relation d'Eccles pour l'indice de réfraction d'un plasma			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_{\mathrm{Pe}}}{\omega}}$$	n	1	indice de réfraction du plasma
	ω_{Pe}	s^{-1}	pulsation de Langmuir des électrons
	ω	s^{-1}	pulsation de l'onde

▸ Les ondes pour lesquelles $\omega = \omega_{\mathrm{Pe}}$ sont réfléchies à leur entrée dans le plasma.

18.1.4.4 Amortissement de Landau

En dehors de l'amortissement usuel par les collisions entre les particules du plasma, il y a échange résonant d'énergie entre l'onde et les électrons du plasma qui se déplacent en synchronisme avec elle.

Amortissement de Landau : amortissement non collisionnel des ondes du plasma par transfert d'énergie entre l'onde et les électrons du plasma. Les électrons, dont la vitesse est supérieure à la vitesse de phase de l'onde, sont ralentis par le champ électromagnétique de l'onde, les particules dont la vitesse est plus faible sont accélérées. Si les vitesses des particules du plasma ont une distribution de Maxwell, l'amortissement sera prédominant de sorte que de l'énergie sera prélevée sur l'onde.

▸ Pour une distribution de vitesses appropriée, de l'énergie peut être transférée sur l'onde.

18.2 Production de plasmas

Pour produire un plasma, il faut fournir suffisamment d'énergie pour ioniser les atomes et les molécules du gaz. Deux mécanismes sont possibles :

- Apport d'énergie thermique : l'énergie fournie se répartit entre les différents degrés de liberté : l'ionisation se produit par collisions et photo-ionisation. Le plasma ainsi produit se trouve près de l'équilibre thermodynamique.

- Apport d'énergie par un champ électrique ou un rayonnement électromagnétique sans augmentation significative de la température. L'ionisation a lieu directement par transfert d'énergie sur les atomes et les molécules. Les plasmas ainsi produits sont loins de l'équilibre thermodynamique (on a $T_e \gg T_i$).

18.2.1 Production thermique de plasmas

Four à plasma : dispositif pour l'échauffement d'un gaz par contact avec des parois chaudes. Dans un four à plasma, on produit des plasmas à l'équilibre thermodynamique qui satisfont à la formule de Saha. Le degré d'ionisation est limité par la température maximale que le four peut atteindre ($T \leq 3500$ K).

Source à impact électronique : produit des plasma thermo-ioniques de degré d'ionisation élevé obtenus par contact des atomes de gaz avec un faisceau d'électrons issu d'électrodes. L'énergie d'ionisation des atome de gaz doit être plus faible que le travail de sortie des électrons. La colonne de plasma produite est confinée par un champ magnétique longitudinal ; un degré d'ionisation de 50 % peut être atteint.

▷ En dehors de l'élévation de température obtenue à l'aide de fours, on peut utiliser des réactions chimiques ou des réactions nucléaires exothermiques. L'échauffement par flammes ou explosions ne produit que des plasmas à faible température ($T < 10^4$ K), tandis que les plasmas obtenus à partir de réactions nucléaires permettent d'obtenir des plasmas de température plus élevée ($T \approx 10^9$ K).

■ Le plasma produit dans une bombe thermonucléaire à Hydrogène est amorcé par l'explosion d'une bombe à fission nucléaire au centre de la masse d'Hydrogène.

18.2.2 Production de plasmas par compression

La température d'un gaz peut être fortement élevée par sa compression adiabatique ; l'ionisation a alors lieu et un plasma se forme. La compression peut être obtenue par des influences extérieures, piston ou onde de choc, mais aussi par **compression magnétique** d'un gaz ou plasma conducteur.

Tube à onde de choc : tube de forme cylindrique, dont le volume est divisé en deux parties par une membrane. L'une des parties renferme un gaz à forte pression, l'autre à faible pression. La destruction de la membrane entraîne une onde de choc. Par la forte élévation de température du gaz, due au passage de l'onde de choc, l'ionisation du gaz se produit (Fig. 18.2).

Des ondes de choc peuvent également être engendrées par l'échauffement local, rapide d'une quantité de gaz par une décharge impulsionnelle ou une augmentation rapide d'un champ magnétique (tube à onde de choc hydrodynamique inductive (Fig. 18.3)). Lors d'une décharge impulsionnelle, la subite augmentation de température produit uniquement une onde de choc, tandis que lors de l'utilisation de champs magnétiques, les propriétés magnétohydrodynamiques du plasma créé sont mises à profit pour augmenter sa température et son degré d'ionisation.

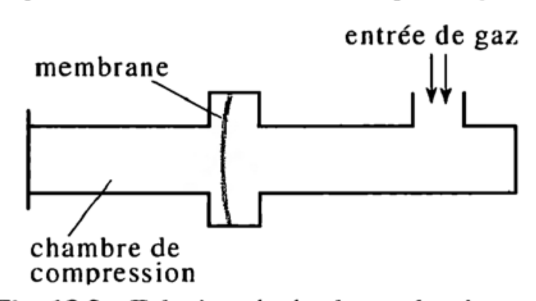


Fig. 18.2 : *Tube à onde de choc mécanique*

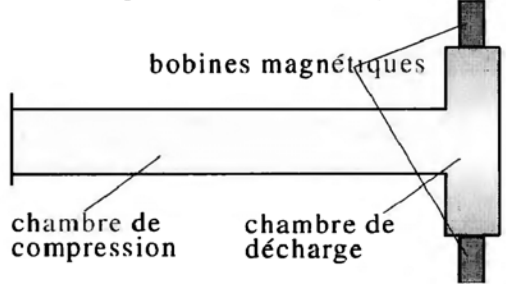


Fig. 18.3 : *Tube à onde de choc hydrodynamique inductive*

18.2.2.1 Effet de pincement (pinch)

Effet de pincement : compression de liquides ou de gaz conducteurs, qui se produit lors du passage d'un courant électrique intense ou d'un champ magnétique à travers le liquide ou le gaz. La compression produit une élevation de la température.

1. Pincement z (z-Pinch)

Pincement provoqué par un courant électrique circulant sur l'axe d'une colonne de plasma. Une décharge entre deux électrodes produit un courant axial et induit un champ magnétique azimuthal $\vec{\mathbf{B}}_\theta$, qui exerce une force radiale sur les porteurs de charges, dirigée vers l'axe (Fig. 18.4). La force par unité de surface $\vec{\mathbf{f}}$ est :

$$\vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{J}}_z \times \vec{\mathbf{B}}_\theta$$

$\vec{\mathbf{J}}_z$ est la densité de courant dans la direction de l'axe z. La force dirigée vers l'axe du pincement est la **force de Lorentz** de l'électrodynamique.

Pour une densité de courant suffisamment grande, la force par unité de surface surpasse la pression du plasma et comprime radialement la colonne de plasma qui se pince en se détachant des parois du récipient.

Relation de Bennett : relation qui permet de calculer le courant nécessaire pour obtenir un pincement donné pour une colonne de plasma :

Relation de Bennett			**I^2**
	Symbole	Unité	Dénomination
$I^2 = \dfrac{8\pi}{\mu_0} N k_B T$	I	A	courant de décharge
	μ_0	Vs/Am	perméabilité du vide
	N	1/m	nbre. de porteurs de charge par unité de longueur
	k_B	J/K	constante de Boltzmann
	T	K	température du plasma

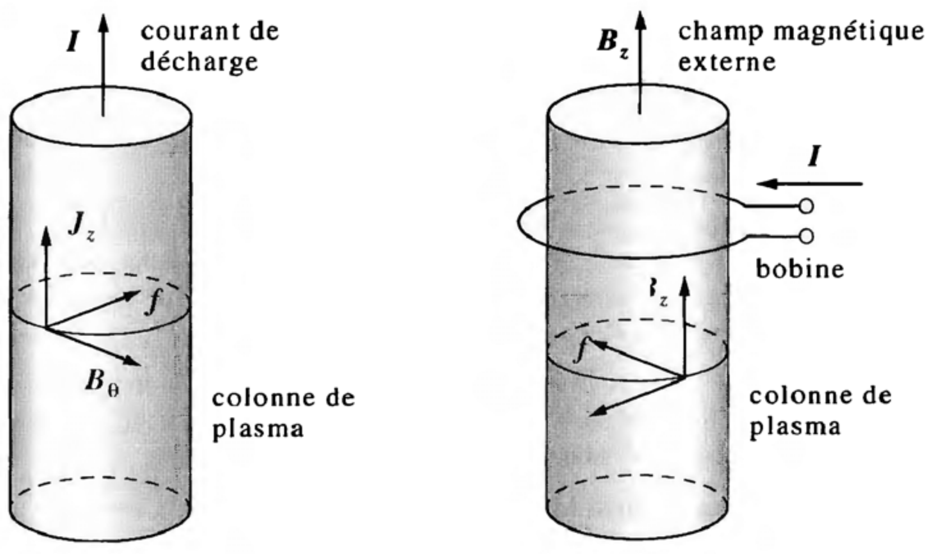


Fig. 18.4 : *Pincement axial (z-pinch)* **Fig. 18.5 :** *Pincement radial (Θ-pinch)*

■ Pour comprimer un plasma de fusion thermonucléaire ($T \approx 10^9$ K) de rayon $r = 15$ cm, contenant $n = 10^{22}$ m^{-3} ions, il faut un courant $I = 2,1 \cdot 10^7$ A.

2. Pincement radial (Θ-pinch)

Pincement radial : pincement d'une colonne de plasma obtenu à l'aide d'une bobine externe produisant un champ magnétique axial croissant qui induit un courant électrique azimuthal dans la colonne de plasma. Une force radiale dirigée vers l'axe agit sur les porteurs de charges (Fig. 18.5).

Les instabilités du plasma limitent la durée de vie du pincement ($\tau \approx 10\ \mu s$). Des durées de confinement plus grandes nécessitent d'autres géométries, par exemple des plasmas toroïdaux.

18.3 Production d'énergie à l'aide de plasmas

Les plasmas, en tant que gaz conducteurs de l'électricité peuvent être confinés à l'aide de champ magnétiques. De cette manière, leur contact avec les parois d'un récipient peut être empêchés. Ceci peut être utilisé de diverses manières :

- les machines thermiques peuvent fonctionner à des températures beaucoup plus élevées que ne le permettrait une chaudière dont les parois seraient à la température de combustion (générateur magnétohydrodynamique, générateur MHD).
- Les plasmas de fusion thermonucléaire peuvent être confinés à l'intérieur d'une enceinte, sans contact avec les parois, et être utilisés pour la fusion contrôlée.

18.3.1 Générateur magnétohydrodynamique (générateur MHD)

Générateur magnétohydrodynamique : générateur thermique à fonctionnement continu qui combine les fonctions de turbine et de génératrice d'électricité dans le même milieu (Fig. 18.6).

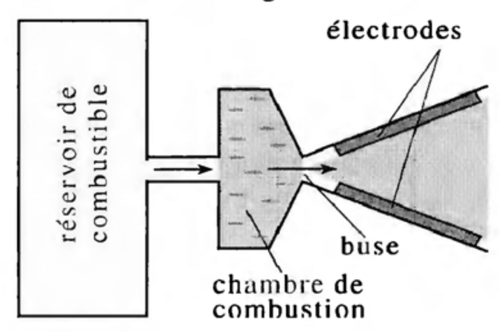


Fig. 18.6 : *Générateur MHD*

Un jet de plasma, issu d'une chambre de combustion, en passant à travers une buse, pénètre dans une enceinte où règne un champ magnétique perpendiculaire à l'axe du jet. La force de Lorentz qui s'ensuit produit la séparation des porteurs de charges, qui sont alors collectés selon leur signe sur deux électrodes perpendiculaires au champ magnétique et à l'axe du jet de plasma.

▷ Pour obtenir un degré d'ionisation suffisant aux températures typiques de combustion $T = 2000 \ldots 3000\,K$, il est nécessaire d'ajouter des atomes alcalins au gaz de combustion. Ce dopage du gaz diminue aussi la résistance interne du générateur qui limite sa puissance maximum.

Le rendement maximum η d'un générateur MHD est limité par le principe de Carnot :

$$\eta = \frac{T_h - T_k}{T_h}$$

Le rendement thermique peut théoriquement être très élevé par la valeur élevée de T_h, qu'il est possible d'atteindre sans nuire aux parois de la chambre de combustion grâce au confinement magnétique.

Cela permet théoriquement d'atteindre des rendements très élevés ; néanmoins de nombreux problèmes techniques restent à résoudre.

18.3.2 Réacteurs à fusion nucléaire

La fusion de noyaux légers pour former des noyaux plus lourds, libère une énergie de l'ordre de 10 MeV par réaction. Cependant, pour initier une réaction de fusion, il faut fournir suffisamment d'énergie pour vaincre la répulsion coulombienne des deux noyaux qui doivent fusionner. Dans une centrale à fusion thermonucléaire, une partie de l'énergie libérée doit servir à entretenir les réactions de fusion.

1. Réactions nucléaires de fusion

Les réactions suivantes sont envisageables pour un réacteur de fusion thermonucléaire :

$$
\begin{aligned}
{}^2_1\mathrm{D} + {}^3_1\mathrm{T} &\rightarrow {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n} + 17,60\ \mathrm{MeV} \\
{}^2_1\mathrm{D} + {}^2_1\mathrm{D} &\rightarrow {}^3_2\mathrm{He} + {}^1_0\mathrm{n} + 3,27\ \mathrm{MeV} \\
{}^2_1\mathrm{D} + {}^2_1\mathrm{D} &\rightarrow {}^3_1\mathrm{T} + {}^1_1\mathrm{H} + 4,04\ \mathrm{MeV} \\
{}^6_3\mathrm{Li} + {}^2_1\mathrm{D} &\rightarrow 2\,{}^4_2\mathrm{He} + 22,4\ \mathrm{MeV} \\
{}^{11}_5\mathrm{B} + {}^1_1\mathrm{H} &\rightarrow 3\,{}^4_2\mathrm{He} + 8,47\ \mathrm{MeV}
\end{aligned}
$$

L'énergie libérée se répartit entre les produits de la réaction.

▷ Les réactions ci-dessus sont classées par ordre décroissant de section efficace à une température donnée. La réaction D-T nécessite le moins d'infrastructures techniques, mais est problématique par les grandes quantités de tritium requises et par l'émission de neutrons de grande énergie.

2. Puissance spécifique

La puissance spécifique qui peut être atteinte par un réacteur de fusion nucléaire est donnée par :

Puissance spécifique dans les réactions de fusion nucléaire			**$L^{-1}MT^{-3}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$p = n_1 n_2 <v\sigma> \varepsilon$	p	W/m³	puissance spécifique
	n_i	1/m³	nbre. des partenaires de la réaction par unité de volume
	$<v\sigma>$	m³/s	section efficace moyennée sur la vitesse
	ε	J	bilan énergétique de la réaction

3. Temps de confinement

τ : temps pendant lequel le combustible nucléaire est maintenu confiné dans l'espace par des champs magnétiques extérieurs.

▷ À cause de l'énergie cinétique élevée des particules et la pression de radiation, les plasmas exercent d'énormes pressions que le confinement magnétique ne peut équilibrer que pendant quelques ns.

4. Critère de Lawson

Condition nécessaire pour que le mélange combustible conduise à un réacteur économiquement viable. Le critère de Lawson relie la densité de combustible nécessaire dans le plasma au temps de confinement.

Pour que dans un réacteur une réaction en chaîne puisse s'établir, il faut que l'énergie libérée par la fusion soit au moins aussi grande que l'énergie thermique du plasma. Pour un plasma constitué de particules identiques :

$$\frac{1}{4}n^2 < v\sigma > \varepsilon\tau \; > \; 3nk_{\mathrm{B}}T$$

d'où on déduit la valeur minimale du produit $n\tau$.

Critère de Lawson				$\mathrm{L}^{-3}\mathrm{T}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$n\tau \; > \; \dfrac{12k_{\mathrm{B}}T}{< v\sigma > \varepsilon}$	n	$1/\mathrm{m}^3$	nbre. de réactants par unité de volume	
	τ	s	temps de confinement	
	k_{B}	J/K	constante de Boltzmann	
	T	K	température du plasma	
	$< v\sigma >$	m^3/s	section efficace moyennée sur la vitesse	
	ε	J	bilan énergétique de la réaction	

■ Pour les réactions D-T, on a $n\tau > 5 \cdot 10^{19}\ \mathrm{sm}^{-3}$, pour les réactions D-D, $n\tau > 10^{21}\ \mathrm{sm}^{-3}$.

5. Pertes d'énergie dans les plasmas de fusion

Pertes d'énergie qui doivent être compensées par l'énergie libérée par la fusion :

- rayonnements de freinage (*Bremsstrahlung*)
- émission de raies spectrales par des atomes d'impuretés – particulièrement critiques pour des atomes lourds
- rayonnement synchrotron (dans le cas du confinement toroïdal)
- conduction thermique
- perte de particules

6. Procédés de confinement

Deux procédés capables de respecter le critère de Lawson sont disponibles :

- **Confinement magnétique** : un plasma de faible densité est confiné par un champ magnétique pour un temps relativement long. Il est chauffé de l'extérieur, par induction, de manière à minimiser les pertes.
- **Confinement inertiel** : le combustible nucléaire est fortement comprimé pour atteindre des densités comprises entre 100 et 1000 fois celle de la glace. Sa propre inertie peut alors le maintenir confiné pendant un court instant.

18.3.3 Fusion sous confinement magnétique

1. Variantes du confinement magnétique

Pour contenir complètement un plasma de faible densité dans un champ magnétique, il existe deux possibilités de principes :

- **Miroirs magnétiques** : pincement radial linéaire, aux extrémités duquel le champ magnétique augmente fortement, de sorte que les particules chargées qui s'y déplacent se trouvent réfléchies. Cependant, par les collisions ions-ions dans le plasma, la température nécessaire devient très élevée et rend hypothétique l'application de ce procédé.

  ■ Avec le système de miroirs magnétiques 2XIIB du Lawrence Livermore National Laboratory (USA) des températures de $T_i = 9$ keV ont été atteintes à une densité de 10^{20} m^{-3} et un temps de confinement $t = 1$ ms.

- **Confinement toroïdal d'un plasma** , basé sur un pincement radial, recourbé en forme de tore.

Un simple pincement radial, recourbé sous forme de tore, ne permet pas d'obtenir un confinement stable, car une résultante de composante dirigée vers l'extérieur agit sur les porteurs de charges. Par l'adjonction d'un champ magnétique approprié (champ poloïdal), on peut néanmoins amener les porteurs de charges sur des trajectoires en forme de spirales autour de l'axe du tore.

2. Variantes pour la production du champ magnétique

Le champ magnétique méridional peut se produire de différentes manières :

- **Tokamak** : un transformateur induit un courant toroïdal dans le plasma, qui produit alors lui-même le champ magnétique méridional. Puisque ce courant ne peut être induit que par impulsions, le fonctionnement stationnaire pose des problèmes.

  ■ Tokamak **JET (Joint European Torus)** : installation expérimentale avancée pour la fusion thermonucléaire contrôlée en Grande Bretagne.

  ■ Le tokamak français, **Tore-Supra**, utilise des techniques de chauffage par ondes hybrides ($f = 1 \ldots 10$ Ghz). Il a produit un courant de plasma de 1 MA pendant 1 minute.

- **Stellarator** : le champ magnétique méridional-azimuthal est créé à partir de l'extérieur du plasma par un courant dans une bobine de forme asymétrique. Les pertes par dérive des trajectoires des particules peuvent être limitées par une disposition appropriée des bobines. Un fonctionnement stationnaire devient en principe possible.

  ■ Stellarator **Wendelstein** : installation expérimentale pour la fusion par confinement magnétique au Max-Planck-Institut für Plasmaphysik à Munich (Allemagne).

L'élévation de la température du plasma au- delà de 10^8 K est obtenue par induction ou par injection de particules de grande énergie. En dehors de la dissipation d'énergie par rayonnement, il faut aussi tenir compte des pertes par dérive du plasma, c'est à dire des mouvements perpendiculaires à la direction du champ magnétique. Les collisions entre particules chargées ne sont alors pas seulement des chocs à deux particules, mais peuvent aussi – par la portée infinie de l'interaction coulombienne – influencer plusieurs particules. De telles collisions abaissent fortement la durée de vie du plasma, même s'il est à l'équilibre mécanique.

18.3.4 Fusion sous confinement inertiel

1. Implosion

Le combustible nucléaire est enfermé soit sous forme solide dans des pellets, soit sous forme gazeuse à forte pression ou liquide dans des microballons en verre. Un rayonnement extérieur, généralement des impulsions brèves de flux laser élevés, fait exploser radialement le pellet ou microballon vers l'extérieur et l'intérieur (implosion). La fraction de matière ayant acquis un mouvement centripète comprime le combustible et le porte à haute température. Une réaction de fusion peut alors se produire au centre et

se propager vers l'extérieur. Un confinement par d'autres moyens techniques n'est pas nécessaire, car le plasma interne reste confiné par les couches externes du pellet, pour la durée de la réaction (quelques centaines de ps).

a) Constitution d'un pellet de combustible nucléaire Pellet : petite sphère d'environ 100μm de rayon, constituée de plusieurs couches concentriques, creuse au centre. La couche la plus interne est formée du combustible, par exemple un mélange solidifié deutérium-tritium. L'ensemble est conçu de façon que lors de l'irradiation, la partie externe (tamper) s'évapore vers l'extérieur, tandis que la partie interne (pusher) est projeté par le recul radialement vers l'intérieur. Le combustible de la couche la plus interne est alors fortement comprimé (Fig. 18.7).

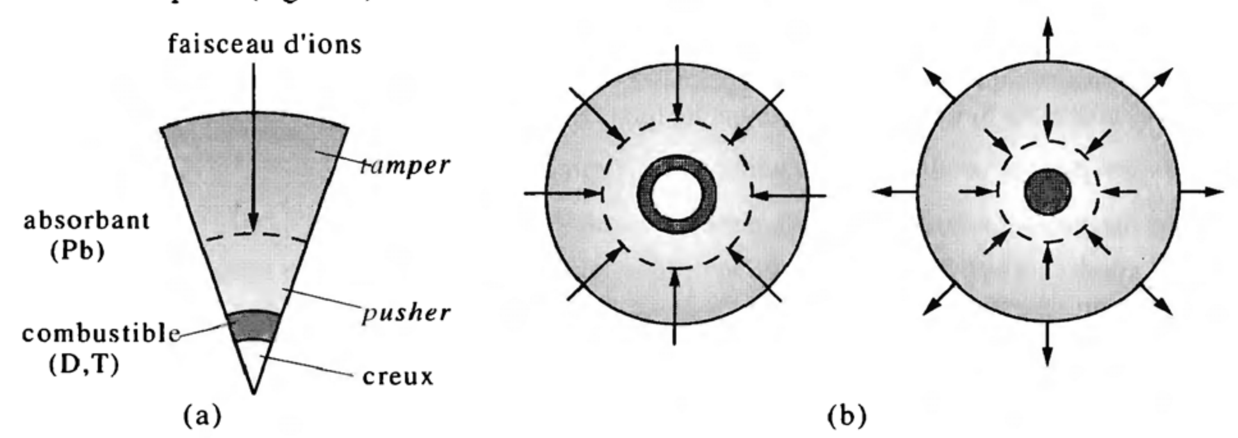


Fig. 18.7 : *Fusion par confinement inertiel. (a) : structure d'un pellet de combustible nucléaire, (b) : implosion d'un pellet*

2. Variantes de compression

Pour amorcer la fusion dans le pellet, il faut déposer de l'énergie de façon aussi symétrique que possible. Plusieurs possibilités existent :

- **Rayons Laser** : ils sont facilement focalisés et transportent une grande densité d'énergie. On utilise généralement des faisceaux laser de longueur d'onde $\lambda = 1,06\,\mu$m avec un flux de 10^{15} W.cm^{-2} et des durées de 100 ps. Il se forme une couronne de plasma qui absorbe le rayonnement. Cette couronne se détend vers l'extérieur et, par réaction, exerce une poussée centripète qui comprime et chauffe la partie centrale du pellet de deutérium-tritium.

▷ Le rayonnement laser libère des électrons extrêmement chauds, qui traversent rapidement le pellet. Ce préchauffage du combustible augmente considérablement le travail de compression nécessaire.

- **Faisceau d'ions** : ils rendent possible un couplage énergétique efficace et très localisé (courbe de Bragg) au pellet. Cependant, la focalisation fine des faisceaux d'ions lourds est relativement difficile.

Le bombardement direct des pellets par des faisceaux d'ions crée des disymétries dans le dépôt d'énergie et induit des instabilités hydrodynamiques (instabilités de Rayleigh-Taylor) qui limitent la compression.

Dans les méthodes indirectes, les faisceaux d'ions ou de laser sont envoyés sur un convertisseur constitué d'or, qui convertit les faisceaux incidents majoritairement en faisceaux de rayons X mous, absorbés de façon plus symétrique par le combustible. Néanmoins, la densité d'énergie nécessaire, du fait de cette conversion, est augmentée d'environ 2 ordres de grandeur.

Symboles de l’électricité

Symbole	Unité	Dénomination
α	1/K	coefficient de température
α_i	m^3/s	coefficient de recombinaison
γ, σ	S/m	conductivité électrique
ε	C/(Vm)	permittivité
ε	J	énergie de réaction
ε_0	C/(Vm)	permittivité du vide
ε_r	1	permittivité relative
κ	S/m	conductivité thermique
λ	C/m	densité linéique de charge
λ_D	m	longueur de Debye
Λ_m	Vs/A	perméance, conductivité magnétique
μ	$m^2/(Vs)$	mobilité ionique
μ_0	Vs/(Am)	perméabilité du vide
μ_r	1	perméabilité relative
ρ	Ωm	résistivité
ρ	C/m^3	densité volumique de charge
σ	C/m^2	densité surfacique de charge
τ	1	profondeur optique
Θ	A	circulation du champ magnétique
$\mathbf{\Phi}$	Wb	flux magnétique
φ	V	potentiel électrique
χ_m	1	susceptibilité magnétique
ψ	Vm	flux électrique
ψ	Wb	flux d’induction
$\vec{\omega}_{\mathrm{G}}$	1/s	fréquence de gyration
ω_{Ge}	1/s	fréquence de gyration des électrons
ω_{Pe}	1/s	fréquence de Langmuir des électrons
ω_{Pi}	rad/s	fréquence de Langmuir
$\ddot{A}$	kg/C	équivalent électrochimique
A	$A/(m^2K^2)$	constante de Richardson
b	$m^2/(Vs)$	mobilité
B	S	admittance
B	J/m^2	énergie rayonnée
$\vec{\mathbf{B}}$	T	induction magnétique
C	F	capacité
c	m/s	vitesse de la lumière
c_0	m/s	vitesse de la lumière dans le vide
c_i	mol/kg	concentration ionique
c_S	m/s	vitesse du son ionique
d_{p}	1	facteur d’atténuation
$\vec{\mathbf{D}}$	C/m^2	déplacement électrique
e	C	charge élémentaire
$\vec{\mathbf{E}}$	V/m	champ électrique

Symbole	Unité	Dénomination
f	1/s	fréquence du rayonnement
f	1/s	fréquence des photons
F	C/mol	constante de Faraday
G	S	conductance
h	Js	constante de Planck, quantum d'action
$\vec{\mathbf{H}}$	A/m	champ magnétique
I	A	courant
I_a	A	courant anodique
$\vec{\mathbf{J}}$	A/m^2	densité de courant
k_B	J/K	constante de Boltzmann
$\ln \Lambda$	1	logarithme coulombien
L	H	inductance
M	H	inductance mutuelle
M	kg/mol	masse molaire
m_e	kg	masse de l'électron
$\vec{\mathbf{M}}$	A/m	aimantation
N	1	nombre de particules
n	mol	mole
N_A	1/mol	constante d'Avogadro
Q	C	charge électrique
Q	W	puissance réactive
Q_p	1	facteur de qualité, facteur de mérite
R	Ω	résistance électrique
R_a	Ω	résistance d'anode
R_i	Ω	résistance interne
R_m	A/Wb	résistance magnétique
r_G	m	rayon de gyration
s	1	glissement
S	W	puissance réactive
S	A/V	pente de la caractéristique
T	K	température absolue
U	V	tension électrique
U	V	différence de potentiel
U_a	V	tension anodique
U_g	V	tension de grille
U_s	V	tension de commande de la grille
$<v\sigma>$	m^3/s	section efficace moyennée sur la vitesse
$<v_e>$	m/s	vitesse moyenne des électrons
A_V	1	gain en tension d'un tube
v_{dr}	m/s	vitesse de dérive
W	J	énergie de liaison
W_A	J	travail de sortie, travail d'extraction
X	Ω	réactance
x	1	degré d'ionisation
Y	S	admittance
Z	Ω	impédance
z	1	nombre de charge

19 Tables de l'électricité

19.1 Métaux et alliages

19.1.1 Résistivité

19.1/1 : Métaux à température ambiante

Élément	T(K)	$\rho(10^{-8}\Omega\text{m})$	$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}(10^{-3}\text{K}^{-1})$	Élément	T(K)	$\rho(10^{-8}\Omega\text{m})$	$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}(10^{-}$
Aluminium	293	265.48	4.29	Niobium	273	15.2	2.28
Antimoine	273	39.0		Or	273	2.06	4.5
Argent	293	159	4.1	Osmium	273	8.1	4.2
Bismuth	273	107	4.45	Platine	273	9.81	3.93
Cadmium	273	6.8	4.26	Polonium	273	40	
Cérium	290-300	82.8		Praséodyme	290-300	70.0	
Cobalt	273	5.6	6.58	Prométhium	290-300	75.0	
Cuivre	293	167.3	6.8	Protactinium	273	17.7	
Dysprosium	290-300	92.6		Rhénium	273	17.2	3.1
Erbium	290-300	86.0		Rhodium	273	4.3	4.57
Étain	273	11.5	4.63	Ruthénium	273	7.1	3.59
Europium	290-300	90.0		Samarium	290-300	94.0	
Gadolinium	290-300	131.0		Scandium	290-300	56.2	
Gallium	273	13.6		Terbium	290-300	115	
Holmium	290-300	81.4		Thallium	273	15	5.2
Indium	273	8.0	5.1	Thorium	273	14.7	3.3
Iridium	273	4.7	4.9	Thulium	290-300	67.6	
Lanthane	290-300	61.5		Titane	273	39	5.5
Lutétium	290-300	58.2		Uranium	273	28	3.4
Mercure	273	94.1	0.89	Ytterbium	290-300	25.0	
Néodyme	290-300	64.3		Yttrium	290-300	59.6	

19.1/2 : Dépendance en pression

La résistivité électrique des métaux augmente généralement s'ils sont soumis à une pression. Le coeff de pression $(1/\rho)(\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}p)$ mesure cette variation de la résistivité.

Métal	$T(K)$	Pression (10^2 MPa)			Métal	$T(K)$	Pression (10^2 MPa)		
		0	10	30			0	10	30
		$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}$ (10^{-5}MPa^{-1})					$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}$ (10^{-5}MPa^{-1})		
Lithium	303	−7.00	−7.52	−9.0	Rhodium	299	1.65	1.62	1.56
Béryllium	298	1.77	1.63	1.46	Palladium	299	2.10	2.04	1.93
Sodium	303	58.8	23.6	4.04	Argent	303	3.48	3.28	2.60
Magnésium	298	5.40	4.67	3.81	Indium	296	1.25	1.09	0.85
Aluminium	301	4.29	4.06	3.6	Étain $\parallel$c	303	10.0	9.0	6.1
Potassium	303	134.4	30	0.88	Étain $\perp$c	303	9.24	8.26	5.61

suite du tableau sur la page suivante

Métal	$T(K)$	Pression (10^2 MPa) 0	10	30	Métal	$T(K)$	Pression (10^2 MPa) 0	10	30
		$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}$ (10^{-5}MPa^{-1})					$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp}$ (10^{-5}MPa^{-1})		
Calcium	303	−9.48	−12.2	−20.7	Antimoine	303	−9.84	−14.8	−2.80
Titane	296	1.19	1.12	1.02	Barium	303	7.2	1.2	−13.6
Chrome	298	22.2	17.3	8.96	Cérium	297	−4.1	–	1.6
Fer	303	2.42	2.26	1.90	Praséodyme	297	1.36	1.20	1.02
Cobalt	297	0.96	0.90	0.80	Néodyme	297	1.57	1.32	1.03
Nickel	298	1.77	1.82	1.73	Tantale	302	1.62	1.62	1.55
Cuivre	303	1.92	1.80	2.42	Tungstène	302	1.33	1.31	1.25
Zinc $\parallel$c	303	9.68	8.76	6.72	Iridium	296	1.39	1.37	1.33
Zinc $\perp$c	303	5.28	4.40	2.84	Platine	296	1.92	1.88	1.78
Rubidium	303	157.0	14.4	−28.8	Or	303	3.02	2.84	2.44
Strontium	303	−45.3	−59.0	−118.8	Mercure (liq.)	303	23.1	17.0	–
Zirconium	299	0.32	0.33	0.22	Plomb	303	13.7	11.6	6.96
Niobium	297	1.40	1.37	1.30	Bismuth	303	−14.8	−18.5	–
Molybdène	300	1.31	1.29	1.24	Uranium	293	4.88	4.56	4.10

19.1/3 : Variation relative près du point de fusion

Métal	T_{fusion}(K)	$\rho_{\text{liq}}/\rho_{\text{solide}}$	Métal	T_{fusion}(K)	$\rho_{\text{liq}}/\rho_{\text{solide}}$
Lithium	453	1.68	Cadmium	594	1.89
Sodium	370	1.46	Indium	388	2.12
Magnésium	924	1.63	Étain	505	2.11
Aluminium	934	1.82	Antimoine	904	0.71
Potassium	337	1.55	Tellure	722	2.00
Fer	1808	1.09	Césium	303	1.66
Cuivre	1357	2.07	Or	1336	2.28
Zinc	693	2.11	Mercure	234	3.36
Gallium	303	0.47	Plomb	601	1.98
Rubidium	312	1.61	Bismuth	544	0.47
Argent	1234	1.9			

19.1/4 : Alliages

Alliage	$\rho(10^{-6}\ \Omega\text{m})$	$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}(10^{-3}\text{K})$	Alliage	$\rho(10^{-6}\ \Omega\text{m})$	$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}(10^{-3}\text{K})$
Chrome-Or	0.33	0.001	Nickéline	0.43	0.2
Graphite	8.00	−0.2	Novoconstan	0.45	0.04
Constantan	0.50	0.03	Platine-Iridium (20%)	0.32	2.0
Charbon à balais	40	–	Platine-Rhodium (10%)	0.20	1.7
Manganine	0.43	0.02	Fonte rouge	0.127	1.5
Nichrome (80 Ni, 20 Cr)	1012	0.2	Maillechort	0.30	0.4

19.1.2 Série des tensions

19.1/5 : Série des tensions électrochimiques

Les valeurs reportées de la f.é.m. U_0 sont relatives à l'électrode normale à Hydrogène E.N.H., et sont données pour une solution normale (1-n) :

Corps	Valence	U_0(V)	Corps	Valence	U_0(V)
Fluor	1	+2.87	Cadmium	2	−0.40
Or	1	+1.69	Fer	2	−0.45
Chlore	1	+1.35	Souffre	2	−0.48
Or	3	+1.40	Gallium	3	−0.55
Brome	1	+1.07	Chrome	2	−0.91
Platine	2	+1.18	Zinc	2	−0.76
Mercure	2	+0.80	Tellure	2	−1.14
Argent	1	+0.80	Manganèse	2	−1.19
Graphite	2	+0.75	Aluminium	3	−1.66
Iode	1	+0.54	Uranium	3	−1.80
Cuivre	1	+0.52	Magnésium	2	−2.37
Polonium	4	+0.76	Béryllium	2	−1.85
Oxygène	2	+0.39	Sodium	1	−2.71
Cuivre	2	+0.34	Calcium	2	−2.87
Arsenic	3	+0.23	Strontium	2	−2.90
Bismuth	3	+0.31	Barium	2	−2.91
Antimoine	3	−0.51	Potassium	1	−2.93
Étain	4	+0.02	Rubidium	1	−2.98
Hydrogène	1	±0.00	Lithium	1	−3.04
Fer	3	−0.04	Acier (zingué)		−0.53 … − 0.72
Plomb	2	−0.13	Étain	2	−0.14
Nickel	2	−0.26	Laiton		+0.26 … + 0.05
Cobalt	2	−0.28	Bronze		+0.36 … + 0.03
Indium	3	−0.34	Nichrome		+0.75 … − 0.05

19.1/6 : Série des tensions thermoélectriques

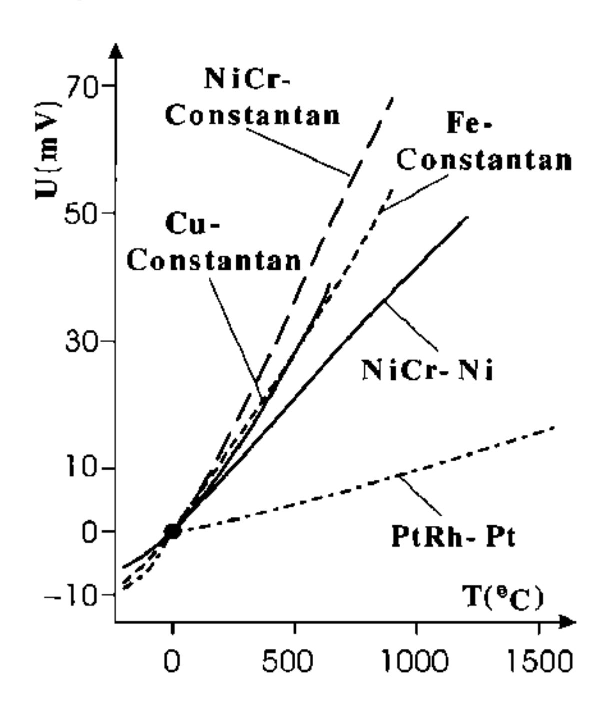
Les valeurs reportées de la f.é.m. U_0 sont relatives respectivement au Platine et au Cuivre comme deuxième métal, et à la température de 100 K.

Corps	U_0(mV/100 K)		Corps	U_0(mV/100 K)	
	Platine	Cuivre		Platine	Cuivre
Tellure	+50	+49	Césium	+0.5	–
Silicium	+44.8	+44	Plomb	+0.44	−0.31
Antimoine	+4.75	+4.0	Étain	+0.42	−0.33
Nichrome	+2.2	+1.45	Magnésium	+0.42	−0.33
Fer	+1.88	+1.08	Tantale	+0.41	−0.34
Molybdène	+1.2	−0.45	Aluminium	+0.39	−0.36
Laiton	+1.1	+0.35	Charbon	+0.30	−0.45
Cadmium	+0.9	+0.15	Graphite	+0.22	−0.53

suite du tableau sur la page suivante

Corps	U_0(mV/100 K) Platine	Cuivre	Corps	U_0(mV/100 K) Platine	Cuivre
Tungstène	+0.8	+0.05	Mercure	±0	−0.75
Acier V2A	+0.8	+0.05	Platine	±0	−0.75
Cuivre	+0.75	±0	Thorium	−0.1	−0.85
Argent	+0.73	−0.02	Sodium	−0.2	−0.95
Or	+0.7	−0.05	Palladium	−0.5	−1.25
Étain	+0.7	−0.05	Nickel	−1.5	−2.25
Manganèse	+0.7	−0.05	Cobalt	−1.7	−2.45
Iridium	+0.66	−0.09	Constantan	−3.3	−4.05
Rhodium	+0.65	−0.10	Bismuth	−6.5	−7.25

19.1/7 : Tension thermoélectrique de quelques éléments thermoélectriques
Température de référence 0 °C.



19.1/8 : Couples thermoélectriques usuels

Domaine de température	Couple thermoélectrique
−200 °C – 600 °C	Cu-Constantan
−200 °C – 800 °C	Fe-Constantan
0 °C – 1200 °C	NiCr-Ni
0 °C – 1600 °C	PtRh-Pt

19.1/9 : Coefficient de Peltier P pour divers métaux

La flèche indique le sens du courant électrique.

Couple	T(°C)	$P(\mu J/K)$	Couple	T(°C)	$P(\mu J/K)$	Couple	T(°C)	$P(\mu J/K)$
As → Pb	20	3.81	Cu → Pd	0	0.588	Pb → Const.	0	7.95
$Bi_{\parallel}$ → $Bi_{\perp}$	20	15.03	Cu → Pt	0	0.238		100	11.43
$Cd_{\parallel}$ → $Cd_{\perp}$	20	0.85	Cu → Const.	15.5	2.436		200	15.07
Cd → Ni	15	6.40	Fe → Cu	0	0.664		300	18.42
Cu → Ag	0	0.0703	Fe → Hg	18.4	1.1644	Sb → Bi	20	44.79
Cu → Al	14	1.70		99.64	1.388	Sb → Pb	20	0.78
Cu → Au	0	0.3403		182.3	1.511	Zn → Ni	15	6.42
Cu → Bi	18	16.12	Fe → Ni	15	2.288	$Zn_{\parallel}$ → $Zn_{\perp}$	20	0.53
Cu → Ni	0	7.95	Fe → Const.	0	3.10	Graphite → Cu	20	2.94
	14.4	5.80	Pb → Bi	20	5.16			

19.2 Diélectriques

Dans les tables qui suivent, ε_r est la permittivité relative, δ l'angle de perte et U_d la tension disruptive.

19.2/1 : Permittivité relative ε_r.

Les valeurs sont données à la température ambiante.

Substance	Formule	Fréquence(MHz)	ε_r
Oxyde d'Aluminium	Al_2O_3	1	10
Bromure d'Ammonium	NH_4Br	100	7.1
Chlorure d'Ammonium	NH_4Cl	100	7.0
Apatite (⊥ axe opt.)		300	9.5
Apatite (‖ axe opt.)		300	7.41
Asphalte		< 1	2.68
Chlorure de Barium	$BaCl_2$	60	11.4
Chlorure de Barium (2 H_2O)		60	9.4
Nitrate de Barium	$Ba(NH_3)_2$	60	5.9
Sulfate de Barium	$BaSO_4$	100	11.4
Béryl (⊥ axe opt.)	$Be_3Al_2Si_6O_{18}$	0.01	7.02
Béryl (‖ axe opt.)	$Be_3Al_2Si_6O_{18}$	0.01	6.08
Calcite (⊥ axe opt.)	$CaCO_3$	0.01	8.5
Calcite (‖ axe opt.)	$CaCO_3$	0.01	6.08
Acétamide	C_2H_5NO	400	4.0
Acide acétique (2 °C)	$C_2H_4O_2$	400	4.1
Carbonate de Calcium	$CaCO_3$	1	6.14
Fluorure de Calcium	CaF_2	0.01	7.36
Sulfate de Calcium (2 H_2O)	$CaSO_4$	0.01	5.66
Cassitérite (⊥ axe opt.)	SnO_2	10^6	23.4
Cassitérite (‖ axe opt.)	SnO_2	10^6	24
Oxyde de Cuivre	Cu_2O	100	18.1
Oléate de Cuivre	$Cu(C_{18}H_{33}O_2)_2$	400	2.8
Sulfate de Cuivre	$CuSO_4$	60	10.3

suite du tableau sur la page suivante

Substance	Formule	Fréquence (MHz)	ε_r
Sulfate de Cuivre (2 H_2O)		60	7.8
Diamant	C	100	5.5
Dolomite (⊥ axe opt.)	$CaMg(CO_3)_2$	100	8.0
Dolomite (‖ axe opt.)	$CaMg(CO_3)_2$	100	6.8
Oxyde de Fer	Fe_3O_4	100	14.2
Acétate de Plomb	$Pb(C_2H_3O_2)_2$	1	2.6
Carbonate de Plomb	$PbCO_3$	100	18.6
Chlorure de Plomb	$PbCl_2$	1	4.2
Monoxyde de Plomb	PbO	100	25.9
Nitrate de Plomb	$Pb(NO_3)_2$	60	37.7
Oléate de Plomb	$Pb(C_{18}H_{32}O_2)_2$	400	3.27
Sulfate de Plomb	$PbSO_4$	1	14.3
Sulfure de Plomb	PbS	1	17.9
Malachite	$Cu_2(OH)_2(CO_3)$	10^6	7.2
Chlorure de Mercure	Hg_2Cl_2	1	3.2
	$HgCl_2$	1	9.4
Naphthalène	$C_{10}H_8$	400	2.52
Phénol (10 °C)	C_6H_6O	400	4.3
Phosphore (rouge)	P_4	100	3.6
Alunite	$KAl(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$	1	3.8
Carbonate de Potassium	$KHCO_3$	100	5.6
Chlorate de Potassium	$KClO_3$	60	5.1
Chlorure de Potassium	KCl	0.01	5.03
Chromate de Potassium	K_2CrO_4	60	7.3
Iodure de Potassium	KI	60	5.6
Nitrate de Potassium	KNO_3	60	5.0
Sulfate de Potassium	K_2SO_4	60	5.9
Quartz (⊥ axe opt.)	SiO_2	30	4.34
Quartz (‖ axe opt.)		30	4.27
Rutile (⊥ axe opt.)	TiO_2	100	86
Rutile (‖ axe opt.)		100	170
Sélénium	Se	100	6.6
Bromure d'Argent	AgBr	1	12.2
Chlorure d'Argent	AgCl	1	11.2
Cyanure d'Argent	AgCN	1	5.6
Carbonate de Zinc (⊥ axe opt.)	$ZnCO_3$	10^6	9.3
Carbonate de Zinc (‖ axe opt.)		10^4	9.4
Carbonate de Sodium	Na_2CO_3	60	8.4
Carbonate de Sodium (10 H_2O)		60	5.3
Chlorure de Sodium	NaCl	0.01	6.12
Oléate de Sodium	$NaC_{18}H_{38}O_2$	400	2.75
Perchlorate de Sodium	$NaClO_4$	60	5.4
Sucre		300	3.32
Souffre	S	–	4.0
Chlorure de Thallium	TlCl	1	46.9
Tourmaline (⊥ axe opt.)		0.01	7.10
Tourmaline (‖ axe opt.)		0.01	6.3
Zirconium	Zr	100	12

19.2/2 : Céramiques

Substance	ε_r	$\tan\delta$	U_d(kV/mm)
Porcelaine	$6\ldots7$	0.035	$20\ldots28$
Stéatite	$6\ldots6.5$	0.002	$20\ldots25$
Diélectriques utilisés dans les condensateurs			
$ZrTiO_4$	$28\ldots30$	$2.5\ldots5.5\cdot10^{-4}$	32
TiO_2	$78\ldots88$	$4\ldots5.5\cdot10^{-4}$	27
$CaTiO_3$	$150\ldots165$	$2\ldots4\cdot10^{-4}$	22
$(SrBi)TiO_3$	$900\ldots1000$	$5\ldots10\cdot10^{-4}$	28
$(BaTiO_3)_{0.9}\cdot(BaZrO_3)_{0.075}$	$2700\ldots3000$	$1\ldots2\cdot10^{-2}$	13

19.2/3 : Verres

Type de verre	ε_r	$10^{-4}\tan\delta$
Pyrex	$4.1\ldots4.6$	$45\ldots130$
Quartz	3.75	$1\ldots2$
Corning	4.0	6

19.2/4 : Propriétés électriques de polymères

Propriété	Polyéthylène	Téflon	PVC	Polystyrol	Polyméthylméthacrylate	Époxy
Température limite (°C)	100	260	60 – 70	65 – 96	68 – 88	140
ρ (Ωm)	$10^{15}-10^{17}$	$10^{15}-10^{16}$	$10^{14}-10^{16}$	$10^{17}-10^{18}$	$10^{14}-10^{16}$	$10^{13}-10^{14}$
ε_r(1 MHz)	2.3	2	3 – 5	2.45 – 2.65	3.5 – 4.5	3.7
$\tan\delta$(1 MHz)	$2\cdot10^{-4}$	$2\cdot10^{-4}$	0.03 – 0.08	$(1-4)\cdot10^{-4}$	0.04 – 0.06	0.019
U_d(kV/mm)	18 – 20	20 – 30	14 – 20	20 – 35	18 – 35	18

19.2/5 : Résistivité d'isolants

Isolant	$\rho(\Omega\text{m})$	Isolant	$\rho(\Omega\text{m})$
Bakélite	10^{14}	Plexiglas	10^{13}
Benzène	10^{15}	Polyéthylène	$10^{10}\ldots10^{13}$
Ambre	$>10^{16}$	Polystyrol	$10^{15}\ldots10^{16}$
Celluloïd	$10^{8}\ldots10^{10}$	Chlorure de polyvinyle	bis 10^{13}
Ivoire	$2\cdot10^{6}$	Porcelaine	$5\cdot10^{12}$
Terre humide	$>10^{6}$	Verre quartz	$5\cdot10^{16}$
Verre Flint	$3\cdot10^{8}$	Vernis	10^{14}
Galalithe	$\approx10^{14}$	Ardoise	10^{6}
Verre	$>10^{11}$	Cire à cacheter	$8\cdot10^{13}$
Mica	$10^{13}\ldots10^{15}$	Silicium	$8\cdot10^{7}$
Gutta-percha	$\approx4\cdot10^{7}$	Huile de silicone	10^{13}
Caoutchouc dur	$10^{13}\ldots10^{16}$	Huile à transformateur	$10^{10}\ldots10^{13}$
Bois sec	$10^{9}\ldots10^{13}$	Vaseline	$10^{10}\ldots10^{13}$
Marbre	$10^{7}\ldots10^{8}$	Lave	$10^{10}\ldots10^{13}$
Caoutchouc	$6\cdot10^{14}$	Eau distillée	$(1\ldots4)\cdot10^{4}$
Colophane	$5\cdot10^{14}$	Eau douce	$10\ldots100$
Papier	$10^{15}\ldots10^{16}$	Eau de mer	0.3
Paraffine	$10^{14}\ldots10^{16}$	Latex	$(2\ldots14)\cdot10^{11}$
Huile de paraffine	10^{14}	Huile à transformateur	$(1\ldots1.5)\cdot10^{12}$
Pétrole	$10^{10}\ldots10^{12}$	Résine polyester	$(8\ldots14)\cdot10^{11}$

19.2/6 : Propriétés électriques d'isolants

Substance		$\rho(\Omega\text{m})$	ε		$10^{-3}\tan\delta$		U_d(kV/mm)
			(50 Hz)	(800 Hz)	(50 Hz)	(800 Hz)	
Phénoplastes							
	Résine (coulée)	$10^{9}\ldots10^{14}$	–	8	–	75	10
	Résine (pressée)	10^{13}	–	4.3	–	47	8
	Poudre de roches	$10^{9}\ldots10^{11}$	–	10	–	100	$5\ldots10$
Phénol-	fibres d'amiante	$10^{9}\ldots10^{11}$	12	$6\ldots20$	–	$30\ldots300$	$5\ldots15$
Formol-	sciure de bois	$10^{10}\ldots10^{12}$	–	9	–	70	$15\ldots20$
Aldéhyde	papier	$10^{9}\ldots10^{12}$	–	$6\ldots10$	–	$40\ldots100$	$8\ldots15$
	Papier	10^{19}	–	6	–	100	$1.5\ldots5.2$
	Tissus	10^{9}	$5\ldots7$	–	$50\ldots600$	100	–
Phénol-	minéraux	$10^{9}\ldots10^{11}$	–	4.8	–	$40\ldots150$	$1.6\ldots2.4$
Furfurol	sciure de bois	$10^{10}\ldots10^{12}$	–	$4.5\ldots80$	–	$100\ldots150$	$1\ldots2$
	tissus	$10^{9}\ldots10^{11}$	–	$405\ldots6$	–	$80\ldots200$	$1\ldots2$
Aminoplastes							
Urée	sciure de bois	$10^{13}\ldots10^{14}$	6.6	–	$20\ldots34$	$20\ldots30$	$2.8\ldots2.9$
Mélanine	cellulose	$10^{12}\ldots10^{14}$	$6.2\ldots7.6$	$6.2\ldots7.5$	$32\ldots60$	$13\ldots100$	10
Mélanine	amiante	10^{11}	$6.4\ldots10.2$	9	$70\ldots117$	70	–
Aniline	résine	10^{12}	$3\ldots4$	–	$10\ldots20$	–	1

suite du tableau sur la page suivante

Substance	$\rho(\Omega m)$	ε		$10^{-3} \tan\delta$		U_d(kV/mm)
		(50 Hz)	(800 Hz)	(50 Hz)	(800 Hz)	
Dérivés de la cellulose						
Cellulose	10^{15}	–	5.5	–	21	17
Acétate de cellulose (moyenne)	10^{15}	–	5.4	–	23	17
Acétate de cellulose (dure)	10^{15}	–	5.3	–	22	18
Acétate de cellulose (supérieure)	10^{16}	–	4.3	–	20	19
Acétobutyrate de cellulose	10^{16}	–	3.5	–	10	21
Nitrate de cellulose	$10^{12} \ldots 10^{13}$	–	$4 \ldots 9$	–	10	30
Éthylcellulose	$10^{13} \ldots 10^{14}$	–	$2.5 \ldots 3.5$	–	$5 \ldots 25$	$60 \ldots 100$
Benzylcellulose	10^{14}	–	3.5	–	50	40
Dérivés de l'éthylène						
Polyéthylène (haute pression)	10^{16}	2.3	2.3	0.4	0.4	60
Polyéthylène (basse pression)	10^{16}	–	2.3	–	$0.5 \ldots 1$	60
Polypropylène	10^{13}	–	2.3	–	0.5	70
Polystyrol	$10^{16} \ldots 10^{17}$	–	2.5	–	$0.2 \ldots 0.7$	$50 \ldots 55$
Polystyrol(Styrol)	10^{14}	–	2.8	–	4	40
Polystyrol(Acrylnitrile)	10^{14}	3	–	10	40	
Ester polyméthacrylique	10^{15}	$3.5 \ldots 4.5$	$3.5 \ldots 3.5$	$40 \ldots 60$	$30 \ldots 50$	15
Ester polyacrylique	10^{15}	–	3.5	–	40	15
Chlorure de polyvinyle	4	3.4	$20 \ldots 40$	$20 \ldots 40$	50	
Polycarbonate	10^{15}	3.5	3.2	0.5	1.65	100
Protéine						
Polyuréthane U_g	10^{14}	4	3.3	10	10	–
Polyamide 6	10^{12}	–	6	300	20	1.14
Polyamide 6 + GV	10^{12}	–	6.8	–	220	25
Polyamide 66	10^{12}	–	5.5	–	200	28
Polyamide 66 + GV	10^{12}	–	5.6	–	160	28
Polyamide 11	10^{14}	3.7	3.7	50	50	20
Polyamide 11 + GV	10^{15}	3.8	3.8	30	30	20
Polyamide 12	10^{13}	4.2	4.2	90	90	31
Polyamide 12 + GV	10^{12}	4.2	4.2	120	120	31
Corne synthétique	10^{5}	–	6	–	140	$1 \ldots 5$
Fluorocarbone						
Polyfluoromonochloréthylène	10^{16}	2.3	2.8	15	24	$20 \ldots 30$
Polytetrafluoréthylène	10^{15}	2	2	$0.2 \ldots 0.5$	$0.2 \ldots 0.5$	$20 \ldots 60$
Silicone						
Résine de silicone	10^{15}	3	3	$0.5 \ldots 1$	–	$20 \ldots 70$
Mastic de silicone	10^{14}	2.5	2.5	20	–	$20 \ldots 30$
Élastomères						
Néoprène	10^{5}	–	7.5	–	19	14
Buna S	10^{3}	–	$4 \ldots 5$	–	5	25
Perbunan	10^{3}	–	18	–	17	–
Substances naturelles modifiées						
Lave volcanique	10^{8}	4	4	80	80	6
Caoutchouc vulcanisé	10^{12}	$2.5 \ldots 5$	$2.8 \ldots 5$	50	50	3

19.2/7 : Propriétés électriques d'huiles pour transformateurs

Propriété	Huile à transfo.	Huile de ricin
ρ (Ωm)	$10^{14} \ldots 10^{15}$	$5 \cdot 10^{10} \ldots 5 \cdot 10^{12}$
ε_r(1MHz)	$2.1 \ldots 2.3$	$4.0 \ldots 4.4$
$\tan\delta$(1MHz)	$0.002 \ldots 0.005$	$0.01 \ldots 0.03$
U_d (kV/mm)	20	$14 \ldots 16$

19.2/8 : Quelques propriétés d'électrets

Composition	$NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$	KH_2PO_4	$NH_4H_2PO_4$
Point de Curie	$T_{C1} = 258$K; $T_{C2} = 295.5$K	123 K	147.9 K
Point de fusion (°C)	58	252.6	190
Masse volumique (g/cm^3)	1.775	2.34	2.311
Polarisation (μC/cm^2)	0.25	4.7	4.8

Composition	KH_2AsO_4	$NH_4H_2AsO_4$
Point de Curie (K)	95.6 T_C	216.1
Point de fusion (°C)	288	300
Masse volumique (g/cm^3)	2.85	1.803

Composition	$(CN_2H_6)AL(SO_4)_2 \cdot 12H_2O$	$(CH_2NH_2COOH)_3H_2SO_4$
Point de Curie	473	$320 \ldots 323$
Polarisation (μC/cm^2)	0.35	–

19.2/9 : Ferroélectricité de composés oxygénés à structure octaédrique

Composé	Formule	Structure	T_C(°C)	ε_r
Titanate de Barium	$BaTiO_3$	Pérovskite	120	$1700 \ldots 2000$ (à T_C $8 \ldots 10 \cdot 10^3$)
Tantalate de Lithium	$LiTaO_3$	Ilménite	> 450	
Niobate de Sodium	$NaNbO_3$	Pérovskite	640; 518; 480; 360	Antiferroélectrique ; 350
Hafniate de Plomb	$PbHfO_3$	Pérovskite	215; 163	Antiferroélectrique ; 100 ; à 215 °C : 1000
Niobate de Plomb	$PbNb_2O_3$	cubique	570	280;
Tantalate de Plomb	$PbTaO_6$	cubique	260	$300 \cdots 400$; à 260 °C 1100
Titanate de Plomb	$PbTiO_3$	Pérovskite	500	200; à 500 °C 3500
Zirconate de Plomb	$PbZrO_3$	Pérovskite	235	Antiferroélectrique ; 250 ; à 235 °C : 3750
Titanate de Strontium	$SrTiO_3$	Pérovskite	−250	

19.3 Tables pratiques pour l'électrotechnique

19.3/1 : Alliages résistifs

Alliage	$\rho(\Omega\, mm^2 m^{-1})$	$\alpha(K^{-1})$	temp. max. d'utilisation (°C)
Cupro-nickel (67% Cu, 30% Ni, 3% Mn)	0.4	0.0003	300
Manganine (86% Cu, 12% Mn, 2% Ni)	0.43	0.00001	300
Constantan (54% Cu, 45% Ni, 1% Mn)	0.5	±0.00003	400
Nichrome	1.0 ... 1.2	0.00003	1000
Fer au Chrome (65% Fe, 30% Cr, 5% Al)	1.4	−0.00006	1300

19.3/2 : Force électromotrice des étalons Weston

Température(°C)	F.é.m /V	Température(°C)	F.é.m (V)	Température(°C)	F.é.m /V
11	1.01874	17	1.01843	23	1.01817
12	10.1868	18	1.01839	24	1.01812
13	1.01863	19	1.01834	25	1.01807
14	1.01858	20	1.01830	26	1.01802
15	1.01853	21	1.01826	27	1.01797
16	1.01848	22	1.01822	28	1.01792

19.3/3 : Matériaux pour contacts

Matériau	Conductivité $(m\, \Omega^{-1} \cdot mm^{-2})$	Température de fusion (°C)	Propriétés
Cuivre écroui	56	1085	Un arc produit une couche d'oxyde, mauvaise conducteur ; bon marché
Argent pur	60	960	couche d'oxyde conductrice ; peu dur formation de sulfure ; faible résistance
Or pur	45.7	1063	chimiquement inactif ; mou ; les contacts collent facilement
Tungstène	18.2	3370	très dur ; cassant
Mercure	1.04	−38.9	sans entretien ; grande durée de vie ; chimiquement inactif ; toxique!
Charbon	0.03 ... 12	–	pas de couche d'oxyde, ne colle pas, autolubrifiant, utilisable jusqu'à 400 °C
Bronze d'Argent	30 ... 50	700 ... 1100	bonne élasticité
Argent-Cuivre	52 ... 56	920	pas d'arc électrique dur
Argent-Cadmium	16	880	Cadmium capable d'éteindre un arc

19.3/4 : Domaines de tensions en électrotechnique

Dénomination	Domaine de tension (V)	Application
Petits signaux	$0 < U \leq 42$	Électronique grand public, automatismes, jouets
Basse tension	$0 < U \leq 1000$	Réseaux de distribution domestique
Moyenne tension	$1000 < U \leq 30000$	Réseaux de distribution à l'air libre
Haute tension	$1000 < U \leq 110000$	Réseaux de distribution à haute tension à l'air libre
Très haute tension	$110000 < U \leq 5 \cdot 10^6$	Réseaux à longue distance à l'air libre

19.3/5 : Valeurs typiques de quelques tensions

	U (V)		U (V)
Signal d'antenne	$(5\ldots40)\cdot10^{-6}$	Tramway, Métro	$500\ldots800$
Influx nerveux	$(0.5\ldots5)\cdot10^{-2}$	Bougie d'allumage	$(5\ldots15)\cdot10^{3}$
Accumulateur au plomb	2	Lignes SNCF	$15\cdot10^{3}$
Alternateur de bicyclette	6	Tube à rayons X	jusqu'à $2\cdot10^{5}$
Courant domestique	220 ou 380	Machines électrostatiques	jusqu'à $25\cdot10^{6}$

19.3/6 : Perméabilité aux gaz κ de quelques verres au quartz

Le coefficient de perméabilité donne le volume de gaz en cm^3, qui, dans les conditions TPN et une différence de pression $1.33\cdot10^2$ Pa, traverse une épaisseur de verre de 1 mm par 1 cm^2 et par seconde.

Hélium		Hydrogène		Néon		Azote		Argon	
T(°C)	κ	T(°C)	κ	T(°C)	κ	T(°C)	κ	T(°C)	κ
-78	$2\cdot10^{-13}$	200	$2\cdot10^{-12}$	500	$1.4\cdot10^{-11}$	600	$6.5\cdot10^{-12}$	800	$1.6\cdot10^{-12}$
0	$6\cdot10^{-12}$	300	10^{-11}	600	$2.8\cdot10^{-11}$	700	$1.32\cdot10^{-11}$	900	$5.8\cdot10^{-11}$
100	$6\cdot10^{-11}$	400	$3.7\cdot10^{11}$	700	$4.2\cdot10^{-11}$	800	$4.3\cdot10^{-11}$		
200	$2\cdot10^{-10}$	500	$1.25\cdot10^{-10}$	900	$1.18\cdot10^{-10}$	900	$1.19\cdot10^{-10}$		
400	10^{-9}	700	$2.52\cdot10^{-10}$						
800	$5\cdot10^{-9}$	900	$6.4\cdot10^{-10}$						

19.3/7 : Action d'un courant électrique sur le corps humain

<table>
<tr><th>Niveau</th><th colspan="2">Réaction</th><th>Alternatif 15 ... 200Hz valeur efficace</th><th>Continu</th></tr>
<tr><td rowspan="4">I</td><td rowspan="4">augmentation de la pression artérielle
pas d'action sur la fréquence cardiaque
pas d'influence sur le système nerveux central</td><td>petites contractions musculaires dans les doigts</td><td>0.4 ... 4mA</td><td>1 ... 20mA</td></tr>
<tr><td>choc nerveux jusquà l'avant bras</td><td>0.8 ... 4.5mA</td><td>25 ... 40mA</td></tr>
<tr><td>relâchement de l'électrode encore possible</td><td>6 ... 22mA</td><td>40 ... 60mA</td></tr>
<tr><td>relâchement de l'électrode plus possible</td><td>8.5 ... 30mA</td><td>60 ... 90mA</td></tr>
<tr><td>II</td><td>pas de perte de connaissance, augmentation de la pression artérielle, tachycardie ;</td><td>arrêt cardiaque réversible pour des courants plus forts, perte de connaissance partielle</td><td>25 ... 80mA</td><td>80 ... 300mA</td></tr>
<tr><td>III</td><td colspan="2">palpitations cardiaque, perte de connaissance</td><td>80mA ... 8A</td><td>250mA ... 8A</td></tr>
<tr><td>IV</td><td>comme au niveau II, arythmie, arrêt cardiaque, augmentation de la pression artérielle ;</td><td>asphixie, brûlures, perte de connaissance</td><td>> 3A</td><td>> 3A</td></tr>
</table>

19.4 Propriétés magnétiques

19.4/1 : Susceptibilité magnétique des éléments

La table contient les susceptibilités magnétiques molaires $\chi_m = \chi \cdot M$ en unités SI.
M est la masse molaire de l'élément. Ces valeurs sont valables dans les conditions TPN.

Élément	χ_m	Élément	$\chi_m 10^{-9}$	Élément	$\chi_m 10^{-9}$	Élément	$\chi_m 10^{-9}$
Ag	−19.5	Dy	+98 000	Mo	+89.0	Sm	+1860.0
Al	+16.5	Er	+48 000	Na	+16.0	Sn (blanc)	+3.1
Am	+1000	Eu	+30 900	Nd	+5930	Sn (gris)	−37.0
Ar	−19.6	Gd	+185 000	Ne	−6.74	Sr	+92.0
As(α)	−5.5	Ga	−21.6	Nb	+195	S (α)	−14.9
As(β)	−23.7	Ge	−76.84	N_2	−12.0	S (β)	−15.4
As(γ)	−230	Hf	+75.0	Os	+9.9	Ta	+154.0
Au	−28.0	He	−1.88	O_2	+3449.0	Tc	+270.0
Ba	+20.6	Hg	−33.44	O_3	+6.7	Te	−39.5
Be	−9.0	Ho	+72 900	Pd	+567.4	Tb	+170 000
Bi	−280.1	H_2	−3.98	P(rouge)	−20.8	Tl	−50.9
B	−6.7	In	−107.0	P(noir)	−26.6	Th	+132
Br_2	−56.4	I_2	−88.7	Pr	+5530	Tm	+24 700
Cd	−19.8	Ir	25.6	Pt	+201.9	Ti	+153.0
Ca	+40.0	K	+20.8	Pu	+610.0	W	+59.0
C (diam.)	−5.9	Kr	−28.8	Re	+67.6	U	+409.0
C (graph.)	−6.0	La	95.9	Rb	+17.0	V	+255.0
Ce (β)	+2500	Pb	−23.0	Rh	+111.0	Xe	−43.9
Ce (γ)	+2270	Li	+14.2	Ru	+43.2	Yb	+67
Cs	+29.0	Lu	> 0.0	Sb	−99.0	Y	+187.7
Cl_2	−40.5	Mg	13.1	Se	−25.0	Zn	−11.4
Cr	+180	Mn (α)	+529.0	Sc	+315	Zr	−122.0
Cu	−5.46	Mn (β)	+483.0	Si	−3.9		

19.4/2 : Susceptibilité magnétique de composés inorganiques

Composé	$\chi_m 10^{-9}$	Composé	$\chi_m 10^{-9}$	Composég	$\chi_m 10^{-9}$	Composé	$\chi_m 10^{-9}$
Al_2O_3	−37.0	$CdBr_2$	−87.3	CsBr	−67.2	CuCl	−40.0
$Al_2(SO_4)_3$	−93.0	$CdCO_3$	−46.7	$CsBrO_2$	−75.1	$CuCl_2$	+1080
NH_3	−18.0	$CdCl_2$	−68.7	Cs_2CO_3	−103.6	Cu_2O	−20.0
$NH_4C_2H_3O_2$	−41.1	$CdCrO_4$	−16.8	CsO_2	+1534.0	CuO	+238.9
$(NH_4)_2SO_4$	−67.0	CdF_2	−40.6	Cs_2S	−104.0	Cu_3P	−33.0
$BaCO_3$	−58.9	CdO	−30.0	$Cr(C_2H_3O_2)_3$	+5104	CuP_2	−35.0
$Ba(BrO_3)_2$	−105.8	CdS	−50.0	$CrCl_2$	+7230	$CuSO_4$	+1330
BaO	−29.1	$CaCO_3$	−38.2	$CrCl_3$	+6890	Dy_2O_3	+89 600
BaO_2	−40.6	$CaCl_2$	−54.7	Cr_2O_3	+1960	$Dy_2(SO_4)_3$	+91 400
$BeCl_2$	−26.5	CaF_2	−28.0	CrO_3	+40.0	Dy_2S_3	+95 200
$Be(OH)_2$	−23.1	$Ca(OH)_2$	−22.0	$Cr_2(SO_4)_3$	+11 800	Er_2O_3	+73 920
BeO	−11.9	CaO	−15.0	$Co(C_2H_3O_2)_2$	+11 000	Er_2S_3	+77 200

suite du tableau sur la page suivante

Composé	χ_m 10^{-9}	Composé	χ_m 10^{-9}	Composé	χ_m 10^{-9}	Composé	χ_m 10^{-9}
Bi_2O_3	−83.0	CaO_2	−23.8	$CoBr_2$	+13 000	Eu_2O_3	+10 100
$BiCl_3$	−26.5	CO_2	−21.0	$CoCl_2$	+12 660	$EuSO_4$	+25 730
$Bi_2(CrO_4)_2$	+154.0	CO	−9.8	Co_2O_3	+4560	EuS	+23 800
$Bi_2(SO_4)_3$	−199.0	$CeCl_3$	+2490	Co_3O_4	+7380	Gd_2O_3	+53 200
$BiPO_4$	−77.0	CeO_2	+26.0	$Co_3(PO_4)_2$	28 110	Gd_2S_3	+55 500
$GaCl_3$	−63.0	$MgCl_2$	−47.4	$RbBr$	−56.4	Tl_3PO_4	−145.2
Ga_2O	−34.0	MgO	−10.2	Rb_2CO_3	−75.0	Tl_2SO_4	−112.6
Ga_2S	−36.0	$MgSO_4$	−50.0	$RbCl$	−76.0	$Th(NO_3)_4$	−108.0
GaS	−23.0	$MnBr_2$	+13 900	RbO_2	+1527.0	ThO_2	−16.0
Ga_2S_3	−80.0	$MnCO_3$	+11 400	Rb_2SO_4	−88.4	Tm_2O_3	+51 444
$GeCl_4$	−72.0	MnO	+4850	$RuCl_3$	+1998.0	$SnCl_4$	−115.0
GeO	−28.8	Mn_2O_3	+14 100	RuO_2	+162.0	SnO	−19.0
GeO_2	−34.3	Mn_3O_4	+12 400	Sm_2O_3	+1988.0	SnO_2	−41.0
GeS	−40.9	$MnSO_4$	+13 660	Se_2Br_2	−113.0	TiC	+8.0
GeS_2	−53.3	Hg_2O	−76.3	Se_2Cl_2	−94.0	$TiCl_2$	+570.0
$AuCl_3$	−112.0	Hg_2SO_4	−123.0	SeO_2	−29.6	$TiCl_3$	+1110.0
AuF_3	+74.0	$MoBr_3$	+525.3	SiC	−12.8	$TiCl_4$	−54.0
AuP_3	−107.0	$MoBr_4$	+520.0	SiO_2	−29.6	Ti_2O_3	+125.6
HfO_2	−23.0	Mo_3Br_6	−46.0	$AgBr$	−59.7	TiS	+432.0
Ho_2O_3	+88 100	Mo_2O_3	−42.0	Ag_2CO_3	−80.9	WC	+10.0
$Ho_2(SO_4)_3$	91 700	Mo_3O_8	+42.0	$AgCl$	−49.0	WO_2	+57.0
HCl	−22.6	Nd_2O_3	+10 200	Ag_2O	−134.0	WO_3	−15.8
$InBr_3$	−107.0	$Nd_2(SO_4)_3$	+9990	$AgMnO_4$	−63.0	UF_4	+3530.0
In_2O	−47.0	$NiCl_2$	+6145.0	Ag_3PO_4	−120.0	UF_6	+43.0
In_2O_3	−56.0	NiO	+660.0	$NaBr$	−41.0	UO	+1600.0
In_2S	−50.0	$NiSO_4$	+4005.0	Na_2CO_3	−41.0	UO_2	+2360.0
InS	−28.0	NiS	+190.0	$NaCl$	−30.3	UO_3	+128.0
In_2S_3	−98.0	N_2O	−18.9	$NAOH$	−16.0	VCl_2	+2410.0
$IrCl_3$	−14.4	NO	+1460	Na_2O	−14.5	VCl_3	+3030.0
IrO_2	+224.0	$OsCl_2$	+41.3	Na_2O_2	−28.1	VO_2	+270.0
$FeBr_2$	+13 600	$PdCl_2$	−38.0	Na_2HPO_4	−56.6	V_2O_3	+1976.0
$FeCO_3$	+11 300	PdH	+1077	Na_2SO_4	−52.0	V_2O_5	+128.0
$FeCl_2$	+14 750	Pd_4H	+2353	$SrBr$	−86.6	VS	+600.0
FeO	+7200	Pt_2O_3	−37.70	$SrCO_3$	−47.0	H_2O	−12.97
$FePO_4$	+11 500	PuF_4	+1760.0	$SrCl_2$	−63.0	H_2O (gelée)	−12.65
$FeSO_4$	+10 200	PuF_6	+173.0	SrO	−35.0	D_2O	−12.76
La_2O_3	−78.0	PuO_2	+730.0	SrO_2	32.3	D_2O (gelée)	−12.54
$Pb(C_2H_3O_2)_2$	−89.1	K_2CO_3	−59.0	$SrSO_4$	−15.5	Yb_2S_3	+18 300
$PbCO_3$	−61.2	KCl	−39.0	SO_2	−39.8	Y_2O_3	+44.4
$PbCl_2$	−73.8	$K_3Fe(CN)_6$	+2290.0	H_2SO_4	−39.8	$ZnCO_3$	−34.0
PbO	−42.0	$K_4Fe(CN)_6$	−130.0	Ta_2O_5	−32.0	$ZnCl_2$	−65.0
PbS	−84.0	KO_2	+3230.0	Tb_2O_3	+78 340	ZnO	−46.0
$LiC_2H_3O_2$	−34.0	KO_3	+1185	$TlBr$	−63.9	$ZnSO_4$	−45.0
Li_2CO_3	−61.2	K_4MnO_4	+20.0	Tl_2CO_3	−101.6	ZnS	−25.0
LiH	−10.1	PrO_2	+1930.0	$TlCl$	−57.8	ZrC	−26.0
$MgBr_2$	−72.0	ReO_2	+44.0	$TlCN$	−49.0	$Zr(NO_3)_4 \cdot 5H_2O$	−77.0
$MgCO_3$	−32.4	ReO_3	+16.0	Tl_2O_3	+76.0	ZrO_2	−13.8

19.4/3 : Alliages magnétiques

Alliage	Composition (en plus du fer)	Rémanence B_r(T)	Champ coercitif H_c(A/m)	Pérméabilité μ_r
Métaux magnétiques durs				
Acier au Carbone	1% C	1 ` 2	4000	–
Acier au Chrome	5.8% Cr; 1.1% C	0.992	5200	–
Acier au Tungstène	6% W	1.1	4800	–
Acier au Cobalt	36% Co; 4.8% Cr	0.93	18160	–
Vicalloy	3.5% Mn; 1.1% C; 30-40% Co; 14% V	0.97	24000	–
Acier magnétique KS	9% W; 1.5–3% Cr; 0.4-0.8% C	1	19200	–
Tromalite	25% Ni; 13% Al	0.4	60000	–
Métaux magnétiques doux				
Fer E (1× trempé)	–	1.08	30.4	14600
Fer E (2× tempé)	–	0.085	12	4900
Fer E	3.5% Si; forgé ss vide	0.3	7.68	19400
Permalloy	78.5% Ni; 3% Mo	–	< 8	-100000
Nicalloy	40% Ni	1.4	24	10000
Hyperm 50	50% Ni	1.5	6.8	28000
Mumétal	76% Ni; 5% Cu; 2% Co	0.8	5	100000

19.5 Propriétés ferromagnétiques

Dans les tables qui suivent, on utilise :

- θ_C : température de Curie
- σ_S : aimantation de saturation, spécifique relative à l'unité de masse à la température de 20 °C.
- σ_0 : aimantation de saturation, spécifique extrapolée à $T = 0$ K
- n_B : magnéton effectif, défini par $n_B = \dfrac{\sigma_0 M_0}{N_A \mu_B}$
  (M_0 masse molaire, N_A nombre d'Avogadro et μ_B magnéton de Bohr.)

19.5/1 : Éléments ferromagnétiques

Z		θ_C(°C)	$\sigma_S 10^{-7}(\mathrm{T \cdot m^3/kg})$	$\sigma_0 10^{-7}(\mathrm{T \cdot m^3/kg})$	n_B
26	Fe	770	218.0	221.9	2.219
27	Co	1120	161	162.5	1.715
28	Ni	358	54.39	57.5	0.604
64	Gd	20	0	253.5	7.55
65	Tb	−50	0	173.5	9.24
66	Dy	−186	0	235	10.20
67	Ho	−253	0	290	10.34
68	Er	−253	–	–	8.0
69	Tm	−235	–	–	7.0

19.5/2 : Alliages binaires à base de Fer

Élément	Conc. %	θ_C °C	σ_S $10^{-7}\frac{T \cdot m^3}{kg}$	n_B (/atome)	Élément	Conc. %	θ_C °C	σ_S $10^{-7}\frac{T \cdot m^3}{kg}$	n_B (/atome)
Al	7.1	756	207	2.05	Os	8.1	–	158	1.97
	19.7	664	164	1.74		12.5	–	50	0.69
	24.9	441	134	1.29	Pd	5.5	754	203	2.19
	26.0	494	149	1.40		40.0	–	129	1.89
Au	6.2	767	174	2.08		74.8	≈ 250	45	0.97
	10.5	768	154	202	Pt	8.1	–	191	2.36
Co	20	950	236	2.42		12.4	–	177	2.43
	33	970	238	2.52		24.8	164	104	2.23
	50	980	233	2.42		50.0	–	32	0.75
	75	870	203	2.14	Rh	10.0	–	209	2.32
	80	910	184	1.94		25.0	714	192	2.39
Cr	17.7	678	196	1.70		40	624	161	2.26
	47.5	483	90	0.98	Ru	7.0	660	200	2.18
	68.8	268	35	0.53		12.5	–	105	1.17
Ir	4.0	750	200	2.25	Sn	2.3	768	208	2.18
	15.0	–	120	1.67		6.0	768	197	2.16
Ni	10	750	217	2.26	Si	8.3	720	204	2.00
	20	720	209	2.22		15.9	653	174	1.67
	40	330	152	1.82		23.5	587	141	1.32
	60	560	136	1.45	V	5.9	815	204	2.09
	80	560	98	1.04		10.6	805	184	1.91

19.5/3 : Alliages binaires à base de Nickel

Élément	Conc. %	θ_f °C	σ_S $10^{-7}\frac{T \cdot m^3}{kg}$	n_B (/atome)	Élément	Conc. %	θ_f °C	σ_S $10^{-7}\frac{T \cdot m^3}{kg}$	n_B (/atome)
Al	2.0	293	47.1	0.54	Si	3.7	234	40.3	0.48
Au	3.4	321	46.0	0.58		6.8	117	23.7	0.36
Cr	1.7	298	49.8(–123 °C)	0.53		8.8	19	–	0.28
	6.7	72	25.4(–123 °C)	0.30	Sn	2.7	234	401	0.49
Mo	1.9	266	42.3	0.51		9.0	225	9.9	0.30
	4.2	120	23.1	0.37	Ta	3.6	–	–	0.41
Mn	25[1]	470	90	1.02		6.3	–	–	0.28
Pd	12.1	330	–	0.60	Ti	4.8	207	34.5	0.43
	45.2	217	–	0.57		10.3	30	–	0.22
	91.3	-116	–	–	W	2.1	270	39.2	0.49
Pt	9.1	245	37.7	0.55		3.9	150	19.9	0.34
	25.0	86	16.4	0.44	Y	5.5	67	15.3	0.29
	45.0	-71	–	0.25	Zn	4.1	300	45.3	0.52
Sb	7.5	23	12.6	0.24		10.8	157	25.4	0.37

[1] amorphe

19.5.1 Anisotropie magnétique

L'anisotropie magnétique est déterminée par le travail d'aimantation. Il est différent selon les directions d'aimantation. L'axe de facile aimantation est définie par le minimum du travail d'aimantation. Le travail d'aimantation, dans les principaux systèmes cristallins, a la forme :

a) Cristaux cubiques

$$E_a = K_1(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2) + K_2\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 + K_3(\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2)^2 + \dots$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont les cosinus directeurs par rapport à l'axe de la maille élémentaire.

b) Cristaux hexagonaux

$$E_a = K_1 \sin^2\phi + K_2 \sin^4\phi + K_3 \sin^6\phi + K_4 \sin^6\phi \sin^6\psi + \dots$$

ϕ est l'angle entre la direction d'aimantation et l'axe [001].
ψ est l'angle entre la direction d'aimantation et l'axe c.

c) Cristaux tétragonaux

$$E_a = K_1 \sin^2\vartheta + K_2 \sin^4\vartheta + K_3 \cos^2\alpha \cos^2\beta + \dots$$

ϑ est l'angle entre la direction d'aimantation et l'axe tétragonal [001].
α et β sont les angles entre la direction d'aimantation et les axes tétragonaux [100] et [010].

Les coefficients d'anisotropie sont fonction de la température.

19.5/4 : Coefficients d'anisotropie K_1 et K_2 d'alliages Fe-Co, Fe-Ni et Fe-Co-Ni.

Composition At-%			20 °C		200 °C		300 °C		380 °C	
			K_1	K_2	K_1	K_2	K_1	K_2	K_1	K_2
Fe	Co	Ni	$10^2 \frac{J}{m^3}$							
100			420	150	300	22				
70	30		102	160						
60	40		45	−110						
50	50		−68	−390						
30	70		−433	50						
50		50	33	−180	25	−82	18	−7		
35		65	15	−70	12	−40	10	−32		
30		70	7	−17	2	−4	0	0		
10		90	−7	−23	−2	−10	0	−8		
		100	−34	53	5	20				
	65	35	−258	150						
	40	60	−108	−40						
	20	80	−4	8						
	10	90	16	−40						
	3	97	−10	9						
50	10	40	61	−160	19	4			7	−60
25	25	50	4	16	4	2			−3	22

suite du tableau sur la page suivante

Composition			20 °C		200 °C		300 °C		380 °C	
At-%			K_1	K_2	K_1	K_2	K_1	K_2	K_1	K_2
Fe	Co	Ni	$10^2 \frac{J}{m^3}$							
50	10	40	61	−160	19	4			7	−60
25	25	50	4	16	4	2			−3	22
15	25	60	−26	34	−10	−45			−3	−15
10	40	50	−72	−4	−54	41			−9	−102
10	30	60	−38	−80	−17	−50			−12	−37
10	20	70	−29	17	−25	70			−14	29
10	10	80	−2	−39	−2	−20			−2	6

19.5/5 : Direction de facile, moyenne et difficile aimantation dans les cristaux cubiques

K_1	+	+	+	−	−	−
K_2	$-\frac{9}{4}K_1$ ⋮ $+\infty$	$-9K_1$ ⋮ $-\frac{9}{4}K_1$	$-\infty$ ⋮ $-9K_1$	$-\infty$ ⋮ $\frac{9}{4}\|K_1\|$	$\frac{9}{4}\|K_1\|$ ⋮ $9\|K_1\|$	$9\|K_1\|$ ⋮ $+\infty$
facile	[100]	[100]	[111]	[111]	[110]	[110]
moyenne	[110]	[111]	[100]	[110]	[111]	[100]
difficile	[111]	[110]	[110]	[100]	[100]	[111]

19.6 Ferrites

19.6/1 : Propriétés magnétiques de quelques ferrites de type spinelle

Paramètre	Fe_3O_4	$MgFe_2O_4$	$MnFe_2O_4$	$CuFe_2O_4$
Température de Curie /°C	585	440	300	455
Moment magnétique/molécule (μ_B)	4.1	1.1	4.6	2.3 (cub.) 1.3 (tétrag.)
Aimantation de saturation spécifique /(10^{-7} Tm^3/kg)	92	27	80	25
Coefficient d'anisotropie K_1 /(10^2 J/m^3)	− 10.7	− 2.5	− 2.8	− 6.3
Coefficient d'anisotropie K_2 /(10^2 J/m^3)	− 2.8	–	-0.2	–
	$CoFe_2O_4$	$NiFe_2O_4$	$Li_{0.5}Fe_{2.5}O_4$	
Température de Curie /°C	520	585	670	
Moment magnétique/molécule (μ_B)	3.94	2.3	2.6	
Aimantation de saturation spécifique (10^{-7} Tm^3/kg)	80	50	65	
Coefficient d'anisotropie K_1 /(10^2 J/m^3)	290	− 6.2	− 8.4	
Coefficient d'anisotropie K_2 /(10^2 J/m^3)	–	− 3	− 0.2	

19.7 Antiferromagnétisme

19.7/1 : Propriétés antiferromagnétiques
Le tableau présente les températures de Néel de la transition de phase, la température $-\Theta$ de la loi de Curie-Weiss et la susceptibilité magnétique molaire de quelques composés antiferromagnétiques.

Composé	T_N K	$-\Theta$ K	$\chi_M\ 10^{-3}$ (cm^3/mol)	Composé	T_N K	$-\Theta$ K	$\chi_M\ 10^{-3}$ (cm^3/mol)
Ti_2O_3	248	2000	0.24	αVS	1040	3000	0.066
VO_2	343	13.60	0.66	$LaCrO_3$	295	600	1.9
MnO	120	610	6	$\beta-$MnS	165;110	528	6
MnS_2	48;20	592	7.1	$MnSe_2$	75	483	6.6
MnF_2	72	113	25	MnF_3	47	− 8	75
$MnCO_3$	32	64.5	43	$LaMnO_3$	131;100	− 40	48.4
$RbMnF_3$	54	190	17.7	$MnUO_4$	12	8	200
FeO	198;186	190	8	FeS	≈ 597	917	2.2
$FeCl_2$	23	− 48	320	$FeBr_2$	11	− 6	160
FeP_2	250	17	1.18	$FeSn_2$	380	230	1.95
$FeTiO_3$	68;56	− 17	61	$YFeO_3$	643	–	2.2
$FeSO_4$	≈ 22	30.5	78.5	Fe_2SiO_4	65	150	20.4
CoF_2	37.7	52.7	50	$CoCl_2$	24.9	− 20	60
$\beta CoSO_4$	12	52	62	$CoUO_4$	12	52	62
NiF_2	73.2	100	20	$NiCl_2$	52	− 67	110
$NiSO_4$	37	82	15	$CuSO_4$	34.5	77.5	12
GdP	15	2	480	GdAg	145	82	40
$\alpha-$VSe	163	2570	0.62	$FeCO_3$	35;20	14	17
$ZnCr_2Se_4$	22	115	340	$LaFeO_3$	738	480	12
MnSe	247	740	19	CoO	328;291	280	5.3
$MnTe_2$	≈ 80	528	6.8	$KCoF_3$	114;109	125	8.5
$MnAu_3$	145	− 200	77.5	$Nb_2Co_4O_9$	30;27	10	133
$KMnF_3$	88.3	238	17.7	$NaTiO_3$	23	55	23.4
Mn_2SiO_4	50	163	18.8	EuTe	11;9.7	7	440
FeF_2	78	15.9	117	GdIn	28	66	73.5
FeI_2	10	23	85				

19.8 Mobilité d'ions

19.8/1 : Mobilité μ d'ions dans l'air à 18 °C et pression normale.

Gaz	μ en $10^{-2}m^2/Vs$	
	Ions positifs	Ions négatifs
Hydrogène	5.7	8.6
Hélium	5.1	6.3
Argon	1.37	1.7
Oxygène	1.33	1.8
Azote	1.29	1.82
Benzène	0.18	0.21

Partie IV Thermodynamique

20 Équilibres et variables d'état

La Thermodynamique a pour objet la description macroscopique des propriétés de la matière en termes de grandeurs physiques spécifiques ainsi que l'établissement de relations universelles entre ces grandeurs.

20.1 Systèmes, phases et équilibres

20.1.1 Systèmes

Système thermodynamique : collection arbitraire d'objets dont les propriétés peuvent être décrites d'une manière unique et complète par des **variables d'état** (volume, énergie, nombre de particules, entropie, etc.).

▷ En général, le système est confiné dans une enceinte dont les parois assurent une séparation avec le milieu extérieur ; les parois, très diverses, peuvent même être immatérielles, comme c'est le cas du confinement d'un plasma chaud par un champ magnétique.

20.1.1.1 Systèmes isolés

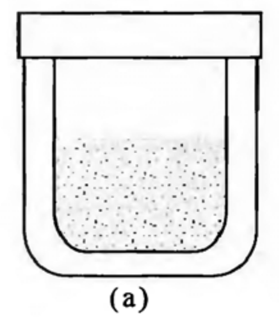
Système isolé : système qui n'a aucune interaction avec le milieu extérieur, ce qui implique des parois imperméables à tout échange d'énergie ou de matière avec l'extérieur.

▷ Dans la pratique, l'isolation d'un système est difficilement réalisable car toute cloison est plus ou moins conductrice de la chaleur. Ainsi le confinement magnétique d'un plasma dans le vide n'évite pas qu'un transfert de chaleur par rayonnement se produise vers l'extérieur.

● Dans un système isolé, l'énergie totale E (somme des énergies mécaniques, électriques, etc.) est constante.

▷ L'énergie et le nombre de particules sont des quantités conservées et définies pour tout système isolé (ensemble dit *microcanonique*).

Le nombre N de particules et le volume V sont, avec l'énergie, des grandeurs spécifiques d'un système isolé.



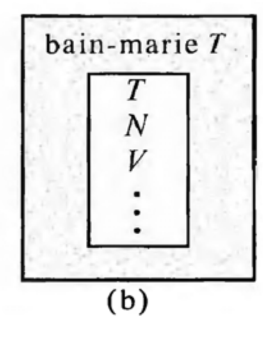


Fig. 20.1 : *Systèmes thermodynamiques. En* (a), *système isolé du milieu extérieur ;* (b), *système fermé en équilibre avec un bain de chaleur.*

Vase de Dewar : récipient à double paroi de verre argenté sous vide assurant l'isolation thermique d'un système (voir Fig. 20.1 (a)).

■ Les bouteilles thermos sont réalisées sur ce principe.

▷ Pour conserver des liquides à très basse température, on utilise des cryostats comportant plusieurs vases de Dewar emboîtés.

20.1.1.2 Systèmes fermés

Système fermé : un système pour lequel seulement des échanges d'énergie avec le milieu extérieur sont possibles, mais pas des échanges de matière.

■ Système dans un bain de chaleur (Fig. 20.1 (b)).

▷ L'énergie du système n'est plus conservée, seul l'est son nombre de particules (ensemble dit *canonique*).

L'énergie du système fluctue dans ses échanges avec l'extérieur. Cependant pour un système fermé en équilibre avec son environnement, la valeur moyenne de son énergie peut être reliée à la température du système ou de l'environnement.

La **température** est une caractéristique d'un état macroscopique.

20.1.1.3 Systèmes ouverts

Système ouvert : système qui échange de l'énergie ainsi que de la matière avec le milieu extérieur (Fig. 20.2).

▷ L'énergie et le nombre de particules ne sont plus des grandeurs conservées.

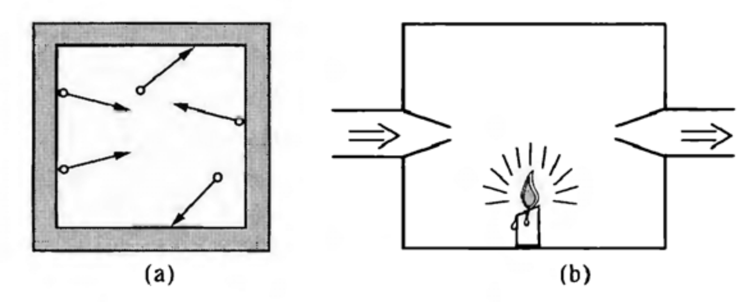


Fig. 20.2 : *Systèmes ouverts formés, en* (a), *de particules dans une enceinte et, en* (b), *d'un fluide en écoulement.*

Si le système ouvert est en équilibre avec son environnement, seules les valeurs moyennes de l'énergie et du nombre de particules sont connues et à prendre en compte (ensemble dit *macrocanonique* ou *grand canonique*).

▷ Une relation analogue à celle liant l'énergie moyenne et la température existe entre le nombre moyen de particules et une quantité appelée **potentiel chimique** μ.

Température T et **potentiel chimique** μ peuvent être utilisés pour caractériser un système ouvert.

20.1.2 Phases

1. Systèmes homogène et hétérogène

Système homogène : système dont les propriétés sont les mêmes en tout point.

■ Une enceinte contenant de l'air sec dans les conditions normales est un système homogène.

Système hétérogène : système dont les propriétés changent d'une manière discontinue en traversant des surfaces séparatrices.

■ Une enceinte contenant de l'eau, de la vapeur d'eau et de l'air est un système hétérogène.

2. Phase et interface

Phase : partie homogène d'un système hétérogène.

Interface de phase : surface séparatrice entre deux phases.

■ Dans une bouilloire fermée contenant de l'eau, de la vapeur d'eau et de l'air, la surface de l'eau est l'interface. Il y a une phase gazeuse (la vapeur et l'air) et une phase liquide (l'eau).

▷ Le plus souvent, les propriétés macroscopiques du système dépendent des dimensions (et de la forme) des interfaces de phase.

■ La bouilloire d'eau, de vapeur d'eau et d'air. Les propriétés macroscopiques sont différentes selon que l'eau est accumulée dans le fond ou constituée de gouttelettes (brouillard).

20.1.3 Équilibres

1. État d'équilibre

État macroscopique d'un système isolé qui apparaît de lui-même après un laps de temps suffisamment long.

● À l'équilibre, les grandeurs macroscopiques ne varient plus au cours du temps.

▷ Les variables thermodynamiques sont définies et mesurables seulement à l'équilibre.

▷ Souvent, on dira encore d'un système qu'il est en équilibre thermodynamique si son évolution est très lente.

■ Le soleil perd continuellement de l'énergie par rayonnement et n'est donc pas en équilibre. Cependant les conditions d'utilisation des lois de la thermodynamique seront considérées comme satisfaites, l'évolution étant jugée lente.

Un **équilibre global** impose que les variables thermodynamiques ne varient pas au cours du temps pour toutes les phases du système.

Équilibre thermique local : système qui n'est pas en équilibre global, mais dont les volumes partiels se comportent comme des systèmes équilibrés.

▷ Dans ce cas, les variables intensives sont seulement définies localement.

■ Étoile, avec des zones à différentes températures.
La Terre, avec ses divers climats.

2. État stationnaire

État pour lequel les variables thermodynamiques ne varient pas au cours du temps, mais qui reçoit de l'énergie (Fig. 20.3).

▷ Ce n'est pas le cas des états équilibrés.

■ Une bouilloire sur une plaque électrique chaude. Après quelque temps, un état d'équilibre apparaît pour le contenu dont la température ne varie plus. Cependant on continue de fournir de l'énergie électrique pour éviter le refroidissement de la bouilloire qui cède de l'énergie (chaleur) à l'environnement.

▷ Il est caractéristique d'un état stationnaire de n'être pas isolé et de recevoir de l'énergie aussi bien que d'en fournir.

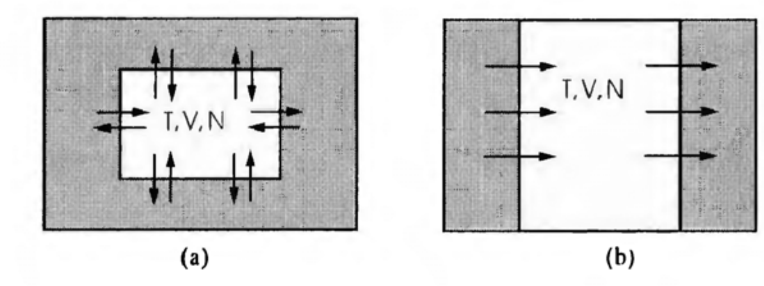


Fig. 20.3 : *Systèmes thermodynamiques en équilibre* (a) *et stationnaire* (b).

3. Équilibre thermique

Équilibre qui apparaît quand deux sous-systèmes d'un système isolé, en contact énergétique (sans échange de matière), ont cessé depuis longtemps tout échange d'énergie entre eux.

▷ Les deux sous-systèmes doivent être eux-mêmes auparavant en équilibre.

Il s'ensuit une modification de leurs variables thermodynamiques propres jusqu'à ce qu'un nouvel état d'équilibre s'instaure après une durée suffisante.
On a alors :

$$T_1 = T_2$$

4. Principe zéro de la thermodynamique

Loi empirique concernant l'équilibre thermique et qui s'énonce :

● Si deux systèmes sont en équilibre thermique avec un troisième, ils sont aussi en équilibre thermique entre eux.

▷ Ce principe est à la base du concept de température.

5. Équilibre mécanique

Équilibre qui est réalisé pour deux systèmes délimités si les forces qui agissent sur leurs parois se contrebalancent.

▷ Il s'ensuit donc l'égalité des pressions des deux systèmes :

$$p_1 = p_2$$

Si les deux systèmes ne sont pas en équilibre mécanique, il se produit un changement de leurs volumes jusqu'à ce que leurs pressions s'égalisent.

6. Équilibre chimique

Équilibre atteint, pour des systèmes caractérisés par un nombre variable de particules, quand est spécifié le fait que les particules qui entrent et sortent sont en nombre égal.

▷ De la même façon que sont distingués équilibre thermique et équilibre chimique, on différenciera un système stationnaire d'un système en écoulement.

À l'équilibre chimique, les potentiels chimiques de deux systèmes sont égaux :

$$\mu_1 = \mu_2$$

▷ Les conditions d'équilibre chimique et mécanique sont souvent réalisées par l'égalité des pressions partielles des constituants.

■ Si un système de dioxyde de carbone et d'eau est mis sous pression, alors le dioxyde de carbone se dissout jusqu'à l'égalité des pressions de vapeur du dioxyde gazeux et du dioxyde dissous. Avec l'équilibre entre les particules, est réalisée l'équilibre des pressions.

7. Critères d'équilibre

L'équilibre n'est réalisable que sous certaines conditions.
Selon la nature des conditions externes (→ *Stabilité thermodynamique*) et le caractère d'isolation du système, les conditions d'équilibre s'expriment, dans les cas suivants, par :

état équilibré isolé-isochore ⇔ **max. d'entropie** S
état équilibré isotherme-isobare ⇔ **min. d'enthalpie libre** G
état équilibré isotherme-isochore ⇔ **min. d'énergie libre** F
état équilibré adiabatique-isobare ⇔ **min. d'enthalpie** H

Potentiels thermodynamiques — ML^2T^{-2}

$$U = TS - pV + \mu N$$
$$F = U - TS$$
$$H = U + pV$$
$$G = U + pV - TS$$

Symbole	Unité	Dénomination
U	J	énergie interne
F	J	énergie libre
H	J	enthalpie
G	J	enthalpie libre
p	Pa	pression
V	m^3	volume
T	K	température
S	J / K	entropie
μ	J	potentiel chimique
N	1	nombre de particules

20.2 Grandeurs thermodynamiques

20.2.1 Notions

1. Grandeur thermodynamique

Quantité physique, donc mesurable, qui définit précisement une propriété macroscopique du système.

■ Température, pression, potentiel chimique, charge, moment dipolaire, indice de réfraction, viscosité, composition chimique, taille des interfaces de phase, etc.

▷ Les variables microscopiques comme, par exemple, les positions et les quantités de mouvement des particules, ne sont pas des grandeurs thermodynamiques.

● Les grandeurs thermodynamiques ne peuvent être définies et mesurées qu'à l'équilibre.

2. Équation d'état

ou **équation caractéristique** : fonction reliant diverses grandeurs thermodynamiques entre elles.

En général, l'équation d'état ne peut être déterminée qu'empiriquement.

▷ Des polynômes sont souvent utilisés pour relier les variables d'état, comme dans l'expression du viriel (→ *Développement du viriel*) ; les coefficients en sont déterminés empiriquement.

▷ Les équations d'état obtenues empiriquement sont en bon accord avec l'expérience sur un domaine souvent très restreint de valeurs des variables d'état.

■ L'équation d'état d'un gaz parfait (→ *Gaz parfait*) s'applique aux gaz réels mais seulement s'ils sont à très basses densités. À de plus hautes pressions, on utilise des équations modifiées comme celle de Van der Waals ou du développement du viriel.

3. Variable d'état

Grandeur thermodynamique susceptible de modification dans un système.

● Pour définir un état thermodynamique d'une manière unique, on choisit un nombre minimum de variables d'état indépendantes ; les autres sont surabondantes et s'expriment en fonction des variables choisies.

▷ Le nombre requis de variables d'état indépendantes est relié au nombre de phases du système. (→ *Règle des phases de Gibbs*)

On distingue en général deux types de variables, les unes extensives, les autres intensives.

20.2.1.1 Variables thermodynamiques extensives

Variable thermodynamique extensive : grandeur proportionnelle à la quantité de matière d'un système.

■ Le volume, l'énergie totale, la masse totale sont des variables extensives.

● Si on double la masse, toutes les variables extensives sont doublées.

Une variable thermodynamique est extensive si elle est aussi proportionnelle à toute variable connue comme extensive.

▷ La proportionnalité ne s'applique que si les variables non-extensives restent constantes.

Le produit d'une variable extensive et d'une variable intensive est une variable extensive.

■ La charge totale (var. extensive) est le produit d'une densité de charge (var. intensive) par le volume (var. extensive).

Système hétérogène : les variables extensives du système total s'obtiennent par addition des variables correspondantes des phases individuelles.

■ Le volume d'eau, de vapeur et d'air d'une bouilloire s'obtient à partir des volumes des phases liquide et gazeuse.

▷ La variable extensive la plus caractéristique en thermodynamique (et en mécanique statistique) est l'entropie.

20.2.1.2 Variables thermodynamiques intensives

Variable thermodynamique intensive : grandeur indépendante de la masse et non additive pour les différentes phases du système.

▷ Les variables thermodynamiques intensives peuvent avoir des valeurs distinctes dans les diverses phases, mais pas nécessairement.

■ La densité, la température, l'indice de réfraction sont des variables intensives.

▷ Le produit de deux variables intensives est une variable intensive. Le quotient de deux variables extensives est une variable intensive.

■ La densité est le quotient de la masse totale et du volume.

▷ Les variables intensives peuvent être définies localement, donc varier dans l'espace.

■ La densité de l'atmosphère terrestre décroît continûment quand l'altitude augmente.
La pression dans l'eau des océans augmente avec la profondeur.

▷ La détermination de la dépendance spatiale des variables d'état intensives demande soit des données complémentaires (par exemple, de l'hydrodynamique), soit d'être complétée sous la forme d'équations d'état plus élaborées.

20.2.1.3 Variables massiques et molaires

1. Variable massique

Variable intensive a, définie comme le quotient d'une variable extensive A, et de la masse m :

$$a = A/m$$

■ La chaleur massique q est la quantité de chaleur par kilogramme.

▷ Dans beaucoup de manuels de physique ou de chimie, la variable massique (ou spécifique) signifie le quotient de la variable par le nombre de moles. Cette appelation correspond en fait à la définition d'une variable molaire (voir ci-dessous).

● En technologie, les variables massiques sont écrites en petites lettres.

La plupart des variables extensives sont indiquées par des majuscules et la variable massique afférente par la minuscule correspondante.

■

variable extensive		variable massique	
quantité de chaleur	Q	chaleur massique	q
capacité calorifique	C	capacité calorifique massique	c
entropie	S	entropie massique	s
volume	V	volume massique	v
enthalpie	H	enthalpie massique	h

2. Variable molaire

Variable a_{mol}, définie comme le quotient d'une variable extensive A_{mol}, et du nombre n de moles :

$$a_{\text{mol}} = A_{\text{mol}}/n$$

■ La capacité calorifique molaire c_{mol} est la capacité calorifique par mole.

Dans ce manuel, les variables molaires sont spécifiées, comme ci-dessus, avec l'indice "mol".
Relation entre variables massique et molaire :

$$A_{\text{mol}} = a \cdot \frac{m}{n} = a \cdot M \qquad \text{où } M \text{ est la masse molaire.}$$

▷ En technologie, les indices m ou M sont fréquemment utilisés.
Dans beaucoup de manuels de physique ou de chimie, le concept de variable massique est utilisé pour celui de variable molaire, laquelle est alors écrite sans l'indice mol.

20.2.2 Température

Température T, kelvin (K) en unités SI : variable intensive commune à des systèmes d'être en équilibre thermique les uns avec les autres.

▷ Deux systèmes qui ne sont pas en équilibre thermique l'un avec l'autre ont des températures distinctes.

La température est reliée à l'énergie cinétique moyenne des particules.

■ Dans les gaz, la vitesse moyenne des molécules est directement reliée à la température.
Dans les solides, les oscillations des molécules du réseau constituent le mouvement thermique.

▷ Les oscillations des électrons causent le **bruit thermique** qui restreint la sensibilité des appareils de mesure.

▷ La notion de température peut aussi être étendue à un système dont l'équilibre thermique n'est pas entièrement réalisé. Ceci n'est possible que si le système total est formé de sous-systèmes pour lesquels une **température locale** (spatialement dépendante) est assignable.

20.2.2.1 Unités de température

Le symbole pour la **température thermodynamique** (dite absolue) est T.

▷ En technologie, on exprime la température mesurée, soit en kelvin par T, soit en degré Celsius par t ou θ.

a) Kelvin : unité physique de température thermodynamique.
Symbole : 1 kelvin = 1 K

● Le kelvin est le produit par $1/273,16$ de la différence des températures du point triple de l'eau et du zéro absolu : $T_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$ K.

b) Degré Celsius, en °C : unité de température d'usage courant. Le degré Celsius est une division par 100 (échelle centigrade) de l'intervalle de température séparant les points de fusion (0 °C) et d'ébullition (100 °C) de l'eau à la pression normale (1013,25 hPa).

▷ Les échelles Celsius et Kelvin diffèrent de 273,15 degrés.

Conversion kelvin – degré Celsius			Θ
	Symbole	Unité	Dénomination
t (en °C) $= T$ (en K) $- 273,15$ T (en K) $= t$ (en °C) $+ 273,15$	t T	°C K	temp. en degré Celsius temp. en kelvin

● **Les différences de température** ont mêmes valeurs dans les deux échelles Celsius et Kelvin :

$$(t_1 - t_2) \text{ (en °C)} = (T_1 - T_2) \text{ (en K)}$$

c) Degré Réaumur, symbole °R : subdivision en 80 unités de la différence de température entre les points de fusion (0 °R) et d'ébullition (80 °R) de l'eau, à la pression normale.

$$t \text{ (en °C)} = T \text{ (en K)} - 273,15 = 1,25\,T \text{ (en °R)} \qquad T \text{ (en °R)} = 0,8\,t \text{ (en °C)}$$

d) Fahrenheit, symbole °F : encore en usage dans les pays anglophones, en particulier les USA ; l'échelle Fahrenheit est définie à partir des températures de fusion d'un mélange glace-sel ($0\ °F \approx -17,8\ °C$) et du corps humain ($100\ °F \approx 37,8\ °C$).

$$T\ (\text{en °F}) = \frac{9}{5}\, t\ (\text{en °C}) + 32 \qquad t\ (\text{en °C}) = \frac{5}{9} T\ (\text{en °F}) - 17,7$$

$$T\ (\text{en °F}) = \frac{9}{5} T\ (\text{en K}) - 459,67 \qquad T\ (\text{en K}) = \frac{5}{9} T\ (\text{en °F}) + 255,372$$

e) Rankine, symbole R : équivaut à une échelle Fahrenheit dont le point zéro serait celui de l'échelle Kelvin.

$$T\ (\text{en R}) = \frac{9}{5} T\ (\text{en K}) = \frac{9}{5} t\ (\text{en °C}) + 491,67 \qquad T\ (\text{en K}) = \frac{5}{9} T\ (\text{en R})$$

▷ En physique atomique ou nucléaire, la constante de Boltzmann est souvent fixée à $k = 1$ et la température donnée en **électron-volt** (eV). Dans ce cas :

$$1\,\text{eV} = 11604\,\text{K} \cdot k \qquad 1\,\text{K} = 8,617 \cdot 10^{-5}\,\text{eV}/k$$

20.2.2.2 Points de référence

Points de référence des températures : points servant à fixer l'échelle de température. Ils sont déterminés par les propriétés thermométriques d'une matière (point triple, points d'ébullition et de solidification à une pression donnée).

Points de référence ITS-90 : valeurs précises de températures définies par l'*International* **T***emperature* *Scale* (1990) et entérinées par la Conférence Internationale des Poids et Mesures. Des valeurs figurent dans le tableau suivant :

État d'équilibre	Matière	T (K)	t (°C)
point triple	hydrogène	13,8033	-259,3467
point d'ébullition*	hydrogène	17,042	-256,11
point d'ébullition	hydrogène	20,28	-252,87
point triple	néon	24,5561	-248,5939
point triple	oxygène	54,3584	-218,7916
point d'ébullition	oxygène	90,19	-182,96
point triple	eau	273,16	0,01
point d'ébullition	eau	373,15	100,00
point de solidification	zinc	692,677	419,527
point de solidification	argent	1234,93	961,78
point de solidification	or	1337,33	1064,18

* à la pression de 333,306 hPa

Les points de fusion et d'ébullition sont donnés à la pression normale de 1013,25 hPa (exception faite du point d'ébullition de l'hydrogène qui est défini, comme indiqué, à une pression plus faible).

▷ D'autres températures caractéristiques sont utilisables comme points de calibration et peuvent être trouvées dans la Table 23.1/2, page 782.

Température normale, température fixée à :

$$T_n = 273,15\,\text{K} = 0°\text{C}$$

Conditions normales : correspondent à la température normale et à la pression normale de 1 atm $= 1013,25$ hPa $= 1,01325$ bar.

20.2.2.3 Mesure des températures

1. Appareils de mesure

Les méthodes de mesure des températures découlent du principe zéro de la thermodynamique : le corps de mesure doit être en équilibre thermique avec le système à mesurer ; une grandeur thermosensible aisément observable traduira cet état d'équilibre.

Thermomètre : système qui possède une propriété, mesurable, de dépendre de la température.

▷ Les méthodes de mesure ont pour base profonde l'équation d'état qui implique une relation entre la température et d'autres observables.

Grandeurs thermosensibles observables :

- le volume d'un liquide (**thermomètre à liquide**)
- le volume d'un gaz (**thermomètre à gaz**)
- la dilatation de deux rubans de métaux différents (**bilame**)
- la dilatation de barres céramiques (utilisation pour contrôler la température des fours à moufle)
- la déformation de cônes céramiques en métallurgie (**cône de Seger**)
- dans le domaine des mK, l'alignement du spin nucléaire du ^{60}Co dans un monocristal et l'anisotropie dans l'émission gamma qui en résulte
- la tension apparaissant entre les extrémités en contact de deux fils de métaux différents (**thermocouple**)
- la couleur de la lumière émise par un solide ou un gaz (**pyromètre**)
- la résistance de certains conducteurs (**thermomètre résistif**) de coefficient thermique soit positif (CTP), soit négatif (CTN) (→ *Électricité, dépendance en température de la résistance*)

Quelques-uns de ces thermomètre sont représentés sur la Fig. 20.4.

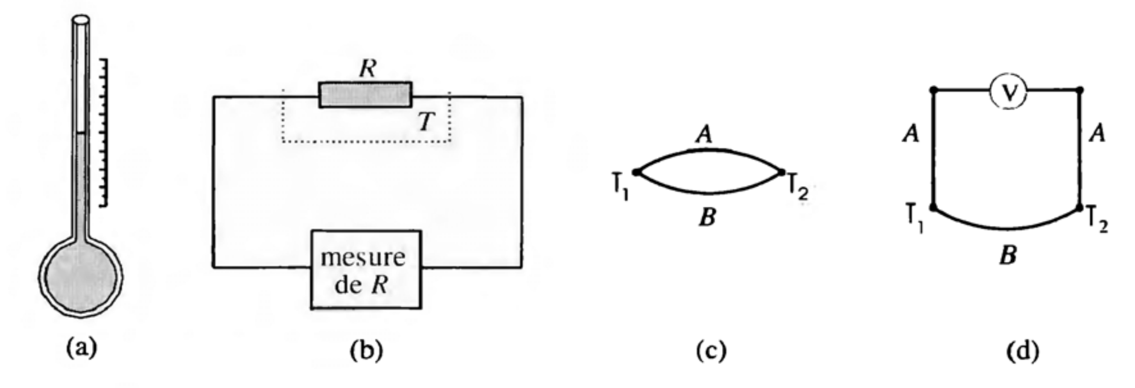


Fig. 20.4 : *Représentation schématique de divers thermomètres. En* (a) *: le thermomètre à liquide (changement du volume d'un liquide). En* (b) *: le thermomètre résistif (variation de la conductivité électrique). En* (c) *: le bilame (dilatation différente de deux métaux). En* (d) *: le thermocouple (variation de la tension électrique entre deux soudures métalliques).*

2. Mise en œuvre des thermomètres

Le domaine de sensibilité de thermomètres courants est indiqué sur la Fig. 20.5.

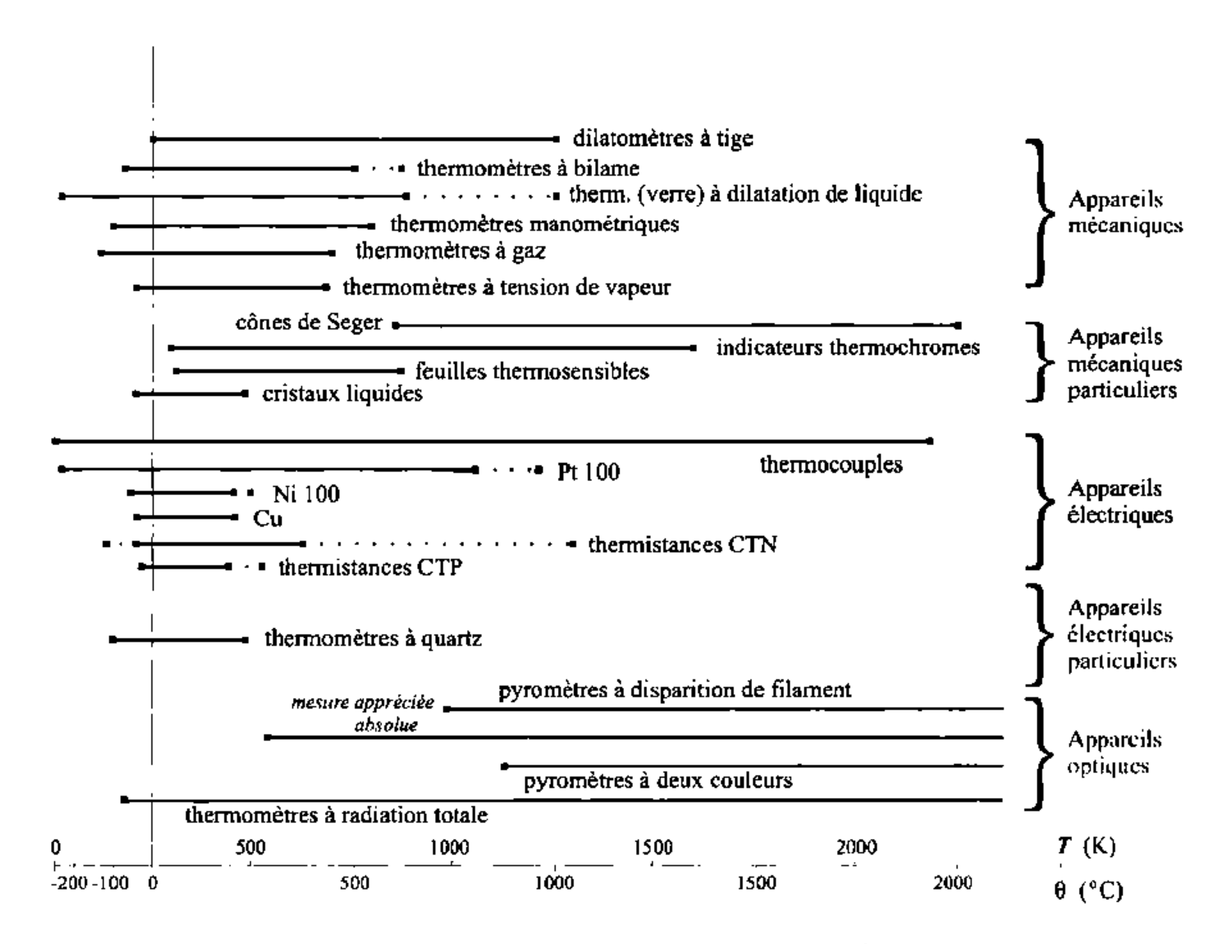


Fig. 20.5 : *Domaine d'utilisation de thermomètres.*

3. Calibrage des thermomètres

Pour calibrer des thermomètres entre les divers points fixes, les appareils suivants sont utilisés :
Thermomètre à résistance de platine spécialement utilisé dans le domaine des températures de 13,81 à 903,89 K.
Le domaine est subdivisé en cinq parties ; l'interpolation par des polynômes permet de déterminer la température à partir de la valeur mesurée de la résistance.
Thermocouple platine/platine rhodié : constitué de platine et d'un alliage de platine à 10% de rhodium, pour le domaine de températures allant de 903,89 à 1234,93 K.
Une relation quadratique entre température et tension thermoélectrique permet les interpolations.
Pyromètre spectral au-dessus de 1234,93 K. Ici, la loi radiative de Planck-Stefan est utilisée.

20.2.2.4 Échelle Kelvin et zéro absolu

La température et le volume d'un gaz à très faible pression sont étroitement reliés.

- Le volume d'une quantité définie d'un tel gaz (à une pression donnée) peut être utilisé comme une mesure de la température, offrant ainsi d'autres possibilités de calibrer des thermomètres ; cette technique est mise en œuvre dans le thermomètre à gaz (Fig. 20.6).

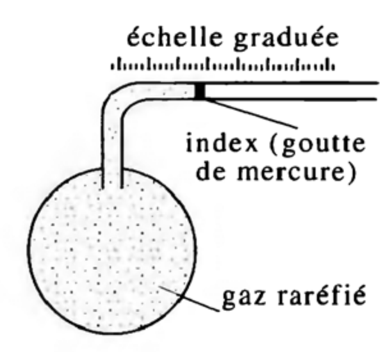


Fig. 20.6 : *Schéma de principe du thermomètre à gaz.*

1. Température thermodynamique

La température thermodynamique T est déterminée par l'intermédiaire du volume d'un gaz raréfié ($\rightarrow$ *Loi des gaz parfaits*) selon la relation :

$$T = T_0 \frac{V}{V_0}$$

▷ Pression et nombre de particules doivent rester constants.

2. Échelle Kelvin

Échelle de température pour laquelle le point triple de l'eau est utilisé comme point fixe. Au point triple de l'eau, la pression est de 619,6 Pa et la température de 273,16 K. La graduation en degrés découle de l'**échelle Celsius**, historiquement antérieure.

▷ Les échelles Kelvin et Celsius ont une correspondance simple :
T (en K) $= t$(en °C) $- 273,15$

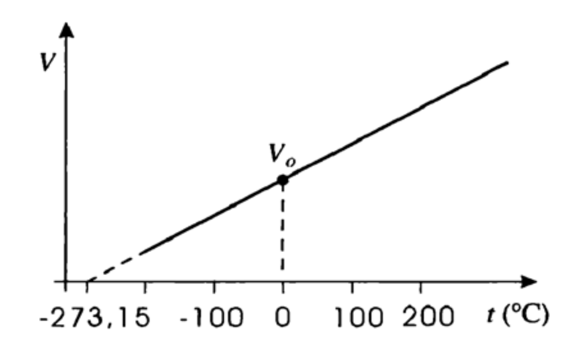


Fig. 20.7 : *Diagramme (V, T) d'un gaz raréfié ; l'air peut être liquéfié à 80 K, l'hydrogène à 13 K et l'hélium à 4 K.*

3. Zéro absolu

Extrapolation de la relation température-volume au volume $V = 0$ (Fig. 20.7).

▷ L'hypothèse d'une réduction arbitraire possible du volume d'un gaz est importante dans le contexte des gaz parfaits.

▷ Le volume d'un gaz à très basse température ne peut être mesuré en pratique, parce que le gaz se liquéfie.

Au zéro absolu, c'est à dire à la température $T = 0\,\mathrm{K} = -273,15$°C, les atomes et les molécules ne se déplacent plus ; leur mouvement est *gelé*.

- Il est cependant impossible d'atteindre le zéro absolu ; aucun système ne peut être amené à exactement $T = 0$ K.

▷ Ceci est une formulation du troisième principe de la thermodynamique.

20.2.3 Pression

Pression p, Pa (pascal) en unités SI : intensité d'une force agissant perpendiculairement à une surface d'aire A.

$\text{Pression} = \dfrac{\text{composante normale de la force}}{\text{surface}}$				$\mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$p = \dfrac{F_\perp}{A}$	p	Pa	pression	
	$F_\perp$	N	composante normale de la force	
	A	m^2	aire de la surface	

▷ Plus rigoureusement, la pression est le produit scalaire du vecteur force par le vecteur unité normal à la surface sur laquelle s'exerce l'action, divisé par l'aire de cette surface :

$$p = \frac{\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_A}{A}$$

À l'échelle microscopique, la pression est due aux chocs des particules sur la surface, lui transmettant ainsi une certaine quantité de mouvement.

▷ La pression est la quantité de mouvement moyenne transférée à la surface par unité de temps et de surface.

La pression peut se relier microscopiquement à la densité et donc au volume. (→ *Loi de Boyle-Mariotte*)

[M] **Manomètre de McLeod** : manomètre à mercure pour la mesure absolue de faibles pressions gazeuses, opérant sur la détermination d'un volume ; voir son principe Fig. 20.8.

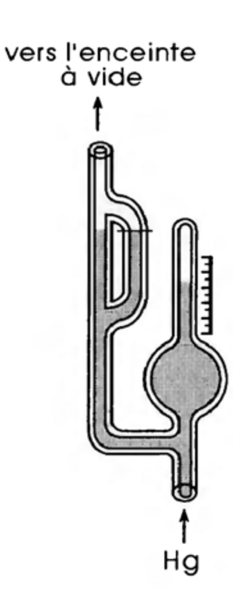


Fig. 20.8 : *Manomètre de McLeod. Une faible quantité du gaz, dont la pression est à déterminer, est confinée dans un petit volume par une compression isotherme de rapport connu ; l'application de la loi de Boyle-Mariotte permet de remonter à la pression initiale du gaz.*

20.2.3.1 Unités de pression

1. Unité SI de pression

Le **pascal**, abréviation Pa, est l'unité SI de pression :

$$1\,\text{Pa} = 1\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1\,\frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$$

En pratique, la pression atmosphérique normale étant voisine de 10^5 Pa, le bar a été introduit comme unité commode d'utilisation.

Le **bar** est une unité pratique égale à 10^5 Pa.

▷ En météorologie, le millibar est remplacé maintenant par le hectopascal (**h**Pa).

$$1\,\text{Pa} = 10^{-5}\,\text{bar} \qquad 1\,\text{bar} = 10^5\,\text{Pa} = 10\,\frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

2. Pression et énergie

La pression a les mêmes dimensions qu'une densité d'énergie.

● La pression peut être reliée simplement à la densité d'énergie.

■ Pour un gaz parfait, la densité d'énergie (cinétique) moyenne $e = \rho_N W_{\text{cin}}$ est le produit de la densité ρ_N des particules et de l'énergie cinétique moyenne W_{cin}. On a :

$$p = \frac{2}{3}\,e$$

3. Autres unités de pression

Des **unités, non légales,** continuent d'être utilisées dans la pratique, ainsi que dans beaucoup d'ouvrages techniques ; en voici une liste :

Pression atmosphérique normale : pression moyenne de l'air à la surface de la terre (altitude zéro) ; ajustée à 1 atm.

Atmosphère normale, atm : unité de pression d'usage courant, égale à la pression exercée par une colonne de mercure de 0,760 m, à 0°C, dans le champ de pesanteur normal $g = 9,806\,65\,\text{m/s}^2$. (→ ***Mécanique, poids***)

$$1\,\text{atm} = 1,0332\,\frac{\text{kpf}}{\text{cm}^2} = 101\,325\,\text{Pa}$$

Atmosphère technique : at, unité admise temporairement en technologie, correspond à la pression exercée par une force de 1 kgf sur une surface de 1 cm^2.

▷ Le kilogramme-force (kgf) ou kilogramme-poids (kgp), mesure le poids d'une masse de 1 kg dans le champ de pesanteur normal.

$$1\,\text{at} = 1\,\frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 1\,\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}g = 98\,066,5\,\text{Pa} = 0,980\,665\,\text{bar} \qquad 1\,\text{bar} = 1,02\,\text{at}$$

▷ 1 at correspond à la pression d'une colonne d'eau de 10 m de hauteur.

Millimètre d'eau, mm eau : unité pratique de pression valant :

$$1\,\text{mm d'eau} = 10^{-4}\,\text{at} = 9,806\,65\,\text{Pa}$$

Le **torr** correspond à la 760ème partie de 1 atm.

$$1\,\text{atm} = 760\,\text{torr} = 101\,325\,\text{Pa}$$
$$1\,\text{torr} = 133,32\,\text{Pa} \approx 1\,\text{mm Hg}$$
$$1\,\text{bar} = 0,987\,\text{atm} = 750,06\,\text{torr}$$

4. Pression et conditions normales

Pression normale : point de référence pour la définition de diverses propriétés des substances.

● La pression normale est celle de 1 atm.

$$p_n = 101\,325\,\text{Pa} = 1\,\text{atm} = 760\,\text{torr}$$

■ En général, les points de fusion et d'ébullition sont donnés à la pression normale.

Conditions normales : fixent la température à sa valeur normale ($T = 273,15\,\text{K} = 0°\text{C}$) et la pression à sa valeur normale ($p_n = 1\,\text{atm} = 1,013\,25\,\text{bar}$).

20.2.3.2 Mesure de pression

1. Appareils de mesure

La mesure d'une pression s'effectue en général en déterminant la force qui s'exerce sur une surface donnée.

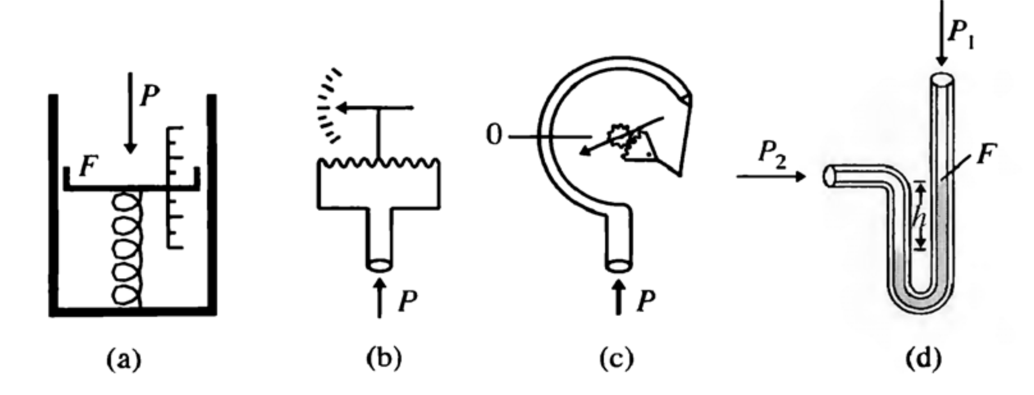


Fig. 20.9 : *Schémas de principe d'appareils de mesure de pression. La pression, exercée sur une surface (piston, par exemple), est compensée par un contre-poids. Celui-ci peut être réalisé par la force – soit* (a) *de tension d'un ressort à boudin, – soit* (b) *de déformation élastique d'une membrane, – soit* (c) *de redressement d'un tube métallique spiralé (manomètre de Bourdon), – soit* (d) *de pesanteur d'une colonne de liquide ouverte sur une pression connue.*

M La **balance de pression** et le **manomètre à piston** mesurent la force qui s'exerce sur un piston disposé dans un cylindre creux. La force est équilibrée par un poids ou la tension d'un ressort.

Le **manomètre à liquide** est utilisé de préférence aux basses pressions. Le liquide confiné est, par exemple, de l'alcool, de l'eau, du mercure, ou un liquide spécial caractérisé à la fois par une basse tension de vapeur, une densité indépendante de la température et de bonnes propriétés de capillarité.

Les **thermovalves** ou les **jauges de Penning** utilisent les propriétés de **conductibilité thermique** ou **électrique** des gaz pour mesurer des pressions proches du vide.

Une représentation de quelques appareils de mesure de pression est schématisée par la Fig. 20.9.

2. Utilisation des appareils

La Fig. 20.10 donne une liste non-exhaustive de divers instruments de mesure de pression et de leurs domaines d'application.

jauge de Pirani
j. à thermocouple
manomètre à thermistance
jauge de contrainte
jauge de Mc Leod
manomètre à gaz
manomètre à compression pour hautes pressions
manomètre différentiel
micro-manomètre
colonne de mercure
jauge de Penning
manomètres en cascade
jauge d'ionisation à déflecteur d'ions
jauge d'ionisation à source radioactive
microbalance
manomètre à air libre
manomètre à piston
balance à haute pression
jauge à viscosité
capsule barométrique
jauge à fil chaud
manomètre à ressort
manomètre piézoélectrique
manomètre de Bourdon
manomètre à tube d'acier

10^{-12} 10^{-11} 10^{-10} 10^{-9} 10^{-8} 10^{-7} 10^{-6} 10^{-5} 10^{-4} 10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 10^{0} 10^{1} 10^{2} 10^{3} 10^{4} bar

ultra-vide
vide poussé
vide moyen
vide grossier
pression moyenne
pression élevée
haute pression

Fig. 20.10 : *Domaines d'application de quelques instruments de mesure de pression.*

3. Pression locale

▷ La pression peut être aussi définie localement dans un sous-système.

M Pour la détermination d'une pression locale p, une petite surface est introduite dans le système ; on mesure la force exercée par le système sur un côté de la surface. Sur l'autre côté, mécaniquement isolée du système, s'exerce une pression $p_\circ$ de référence. La pression différentielle $p - p_\circ$ et la force exercée sont directement reliées.

20.2.4 Nombre de particules, quantité de matière et nombre d'Avogadro

1. Nombre de particules

N : quantité sans dimension décrivant le nombre de particules présentes dans le système.

Selon la norme DIN, le symbole X peut aussi être utilisé, notamment si des mélanges de différentes sortes de particules sont considérés.

▷ Dans les systèmes macroscopiques, N est un très grand nombre et est exprimé, de préférence, sous la forme d'un multiple du nombre d'Avogadro.

2. Nombre d'Avogadro

ou **constante d'Avogadro** N_A : mesure d'une quantité macroscopique de matière.

● Le nombre d'Avogadro représente le quotient de la masse a en gramme et de la même masse a en unité u (voir ci-après) d'un certain nombre de particules (atomes, molécules, ions, etc.) :

$$N_A = \frac{a(\mathrm{g})}{a(\mathrm{u})} = 6,022\,136\,7 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$$

3. Unité de masse atomique

Notée u (anciennement amu, *atomic mass unit*) : particulièrement appropriée pour la mesure de la masse des particules, définie comme le douzième de la masse de l'isotope ^{12}C.

$$1\ \mathrm{u} = \frac{1}{12} m_{^{12}\mathrm{C}} = 1,661 \cdot 10^{-27}\mathrm{kg}$$

▷ Cette définition a un intérêt pratique évident du fait que les masses atomiques sont déterminées d'une façon très précise par les spectromètres de masse lesquels peuvent être facilement calibrés avec des composés de carbone.

Pour des applications pratiques, par exemple dans des calculs de stœchiométrie en chimie, on identifie la masse atomique au nombre de masse (= nombre de protons et de neutrons figurant dans le tableau périodique pour l'élément considéré), exprimé en unité u.

■ La masse de la molécule d'oxygène est : $m(O_2) = m(2\times{}^{16}O) = 2 \cdot 16\ \mathrm{u} = 32\ \mathrm{u}$.

▷ En toute rigueur, il faudrait prendre en compte les énergies de liaison des électrons dans le calcul de la masse d'un atome. (→ *Physique nucléaire, théorie de la relativité*)

4. Quantité de matière et volume molaire

La **quantité de matière** n, mol en unités SI, est donnée par le nombre de particules en multiple du nombre d'Avogadro.

mol, unité SI, pour un nombre N_A de particules (atomes, molécules) d'un corps simple ou composé.

● La mole (mol) est l'unité de base d'une quantité de matière. 1 mol est la quantité de matière d'un système qui contient autant de particules qu'il y a d'atomes dans 0,012 kg de ^{12}C.

Volume molaire : volume d'une mole de matière dans les **conditions normales** (température : 0°C et pression : 1 atm = 1,013 25 bar).

■ Dans les conditions normales, un gaz parfait a un volume molaire d'environ 22,41 litres.

5. Nombre de Loschmidt

Nombre de particules d'un gaz parfait contenu dans le volume molaire, dans les conditions normales.

$$\text{Nombre de Loschmidt} = \frac{\text{nombre d'Avogadro}}{\text{volume molaire}}$$			L^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination
$N_L = \frac{N_A}{V_m} = 2,68675 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m}^{-3}$	N_L	m^{-3}	nombre de Loschmidt
	N_A	mol^{-1}	nombre d'Avogadro
	V_m	$\mathrm{m}^3/\mathrm{mol}$	volume molaire

6. Masse molaire

Masse d'une mole de matière.

Masse molaire = nbre d'Avogadro × masse d'une particule			MN^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$M = N_A \cdot m_N$	M	kg / mol	masse molaire
	N_A	mol^{-1}	nombre d'Avogadro
$= \dfrac{m}{n}$	m_N	kg	masse d'une particule
	m	kg	masse totale
	n	mol	quantité de matière

a) **Masse molaire d'un mélange** : masse d'une mole du mélange.

$$M_{\text{mélange}} = \frac{m_{\text{mélange}}}{n_{\text{mélange}}} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots}$$

Ceci peut être calculé à partir des masses molaires M_i de chaque composé i :

$$M_{\text{mélange}} = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2 + n_3 M_3 + \ldots}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots} = x_1 M_1 + x_2 M_2 + x_3 M_3 + \ldots$$

(La fraction molaire x_i est définie ci-après.)

■ La masse molaire de l'air est $M_{\text{air}} = 28,96\,\text{g/mol}$. Les principaux composants de l'air sont l'azote $M_{N_2} = 28\,\text{g/mol}$ et l'oxygène $M_{O_2} = 32\,\text{g/mol}$.

b) **Masse molaire d'un élément** : quantité pouvant être trouvée dans le tableau périodique des éléments.

▷ Règle pratique : nombre de masse = masse molaire en gramme.

c) **Masse molaire d'un composé** : s'obtient par addition de ses composés (atomes) :

$$M(A_a B_b C_c) = aM(A) + bM(B) + cM(C)$$

■ La masse molaire de l'acide sulfurique (H_2SO_4) est

$$M = 2 \cdot 1\,\text{g/mol} + 32\,\text{g/mol} + 4 \cdot 16\,\text{g/mol} = 98\,\text{g/mol}$$

Pour les masses molaires de différents gaz, voir Table 23.2/4, page 791.

7. Quantité de matière

Nombre de moles de cette matière.

Quantité de matière = $\dfrac{\text{nombre de particules}}{\text{nombre d'Avogadro}}$			N
	Symbole	Unité	Dénomination
$n = \dfrac{N}{N_A}$	n	mol	quantité de matière
	N	1	nombre de particules
$n = \dfrac{m}{M}$	M	kg / mol	masse molaire
$N_A = 6,022\,1367 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$	N_A	mol^{-1}	nombre d'Avogadro
	m	kg	masse d'une particule

8. Constante des gaz parfaits

Constante universelle égale au produit du nombre d'Avogadro par la constante de Boltzmann.

Cste gaz parfaits = nbre d'Avogadro × cste de Boltzmann			$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$R = N_A \cdot k$ $k = 1,380\,66 \cdot 10^{-23}$ J/K	R k N_A	J / K mol J / K mol^{-1}	cste des gaz parfaits cste de Boltzmann nombre d'Avogadro

La constante universelle des gaz parfaits a pour valeur :

$$R = 8,314 \text{ J/(mol K)}$$

9. Fraction molaire

x_i, quantité sans dimension : rapport du nombre d'un type de particules i au nombre total de particules.

$$x_i = \frac{N_i}{N_1 + N_2 + \ldots + N_n}, \qquad \sum_i x_i = 1$$

● L'addition de toutes les fractions molaires donne 1.

▷ Selon la norme DIN, la minuscule x_i est utilisée pour la fraction molaire, tandis que X_i est réservé à un ensemble de particules de même nature.

La fraction molaire est une variable intensive pouvant prendre des valeurs différentes selon la phase du système.

10. Fraction massique

ξ_i, quantité sans dimension : rapport de la masse totale d'un type de particule à la masse totale de toutes les particules. Elle est égale au produit de la fraction molaire et du rapport de la masse molaire d'un type de particules à la masse molaire du système total. (→ *Gaz composés*)

$$\xi_i = \frac{m_i}{m_{\text{tot}}} = x_i \frac{M_i}{M_{\text{tot}}}$$

20.2.5 Entropie

1. La variable extensive d'entropie

Entropie S, joule par kelvin (JK^{-1}) en unités SI : variable extensive qui mesure l'état de désordre microscopique d'un système.

La variation d'entropie peut être définie, dans une transformation réversible, comme le quotient de la variation de la quantité de chaleur transférée au système par la température absolue de celui-ci. (→ *Cycle*

de Carnot)

Variation d'entropie $= \dfrac{\text{quantité de chaleur échangée}}{\text{température}}$				$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\Delta S = \dfrac{\Delta Q}{T} = \dfrac{C\,\Delta T}{T}$	S	J / K	entropie	
	Q	J	quantité de chaleur	
	T	K	température	
	C	J / K	capacité calorifique	

▷ Ainsi, seules des différences d'entropie sont définies, et non la valeur de l'entropie elle-même.

La valeur absolue de l'entropie peut être toutefois obtenue en appliquant le troisième principe de la thermodynamique qui affirme que :

● L'entropie est nulle au zéro absolu :

$$S_{T=0} = 0\ \mathrm{J/K}$$

2. Considérations microscopiques

Macro-état : état macroscopique caractérisé par les propriétés globales du système.

Micro-état : état microscopique déterminé par les propriétés des particules individuelles.

■ Si un certain nombre de boules est réparti entre deux boîtes, alors le macro-état est déterminé par le nombre de boules dans chaque boîte, tandis que le micro-état est concerné par la question de savoir quelle boule est dans quelle boîte.

Un même macro-état peut être réalisé par de nombreuses configurations microscopiques (ou **complexions**) et offre donc de nombreuses possibilités de réalisation.

■ Soit un système de trois particules avec des vitesses différentes bien définies : l'état, dans lequel la particule 1 a la plus grande vitesse et la particule 3 la plus petite, est microscopiquement différent de l'état dans lequel la particule 1 a la vitesse la plus petite et la particule 2 la plus grande. Macroscopiquement, il n'y a pas de différence.

● L'état macroscopique le plus probable est celui qui offre le plus de configurations microscopiques.

■ Soit un réservoir rempli de gaz. Une molécule quelconque du gaz peut se trouver dans une des moitiés, gauche ou droite, du réservoir. Un état où les molécules se retrouveraient toutes dans la moitié gauche, a-t-il des chances de se réaliser ? Ce cas, bien qu'énergétiquement permis, n'a qu'une seule possibilité de réalisation. Par contre l'état, caractérisé par une répartition uniforme des molécules à gauche et à droite, possède de très grandes possibilités de réalisation : il est donc le plus probable.

● **État d'équilibre** : état offrant le plus de possibilités de réalisation microscopique.

▷ Puisque l'entropie augmente avec le nombre de configurations microscopiques, l'entropie est maximum à l'équilibre.

3. Loi de Boltzmann sur l'entropie

L'entropie est proportionnelle au logarithme népérien du nombre de micro-états selon :

Entropie $\propto$ ln(configurations microscopiques)			$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$S = k \ln \Omega$	S	J / K	entropie
$k = 1,380\,66 \cdot 10^{-23}$ J/K	k	J / K	constante de Boltzmann
	Ω	1	nombre de micro-états

20.3 Potentiels thermodynamiques

20.3.1 Principle d'entropie maximum - d'énergie minimum

Un **système isolé** tend vers un état d'équilibre caractérisé par une **entropie maximum.**

▷ C'est une conséquence du deuxième principe de la thermodynamique.

Cet état a le plus de possibilités de réalisation microscopique.

● L'entropie d'un système isolé ne peut que croître au cours de toute transformation (irréversible), jusqu'à atteindre un maximum correspondant à un état d'équilibre.

En mécanique et électrodynamique, les systèmes, n'étant pas isolés, tendent à réduire leur énergie.

■ Les systèmes mécaniques tendent vers un minimum local d'énergie potentielle.

● Un système non-isolé à entropie constante, tend vers un minimum en énergie.

Ces deux lois sont reliées à travers les principes de la thermodynamique.

20.3.2 Énergie interne comme potentiel thermodynamique

1. Définition

Énergie interne U, joule (J) en unités SI : variable extensive qui exprime l'énergie totale contenue dans un système. Pour un système isolé, c'est une fonction d'état.

L'énergie interne s'écrit, en effet, comme une fonction de **variables extensives** indépendantes comme l'entropie S, le volume V et le nombre de particule N qui décrivent l'état du système. Si la dépendance de l'énergie interne U est connue en fonction des variables $(S, V, N, \ldots)$, alors toutes les autres variables thermodynamiques du système peuvent en être déduites.

Forme différentielle de l'énergie interne :

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N + \ldots$$

Les variables intensives de température T, de pression p et de potentiel chimique μ, peuvent être écrites comme des fonctions de variables extensives naturelles.

▷ Les variables intensives s'expriment sous la forme de différentielles partielles d'une variable extensive (les autres variables étant supposées constantes).

Température, pression, potentiel chimique, comme dérivées de U			
	Symbole	Unité	Dénomination
$T = \left.\frac{\partial U}{\partial S}\right\|_{V,N,...}$	U	J	énergie interne
	T	K	température
$-p = \left.\frac{\partial U}{\partial V}\right\|_{S,N,...}$	S	J / K	entropie
	p	Pa	pression
	V	m^3	volume
$\mu = \left.\frac{\partial U}{\partial N}\right\|_{S,V,...}$	μ	J	potentiel chimique
	N	1	nombre de particules

- Pour des systèmes adiabatiques isochores, l'énergie interne est minimum :
  $\mathrm{d}U \leq 0$ pour $V = \text{cste}, Q = 0$

2. Énergie interne d'un gaz parfait

Pour un gaz parfait formé de particules non en rotation :

$$U = \frac{3}{2}NkT$$

Dans le cas d'une transformation isochore d'états :

Énergie interne $\propto$ température			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
	U	J	énergie interne
$U = c_V mT$	c_V	J / (K kg)	capacité cal. massique à volume cste
	m	kg	masse
	T	K	température

20.3.3 Entropie comme potentiel thermodynamique

Entropie S, joule par kelvin (JK^{-1}) en unités SI : fonction d'état pour un système isolé, comme l'est l'énergie interne. Elle est une mesure du nombre de micro-états possibles d'un système.

Forme différentielle de l'entropie :

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{T}\mathrm{d}U + \frac{p}{T}\mathrm{d}V - \frac{\mu}{T}\mathrm{d}N - \ldots$$

Si la dépendance de l'entropie S est connue en fonction des variables indépendantes U, V, N, alors toutes les autres variables thermodynamiques du système peuvent en être déduites à partir des principes de la thermodynamique.

Énergie interne, pression, potentiel chimique, comme dérivées de S			
	Symbole	Unité	Dénomination
$\frac{1}{T} = \left.\frac{\partial S}{\partial U}\right\|_{V,N,...}$	U	J	énergie interne
	T	K	température
$\frac{p}{T} = \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right\|_{U,N,...}$	S	J / K	entropie
	p	Pa	pression
$-\frac{\mu}{T} = \left.\frac{\partial S}{\partial N}\right\|_{U,V,...}$	V	m^3	volume
	μ	J	potentiel chimique
	N	1	nombre de particules

- Pour des systèmes isochores d'énergie interne constante, l'entropie S est maximum :
  $dS = 0$ pour $V = \text{cste}$, $U = \text{cste}$

20.3.3.1 Entropie d'un gaz parfait

L'entropie d'un gaz parfait dont les molécules ne sont pas en rotation, est :

$$S(T,p) = Nk\left\{s_0(T_0,p_0) + \ln\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{5/2}\left(\frac{p_0}{p}\right)\right]\right\}$$

Soit encore, en fonction de N, V, U :

$$S(N,V,U) = Nk\left\{s_0(N_0,V_0,U_0) + \ln\left[\left(\frac{N_0}{N}\right)^{5/2}\left(\frac{U}{U_0}\right)^{3/2}\left(\frac{V}{V_0}\right)\right]\right\}$$

▹ À partir de cette relation, toutes les formes d'équation d'état d'un gaz parfait peuvent être obtenues par différentiation partielle.

- La différentiation par rapport à l'énergie interne conduit à :

$$\left.\frac{\partial S}{\partial U}\right|_{N,V} = \frac{1}{T} = \frac{3}{2}Nk\frac{1}{U} \quad\Rightarrow\quad U = \frac{3}{2}NkT$$

- La différentiation par rapport au volume conduit à l'équation d'état :

$$\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_{N,U} = \frac{p}{T} = Nk\frac{1}{V} \quad\Rightarrow\quad pV = NkT$$

20.3.4 Énergie libre

1. Énergie libre

F, appelée aussi **fonction de Helmholtz** ou énergie utilisable : concept important pour la description des transformations à température constante (isotherme) ; s'exprime en joule (J) en unités SI.

L'énergie libre est la différence entre l'énergie interne et le produit de la température et de l'entropie.

$$F = U - TS = -pV + \mu N$$

▹ Ceci correspond à la transformation de Legendre d'une fonction de l'entropie (resp. énergie interne) en une fonction de la température (resp. énergie libre).

La différentielle totale de F a pour expression :

$$dF = -S\,dT - p\,dV + \mu\,dN + \ldots$$

Dans un changement, l'énergie libre est :

$$F = W + \int_{T_1}^{T_2} S\,dT$$

2. La fonction d'état d'énergie libre

L'énergie libre s'écrit comme une fonction d'état des variables indépendantes de température, volume et nombre de particules.

Si la fonction d'état énergie libre $F(T, V, N, \ldots)$ est connue, alors toutes les variables thermodynamiques du système peuvent en être déduites. Ces diverses variables sont déterminées par différentiation.

Entropie, pression, potentiel chimique, comme dérivées de F	Symbole	Unité	Dénomination
$-S = \left.\frac{\partial F}{\partial T}\right\|_{V,N,\ldots}$	F	J	énergie libre
	T	K	température
$-p = \left.\frac{\partial F}{\partial V}\right\|_{T,N,\ldots}$	S	J / K	entropie
	p	Pa	pression
	V	m^3	volume
$\mu = \left.\frac{\partial F}{\partial N}\right\|_{T,V,\ldots}$	μ	J	potentiel chimique
	N	1	nombre de particules

3. Énergie libre et processus isotherme

La variation d'énergie libre dF_{Sys} d'un système à température constante (transformation isotherme) représente le travail produit (ou reçu) par le système lors d'un processus réversible.

Une transformation isotherme, au cours de laquelle le système échange seulement de la chaleur mais pas de travail avec l'extérieur, tend simultanément vers un minimum en énergie libre et un maximum en entropie.

● Les transformations isothermes et isochores s'effectuent spontanément de façon à faire décroître l'énergie libre.

▷ Les transformations isothermes, avec accroissement de l'énergie interne, peuvent s'effectuer spontanément si le produit $T\,dS$ à la température donnée T est plus grand que cette variation d'énergie interne dU. L'énergie fournie provient du bain de chaleur. Sans cette dépense en énergie, ces transformations s'effectueraient spontanément dans une direction opposée.

20.3.5 Enthalpie

1. Enthalpie

L'enthalpie H, joule (J) en unités SI : revêt une importance particulière pour la description des transformations à pression constante (isobare).

■ En pratique, les processus chimiques s'effectuent très souvent à pression constante.

Travail de détente : produit de la pression et du volume.

L'enthalpie est la somme de l'énergie interne et du travail de détente :

$$H = U + pV = TS + \mu N$$

2. Enthalpie, fonction d'état

L'enthalpie s'écrit comme une fonction d'état des variables indépendantes d'entropie, de pression et de nombre de particules. Si cette fonction enthalpie $H(S, p, N, \ldots)$ est connue, alors toutes les variables thermodynamiques du système peuvent en être déduites.

La différentielle totale de l'enthalpie est :

$$\begin{aligned} dH &= dU + p\,dV + V\,dp \\ &= T\,dS + V\,dp + \mu\,dN \end{aligned}$$

- Pour des systèmes adiabatiques et isobares ($Q = 0, p =$ cste), l'enthalpie H tend vers un minimum, $\mathrm{d}H = 0$.

Si la fonction enthalpie $H(S, p, N, \ldots)$ est connue, alors les autres variables sont déterminées par différentiation.

Température, volume, potentiel chimique, comme dérivées de H	Symbole	Unité	Dénomination
$T = \left.\frac{\partial H}{\partial S}\right\|_{p,N,\ldots}$	H	J	enthalpie
	T	K	température
$V = \left.\frac{\partial H}{\partial p}\right\|_{S,N,\ldots}$	S	J / K	entropie
	p	Pa	pression
$\mu = \left.\frac{\partial H}{\partial N}\right\|_{S,p,\ldots}$	V	m^3	volume
	μ	J	potentiel chimique
	N	1	nombre de particules

3. Processus isobare et adiabatique

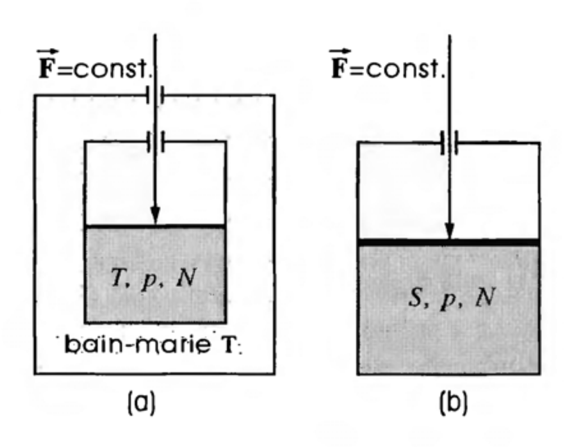


Fig. 20.11 : *Système isotherme-isobare* (a) *et système adiabatique-isobare* (b).

En principe, l'**enthalpie** peut être donnée pour tout système. Cela est particulièrement faisable pour des systèmes isobares ($p =$ cste, $\mathrm{d}p = 0$) et adiabatiques ($\delta Q = 0$).

► De tels systèmes n'échangent pas de chaleur avec l'environnement ($\delta Q = 0$) ; dans une détente, le travail de volume s'effectue contre la force constante exercée par la pression extérieure (Fig. 20.11).

Pour des changements isobares d'états, la variation d'entropie est égale à la quantité de chaleur échangée avec l'environnement, augmentée du travail transféré (en ne prenant pas en compte le travail de volume effectué contre les forces de pression extérieures).

$$H = Q + \int_{p_1}^{p_2} V \; \mathrm{d}p = Q + W_t$$

Le **travail technique** W_t, newton-mètre (Nm) ou joule (J) en unités SI, mesure une quantité de travail qu'une machine peut (théoriquement) faire.

$$W_t = \int_{p_1}^{p_2} V \; \mathrm{d}p$$

- Dans un système adiabatique isobare abandonné à lui-même, il se produit des processus irréversibles qui ont pour effet de diminuer l'enthalpie jusqu'à ce qu'un minimum soit atteint, correspondant à un état d'équilibre.

20.3.5.1 Enthalpie d'un gaz parfait

L'enthalpie est la somme de l'énergie interne et du travail de détente.

Enthalpie $\propto$ température			**$\mathrm{ML^2T^{-2}}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$H = c_p m T$	H	J	enthalpie
	c_p	J / (K kg)	capacité cal. massique, à $p =$ cste
	m	kg	masse
	T	K	température

L'enthalpie d'un gaz parfait est, microscopiquement (sans énergie de rotation) :

$$H(T,p,N) = \frac{5}{2} NkT$$

20.3.5.2 Enthalpie et transition de phase

Dans une transition de phase s'opérant à pression constante (isobare) et à température constante (isotherme), la variation d'entropie d'une substance est égale à la chaleur latente absorbée (dans la fusion, la sublimation ou la vaporisation) ou rejetée (dans la solidification, la condensation ou la liquéfaction) :

$$H_{\text{liquide}} = H_{\text{solide}} + \Delta H_{\text{S}}$$

Enthalpie de fusion ΔH_{S} : enthalpie absorbée dans la fusion.

Enthalpie de solidification $-\Delta H_{\text{S}}$: enthalpie rejetée dans la solidification.

Par analogie, l'**enthalpie de vaporisation** ΔH_{V} est reliée à l'**enthalpie de liquéfaction** $-\Delta H_{\text{V}}$ et l'**enthalpie de sublimation** $\Delta H_{\text{Sub}} = \Delta H_S + \Delta H_V$ à l'**enthalpie de condensation** $-\Delta H_{\text{Sub}}$.

Diagramme de Mollier : graphique sur lequel l'entropie massique est représentée en fonction de l'enthalpie massique (**diagramme h,s**).

▷ Par analogie, des diagrammes d'autres quantités comme la concentration versus l'enthalpie (**diagramme h,x**) peuvent être utilisés.

20.3.5.3 Enthalpie de réaction et théorème de Hess

Enthalpie de réaction : enthalpie absorbée ou rejetée au cours d'une réaction chimique.

▷ Dans les récipients ouverts, les réactions chimiques s'effectuent à pression constante.

- Un bilan des enthalpies en présence permet de dire si une réaction chimique s'est effectuée spontanément sans apport d'énergie externe.

$$\Delta H = H_{\text{initial}} - H_{\text{final}}$$

Si le bilan est négatif, $\Delta H \leq 0$, la réaction s'effectue spontanément et est exothermique.

Théorème de Hess :

- La différence des enthalpies totales des voies d'entrée et de sortie est indépendante du chemin suivi par la réaction.

▷ Le bilan des enthalpie dépend fortement de la pression et de la température environnantes.

▷ Fréquemment, de l'énergie d'activation doit être dépensée pour amorcer une réaction.

■ À température ambiante, on mélange de l'hydrogène et de l'oxygène. L'énergie négative de formation de l'eau empêche la réaction de s'effectuer spontanément. En présence d'un catalyseur ou par une étincelle, la réaction s'effectue pourtant, et de manière explosive (**réaction oxygène-hydrogène**).

Catalyseur : substance qui permet ou qui accélère la réaction chimique entre d'autres substances sans être modifiée.

■ La mousse de platine est un bon catalyseur pour beaucoup de réaction.

Réaction exothermique : réaction au cours de laquelle de l'enthalpie est produite.

Réaction endothermique : réaction au cours de laquelle de l'enthalpie doit être fournie.

M En chimie, la mesure des enthalpies de réaction s'effectuent simplement en mesurant la quantité de chaleur produite au cours de la réaction dans un **calorimètre**, car :

$$\mathrm{d}H = \delta Q|_p$$

20.3.6 Enthalpie libre

1. Enthalpie libre

G, ou **potentiel de Gibbs**, joule (J) en unités SI : concept introduit par J.W. Gibbs (1875), particulièrement adapté aux systèmes à température et à pression fixées.

$$G = U - TS + pV = \mu N$$

● L'enthalpie libre par particule coïncide avec le potentiel chimique.

▷ Cependant cette affirmation n'est valable que pour des systèmes formés d'un type de particules n'échangeant pas d'autre forme d'énergie (par exemple, électrique) avec l'extérieur.

La différentielle totale de l'entalpie libre s'écrit :

$$\mathrm{d}G = -S\,\mathrm{d}T + V\,\mathrm{d}p + \mu\,\mathrm{d}N$$

● Pour un système isobare–isotherme (p = cste, T = cste), l'enthalpie libre a un minimum, $\mathrm{d}G \leq 0$.

2. Enthalpie libre, fonction d'état

L'enthalpie libre est une fonction d'état des variables indépendantes température, pression et nombre de particules. Si cette fonction enthalpie libre $G(T, p, N, \ldots)$ est connue, alors toutes les autres variables thermodynamiques du système peuvent en être déduites.

Ces autres variables sont déterminées par différentiation.

Entropie, volume et potentiel chimique, comme dérivées de G

$$-S = \left.\frac{\partial G}{\partial T}\right|_{p,N,\ldots}$$
$$V = \left.\frac{\partial G}{\partial p}\right|_{T,N,\ldots}$$
$$\mu = \left.\frac{\partial G}{\partial N}\right|_{T,p,\ldots}$$

Symbole	Unité	Dénomination
G	J	enthalpie libre
T	K	température
S	J / K	entropie
p	Pa	pression
V	m^3	volume
μ	J	potentiel chimique
N	1	nombre de particules

La variation d'enthalpie libre est égale au travail converti par le système au cours de transformations **réversibles** isothermes et isobares sans prise en compte de la pression externe constante.

- Dans un système isobare–isotherme abandonné à lui-même, se produisent des processus irréversibles jusqu'à ce qu'un minimum de l'enthalpie libre soit atteint.

20.3.6.1 Réactions chimiques

L'enthalpie libre est importante pour les réactions opérant lentement.

Réaction exoergique : réaction au cours de laquelle de l'enthalpie libre est produite.

Réaction endoergique : réaction au cours de laquelle de l'enthalpie libre est à fournir.

La loi d'action de masse détermine le degré de transformation entre les voies d'entrée et de sortie d'une réaction chimique : (→ *Réactions chimiques, loi d'action de masse*)

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots \rightleftharpoons b_1 B_1 + b_2 B_2 + \ldots$$

$$\frac{(x_{B_1})^{b_1}(x_{B_2})^{b_2}\ldots}{(x_{A_1})^{a_1}(x_{A_2})^{a_2}\ldots} = \mathrm{e}^{\left(-\frac{\Delta G^0(p,T)}{kT}\right)} = K(p,T)$$

La constante d'équilibre $K(p,T)$ est déterminée par la différence des enthalpies libres ΔG^0.

- Pour $K > 1$, l'équilibre se trouve du côté des produits de réaction ; pour $K < 1$ la concentration des réactifs est prédominante.

▷ Pour les réactions les plus importantes, celles entre acides et bases, les constantes d'équilibre de dissociation figurent dans des Tables de chimie.

20.3.6.2 Loi de Le Chatelier

Loi de Le Chatelier : règle gouvernant le déplacement de l'équilibre sous des conditions externes.

- Une modification d'une contrainte (changement de température, pression ou concentration) d'un système équilibré fait évoluer le système dans un sens qui tend à s'opposer à la modification.

■ Soumis à une pression externe, un système d'eau et de vapeur d'eau se condensera de façon à réduire son volume.

20.3.7 Équations de Maxwell de la thermodynamique

Équations de Maxwell : relations entre les dérivées partielles des divers potentiels thermodynamiques :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_S = -\left.\frac{\partial p}{\partial S}\right|_V \qquad \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T = \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_S = -\left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_p \qquad -\left.\frac{\partial S}{\partial p}\right|_T = \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p$$

▷ Le plus souvent, on a affaire à des systèmes fermés ($\mathrm{d}N = 0$), en sorte que le nombre d'équations est appréciablement réduit. Par contre, si d'autres variables d'état interviennent, par exemple un champ magnétique et un **moment dipolaire magnétique**, alors d'autres relations doivent être rajoutées.

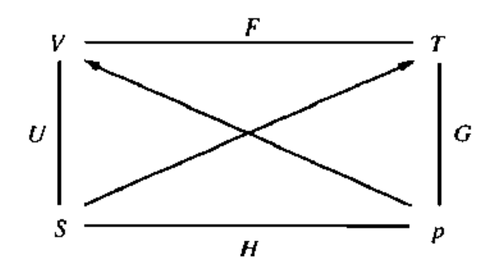


Fig. 20.12 : *Quadrilatère thermodynamique pour* $N = \text{cste}$.

Quadrilatère thermodynamique : représentation simple qui donne une vue d'ensemble des potentiels et des variables et qui permet d'établir rapidement les équations de Maxwell.

Les variables thermodynamiques V, T, p, S forment les coins du quadrilatère représenté Fig. 20.12. Les potentiels, qui dépendent des variables placées aux coins, dénomment les côtés – par exemple $F(V, T)$.

- La dérivée d'un potentiel effectuée par rapport à une variable (coin) a pour résultat la variable associée (coin opposé).

- La dérivée de F par rapport à V, de signe négatif (voir le sens de la flèche) est : $\partial F/\partial V = -p$.

Les équations de Maxwell peuvent être établies par lecture du quadrilatère, de la façon suivante : la dérivée partielle construite sur un côté (par exemple, $\partial V/\partial S$) pour une variable constante située sur un des coins opposés (par exemple, p), est égale à la dérivée partielle construite symétriquement sur le côté opposé. Le signe de l'égalité dépend de l'orientation de la diagonale assurant la correspondance. Soit ici, avec l'exemple choisi :

$$\left.\frac{\partial V}{\partial S}\right|_p = -\left.\frac{\partial T}{\partial p}\right|_S$$

20.3.8 Stabilité thermodynamique

1. Diverses possibilités d'états équilibrés

Un **état équilibré** se distingue par un maximum de l'entropie ou un minimum des divers potentiels thermodynamiques.

Un **état isolé isochore** est caractérisé à l'équilibre par un maximum de l'entropie S.

Un **état isotherme-isobare** est caractérisé à l'équilibre par un minimum de l'enthalpie libre $G = U + pV - TS$.

Un **état isotherme-isochore** est caractérisé à l'équilibre par un minimum de l'énergie libre $F = U - TS$.

Un **état adiabatique-isobare** est caractérisé à l'équilibre par un minimum de l'enthalpie $H = U + pV$.

Un **état adiabatique-isochore** est caractérisé à l'équilibre par un minimum de l'énergie interne U.

Représentation différentielle des potentiels thermodynamiques			
	Symbole	Unité	Dénomination
$\mathrm{d}U = -p\,\mathrm{d}V + T\,\mathrm{d}S$	U	J	énergie interne
	F	J	énergie libre
$\mathrm{d}F = -p\,\mathrm{d}V - S\,\mathrm{d}T$	H	J	enthalpie
	G	J	enthalpie libre
$\mathrm{d}H = V\,\mathrm{d}p + T\,\mathrm{d}S$	p	Pa	pression
	V	m^3	volume
$\mathrm{d}G = V\,\mathrm{d}p - S\,\mathrm{d}T$	T	K	température
	S	J / K	entropie

2. Sommaire des critères d'équilibre :

Le système est →	isotherme	isobare	isochore	adiabatique	isolé
L'entropie S est maximum			$\mathrm{d}V = 0$		$\mathrm{d}U = 0$
L'énergie interne U est minimum			$\mathrm{d}V = 0$	$\delta Q = 0$	
L'énergie libre F est minimum	$\mathrm{d}T = 0$		$\mathrm{d}V = 0$		
L'enthalpie H est minimum		$\mathrm{d}p = 0$		$\delta Q = 0$	
L'enthalpie libre G est minimum	$\mathrm{d}T = 0$	$\mathrm{d}p = 0$			

● Si un système est en équilibre stable, alors tout changement spontané apporté aux variables fait évoluer le système vers un retour à l'équilibre en agissant contre ce changement spontané.

▷ Ceci est conforme à la loi de Le Chatelier.

20.4 Gaz parfaits

Gaz parfait : Gaz dont les particules peuvent être traitées comme des points matériels sans interaction entre eux.

▷ C'est un modèle simple de gaz réel prenant pour hypothèses que les particules sont de dimensions négligeables et ont des interactions très minimes entre elles. L'approximation est d'autant plus justifiée que le gaz est raréfié.

■ Dans les conditions normales, l'air, l'hydrogène et les gaz nobles peuvent être convenablement décrits comme des gaz parfaits.

● Pour la description d'un gaz réel, il faut tenir compte :

- du volume propre des particules.
- des interactions entre les particules.

20.4.1 Loi de Boyle - Mariotte

La **loi de Boyle-Mariotte** exprime une relation générale entre la pression et le volume d'un gaz à une température constante. Elle a été découverte en 1664 par R. **Boyle** et plus tard (1676), indépendamment, par E. **Mariotte**.

- Le produit de la pression et du volume d'un gaz parfait est constant (à une température constante).

Pression × volume = constante

$$pV = p_0V_0, \quad T = \text{cste}$$

$$\frac{p}{p_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad T, N = \text{cste}$$

Symbole	Unité	Dénomination
p	Pa	pression
V	m^3	volume
T	K	température
ρ	kg / m^3	densité
N	1	nombre de particules

■ Si, à température fixée, le volume d'un gaz parfait contenu dans une enceinte est comprimé d'un facteur deux, alors la pression est doublée (voir Fig. 20.13).

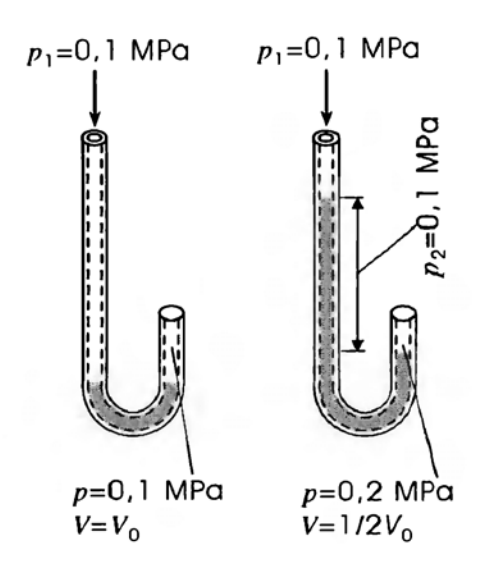


Fig. 20.13 : *Relation entre pression et volume. Le liquide ajouté dans le tube provoque un doublement de la pression et une réduction du volume d'un facteur deux.*

Diagramme (p,V) : dénommé diagramme de Clapeyron, représentation de la pression en fonction du volume ; a une importance dans la description aussi bien des changements d'état que des machines thermiques.

Si pour une température donnée, pression et volume d'un gaz parfait sont tracés l'un en fonction de l'autre (voir Fig. 20.14), alors la courbe représentative est une hyperbole équilatère.

■ La **jauge de pression de Mc Leod** est une application directe de la loi de Boyle-Mariotte. (→ *Mesure des pressions*)

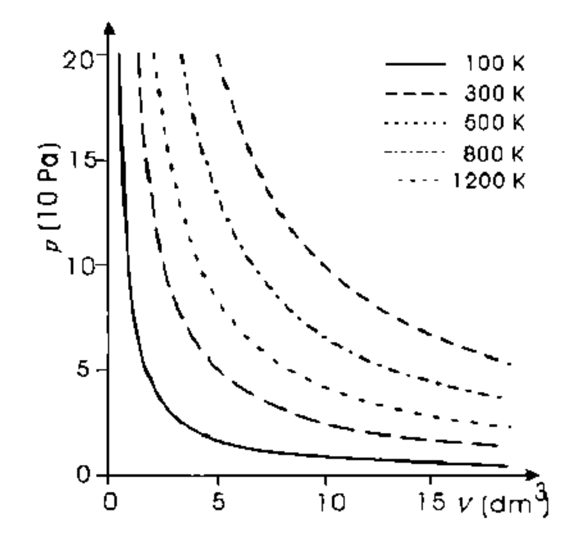


Fig. 20.14 : *Diagramme (p, V) pour 1 mol de gaz parfait. Les isothermes sont des hyperboles équilatères puisque :*

$$p \propto \frac{1}{V}$$

20.4.2 Loi de Gay-Lussac

1. Loi de Gay-Lussac

Exprime la dépendance du volume d'un gaz avec la température ; elle a été établie en 1802 par **Gay-Lussac**.

$V(t) = V_\circ(1 + \alpha\, t)$ où $V_\circ$ est le volume à $t_\circ = 0°C$

- Si la température absolue d'un gaz dans un cylindre est changée, le volume (à pression constante) change proportionnellement à cette température.

Variation de volume $\propto$ variation de température				L^3
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\frac{\Delta V}{V_0} = \alpha \Delta T)$	V	m^3	volume	
	α	1 / K	coef. de dilatation isobare	
$p =$ cste	T	K	température	
	p	Pa	pression	

▹ Rappelons que des différences de température, peuvent s'exprimer indifféremment en degré Celsius ou en kelvin.

Le **coefficient de dilatation isobare** α, 1/kelvin (K^{-1}) en unités SI, décrit le changement relatif de volume en fonction de la température.
Pour tous les gaz raréfiés, il a presque la même valeur : celui d'un gaz parfait, soit :

$\alpha = 0,003\,661\, K^{-1} = (1/273,15)\, K^{-1}$, pour un volume pris à 0 °C

▹ L'équation écrite en fonction de la température absolue est identique.

2. Formulation de la loi de Gay-Lussac

- À pression constante, le volume d'un gaz parfait varie proportionnellement à sa température.

Rapport des volumes = rapport des températures

	Symbole	Unité	Dénomination
$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} \qquad p = \text{cste}$	V	m^3	volume
	T	K	température
	p	Pa	pression

- À volume constant, la pression d'un gaz parfait varie proportionnellement à sa température.

Rapport des pressions = rapport des températures

	Symbole	Unité	Dénomination
$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0} \qquad V = \text{cste}$	p	Pa	pression
	T	K	température
	V	m^3	volume

20.4.3 Équation d'état

L'**équation d'état d'un gaz parfait** décrit la relation entre les variables p_0, V_0, T_0 (pression, volume et température) caractérisant l'état initial et les mêmes variables p, T, V de l'état final. (→ *Équation d'état*)

Équation d'état d'un gaz parfait

	Symbole	Unité	Dénomination
$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = Nk$	p	Pa	pression
	V	m^3	volume
$pV = NkT$	T	K	température
$k = 1{,}380\,66 \cdot 10^{-23}\,\text{J/K}$	N	1	nombre de particules
	k	J / K	constante de Boltzmann

▷ On obtient ces équations en effectuant deux transformations l'une après l'autre, le gaz obéissant aux lois de Boyle - Mariotte et de Gay-Lussac.

▷ D'autres expressions peuvent être trouvées ci-après dans les parties traitant des équations d'état et des gaz parfaits.

20.5 Théorie cinétique des gaz parfaits

Chaque particule du gaz a un vecteur vitesse bien défini $\vec{v}$.

Distribution des vitesses : loi de répartition des vitesses de toutes les particules du système. Elle est représentée en nombre de particules de vitesses comprises entre v et $v + \Delta v$, en fonction de v.

- À l'équilibre, la distribution des vitesses d'un système ne varie plus.

▷ Bien sûr, la vitesse de chacune des particules peut changer.

20.5.1 Pression et température

1. Interprétation microscopique de la pression

La pression est décrite comme la quantité de mouvement (par unité de temps et de surface) transférée aux parois de l'enceinte par les collisions des particules du gaz (Fig. 20.15).

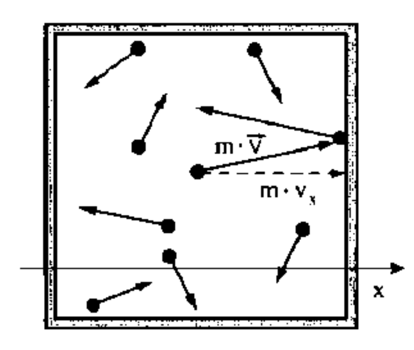


Fig. 20.15 : *Principe de calcul de la pression. Seule la composante normale à la paroi de la quantité de mouvement est à prendre en compte.*

Les **principales équations de la théorie** expriment la relation existant entre la pression et l'énergie cinétique totale.

Pression × volume = $\frac{2}{3}$ énergie cinétique totale				**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$pV = \frac{2}{3} W_{\text{cin}}$	p	Pa	pression	
	V	m^3	volume	
	W_{cin}	J	énergie cinétique totale	

2. Énergie cinétique moyenne par particule

ε_{cin}, joule (J) en unités SI : énergie cinétique totale (→ *Mécanique*) divisée par le nombre de particules :

$$\varepsilon_{\text{cin}} = \frac{W_{\text{cin}}}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

En utilisant la loi des gaz parfaits, on obtient des relations entre les énergies cinétiques totale et moyenne, et la température :

Énergie cinétique ∝ nbre de particules × température				**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$W_{\text{cin}} = \frac{3}{2}NkT$	W_{cin}	J	énergie cinétique totale	
	N	1	nombre de particules	
$\varepsilon_{\text{cin}} = \frac{3}{2}kT$	k	J / K	constante de Boltzmann	
$k = 1,38066 \cdot 10^{-23}\,\text{J/K}$	T	K	température	
	ε_{cin}	J	énergie cinétique moyenne	

● L'énergie cinétique moyenne des particules est proportionnelle à la température.

▷ Microscopiquement, la température s'interprète comme une mesure de l'énergie moyenne d'une particule.

20.5.1.1 Vitesse quadratique moyenne

1. Vitesse quadratique moyenne

$\sqrt{\overline{v^2}}$: racine de la valeur moyenne du carré de la vitesse.

▷ Le symbole v_{rms} est souvent utilisé (rms signifiant *root-mean-square* : moyenne quadratique) pour $\sqrt{\overline{v^2}}$.

Pour des particules de masse identique m_N, le carré de la vitesse est deux fois l'énergie cinétique moyenne divisée par la masse m_N.

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_{\text{cin}}}{m_N}}$$

Pour un **gaz parfait** :

Vitesse quadratique moyenne d'un gaz parfait				**LT^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_N}} = \sqrt{3R_sT}$	$\sqrt{\overline{v^2}}$	m / s	vitesse quad. moyenne	
	k	J / K	constante de Boltzmann	
	T	K	température	
$k = 1,38066 \cdot 10^{-23}$ J/K	m_N	kg	masse de la particule	
	R_s	J / (K kg)	constante des gaz parfaits	

2. Vitesse moyenne

$\overline{v}$: moyenne arithmétique des modules des vecteurs vitesse (sans tenir compte, donc, des directions et sens de ces vitesses).

▷ La vitesse moyenne dépend de la distribution supposée des vitesses. (→ *Distribution de Maxwell-Boltzmann*)

3. Vecteur vitesse moyenne

$\langle\vec{\mathbf{v}}\rangle$: vecteur dont les composantes sont les vitesses moyennes suivant trois axes.

$$\langle\vec{\mathbf{v}}\rangle = \begin{pmatrix} \overline{v_x} \\ \overline{v_y} \\ \overline{v_z} \end{pmatrix}$$

▷ En général, si aucun écoulement n'est présent, le module du vecteur vitesse moyenne est nul puisque toutes les directions sont équiprobables.

● La vitesse quadratique moyenne, la vitesse moyenne et le module du vecteur vitesse moyenne sont trois quantités complètement différentes.

20.5.2 Distribution de Maxwell-Boltzmann

1. Distribution des vitesses

Fonction de distribution qui donne la fréquence relative avec laquelle une vitesse particulière peut être trouvée.

La fréquence relative des vitesses dans le domaine v_1 à v_2 est donnée par l'intégrale :

$$h(v_1 \leq v \leq v_2) = \frac{N(v_1 \leq v \leq v_2)}{N(\text{total})} = \int_{v_1}^{v_2} f(\vec{\mathbf{v}})\, \mathrm{d}^3 v$$

▷ L'intégrale sur tout l'espace des vitesses a pour valeur 1 :

$$\int_{v_1=0}^{v_2=\infty} f(\vec{\mathbf{v}})\, \mathrm{d}^3 v = 1$$

2. Distribution de Maxwell-Boltzmann

Distribution des vitesses relative aux gaz parfaits :

$$f(\vec{v}) = \frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}v} = 4\pi v^2 \left(\frac{m_N}{2\pi kT}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{\left(-\frac{m_N v^2}{2kT}\right)}$$

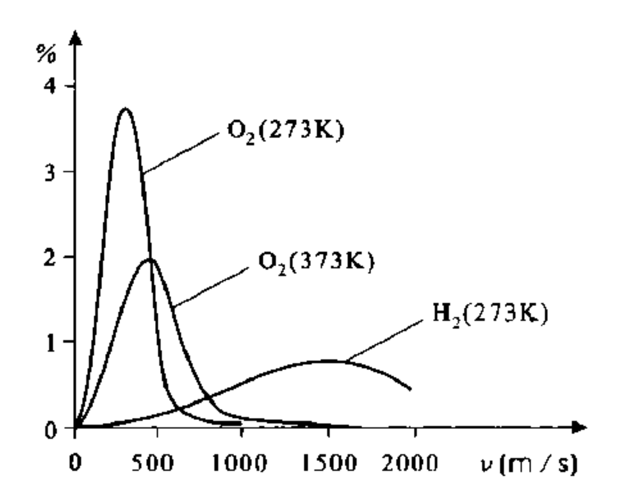


Fig. 20.16 : *Distribution de Maxwell-Boltzmann des vitesses de molécules de gaz parfaits à diverses températures. En ordonnée figure le pourcentage de molécules dont la vitesse est comprise dans le domaine v ± 10 m/s.*

▹ Le terme $4\pi v^2$ résulte de l'hypothèse d'isotropie de la distribution des vitesses. On a, en effet :

$$\int f(v)\ \mathrm{d}v_x\ \mathrm{d}v_y\ \mathrm{d}v_z = \int f(v)\cdot v^2 \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}v = \int 4\pi v^2 f(v)\ \mathrm{d}v$$

▹ Le terme $(m_N/2\pi kT)^{3/2}$ provient de la normalisation à 1 de la fonction :

$$\int f(v)\ \mathrm{d}v = 1$$

3. Facteur de Boltzmann

Dénomination du terme exponentiel. Le numérateur de l'argument de l'exponentielle représente l'énergie cinétique.

$$\mathrm{e}^{-\frac{E}{kT}} = \mathrm{e}^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

▹ En général, le facteur de Boltzmann est donné par l'exposant négatif, l'énergie étant le numérateur et la température (multipliée par la constante de Boltzmann) le dénominateur.

● La distribution des vitesses dépend de **la température** et de la **masse de la particule.**

■ À égale température, les molécules d'oxygène ont une vitesse moyenne inférieure à celle de molécules plus légères comme l'hydrogène (voir Fig. 20.16).

4. Vitesses la plus probable et moyenne

Vitesse la plus probable $v_{\max}$ ou v_{P} : vitesse des particules de distribution donnée se produisant le plus fréquemment.

▹ v_{P} est la vitesse qui correspond **au maximum** de la fonction de distribution.

Vitesse la plus probable $\propto \sqrt{\text{température}}$			
	Symbole	Unité	Dénomination
$v_P = \sqrt{\frac{2kT}{m_N}}$	v_P	m / s	vitesse la plus probable
$k = 1,380\,66 \cdot 10^{-23}\,\text{J/K}$	k	J / K	constante de Boltzmann
	T	K	température
	m_N	kg	masse de la particule

La vitesse moyenne $\overline{v}$, pour une distribution de Maxwell-Boltzmann, est :

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_N}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}v_{\text{rms}}$$

▷ Sa valeur se situe entre v_P et $\sqrt{\overline{v^2}}$:

$$v_P = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}v_{\text{rms}}$$

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}v_{\text{rms}}$$

20.5.3 Degrés de liberté

Degré de liberté d'une particule : concept décrivant la capacité à prendre de l'énergie et à la convertir en des genres variés de mouvement.

▷ Ainsi, des mouvements de translation, de rotation ou de vibration peuvent avoir lieu.

Nombre de degrés de liberté f : quantité sans dimension, donnant le nombre de modes indépendants de mouvement.

■ Il y a trois degrés de liberté possibles pour un mouvement de translation lequel peut, en effet, s'effectuer selon trois axes x, y et z de l'espace.

a) Particules monoatomiques : elles ont les trois degrés de liberté de translation.

■ Tous les gaz nobles (He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn) sont monoatomiques.

b) Particules diatomiques : elles ont cinq degrés de liberté, trois de translation et deux de rotation autour de deux axes perpendiculaires à la ligne de liaison des atomes (Fig. 20.17).

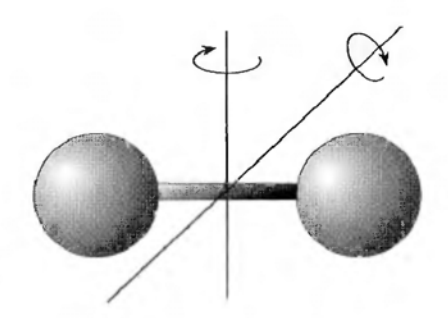


Fig. 20.17 : *Degrés de liberté de rotation d'une molécule diatomique. Les axes de rotation sont perpendiculaires à la ligne de liaison des deux atomes.*

▷ La rotation autour de l'axe de la molécule elle-même n'est pas à prendre en compte puisque le **moment d'inertie** correspondant, J, est très petit (pour un gaz parfait, il est même nul) en sorte que seules de grandes énergies exciteraient ce mode de rotation ($E = L^2/(2J)$).

■ La plupart des molécules constitutives de l'air, comme N_2 et O_2, sont diatomiques.

c) Molécules polyatomiques : dans la majorité des cas, elles ont trois axes de rotation et donc six degrés de liberté.

■ Le dioxyde de soufre (SO_2), l'ammoniac (NH_3) et beaucoup de gaz hydrocarbonés (le méthane CH_4,...), appartiennent à ce groupe.

Les degrés de liberté vibrationels sont excités dans les gaz seulement à de très hautes températures.

▷ Aussi le nombre de degrés de liberté dépend-il fortement de la température (et sur une grande plage de celle-ci).

Dans les solides, les degrés de liberté de translation ($f = 3$) et de vibration du réseau ($f = 3$) atteignent ensemble le nombre de six.

20.5.4 Loi de l'équipartition

La **loi de l'équipartition** donne une égale importance à tous les degrés de liberté d'un système en leur assignant la même énergie.

● L'énergie thermique est statistiquement répartie d'une façon égale sur tous les degrés de liberté ; en moyenne, chaque degré de liberté a la même énergie.

L'énergie moyenne par particule gazeuse (molécule) est :

Énergie moyenne ∝ degrés de liberté × température			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\overline{W} = \frac{f}{2}kT$	$\overline{W}$	J	énergie moyenne des particules
$k = 1{,}380\,66 \cdot 10^{-23}\,\text{J/K}$	f	1	nombre de degrés de liberté
	k	J / K	constante de Boltzmann
	T	K	température

Ainsi, pour des **gaz monoatomiques**, l'énergie moyenne par particule est :

$$\overline{W} = \frac{3}{2}kT$$

Pour des **gaz diatomiques** :

$$\overline{W} = \frac{5}{2}kT$$

Et pour **des molécules tri ou polyatomiques** :

$$\overline{W} = 3kT$$

20.5.5 Phénomènes de transport

Les particules d'un gaz réel interagissent les unes avec les autres via les potentiels moléculaires. Au cours des collisions, en échangeant de la quantité de mouvement et de l'énergie, leurs vitesses se modifient. Aussi ces processus collisionnels sont-ils fondamentaux dans le transport de l'énergie et de la matière.

1. Caractéristiques des collisions dans un gaz

Libre parcours moyen l : parfois aussi désigné par λ [mètre (m) en unités SI], longueur moyenne du chemin parcouru par une particule (atome, molécule, ou – dans le cas des métaux – électron) entre deux collisions avec d'autres particules.

Temps moyen de collision τ, seconde (s) en unités SI : durée moyenne entre deux collisions.

Fréquence de collision ν, herz (Hz) (1 Hz = 1/seconde) en unités SI : nombre moyen de collisions par intervalle de temps.

À partir de la vitesse moyenne $\overline{v}$ des particules, connue à partir de leur distribution de vitesses, nous avons les relations :

$$\textbf{Temps de collision} = \frac{\textbf{1}}{\textbf{fréquence de col.}} = \frac{\textbf{libre parcours moyen}}{\textbf{vitesse moyenne}} \qquad \textbf{T}$$

$\tau = \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{l}{\overline{v}}$	Symbole	Unité	Dénomination
	τ	s	temps de collision
	ν	Hz	fréquence de collision
	l	m	libre parcours moyen
	$\overline{v}$	m / s	vitesse moyenne

2. Section efficace

σ : peut être comprise d'une manière imagée, comme la surface de rebond des particules dans la collision (Fig. 20.18).

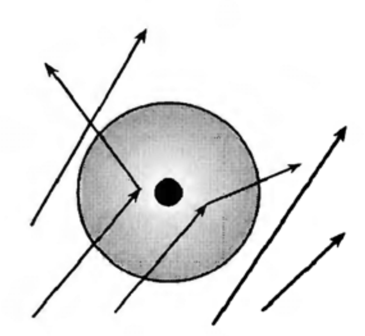


Fig. 20.18 : *Interprétation géométrique de la section efficace. Les particules passant à travers la surface en grisé subissent une collision.*

Le libre parcours moyen est étroitement lié à la section efficace :

$$\textbf{Section efficace} = \frac{\textbf{1}}{\textbf{libre parcours moyen} \times \textbf{densité}} \qquad \mathbf{L^2}$$

$\sigma = \dfrac{1}{l\rho_N}$	Symbole	Unité	Dénomination
	σ	m^2	section efficace
	l	m	libre parcours moyen
	ρ_N	$1/m^3$	densité des particules

Barn b : unité de section efficace utilisée en physique atomique et nucléaire :

$$1\,b = 10^{-28}\,m^2$$

3. Conductivité thermique

λ, watt par kelvin et par mètre W/(K m) en unités SI : mesure le pouvoir qu'à un système de transporter de l'énergie.

▷ Cette donnée revêt une importance particulière dans la conduction de la chaleur. (→ *Processus non-équilibré, conduction de la chaleur*)

Conductivité thermique (microscopiquement)				**$MLT^{-3}\Theta^{-1}$**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\lambda = \frac{1}{3}\,\overline{v} l \rho c_V$	λ	W / (K m)	conductivité thermique	
	$\overline{v}$	m / s	vitesse moyenne	
	l	m	libre parcours moyen	
	ρ	kg / m^3	masse volumique	
	c_V	J / (K kg)	capacité cal. massique à V = cste	

▷ Le produit de la masse volumique et de la chaleur massique a même valeur que le produit de la masse molaire et de la capacité calorifique molaire ou que celui de la densité de particules et de la capacité calorifique par particule.

4. Conductivité thermique des gaz monoatomiques

Dans le cas de gaz monoatomiques, la conductivité thermique a pour forme :

Conductivité thermique (gaz monoatomiques)				**$MLT^{-3}\Theta^{-1}$**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\lambda = \frac{1}{2} k \overline{v} l \rho_N$	λ	W / (K m)	conductivité thermique	
	k	J / K	constante de Boltzmann	
	$\overline{v}$	m / s	vitesse moyenne	
	l	m	libre parcours moyen	
	ρ_N	1 / m^3	densité de particules	

5. Cas des matériaux solides

▷ Les conductivités thermiques de nombreux matériaux sont reportées dans les Tables 23.3, page 792.

6. Constante de diffusion

D, m^2 par seconde en unités SI : caractérise le transport de matière. (→ *Processus non-équilibré – diffusion*)

Constante de diffusion (microscopiquement)				**L^2T^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$D = \frac{1}{3}\overline{v} l$	D	m^2 / s	constante de diffusion	
	$\overline{v}$	m / s	vitesse moyenne	
	l	m	libre parcours moyen	

▷ Les constantes de diffusion de diverses substances sont reportées dans les Tables 23.10, page 810.

7. Viscosité dynamique

η, 1/(seconde.mètre) en unités SI : caractérise la friction interne.

Viscosité (microscopiquement)			$\mathbf{L^{-1}T^{-1}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\eta = \frac{1}{3}\overline{v}l\rho_N$	η	1 / m s	viscosité
	$\overline{v}$	m / s	vitesse moyenne
	l	m	libre parcours moyen
	ρ_N	1 / m^3	densité de particules

▷ Les viscosités dynamiques de nombreuses substances sont reportées dans les Tables 23.3.1, page 792.

▷ Le quotient $\frac{\lambda}{\eta} = \frac{C_{mV}}{M} = \frac{3}{2}k = \text{cste}$
est expérimentalement confirmé être une bonne approximation.

20.6 Équations d'état

20.6.1 Équation d'état d'un gaz parfait

L'**équation d'état d'un gaz parfait** établit une relation entre les quantités p_0, V_0, T_0 (pression, volume, et température) d'un quelconque état initial et les mêmes quantitiés p, T, V de l'état final. (→ *Gaz parfait-équation d'état*)

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0} = \text{cste} = Nk$$

▷ Pression et température sont des variables intensives, le volume est une variable extensive. Leur produit, étant une variable extensive (→ *Variable extensive*), est donc proportionnel au nombre de particules N.

En faisant intervenir la **densité de particules** du gaz :

● La pression est le produit de la densité de particules $\rho_N = N/V$, de la température et de la constante de Boltzmann.

Pression ∝ densité × température			$\mathbf{ML^{-1}T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$p = \rho_N kT$	p	Pa	pression
$k = 1,380\,66 \cdot 10^{-23}\,\text{J/K}$	ρ_N	m^{-3}	densité de particules
	T	K	température
	k	J / K	constante de Boltzmann

▷ Cette définition ne fait appel a aucune variable extensive.

20.6.1.1 Constantes des gaz

1. Constante de Boltzmann et constante universelle

Constante de Boltzmann k : constante de proportionnalité entrant dans la loi des gaz parfaits, de valeur :

$$k = 1,380\,66 \pm 0,000\,10 \cdot 10^{-23}\,\text{J/K}$$

Constante des gaz parfaits R : constante universelle égale au produit du nombre d'Avogadro et de la constante de Boltzmann.

Cste des gaz parfaits = cste de Boltzmann × nbre d'Avogadro			
	Symbole	Unité	Dénomination
$R = k \cdot N_A$	R	J / K mol	cste des gaz parfaits
$N_A = 6,022137 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$	N_A	mol^{-1}	nombre d'Avogadro
	k	J / K	constante de Boltzmann

La valeur de la constante des gaz parfaits R est :

$$R = 8,314\,\text{J/(mol K)}$$

2. Équation d'état des gaz parfaits

La loi des gaz parfaits s'écrit :

Équation d'état d'un gaz parfait (cste universelle des gaz.)			
	Symbole	Unité	Dénomination
$\frac{pV}{T} = nR = Nk$	p	Pa	pression
$pV = nRT = NkT$	V	m^3	volume
$k = 1,38066 \cdot 10^{-23}\,\text{J/K}$	T	K	température
	n	mol	quantité de matière
	R	J / (K mol)	cste des gaz parfaits
	N	1	nombre de particules
	k	J / K	cste de Boltzmann

▷ L'équation d'état des gaz parfaits a pour désavantage de faire appel au nombre de moles, difficilement déterminable dans la pratique.

En thermodynamique chimique, on utilise fréquemment l'équation d'état suivante :

Équation d'état d'un gaz parfait (cste massique)			
	Symbole	Unité	Dénomination
$\frac{pV}{T} = mR_s$	p	Pa	pression
$pV = mR_sT$	V	m^3	volume
	T	K	température
	m	kg	masse du gaz
	R_s	J / (K kg)	cste massique du gaz

3. Constante spécifique au gaz

Constante massique du gaz R_s, ou **constante individuelle du gaz** R_i : constante de proportionnalité de l'équation d'état, souvent utilisées en thermodynamique technique ; sa valeur dépend du gaz.

▷ En thermodynamique technique, la constante massique des gaz est dénotée par R_s. L'indice s introduit est là seulement pour éviter une confusion avec la constante des gaz parfaits. En présence de divers gaz, la constante massique porte l'indice afférent alors à chaque gaz R_1, R_2 ….

La constante massique des gaz dépend du gaz.

Cste massique du gaz = $\frac{\text{cste des gaz parfaits}}{\text{masse molaire}}$				$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$R_s = \frac{R}{M} = \frac{nR}{m}$	R_s	J / (K kg)	cste massique du gaz	
	R	J / (K mol)	cste des gaz parfaits	
	M	kg / mol	masse molaire	
$R = 8,314\,\text{J/K mol}$	n	mol	quantité de matière	
	m	kg	masse	

Les constantes massiques de quelques gaz sont reportées dans la Table 23.2/4, page 791.

4. Représentation via la masse volumique du gaz

- La pression est le produit de la masse volumique $\rho = m/V$, de la température T et de la constante massique R_s du gaz.

Pression = masse vol. × cste massique × température				$ML^{-1}T^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
	p	Pa	pression	
$p = \rho R_s T$	ρ	kg / m³	masse volumique	
	T	K	température	
	R_s	J / (K kg)	cste massique du gaz	

20.6.1.2 Mélanges de gaz

Mélange de gaz : système formé de n sortes de particules en nombre $N_1, N_2, \ldots, N_n$.

Fraction molaire x_i : quotient du nombre d'un type de particules sur le nombre total de particules du mélange.

$$x_i = \frac{N_i}{N_1 + N_2 + \ldots + N_n}$$

- On a toujours :

$$\sum_i x_i = 1$$

La fraction molaire donne la composition en pour-cent d'un système. C'est une variable intensive pouvant prendre différentes valeurs suivant les différentes phases.

Fraction massique w_i : rapport de la masse d'un constituant à la masse totale du mélange :

$$w_i = \frac{m_i}{\sum_i m_i}$$

La constante massique d'un gaz pour un mélange de gaz peut être écrite sous la forme :

$$R_G = \frac{R_1 m_1 + R_2 m_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} = \frac{\sum_i R_i m_i}{\sum_i m_i}$$

20.6.1.3 Calcul de quantités à partir de la loi des gaz parfaits

Les formules de conversion suivantes découlent de définitions et de la loi des gaz parfaits :

Formulaire de conversion

$$R = N_A k \qquad R = MR_s$$
$$m = \rho V \qquad m = nM$$
$$N = nN_A \qquad N = \rho_N V$$
$$n = \rho_m V \qquad \rho = \rho_m M$$
$$k = 1,380\,66 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$$
$$R = 8,314\,\mathrm{J/K\,mol}$$
$$N_A = 6,022\,137 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$$

Symbole	Unité	Dénomination
R	J / (K mol)	cste des gaz parfaits
R_s	J / (K kg)	cste massique
k	J / K	cste de Boltzmann
M	kg / mol	masse molaire
m	kg	masse du gaz
n	mol	quantité de matière
N_A	$\mathrm{mol^{-1}}$	nombre d'Avogadro
N	1	nombre de particules
ρ	kg / $\mathrm{m^3}$	masse volumique
ρ_N	$\mathrm{m^{-3}}$	densité de particules
ρ_m	mol / $\mathrm{m^3}$	densité molaire

Pression d'un gaz parfait :

$$\begin{aligned} p &= \frac{nRT}{V} = \frac{NkT}{V} = \frac{mR_sT}{V} \\ &= \rho_m RT = \rho_N RT = \rho R_s T \end{aligned}$$

Volume d'un gaz parfait :

$$\begin{aligned} V &= \frac{nRT}{p} = \frac{NkT}{p} = \frac{mR_sT}{p} \\ &= \frac{n}{\rho_m} = \frac{N}{\rho_N} = \frac{m}{\rho} \end{aligned}$$

Température d'un gaz parfait :

$$\begin{aligned} T &= \frac{pV}{nR} = \frac{pV}{Nk} = \frac{p}{mR_s} \\ &= \frac{p}{\rho_m R} = \frac{p}{\rho_N R} = \frac{p}{\rho R_s} \end{aligned}$$

Masse volumique d'un gaz parfait :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{R_sT} = \frac{pM}{RT} = \frac{pM}{N_AkT} \\ &= \rho_N \frac{M}{N_A} = \rho_m M = \rho_N \frac{M}{N_A} \end{aligned}$$

20.6.1.4 Loi barométrique

La **loi barométrique** décrit le changement de pression atmosphérique en fonction de l'altitude terrestre.

▷ L'accélération de la pesanteur est supposée constante dans cette loi.

L'idée d'une loi barométrique découle de ce que le poids d'un volume de gaz est compensé par la différence de pression s'exerçant sur les parties haute et basse de ce volume :

Équation différentielle			
	Symbole	Unité	Dénomination
$\frac{dp}{dz} = -\frac{mg}{kT}p$	p	Pa	pression
	z	m	altitude
	m	kg	masse d'une particule de gaz
	g	m / s²	accélération de la pesanteur
	k	J / K	constante de Boltzmann
	T	K	température

La solution d'une telle équation différentielle est une fonction exponentielle :

Loi barométrique			
	Symbole	Unité	Dénomination
$p(z) = p_0\, e^{-\frac{mgz}{kT}}$	p	Pa	pression
$k = 1,380\,66 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$	p_0	Pa	pression à $z = 0$
	z	m	altitude
	m	kg	masse d'une molécule
	g	m / s²	accélération de la pesanteur
	k	J / K	cste de Boltzmann
	T	K	température

● La pression de l'atmosphère terrestre décroît exponentiellement avec l'altitude.

▷ Il est supposé ici une température constante (atmosphère isotherme).

À partir de l'équation d'état $p = \rho_N kT$ et de la défintion de la masse volumique $\rho = m \cdot \rho_N$, on obtient par substitution sur les valeurs de p_0 et ρ_0 :

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 g z}{p_0}} = p_0 \cdot e^{-\frac{z}{z_0}} \; ; \; z_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g}$$

▷ Les facteurs de correction à la loi barométrique peuvent être trouvés dans la Table 23.5.1, page 799.

20.6.2 Équation d'état des gaz réels

L'**équation d'état d'un gaz parfait** est seulement valable dans le cas limite des très basses densités. Dans le cas des gaz réels, les propriétés additionnelles suivantes sont à considérer :

- les particules ont un volume propre fini
- les particules interagissent les unes avec les autres

20.6.2.1 Développement du viriel d'un gaz réel

Développement du viriel : développement de l'équation d'état en une série de plusieurs termes.

▷ En général, on utilise un développement polynomial en fonction de la pression (ou de la densité) avec des coefficients qui dépendent de la température.

Représentation usuelle du développement du viriel :

Développement du viriel de l'équation d'état des gaz réels			
	Symbole	Unité	Dénomination
$$pV_{\text{mol}} = RT\left(1 + \frac{B(T)}{V_{\text{mol}}} + \frac{C(T)}{V_{\text{mol}}^2} + \dots\right)$$	p	Pa	pression
	V_{mol}	m^3 / mol	volume molaire
$$V_{\text{mol}} = \frac{V}{n}$$	V	m^3	volume
	n	mol	quant. matière
$$R = 8,314\,\text{J/K mol}$$	R	J / K mol	cste gaz parfaits
	T	K	température
	$B(T)$	mol / m^3	$2^{\text{ème}}$ coefficient
	$C(T)$	mol^2 / m^6	$3^{\text{ème}}$ coefficient

Coefficient du viriel : coefficient dépendant de la température et multiplicateur, dans le développement, de la quantité intensive élevée à une puissance.

▷ Souvent un développement, réduit au deuxième terme $B(T)$, suffit.

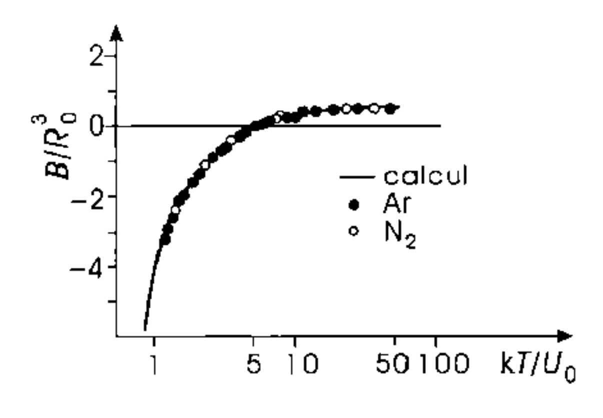


Fig. 20.19 : *Coefficients du viriel de divers gaz (points) comparés au calcul (ligne).*

▷ La connaissance des coefficients permet de tirer des conclusions quant à l'interaction entre les particules.

▷ Les coefficients dépendent du gaz et peuvent être trouvés dans des Tables de thermodynamique.

20.6.2.2 Équation de Van der Waals

1. Hypothèses sous-jacentes

Équation de Van der Waals : équation d'état due à Van der Waals (1873), relative aux gaz réels avec les propriétés suivantes :

- seul le volume librement accessible est considéré. Le volume interne des particules est soustrait du volume total.
- l'interaction attractive prédominante entre les particules assure la cohésion du gaz. La pression sur l'enceinte de confinement est alors réduite.

2. Covolume et pression interne

Covolume $b'N$: volume incompressible qu'occupent les N particules. Il est soustrait du volume total.

▷ La correction de volume est proportionnelle au nombre de particules, soit :

$$V \mapsto V - Nb'$$

Pression interne : force par unité d'aire agissant intérieurement. Elle a pour origine le fait que les particules subissent une force attractive entre elles avec une résultante qui est nulle au milieu du gaz et active sur les bords, voir Fig. 20.20

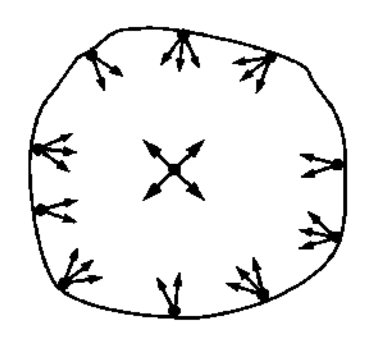


Fig. 20.20 : *Illustration didactique de la pression interne. Les particules du bord ressentent la force intermoléculaire seulement d'un côté.*

3. Déduction de l'équation de Van der Waals

▷ En général, la force attractive est supposée être d'origine électrique dipolaire. Le potentiel est alors inversement proportionnel à la puissance sixième de la distance.

La réduction de pression dépend du nombre de particules (lequel est proportionnel à la densité de particules) au contact de la paroi et de la distance moyenne entre les particules (qui est aussi approximativement proportionnelle à la densité de particules).

Cette réduction de pression doit être ajoutée à la pression réelle (mesurable) de façon à obtenir la pression du gaz parfait :

$$p \mapsto p + a' \left(\frac{N}{V}\right)^2$$

▷ Le nombre d'Avogadro étant contenu dans la constante, on introduit la masse molaire :

$$p \mapsto p + a\rho_{\text{mol}}^2$$

Après substitution du covolume et de la pression interne, l'équation de Van der Waals prend pour forme :

Équation de Van der Waals

	Symbole	Unité	Dénomination
$\left(p + \left(\frac{n}{V}\right)^2 a\right)(V - nb) = nRT$	p	Pa	pression
$R = 8,314\,\text{J/K mol}$	n	mol	quantité de matière
	V	m^3	volume
	a	Nm^4 / mol^2	cste de pres. interne
	b	m^3 / mol	cste de covolume
	R	J / K mol	cste des gaz parfaits
	T	K	température

▷ Les constantes respectives a et b de pression interne et de covolume dépendent du gaz ; voir Table 23.2/3, page 791, pour des valeurs.

4. Équation de Van der Waals en technique

Souvent, en thermodynamique technique, les calculs portent sur des masses de gaz ; en conséquence, les constantes a et b sont à redéfinir.

Conversion des constantes, de molaire à massique			
	Symbole	Unité	Dénomination
$a_s = \dfrac{a}{M^2}$	a_s	Nm^4 / kg^2	cste massique de pression interne
	a	Nm^4 / mol^2	cste molaire de pression interne
$b_s = \dfrac{b}{M}$	M	kg / mol	masse molaire
	b_s	m^3 / kg	covolume massique
	b	m^3 / mol	covolume molaire

▷ Généralement, les constantes sont aussi désignées par a et b. La notation avec indice a_s et b_s (s signifiant spécifique, c'est à dire massique) permet la distinction.

5. Pression avec l'interaction de Van der Waals,

$$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V - nb} - a\frac{n^2}{V^2}$$

La pression en fonction du volume se représente graphiquement sous la forme d'une différence entre une hyperbole simple et une hyperbole quadratique (Fig. 20.21).

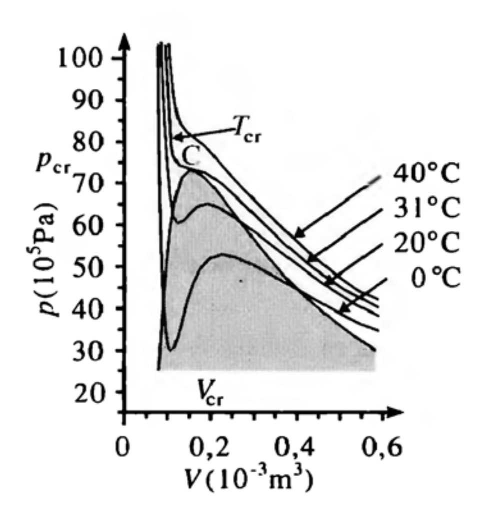


Fig. 20.21 : *Isothermes d'un gaz de Van der Waals à différentes températures, en diagramme (p, V) ; en gris : la région de coexistence de phases.*
C : point critique au point d'inflexion de l'isotherme critique T_{cr}.

▷ En général, le calcul du volume connaissant la pression ne conduit pas à une solution unique.

● Pour de hautes températures et de basses densités, l'équation de Van der Waals se rapproche de celle d'un gaz parfait.

Isotherme : courbe de température constante.

20.6.2.3 Région de coexistence de phases

Pour de basses températures et certains volumes, la pression devient négative. De plus, même pour des pressions positives, il existe des régions pour lesquelles la pression décroît quand le volume croît.

▷ Dans ces régions, le système ne peut être stable et se contracte sur lui-même en un volume plus petit.

Ces régions d'instabilité décrivent une transition de phase gaz–liquide. Les phases gazeuse et liquide coexistent ensemble (partie en grisé, Fig. 20.21).

Région de coexistence de phases : région dans laquelle deux phases peuvent coexister.

Construction de Maxwell : règle qui permet de remplacer la portion d'isotherme, décrivant la zone non-équilibrée dans la région de coexistence de phases, par une ligne droite représentant le palier réel de liquéfaction (voir Fig. 20.22) . (→ *Transition de phases – construction de Maxwell*)

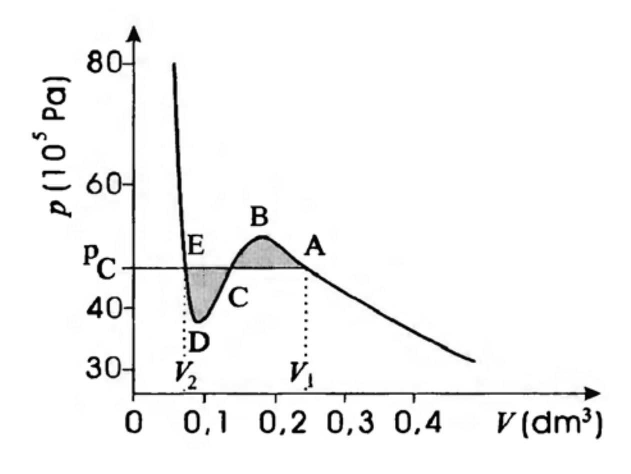


Fig. 20.22 : *Construction de Maxwell pour une isotherme de Van der Waals. Les surfaces entre la courbe et la droite de substitution, marquées en gris sur la figure, doivent avoir la même aire.*

20.6.2.4 Point critique

Isotherme critique : courbe de température T_{cr} pour laquelle la pression en fonction du volume montre un point d'inflexion.

Température critique T_{cr} : température de l'isotherme critique.

Température critique (équation de Van der Waals)				Θ
	Symbole	Unité	Dénomination	
$T_{cr} = \dfrac{8a}{27Rb}$	T_{cr}	K	température critique	
	a	Nm^4 / mol^2	coef. de pression interne	
$R = 8,314\,J/(K\,mol)$	b	m^3 / mol	volume interne	
	R	J / (K mol)	cste des gaz parfaits	

Le point d'inflexion de l'isotherme critique est appelé **point critique**. En dessous de la température critique, on peut toujours construire la droite horizontale ; au-dessus d'elle, la dérivée $dp/\ dV$ est toujours négative.

Pression critique p_{cr} : pression au point critique.

Pression critique (équation de Van der Waals)				$ML^{-1}T^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$p_{cr} = \dfrac{a}{27b^2}$	p_{cr}	Pa	pression critique	
	a	Nm^4 / mol^2	coef. de pression interne	
	b	m^3 / mol	volume interne	

Volume molaire critique v_{cr} : volume d'une mole au point critique.

Volume molaire critique = 3 × volume interne				L^3N^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$v_{cr} = 3b$	v_{cr}	m^3 / mol	volume molaire critique	
	b	m^3 / mol	volume interne	

20.6.2.5 Loi des états correspondants

Variable réduite : représentation d'une variable d'état en unité de cette variable au point critique.

$$\overline{p} = \frac{p}{p_{cr}} \qquad \overline{v} = \frac{V}{v_{cr}} \qquad \overline{T} = \frac{T}{T_{cr}}$$

Loi des états correspondants : énoncée par Van der Waals et affirmant que les variables réduites de tout gaz simple satisfont à la même équation de Van der Waals.

Gaz simple : gaz de particules possédant un faible moment dipolaire électrique et pour lequel les atomes ou les molécules ne sont pas fortement corrélés dans la phase liquide.

■ Les gaz nobles, ainsi que N_2, O_2, H_2 et CO, CH_4, sont des gaz simples.

L'équation de Van der Waals en variables réduites est :

$$\left(\overline{p} + \frac{3}{\overline{v}^2}\right)(3\overline{v} - 1) = 8\overline{T}$$

20.6.2.6 Équation de Van der Waals sous forme du viriel

1. Approximation à l'équation de Van der Waals

Une approximation à l'équation de Van der Waals peut être réalisée en remplaçant la densité molaire n/V par un terme de pression interne comme le prévoit un gaz parfait $n/V \approx p/RT$.

$$\left(p + \frac{p^2}{(RT)^2}\,a\right)(V - nb) = nRT$$
$$R = 8,314\,\mathrm{J/(K\,mol)}$$

Le développement a pour forme :

$$pV = \frac{nRT}{1 + \frac{pa}{(RT)^2}} + pnb$$

Avec des constantes normalisées au nombre de particules :

$$a' = \frac{a}{N_A^2} \qquad b' = \frac{b}{N_A} \qquad N_A = 6,022\,137 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$$

L'équation de Van der Waals s'écrit :

$$\left(p + \frac{p^2}{(kT)^2}\,a'\right)(V - Nb') = NkT$$
$$k = 1,380\,66 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$$

Le développement a alors pour forme :

$$pV = \frac{NkT}{1 + \frac{pa}{(kT)^2}} + pNb$$

2. Utilisation de constantes massiques

Si les constante massiques sont utilisées, comme en thermodynamique technique, on a :

Conversion des constantes molaires en constantes massiques			
	Symbole	Unité	Dénomination
$a_s = \dfrac{a}{M^2}$	a_s	Nm^4 / kg^2	cste massique de pression interne
$b_s = \dfrac{b}{M}$	a	Nm^4 / mol^2	cste molaire de pression interne
$R_s = \dfrac{R}{M}$	M	kg / mol	masse molaire
$R = 8,314\,J/K.mol$	b_s	m^3 / kg	volume interne massique
	b	m^3 / mol	volume interne molaire
	R	J / K.mol	constante des gaz parfaits
	R_s	J / K.kg	cste massique des gaz parfaits

Représentation avec les constantes massiques :

$$\left(p + \frac{p^2}{(R_sT)^2}\,a_s\right)(V - mb_s) = mR_sT$$

Développement à basses pressions et températures élevées :

$$pV = nRT + n\left(b - \frac{a}{RT}\right)p + \dots$$

20.6.3 Équation d'état des liquides et des solides

Comme les gaz, les liquides et les solides se dilatent quand la température augmente. Notons cependant **l'anomalie que présente l'eau** entre 0°C et 4°C.

▷ Le changement des dimensions macroscopiques d'un corps avec la température a une origine microscopique dans les changements du potentiel, de l'énergie cinétique et donc de la distance entre les atomes et les molécules.

1. Équation d'état des solides et des liquides

Description de la dépendance du volume avec la température et la pression.

● Le changement de volume d'un solide ou d'un liquide est linéairement relié au changement de température et de pression.

▷ Ceci n'est cependant qu'une règle approximative valable sur un large domaine et destinée à nous guider vers une meilleure description.

Équation d'état d'un solide ou d'un liquide			
	Symbole	Unité	Dénomination
$V(T,p) = V_0\{1 + \alpha(T - T_0) - \chi_T(p - p_0)\}$	V	m^3	volume
	T	K	température
	p	Pa	pression
	α	K^{-1}	coef. dil. vol.
	χ_T	Pa^{-1}	compressibilité

$V_0 = V(T_0, p_0)$ est un état initial arbitraire.

▷ Les différences de température $T - T_0$ peuvent être données aussi bien en °C qu'en kelvin.

2. Coefficients entrant dans l'équation d'état

Le **coefficient de dilatation volumique** α, ou coefficient de dilatation isobare, 1/kelvin en unités SI, caractérise l'expansion (dilatation ou contraction) du volume en fonction de la température, à pression constante.

Sa définition en terme de dérivée partielle est :

$$\alpha = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta V}{V_0 \Delta T} = \frac{1}{V_0} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_{p=p_0}$$

La **compressibilité** (ou coefficient de dilatation isotherme) χ_T, caractérise le changement de volume avec la pression à température constante.

Sa définition en terme de dérivée partielle est :

$$\chi_T = -\frac{1}{V_0} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{T=T_0}$$

Le **module de compression** κ est l'inverse de la compressibilité isotherme :

$$\kappa = \frac{1}{\chi_T}$$

▷ En technologie des ultra-sons, le module de compression κ est aussi dénoté par C_B.

M La compressibilité peut statistiquement être établie en mesurant directement le changement de volume sous une pression donnée, ou encore, dynamiquement, par des expériences d'ultra-sons. Signalons que, dans ce dernier cas, c'est le module de compression qui est mesuré.

▷ Les coefficients d'expansion de beaucoup de matériaux peuvent être trouvés dans les Tables 23.3, page 792.

Pour la plupart des matériaux, ces coefficients valent :

- pour les solides, $\alpha \approx 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$
- pour les liquides, α est 10 à 100 fois plus faible que pour les solides $(10^{-3} - 10^{-4}\,\mathrm{K}^{-1})$

Des valeurs de compressibilité de divers corps figurent aussi en annexe (Table 23.3, page 792). Leurs ordres de grandeur sont $\chi_T \approx 10^{-6}\mathrm{bar}^{-1}$ pour les solides et les liquides.

▷ La compressibilité des liquides et des solides est essentiellement plus faible que celle des gaz.

De petits changements en température causent des changements de volume similaires à ceux produits par de grands changements de pression.

▷ On peut en tirer comme conséquence qu'une faible variation de température d'un volume donné, constant, causera une très haute pression et, donc, une très grande force.

■ Si la compressibilité de l'eau à 30 m de profondeur n'était pas supérieure à celle qui existe à la surface de l'océan, que de voyages à faible coût ne pourrions-nous pas faire à cette profondeur !

3. Coefficient de dilatation linéïque

α_ℓ : caractérise le changement de longueur avec la température.

$$\begin{aligned} L_2 &= L_1 + \Delta L = L_1 + \alpha_\ell L_1 \Delta T \\ &= L_1(1 + \alpha_\ell \Delta T) \end{aligned}$$

Sa définition en terme de dérivée partielle est :

$$\alpha_\ell = \frac{1}{L}\left.\frac{\partial L}{\partial T}\right|_{p=p_0}$$

▷ Dans les constructions, il est nécessaire de prévoir des joints de dilatation pour pallier les fluctuations de température.

■ Les rails des trains sont placés bout à bout avec un espace de séparation entre eux.
Les tabliers des ponts métalliques peuvent glisser sur leurs appuis.

[M] Les **dilatomètres** permettent la mesure de l'expansion linéaire (dilatation ou contraction) d'un corps au moyen d'un condensateur dont une armature est solidaire de ce corps.

L'expansion linéaire due à un changement de température peut servir à mesurer la température. Les exemples les plus connus sont ceux :

- du **thermomètre à mercure**.
- du **bilame**, formé de deux bandes métalliques de dilatation différente.
- des cônes de contrôle des fours à moufle.

4. Coefficient d'expansion surfacique

β : caractérise le changement de surface avec la température.

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 + \Delta A = A_1 + \beta A_1 \Delta T \\ &= A_1(1 + \beta \Delta T) \end{aligned}$$

Tant que l'expansion linéaire (dilatation ou contraction) est faible devant la longueur totale, les coefficients d'expansion linéïque α_ℓ, surfacique β et volumique α obéissent à :

$$\beta = 2\alpha_\ell \qquad \alpha = 3\alpha_\ell$$

20.6.3.1 Anomalie de l'eau

Presque tous les corps ont un coefficient positif de dilatation : leur volume augmente quand augmente la température quelque soit le domaine de température.

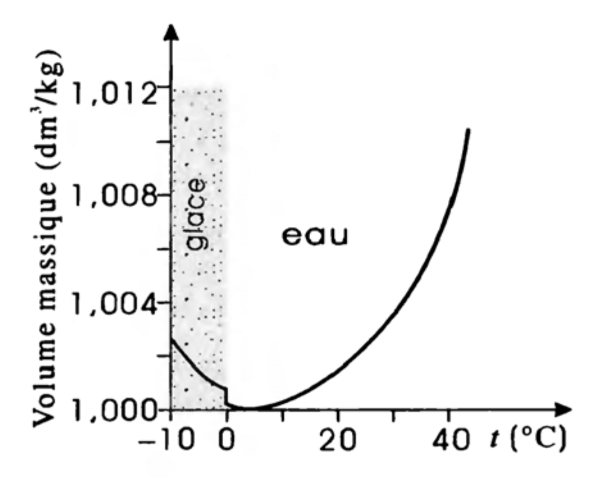


Fig. 20.23 : *Expansion thermique de l'eau à la pression normale. Le minimum de la courbe se situe à 4°C.*

Anomalie de l'eau : propriété particulière à l'eau de se dilater quand elle se solidifie.

● Le coefficient de dilatation est **négatif** entre 0°C et 4°C.
À 4°C, $\alpha = 0$.

▷ **L'eau** a son maximum de densité à 4°C.

■ Un litre d'eau à 4°C est plus lourd qu'un litre d'eau à son point de congélation : la glace flotte sur l'eau.

La Fig. 20.23 montre l'expansion volumique d'1 kg d'eau liquide en fonction de la température. Deux importantes propriétés peuvent être relevées :

- le coefficient de dilatation est négatif à basse température.
- le coefficient de dilatation augmente d'une façon non linéaire aux températures plus élevées. Il n'est donc pas constant mais dépend de la température.

Le comportement de l'eau sous pression est anologue à celui qu'elle a avec la température.

● Comprimée, la glace fond.

Ceci est équivalent à dire que, sous forte pression, l'eau ne peut geler.

■ Les océans ne gèlent pas à partir de leur fond.

Notons que l'anomalie de l'eau joue un rôle important dans les processus biologiques.

21 Chaleur, conversion de l'énergie et changements d'état

21.1 Les formes de l'énergie

L'énergie totale E d'un système est une quantité macroscopique qui joue un rôle important en thermodynamique. Elle est numériquement le produit de l'énergie moyenne des particules et du nombre de particules.

▹ Connaître l'énergie d'une particule individuelle ou la distribution de l'énergie totale E de chaque particule individuelle, n'est pas fondamental.

● **Premier principe de la thermodynamique** : l'énergie totale d'un système est une quantité conservée. L'énergie ne peut être ni créée ni détruite ; elle peut seulement être transférée d'un système à un autre.

L'énergie revêt différentes formes et se transfère de diverses manières. Toute forme d'énergie peut être convertie en une autre.

■ De la chaleur apparaît en cassant un objet.
Dans les générateurs électriques, du travail mécanique est converti en énergie électrique.

Le **rendement** de conversion est le rapport de l'énergie convertie à l'énergie d'entrée.

▹ L'énergie restante n'est pas perdue, mais apparaît sous une autre forme.

■ Dans des machines thermiques, l'énergie chimique est convertie partiellement en travail mécanique et partiellement en chaleur.

21.1.1 Unités d'énergie

1. Unité SI d'énergie

L'unité d'énergie est le joule (J) dans le Système International (SI). Cependant certains ouvrages techniques font mention d'unités spécifiques comme :

- le **newton-mètre** (Nm), pour le travail mécanique.
- le **joule** (J), pour la chaleur.
- le **watt-seconde** (Ws), pour le travail en électricité.

● Ces unités sont toutes équivalentes :

$$1\,\text{J} = 1\,\text{Nm} = 1\,\text{Ws} = 1\,\text{VAs} = 1\,\frac{\text{kg.m}^2}{\text{s}^2}$$

■ Un courant électrique de 1 ampère sous un voltage de 6 volts transporte autant d'énergie en 1 seconde que celle nécessaire pour élever de 1 mètre, un poids de 6 newtons.

2. Autres unités d'énergie non légales

L'**erg**, ancienne unité, vaut 10^{-7} fois un joule.

$$1\,\text{J} = 10^7\,\text{erg}$$

La **calorie** (cal), vieille unité encore très utilisée, définie comme la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré la masse d'un gramme d'eau à 14,5 °C.

$1\,\text{cal} = 4,187\,\text{J} \qquad 1\,\text{J} = 0,239\,\text{cal}$

La **BTU** ou **British Thermal Unit**, unité anglo-saxonne très utilisée, mais non légale :

$1\,\text{Btu} = 1055,06\,\text{J}$

L'**électron-volt** décrit le travail effectué par une charge électrique élémentaire pour franchir une différence de potentiel d'un volt ; cette unité se rencontre, plus particulièrement, en physique nucléaire et en physique atomique.

▷ En posant $\hbar = c = 1$, la relation $\hbar c \approx 197,32\,\text{MeV.fm}$ montre, en mécanique quantique, que l'énergie peut s'exprimer aussi comme l'inverse d'une longueur mesurée en fm ($1\,\text{fm} = 10^{-15}\,\text{m}$).

$1\,\text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}\,\text{J} = 5,063 \cdot 10^{-9}\,\text{fm}^{-1}\hbar c \qquad 1\,\text{J} = 6,242 \cdot 10^{18}\,\text{eV}$

21.1.2 Travail

1. Travail thermodynamique

Le travail thermodynamique représente un échange d'énergie entre le système et le milieu extérieur. Il est **mécanique**, quand une force *extérieure* au système provoque son déplacement.

Convention de signes : on dira qu'une quantité de travail est *reçue* par le système, quand elle est *positive* (c'est le cas de forces extérieures accomplissant un travail moteur) ; par contre, on dira qu'elle est *fournie* par le système quand elle est *négative* (travail résistant des forces extérieures).

▷ Il est fréquent de trouver une définition inverse sur ce signe dans d'autres ouvrages.

Le **travail** W, joule (J) en unités SI, est le produit de la composante de la force dans la direction du déplacement et de la distance parcourue.

Travail = force × déplacement			**ML^2T^{-2}**
$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}\,,\quad W_{1,2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$	Symbole	Unité	Dénomination
	W	J	travail
	$\vec{F}$	N	force
	$\vec{s}$	m	déplacement

▷ Le travail est le produit scalaire de deux vecteurs ; ce n'est donc pas un vecteur, mais un nombre algébrique (scalaire).

● Les forces qui agissent normalement au déplacement ne travaillent pas.

2. Travail des forces de pression

Il y a **compression** quand la pression interne du système (gaz emprisonné) augmente (Fig. 21.1).

■ Le volume du gaz se réduit à mesure que le piston est enfoncé dans le cylindre.

Le travail est le produit d'une pression et d'une différence de volume. Une variation de volume peut être occasionnée par le déplacement des parois de l'enceinte limitant le système (c'est le cas cité ci-dessus, du piston mobile confinant le gaz dans le cylindre).

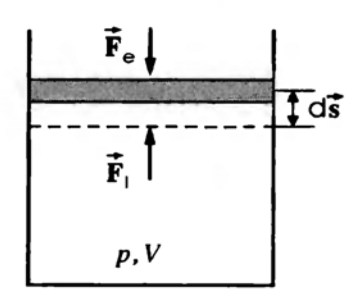


Fig. 21.1 : *Travail de compression. Le travail effectué correspond au produit de la force extérieure et du déplacement, ou de la pression et de la différence de volume.*

Travail = pression × surface × déplacement			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Delta W = p\, A\, \Delta s$	W p A Δs	J $Pa = N/m^2$ m^2 m	travail pression surface déplacement

- Le déplacement est compté positivement si le volume diminue.

Dans une compression, le volume diminue : $A\,\Delta s$ et ΔV sont donc de signe contraire.

$$\Delta V = -A\,\Delta s$$

Par suite, le travail est l'opposé du produit de la pression par la variation de volume. Cette dernière est à compter positivement si le volume augmente, négativement s'il diminue.

Travail = −pression × variation de volume			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Delta W = -p\,\Delta V$	ΔW p ΔV	J $Pa = N/m^2$ m^3	travail pression variation de volume

- Le travail mécanique effectué ΔW ne dépend pas seulement des limites d'intégration (c'est à dire des états initial et final du système), mais aussi du chemin parcouru de l'état initial à l'état final.

▹ Mathématiquement, ceci se traduit par le fait que dW *n'est pas une différentielle totale*. En conséquence, la différentielle du travail mécanique sera notée δW (et non pas dW).

21.1.3 Potentiel chimique

Potentiel chimique μ, joule (J) en unités SI : quantité de travail à faire de façon à permettre au système de rester à l'équilibre quand le nombre de particules change.

Potentiel chimique = $\dfrac{\text{quantité de travail}}{\text{variation du nbre de particules}}$			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\mu = \dfrac{\Delta W}{\Delta N}$	μ W N	J Nm = J 1	potentiel chimique travail nombre de particules

Ainsi, le travail reçu ou fourni par addition de ΔN particules supplémentaires, est :

$$\Delta W = \mu \cdot \Delta N$$

▷ De l'énergie est nécessaire car les particules ajoutées ne peuvent être introduites *froides* dans le système ; elles doivent transporter la même énergie moyenne que les particules présentes, ceci pour préserver l'équilibre thermique du système.

21.1.4 Chaleur

La chaleur est une forme d'énergie connectée à un changement de température d'un système. Un transfert de chaleur provoque une variation de température. La relation entre ce transfert et la variation de température fait intervenir une quantité physique appelée **capacité calorifique** C.

▷ Dans une transition de phase, le transfert de chaleur peut se faire sans changement de température (comme, par exemple, lors de la fusion ou de la vaporisation d'une substance). La définition donnée ci-dessus reste cependant valable puisque dans ce cas, la capacité calorifique tend vers une valeur infinie.

1. Quantité de chaleur

La **chaleur** ΔQ, joule (J) en unités SI, est de l'énergie échangée se traduisant par une variation de température ΔT du système.

Quantité de chaleur = capacité cal. × diff. de température			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Delta Q = C\Delta T$ $Q_{1,2} = \int_{T_1}^{T_2} C \, dT$ $\delta Q = C \, dT$	Q C T	J J/K K	quantité de chaleur capacité calorifique température

▷ Une représentation mathématique en termes de différentielles n'a de sens que si aucun travail mécanique ou chimique n'a été échangé. Rappelons aussi que la quantité δQ n'est pas une différentielle totale.

2. Mesure d'une quantité de chaleur

[M] La mesure de la chaleur par calorimétrie s'opère en déterminant la variation de température d'une capacité calorifique C_K connue caractérisant tout le calorimètre. D'éventuelles pertes de chaleur sont à prendre en compte.
$\Delta Q = C_K \cdot \Delta T$ + pertes de chaleur
Les **calorimètres** sont des appareils de mesure de quantités de chaleur. Les types les plus communs sont :

- le **calorimètre à liquide**, très courant : la chambre à réaction est placée dans un réservoir rempli de liquide, isolé de l'extérieur.
- le **calorimètre métallique**, particulièrement adapté à des valeurs élevées de température : un bloc métallique (en argent, cuivre, ou aluminium) constitue la zone de confinement d'une réaction.
- les **calorimètres à combustion**, utilisés dans le cas de réactions à combustion rapide. Citons parmi eux :
- la **bombe calorimètrique** utilisée par Berthelot tant pour des solides que pour des liquides.
- le **calorimètre à échange** (appelé aussi calorimètre humide), pour des gaz.

- le **calorimètre à mélange** (ou calorimètre sec), pour des gaz.

■ Une masse de 200 g de cuivre représentant une capacité calorifique de 76,6 J/K, est chauffée de 17°C à 23°C. En ne supposant aucune perte, la quantité de chaleur transférée au cuivre est :

$\Delta Q = C \cdot \Delta T = 76,6\ \mathrm{J/K} \cdot (23 - 17)°\mathrm{C} = 459,6\ \mathrm{J}$

3. Chaleur massique

q, joule par kilogramme (J/kg) en unités SI : quantité de chaleur par masse de substance.

Chaleur massique $= \dfrac{\textbf{quantité de chaleur}}{\textbf{masse}}$				$\mathbf{L^2T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$q = \dfrac{Q}{m}$	q	J / kg	chaleur massique	
	Q	J	quantité de chaleur	
	m	kg	masse de la substance	

La chaleur massique joue aussi un rôle important dans les transitions de phase (chaleur massique de fusion, de vaporisation, ...), les solutions (chaleur massique de solution) et dans les réactions chimiques (chaleur massique délivrée).

▷ Dans certains ouvrages, la notion de chaleur massique est utilisée pour celle de capacité calorique massique, conduisant parfois à des confusions.

21.2 Conversion de l'énergie

Toute forme d'énergie peut être convertie en une autre.

■ Avec de l'énergie électrique, un poids peut être soulevé.
Dans les générateurs, de l'énergie électrique peut être obtenue à partir de travail mécanique.

En fait, le bon sens conteste l'idée d'une complète conversion.

● Les conversions réelles d'énergie se produisent toujours avec des pertes.

▷ Cependant ces pertes ne signifient pas que de l'énergie soit perdue, mais seulement qu'une partie a été transformée dans une autre forme d'énergie que celle désirée.

■ La conversion en énergie mécanique s'accompagne souvent de pertes en chaleur.

● L'énergie totale se conserve.
De l'énergie ne peut être perdue !

En conclusion, toute forme d'énergie ne se convertit pas nécessairement entièrement en n'importe quelle autre.

● Ainsi, la chaleur ne peut être convertie complètement en énergie mécanique ou électrique.

▷ Ceci constitue le **deuxième principe de la thermodynamique.**

Cependant, une complète conversion de l'énergie mécanique ou électrique en chaleur est possible.

21.2.1 Conversion de formes d'énergie en chaleur

La production d'énergie thermique peut se faire de différentes façons, comme par exemple en convertissant de l'énergie mécanique (par friction notamment) ou de l'énergie électrique (par effet Joule).

21.2.1.1 Énergie électrique

L'**énergie électrique** peut être convertie totalement en énergie thermique par le passage d'un courant électrique dans un conducteur. L'inverse, c'est à dire la *complète* conversion d'énergie thermique en électrique, est impossible.

Chaleur = tension × intensité × temps			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$Q = U \cdot I \cdot t$ $Q = P \cdot t$	Q	J	quantité de chaleur
	U	V	tension électrique
	I	A	intensité électrique
	t	s	temps
	P	W	puissance

- Une résistance chauffante (220 V de tension nominale ; 4,5 A d'intensité de courant) est plongée dans de l'eau pendant 1 minute. L'énergie électrique est complètement convertie en chaleur. La quantité de chaleur produite est :

  $$Q = W_{el} = P_{el} \cdot t = U \cdot I \cdot t = 220\,\text{V} \cdot 4,5\,\text{A} \cdot 60\,\text{s} = 59\,400\,\text{Ws} = 59,4\,\text{kJ}$$

  Cette quantité de chaleur serait suffisante pour augmenter la température d'un verre d'eau (~200 ml) de 75°C.

En appliquant la loi Ohm à un résistor :

Chaleur $= \dfrac{\textbf{(tension)}^2}{\textbf{résistance}} \times$ **temps**			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$Q = \dfrac{U^2 t}{R}$ $Q = I^2 R t$	Q	J	chaleur produite
	U	V	tension
	t	s	durée
	R	Ω	résistance électrique
	I	A	intensité

- Aux bornes d'un résistor ($R = 4,7\,\text{k}\Omega$) est appliquée une tension de 5 volts. La quantité de chaleur dissipée par le résistor est, en une heure :

  $$Q = \frac{U^2}{R} t = \frac{(5\,\text{V})^2}{4,7.10^3\,\Omega} \cdot 3600\,\text{s} \simeq 19,15\,\text{J}$$

21.2.1.2 Énergie mécanique

Comme l'énergie électrique, l'énergie mécanique peut être convertie totalement en chaleur. La conversion *totale* inverse, d'énergie thermique en énergie mécanique, est impossible.
L'énergie mécanique peut se manifester aussi bien sous forme d'énergie cinétique que potentielle (tension d'un ressort, par exemple).

Chaleur = énergie cinétique + énergie potentielle			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$Q = \Delta W_{\text{cin}} + \Delta W_{\text{pot}}$	Q	J	chaleur produite
	W_{cin}	Nm	énergie cinétique utilisée
	W_{pot}	Nm	énergie potentielle utilisée

- Une bille de 5 g, animée d'une vitesse de 150 m/s, est arrêtée par un sac de sable. Son énergie cinétique est complètement convertie en chaleur. La quantité de chaleur produite est :

$$Q = W_{\text{cin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,005\,\text{kg} \cdot \left(150\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 56,25\,\text{Nm} = 56,25\,\text{J}$$

21.2.1.3 Énergie de combustion

L'**énergie de combustion** est la forme la plus importante de conversion d'énergie chimique en chaleur. C'est, en particulier, le cas des substances contenant du carbone et de l'hydrogène qui s'oxydent.

- Le pétrole et le gaz naturel sont constitués principalement de molécules d'hydrocarbone ; leur combustion produit du dioxyde de carbone (CO_2) et de l'eau (H_2O). Les contaminants toujours présents sont eux générateurs de dioxyde de soufre (SO_2) et d'oxydes d'azote (NO_X).

1. Pouvoir calorifique massique d'un solide ou d'un liquide

H, joule/kilogramme (J kg^{-1}) en unités SI : chaleur de combustion rapportée à l'unité de masse ; quand la vapeur d'eau produite dans la réaction n'est pas condensée, la dénomination usuelle du pouvoir calorifique est *pouvoir calorifique inférieur*.

Pouvoir calorifique massique = $\dfrac{\text{chaleur de combustion}}{\text{masse de substance}}$			**L^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$H = \dfrac{Q}{m}$	H	J / kg	pouvoir calorifique massique
	Q	J	chaleur produite
	m	kg	masse de la substance br+lée

Par analogie, un pouvoir calorifique peut être défini pour des substances gazeuses ; mais, dans ce cas, le volume du gaz est plus opportun d'utilisation que la masse, difficilement mesurable.

▷ Puisque le volume dépend de la température et de la pression, on définit un volume standard dans les conditions normales ($p = 101,325$ kPa, $T = 273,15\,\text{K} = 0°\text{C}$).

2. Pouvoir calorifique volumétrique d'un gaz

H_g, joule par mètre cube (J/m^3) en unités SI : chaleur produite par des substances gazeuses, par unité de volume dans les conditions normales.

Pouvoir calorifique d'un gaz $= \dfrac{\text{quantité de chaleur}}{\text{volume}}$				$ML^{-1}T^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$H_g = \dfrac{Q}{V_n}$	H_g	J/m^3	pouvoir calorifique du gaz	
	Q	J	quantité de chaleur	
	V_n	m^3	volume dans les conditions normales	

▷ Les pouvoirs calorifiques de quelques substances sont donnés dans la Table 23.9, page 807.
Le pouvoir calorifique de la plupart des combustibles solides est voisin de 20–50 MJ/kg, celui des huiles de 40–50 MJ/kg et celui des gaz de 10–130 MJ/m^3.

3. Pouvoirs calorifiques supérieur et inférieur

Le **pouvoir calorifique supérieur** H_o d'une substance est l'énergie par masse produite directement dans la combustion ; cependant, ici, la mesure est faite après condensation de l'eau résultant de la combustion de l'hydrogène.

▷ Pouvoirs calorifiques supérieur et inférieur se distinguent selon que l'on prend en compte ou non la chaleur de vaporisation de l'eau produite.

▷ **Valeur de chauffe** d'une chaudière : dans les installations anciennes, seul le pouvoir calorifique inférieur est à prendre en compte. Les systèmes modernes opèrent de manière à ce que les rejets de gaz se fassent à une température inférieure au point de rosée, de sorte que la chaleur de condensation du gaz est récupérée.

La quantité de chaleur produite dans une combustion est donnée par :

Quantité de chaleur = masse × pouvoir cal. inférieur				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$Q = m \cdot H$	Q	J	quantité de chaleur utilisée	
$Q = V_n \cdot H_g$	m	kg	masse de la substance (solide/liquide)	
	H	J / kg	pouvoir calorifique massique (solide/liquide)	
	V_n	m^3	volume du gaz (conditions normales)	
	H_g	J/m^3	pouvoir calorifique massique (gaz)	

■ 300 g de charbon de bois sont brûlés. La quantité de chaleur produite est :

$$Q = m \cdot H = 0,3\,\text{kg} \cdot 31\,\frac{\text{MJ}}{\text{kg}} = 9,3\,\text{MJ}$$

21.2.1.4 Énergie solaire

Le rayonnement solaire constitue un transfert d'énergie sous forme d'ondes électromagnétiques. Cette énergie de rayonnement peut être convertie, notamment en chaleur. Le pouvoir absorbant du corps récepteur

ainsi que l'angle d'insolation défini par la direction du rayon lumineux et la normale à la surface irradiée, sont des données à prendre en compte.

Chaleur $\propto$ aire $\times$ taux d'absorption $\times$ cos(angle)			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
	Q	J	quantité de chaleur
	q_S	W / m^2	constante solaire
$Q = q_S\, A\, \alpha\, t\, \cos\varphi$	A	m^2	surface réceptrice
	α	1	taux d'absorption
	t	s	temps
	φ	1	angle d'insolation

Constante solaire : moyenne annuelle de la puissance solaire rayonnée sur terre par unité de surface :

$$q_S = 1,37\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2}$$

▷ La constante solaire est seulement une valeur globale qui néglige l'influence des nuages, des poussières, etc.

■ Une plaque de 50 cm × 50 cm est exposée au soleil pendant une heure sous un angle (par rapport à la normale à la plaque) de 30°. En supposant un taux d'absorption de 35 % (incluant la présence de l'air), la chaleur transférée à la plaque est :

$$\begin{aligned} Q &= q_S A \alpha t \cos\varphi \\ &= 1,37\,\tfrac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2} \cdot 0,25\,\mathrm{m}^2 \cdot 0,35 \cdot 3600\,\mathrm{s} \cdot \cos 30° \approx 374\,\mathrm{kJ} \end{aligned}$$

On appelle **albédo** le rapport de l'énergie de rayonnement réfléchie ou diffusée par un objet à l'énergie de rayonnement totale incidente sur lui.

▷ La Terre a un albédo (dit planétaire) de 0,39.

21.2.2 Conversion de la chaleur en d'autres formes d'énergie

La conversion de l'énergie thermique en d'autres formes d'énergie passe, en général, par l'utilisation d'une machine thermique opérant suivant le cycle de Carnot. (→ *Cycle de Carnot*)

▷ Le principe de base consiste à produire une succession de changements d'état par l'intermédiaire d'un système (généralement un fluide) mis en contact alternativement avec deux bains de chaleur à des températures différentes ; il s'ensuit un transfert de chaleur du bain chaud au bain froid et la production de travail mécanique, lequel peut être converti en d'autres formes d'énergie.

Rendement η de conversion d'énergie : quantité sans dimension, rapport de la part d'énergie convertie en travail mécanique à celle reçue par le système.

▷ Le rendement est un nombre toujours inférieur à l'unité

$$\eta < 1$$

● L'énergie thermique ne peut être entièrement convertie en une autre forme d'énergie.

Le rendement d'une machine thermique dépend des températures des sources chaude et froide entre lesquelles l'échange de chaleur se produit.

Rendement idéal $= 1 - \dfrac{\textbf{température de la source froide}}{\textbf{température de la source chaude}}$			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$\eta_C = 1 - \dfrac{T_{fr}}{T_{ch}}$	η_C	1	rendement idéal
	T_{fr}	K	temp. du réservoir de froid
	T_{ch}	K	temp. du réservoir de chaud

21.2.3 Exergie et anergie

Parmi les formes d'énergie existantes, certaines peuvent entièrement se convertir en une autre, certaines non.

■ L'énergie mécanique peut être (presque) complètement convertie en énergie électrique et *vice versa*. L'énergie thermique peut résulter complètement d'une conversion d'énergie mécanique ou électrique. Par contre, l'énergie thermique ne peut être convertie entièrement en énergie mécanique ou électrique.

1. Classification des formes d'énergie

On peut classer les différentes formes d'énergie en :

1. **Exergie** E_x, joule (J) en unités SI : fraction d'énergie qui peut être convertie *complètement* en une autre forme d'énergie.
2. Énergie qui peut être transformée en d'autres formes différentes, mais de manière limitée.
3. **Anergie** B, joule (J) en unités SI : fraction d'énergie qui *n'est pas* convertible *du tout*.

■ Les formes totalement convertibles (exergie) sont les énergies mécanique et électrique.
L'énergie interne et l'enthalpie sont des formes limitées d'énergie convertie, faites d'une partie d'anergie.

2. Divisions de l'énergie totale

L'énergie totale peut être séparée en deux parties selon que l'énergie mécanique est utilisable ou non.

● L'énergie totale consiste en exergie et en anergie :

$W_{tot.} = E_x + B$ énergie totale = exergie + anergie

▹ Bien sûr, une de ces deux parties peut être nulle.

3. Lois de la conversion d'énergie

La conversion d'énergie obéit à ces deux règles :

- de l'exergie peut être transformée en anergie
- mais de l'anergie ne peut être transformée en exergie

▹ Ceci est directement relié au deuxième principe de la thermodynamique.

● Des processus au cours desquels de l'exergie est transformée en anergie sont dits irréversibles.
Dans les processus réversibles, aucune conversion d'exergie en anergie n'est possible.

21.3 Capacités calorifiques

21.3.1 Capacité calorifique totale

1. Capacité calorifique

C, joule par kelvin (J/K) en unités SI : quelquefois appelée capacité thermique ou capacité calorifique totale, rapport de la quantité de chaleur transférée entre le système et le milieu extérieur sur la variation de température observée.

▷ Elle dépend de la masse du système et de la matière constitutive.

Capacité calorifique $= \dfrac{\text{quantité de chaleur}}{\text{différence de température}}$			$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$C = \dfrac{\Delta Q}{\Delta T}$	Q	J	quantité de chaleur
$C = \dfrac{\delta Q}{\mathrm{d}T}$	C	J/K	capacité calorifique
	T	K	température

▷ Les différences de température peuvent être mesurées aussi bien en degré Celsius qu'en kelvin, sans qu'il soit nécessaire de modifier les formules.

▷ D'une façon formelle, la capacité calorifique d'une substance peut devenir infinie dans une transition de phase car, dans ce cas, de la chaleur est transférée sans qu'il y ait eu variation de température.

2. Mesure de la capacité calorifique

M La capacité calorifique d'une substance inconnue se détermine à partir de la variation de température qu'elle subit lors d'un transfert donné de chaleur. Ce transfert peut être obtenu d'une façon très précise en convertissant de l'énergie électrique en chaleur et en mesurant cette énergie électrique fournie. Il faut, dans ces déterminations, tenir compte du rendement thermique de l'installation et de la capacité calorifique propre au calorimètre (appelée aussi **équivalent en eau**).

$$C = \frac{\eta \Delta Q}{\Delta T} - C_K \qquad \eta \text{ rendement, } C_K \text{ équivalent en eau}$$

■ On transfère une puissance électrique de 1000 W en 15 s à un liquide dont la température augmente de 7,18 K. Sa capacité calorifique est :

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{15\,\mathrm{kJ}}{7,18\,\mathrm{K}} = 2,09\,\mathrm{kJ/K}$$

3. Écriture de la capacité calorifique sous forme d'un produit

La capacité calorifique peut être écrite comme le produit de la capacité calorifique massique (respectivement molaire) et de la masse (resp. nombre de moles). Ainsi cette grandeur physique, dépendant de

la substance, peut être séparée en une quantité intrinsèque à la substance et en une masse, facile à mesurer, représentative de la quantité de matière.

Capacité cal. = capacité cal. massique × masse totale			$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$C = n\,c_{mol}$ $C = m\,c$	C n m c_{mol} c	J/K mol kg J / (K.mol) J / (K.kg)	capacité calorifique nombre de moles masse totale capacité cal. molaire capacité cal. massique

■ L'eau a une capacité calorifique massique $c = 4,182\,\text{kJ/(kg.K)}$; un demi litre d'eau (500 g) possède donc une capacité calorifique :

$$C = m \cdot c = 0,5\,\text{kg} \cdot 4,182\,\text{kJ/(kg.K)} = 2,091\,\text{kJ/K}$$

21.3.1.1 Capacité calorifique d'un mélange de substances

● La capacité calorifique totale d'un mélange de substances différentes est la somme des capacités calorifiques de chacune :

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$$

21.3.1.2 Équivalent en eau

Comme il a été dit ci-dessus pour la mesure de la capacité calorifique d'une substance, la capacité calorifique cumulée du calorimètre et de ses accessoires (sondes thermométriques, agitateurs,...) doit être prise en compte. Cette capacité calorifique est souvent appelée **valeur en eau** et dénotée par C_K ou W :

$$W = C_K = m_k \cdot c_k$$

La capacité calorifique totale du système s'exprime comme :

Capacité cal. totale = capacité cal. + équivalent en eau			$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$C_{tot} = C + C_K$	C_{tot} C_K W	J/K J/K J/K	capacité calorifique totale capacité cal. de la substance équivalent en eau

M Un moyen d'évaluer l'équivalent en eau consiste à remplir le calorimètre d'une quantité définie d'eau. Un transfert déterminé de chaleur est alors imposé et la variation de température notée.

21.3.2 Capacité calorifique molaire

Capacité calorifique molaire c_{mol}, joule par kelvin et par mole ($JK^{-1}mol^{-1}$) en unités SI : capacité calorifique d'une mole de substance.

On définit de même la capacité calorifique massique.

1. Capacité calorifique molaire

c_{mol} : quantité de chaleur transférée à une mole de substance pour que sa température change de un kelvin.

Capacité cal. molaire = $\dfrac{\text{quantité de chaleur}}{\text{nbre moles} \times \text{température}}$			$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$c_{mol} = \dfrac{\Delta Q}{n\,\Delta T}$	c_{mol}	J / (K.mol)	capacité cal. molaire
$\Delta Q = c_{mol}\, n\, \Delta T$	Q	J	quantité de chaleur
	T	K	température
	n	mol	nombre de moles

▹ La différence de température peut aussi bien être mesurée en degré Celsius qu'en kelvin, sans modification des formules.

2. La capacité calorifique molaire, propriété de la substance

La capacité calorifique molaire est une propriété intrinsèque à la substance ; elle se détermine comme le rapport de la capacité calorifique au nombre de moles.

La capacité calorifique molaire est la capacité calorifique rapportée à une mole de substance.

▹ Dans quelques ouvrages (anciens) de thermodynamique, la capacité calorifique molaire est appelée chaleur molaire. La bonne terminologie évitera une éventuelle confusion.

Capacité calorifique molaire = $\dfrac{\text{capacité calorifique}}{\text{nombre de moles}}$			$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$c_{mol} = \dfrac{C}{n}$	c_{mol}	J / (K.mol)	capacité cal. molaire
$c_{mol} = \dfrac{C \cdot N_A}{N}$	C	J/K	capacité calorifique
$N_A = 6,022\,137 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$	n	mol	nombre de moles
	N	1	nombre de particules
	N_A	mol^{-1}	nombre d'Avogadro

▹ Pour des températures supérieures à 200 K, la capacité calorifique molaire des solides vaut $3R = 24,9\,\text{J}/(\text{K mol})$ suivant la règle établie par Dulong et Petit. (→ *Capacité calorifique massique des solides*)

3. Relation avec la masse molaire

La définition de la capacité calorifique molaire fait intervenir le nombre de moles de la substance considérée. Il est plus commode de la relier à la capacité calorifique massique via la masse molaire.

Capacité calorifique molaire = $\dfrac{\text{capacité cal. massique}}{\text{masse molaire}}$			$ML^2T^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
	c_{mol}	J/(K.mol)	capacité cal. molaire
$c_{mol} = c \cdot M$	c	J/(K.kg)	capacité cal. massique
	M	kg / mol	masse molaire

■ L'eau a une masse molaire de 18 g et une capacité calorifique massique de 4,182 kJ/(kg.K). Sa capacité calorifique molaire est :
$c_{mol} = c \cdot M = 4,182\,\mathrm{kJ/(kg.K)} \cdot 0,018\,\mathrm{kg} = 75,28\,\mathrm{kJ/(K.mol)}$

21.3.3 Capacité calorifique massique

1. Capacité calorifique massique

c, joule par kelvin et par kilogramme ($\mathrm{J.K^{-1}.kg^{-1}}$) en unités SI : quantité de chaleur transférée à un kilogramme de substance conduisant à une variation de température de un kelvin.

Capacité calorifique massique $= \dfrac{\textbf{quantité de chaleur}}{\textbf{diff. température} \times \textbf{masse}}$			$\mathrm{L^2T^{-2}\Theta^{-1}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$c = \dfrac{\Delta Q}{m\Delta T}$	c	J / (K.kg)	capacité cal. massique
$\Delta Q = cm\Delta T$	Q	J	quantité de chaleur
	T	K	température
	m	kg	masse totale

▹ La différence de température peut aussi bien être mesurée en degré Celsius qu'en kelvin, sans modification des formules.

2. Écriture sous forme d'un rapport

La capacité calorifique massique correspond au rapport de la capacité calorifique et de la masse, ou à celui de la capacité calorifique molaire et de la masse molaire.

▹ Dans quelques ouvrages de thermodynamique, la capacité calorifique massique est appelée, maintenant à tort, chaleur spécifique.

Capacité calorifique massique $= \dfrac{\textbf{capacité cal. molaire}}{\textbf{masse molaire}}$			$\mathrm{L^2T^{-2}\Theta^{-1}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$c = \dfrac{C}{m}$	c	J / (K.kg)	capacité calorifique massique
	c_{mol}	J / (K.mol)	capacité calorifique molaire
$c = \dfrac{C}{n \cdot M}$	C	J/K	capacité calorifique
	n	mol	nombre de moles
$c = \dfrac{c_{mol}}{M}$	M	kg / mol	masse molaire

M La mesure de la capacité calorifique massique procède via des mesures de la capacité calorifique et de la masse de la substance considérée.

▹ Pour les capacités calorifiques massiques c de substances usuelles, voir partie 23.3, page 792.
Les valeurs de c se situent dans le domaine allant de 0,1 à 3 kJ/(kg.K) ; pour l'eau, c'est environ $4,2\,\mathrm{kJ/(kg.K)}$.

■ Un bloc de métal de 250 g a une capacité calorifique de 224 J/K. Que pouvons-nous dire de ce métal ?
$c = \dfrac{C}{m} = \dfrac{224\,\mathrm{J/K}}{0,25\,\mathrm{kg}} = 896\,\mathrm{J/(kg.K)}$
Cette valeur coïncide avec la capacité calorifique massique de l'aluminium.

21.3.3.1 Propriétés de la capacité calorifique massique

- La capacité calorifique massique dépend du matériau.
- La capacité calorifique massique est fonction de la température.
- La capacité calorifique massique tend vers l'infini pour une transition de phase du premier ordre ou une transition λ. Ainsi, dans ces cas, on donne la chaleur de vaporisation ou de fusion.
- Pour une transition de phase du second ordre, la capacité calorifique massique a une singularité au point critique.
- La capacité calorifique massique de toutes les substances est nulle au zéro absolu $T = 0$ K :

$$C_{\mathrm{T}\to 0} = 0$$

21.3.3.2 Mélange de substances

La capacité calorifique massique d'un mélange de substances a pour valeur la somme des capacités calorifiques individuelles divisée par la masse totale :

$$c = \frac{C}{m} = \frac{m_1c_1 + m_2c_2 + m_3c_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}$$

■ Un mélange de 30 g de NaCl (c = 867 J/(K.kg)) et de 5 g de KCl (c = 682 J/(kg.K)) a une capacité calorifique massique de :

$$\begin{aligned} c &= \frac{m_1c_1 + m_2c_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{0,03\,\mathrm{kg}\cdot 867\,\mathrm{J/(kg.K)} + 0,005\,\mathrm{kg}\cdot 682\,\mathrm{J/(kg.K)}}{0,03\,\mathrm{kg} + 0,005\,\mathrm{kg}} \simeq 841\,\mathrm{J/(kg.K)} \end{aligned}$$

21.3.3.3 Capacité calorifique massique des gaz

La capacité calorifique massique d'un gaz peut être mesurée, soit à pression constante c_P (par exemple à la pression atmosphérique, le volume variant avec la température), soit à volume constant c_V (la pression variant avec la température).

Notations :

c_V : le volume reste constant, la pression change.
c_p : la pression reste constante, le volume change.

▷ On définit aussi, par analogie, les capacités calorifiques totale (C_V, C_p) et molaire ($c_{V\,\mathrm{mol}}$, $c_{p\,\mathrm{mol}}$) à volume constant ou à pression constante.

La capacité calorifique massique à pression constante est plus élevée que celle à volume constant :

$$c_p > c_V$$

▷ La quantité de chaleur fournie à pression constante ΔQ, non seulement échauffe le système, mais le dilate ; ce travail d'extension du volume est effectué contre les forces de pression extérieure (pression atmosphérique, par exemple).

● La quantité de chaleur fournie n'est pas seulement utilisée pour échauffer le système mais aussi pour produire du travail contre la pression extérieure.

Échange de chaleur (à p = cste) = échange de chaleur (à V = cste) + trav. mécanique			
	Symbole	Unité	Dénomination
$c_p m\Delta T = c_V m\Delta T + p\Delta V$	c_p	J / (K.kg)	cap. cal. massique à p=cste
	c_V	J / (K.kg)	cap. cal. massique à V=cste
	m	kg	masse totale
	T	K	température
	p	Pa	pression
	V	m^3	volume

21.3.3.4 Capacité calorifique massique d'un gaz parfait

1. Écriture de la capacité calorifique massique

Pour un gaz à f degrés de liberté, la capacité calorifique molaire ou massique, à volume constant, est :

Capacités calorifiques massique et molaire d'un gaz parfait			
	Symbole	Unité	Dénomination
$c_{V\,\text{mol}} = R\dfrac{f}{2}$	$c_{V\,\text{mol}}$	J / (K.mol)	cap. cal. molaire à V=cste
$c_V = R_s\dfrac{f}{2}$	c_V	J / (K.kg)	cap. cal. massique à V=cste
$R = 8,314\,\text{J}/(\text{K mol})$	f	1	nombre de degrés de liberté
	R	J / (K.mol)	cste des gaz parfaits
	R_s	J / (K.kg)	cste massique du gaz

▷ Pour un gaz parfait, $pV = nRT \Longrightarrow p\Delta V = nR\Delta T$, à pression constante. Le remplacement de $p\Delta V$ conduit à :
$c_p m\Delta T = c_V m\Delta T + nR\Delta T$

2. Différence entre les capacités calorifiques massiques

- La différence entre les capacités calorifiques massiques à pression et volume constants est R_s, constante massique du gaz dépendant de sa masse molaire.

Différence des capacités cal. massiques = $\dfrac{\text{cste gaz parfaits}}{\text{masse molaire}}$			
	Symbole	Unité	Dénomination
$c_p - c_V = \dfrac{n}{m}R$	c_p	J / (K.kg)	cap. cal. massique à p=cste
$= \dfrac{R}{M} = R_s$	c_V	J / (K.kg)	cap. cal. massique à V=cste
$R = 8,314\,\text{J/K mol}$	n	mol	quantité de matière
	m	kg	masse totale
	M	kg / mol	masse molaire
	R	J / (K.mol)	cste des gaz parfaits
	R_s	J / (K.kg)	cste massique du gaz

- Les capacités calorifiques molaires d'un gaz parfait obéissent à la relation de Mayer :

$c_{p\,\text{mol}} - c_{V\,\text{mol}} = R$

Constante massique d'un gaz ou constante individuelle d'un gaz R_s : facteur de proportionnalité, dépendant du gaz, apparaissant dans l'équation d'état d'un gaz parfait ; R_s est utilisé en thermodynamique technique.

Constante des gaz parfaits R : facteur de proportionnalité, indépendant du gaz, apparaissant dans l'équation d'état d'un gaz parfait (→ *Gaz parfait*) :

$$R = 8,3145 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$$

Dans une expansion, le travail peut être décrit au moyen des coefficients de dilatation isobare et de compression isotherme.

3. Autre relation

Relation entre les capacités calorifiques massiques			**$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$c_p - c_v = T \dfrac{\alpha^2}{\chi \rho}$	c_p	J / (K.kg)	capacité cal. massique à p = cste
	c_V	J / (K.kg)	capacité cal. massique à V = cste
	T	K	température
	ρ	kg / m^3	masse volumique
	α	K^{-1}	coefficient de dilatation
	χ	Pa^{-1}	compressibilité

21.3.3.5 Rapport des capacités calorifiques

Rapport des capacités calorifiques γ : quantité sans dimension, quotient des capacités calorifiques (massiques ou molaires) à pression constante et à volume constant d'un gaz parfait :

$$\frac{c_p}{c_V} = \gamma$$

▷ Quelques ouvrages dénotent ce rapport des capacités calorifiques ainsi que la compressibilité, par κ, avec le danger d'une confusion possible ; notons toutefois que la compressibilité est une quantité dimensionnée contrairement au rapport des capacités calorifiques qui ne l'est pas.

Constante adiabatique et **indice d'adiabatique** : autres dénominations du rapport γ des capacités calorifiques massiques.

Pour un gaz parfait :

Rapport des capacités calorifiques = 1 + $\dfrac{2}{\text{degrés de liberté}}$			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\gamma = 1 + \dfrac{2}{f}$	γ	1	rapport des capacités cal.
	f	1	nombre de degrés de liberté

21.3.3.6 Capacité calorifique massique des solides et des liquides

Les valeurs de c_p, faciles à mesurer, sont le plus souvent exclusivement reportées dans les Tables.

▷ Les liquides montrent une dépendance différente avec la pression et la température.

La **règle de Dulong et Petit** donne d'une faqon simple la capacité calorifique massique des métaux :

● Dans un large domaine de température, tous les métaux ont une valeur constante de capacité calorifique molaire $c_p \approx 25 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$.

▷ La capacité calorifique massique se déduit alors comme étant :

Capacité cal. massique (à p = cste) $\approx \dfrac{25\,(\mathrm{J\,mol})/\mathrm{K}}{\text{masse molaire}}$				$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$
$c_p \approx \dfrac{25}{M}$	Symbole	Unité	Dénomination	
	c_p	J / (K.kg)	capacité cal. massique à p=cste	
	M	kg / mol	masse molaire	

▷ Cependant, cette règle n'est plus valable pour des températures inférieures à 200 K ; on sait, en effet, que $c \to 0$ pour $T \to 0$.

21.4 Changements d'état

21.4.1 Processus réversible et irréversible

1. État d'équilibre et processus thermodynamique

État d'équilibre : état stable pris spontanément par le système considéré après une durée suffisamment longue.

● Dans un sytème isolé, des transformations s'effectuent jusqu'à ce qu'un état d'équilibre se réalise.

Processus : transformation subie par un système, définie par un état initial, un état final ainsi que par un chemin menant de l'un à l'autre. Il est cependant d'un usage courant de confondre processus et transformation ; une transformation n'implique cependant *en toute rigueur*, que les états initial et final.

2. Processus irréversible

Processus ne permettant pas au système de revenir à son état initial par le même chemin parcouru.

▷ Toute transformation d'un état non équilibré vers un état d'équilibre est irréversible.

■ Deux plaques métalliques chauffées séparément, puis mises en contact, égalisent leurs températures. Le processus est irréversible.

Les processus irréversibles s'opèrent à travers des **états non équilibrés**.

● Les processus irréversibles augmentent le désordre microscopique (entropie) d'un système.

3. Processus réversible

Processus s'effectuant seulement via des états d'équilibre.

Tout processus réversible est une idéalisation qui, au sens strict, ne peut exister ; en effet, si un système est à l'équilibre, ses variables d'état étant indépendantes du temps, sont figées ; il ne peut macroscopiquement plus évoluer.

▷ Des processus réversibles peuvent être approximativement simulés par des changements infinitésimaux sur les variables, menés de manière telle que l'équilibre n'en soit que faiblement perturbé. Si ces changements se produisent assez lentement (transformations dites *quasi statiques*), le système disposera toujours d'une durée suffisante pour s'équilibrer.

Processus quasi réversible : processus au cours duquel sont seulement opérés des changements infimes.

4. Importance particulière des processus réversibles

L'importance des transformations réversibles réside dans le fait qu'à une étape quelconque du processus, on a toujours un état d'équilibre dont toutes les variables sont définies ; un changement global des variables

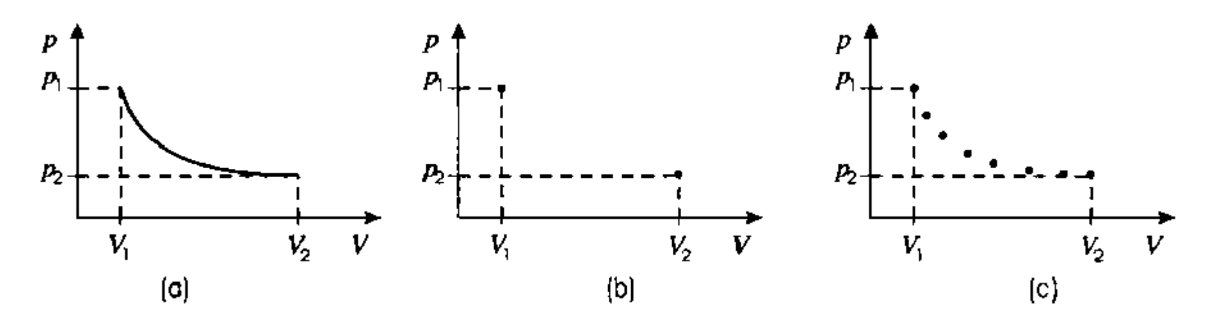


Fig. 21.2 : *Processus réversible* (a), *irréversible* (b) *et quasi réversible* (c).

s'obtiendra en intégrant par pas infinitésimaux, de l'état initial à l'état final, en suivant une infinité de transformations quasi statiques.

▷ Ceci n'est pas possible pour des processus irréversibles.

■ Une détente isotherme comme, par exemple, la dilatation d'un gaz dans un bain de chaleur peut être soit :

- une transformation réversible, si le piston est déplacé lentement
- une transformation irréversible, si le piston est soumis à des à-coups brusques

21.4.2 Processus isotherme

1. Caractéristiques d'un processus isotherme

Processus isotherme : processus qui s'effectue à **température constante**.

Dans le cas des gaz parfaits, les **isothermes** sont des **hyperboles** dans le plan (p, V) :

$$p \cdot V = \text{cste} \qquad \text{si } T = \text{cste}$$

Ainsi la pression décroît dans une dilatation isotherme (volume augmenté) et croît dans une compression isotherme (comme $1/V$) : c'est, **en fait, la loi de Boyle-Mariotte** (Fig. 21.3).

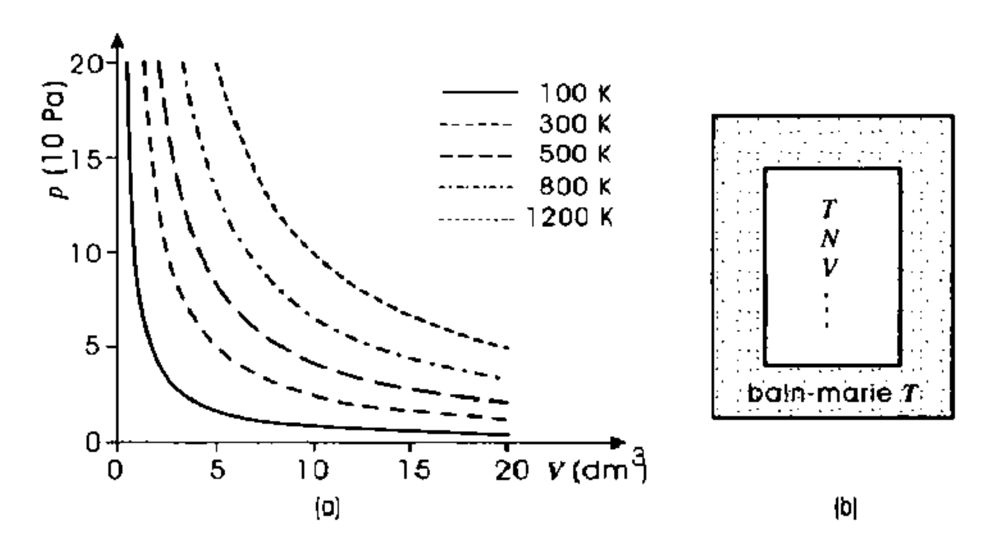


Fig. 21.3 : *Réseau d'isothermes d'un gaz parfait, en* (**a**) ; *système* **en** *équilibre avec un bain de chaleur, en* (b).

Quand T = cste, la variation d'énergie interne est nulle.

Énergie interne = cste si T = cste			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Delta U = C_V \Delta T = 0$	U	J	énergie interne
$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$	C_V	J / K	capacité calorifique
$\Delta Q = -\Delta W$	T	K	température
	Q	J	chaleur
	W	J	travail

- Dans un processus isotherme, la somme de la chaleur reçue par le système (gaz) et du travail des forces extérieures sur ce même système, est nulle.

▷ Le signe négatif entre travail et chaleur découle du premier principe de la thermodynamique. Si de la chaleur est absorbée (quantité positive) par le gaz, alors un transfert équivalent de travail est fourni (quantité négative) par lui : la somme est nulle.

2. Travail et entropie pour un processus isotherme

Quand T = cste, le travail effectué réversiblement par les forces extérieures sur le gaz, d'un état 1 à un état 2, est donné par :

$$\begin{aligned} W_{12} &= p_1 V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = p_2 V_2 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \\ &= nRT \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = mR_S T \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \end{aligned}$$

Notons que le système reçoit du travail ($W_{12} > 0$) de l'extérieur dans une compression ($V_1 > V_2$) ; il en fournit ($W_{12} < 0$) dans une détente ($V_1 < V_2$).
En introduisant les pressions :

$$\begin{aligned} W_{12} &= p_1 V_1 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = p_2 V_2 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \\ &= nRT \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = mR_S T \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \end{aligned}$$

La variation d'entropie est :

$$\Delta S = C_p \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) + C_V \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

21.4.3 Processus isobare

1. Caractéristiques d'un processus isobare

Processus isobare : processus pour lequel la **pression reste constante.**

Les **isobares** (p = cste) sont des **lignes droites** parallèles à l'axe des volumes dans le plan (V, p) (voir Fig. 21.4).
La température croît dans une détente isobare (augmentation de volume) : le système évolue d'une isotherme basse vers une plus élevée.

▷ La relation linéaire entre volume et température correspond à la **loi de Gay-Lussac.**

Dans une transformation isobare, le **travail des forces extérieures** au système est :

$$W_{12} = p(V_1 - V_2)$$

2. Chaleur et entropie pour un processus isobare

Comme p = cste, l'énergie calorifique reçue est :

Chaleur $\propto$ différence de température			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$Q_{12} = mc_p(T_2 - T_1)$	Q	J	chaleur
$= C_p(T_2 - T_1)$	m	kg	masse du gaz
$= nc_{p\,\mathrm{mol}}(T_2 - T_1)$	n	mol	nombre de moles
	c_p	J / (K.kg)	cap. cal. massique à p=cste
	C_p	J / K	capacité calorifique
	$c_{p\,\mathrm{mol}}$	J / (K.mol)	capacité calorifique molaire
	T	K	température

De même, comme p = cste, la variation d'entropie est :

$$\Delta S = C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = C_p\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

21.4.4 Processus isochore

1. Caractéristiques d'un processus isochore

Processus isochore : processus qui s'effectue à **volume constant**.

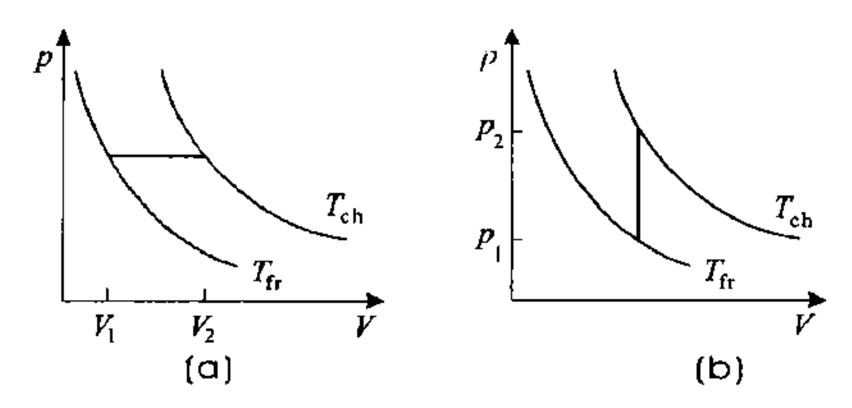


Fig. 21.4 : *Processus isobare en* (a) *et processus isochore en* (b) *conduits entre deux isothermes T_{fr} et T_{ch}. Au cours d'une détente isobare, le système fournit du travail à l'extérieur ($W_{12} < 0$) et reçoit de la chaleur ($Q_{12} > 0$) ; lors d'une augmentation isochore de pression, il reçoit de la chaleur ($Q_{12} > 0$) sans dépense de travail ($W_{12} = 0$).*

Les **isochores** (V = cste) sont des **lignes droites** parallèles à l'axe des pressions dans le plan (V, p).
La pression augmente avec la température ; le système évolue d'une isotherme basse vers une plus élevée.

☞ La relation linéaire entre pression et température correspond à la loi de Gay-Lussac.

Comme V = cste, le **travail des forces extérieures** au système est :

$$\Delta W = -p\Delta V = 0$$

2. Chaleur et entropie pour un processus isochore

Comme V = cste, la variation d'énergie calorifique correspond à la variation d'énergie interne.

Chaleur ∝ différence de température				**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$Q_{12} = mc_V(T_2 - T_1)$ $= C_V(T_2 - T_1)$ $= nc_{V\,\mathrm{mol}}(T_2 - T_1)$ $= \Delta U$	Q	J	chaleur	
	m	kg	masse de gaz	
	n	mol	nombre de moles	
	c_V	J / (K.kg)	cap. cal. massique à V=cste	
	C_V	J / K	capacité calorifique	
	$c_{V\,\mathrm{mol}}$	J / (K.mol)	capacité cal. molaire	
	T	K	température	
	U	J	énergie interne	

De même, comme V = cste, la variation d'entropie est :

$$\Delta S = C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = C_V \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

21.4.5 Processus adiabatique (ou isentropique)

1. Caractéristiques d'un processus isentropique

Processus isentropique : processus dans lequel l'**entropie reste constante**.

Processus adiabatique : processus dans lequel **aucun transfert de chaleur** n'est effectué avec l'environnement.

■ Des réactions se produisant dans un système isolé (par exemple, système dans un vase Dewar Fig. 21.5 (b)) sont adiabatiques.

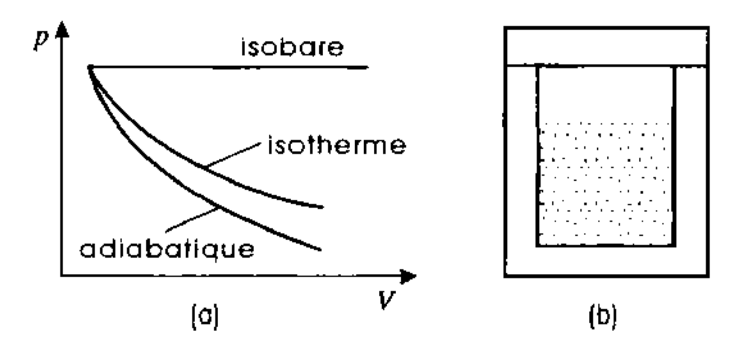


Fig. 21.5 : *Diagramme de Clapeyron (p, V) pour des processus isobare, isotherme, adiabatique en* (a) ; *système isolé en* (b).

● En général, les qualificatifs *adiabatique* et *isentropique* sont souvent synonymes. Cependant, s'il est vrai que tout processus adiabatique *réversible* est isentropique, la réciproque n'est pas vraie.

▷ Aux basses températures, lors de la démagnétisation de cristaux, les processus adiabatique et isentropique se distinguent.

Dans un diagramme (p, V), les **isentropes** – ou les **adiabatiques** – ont des pentes plus raides que les **isothermes** (voir Fig. 21.5 (a)), puisque pour elles :

$$pV^\gamma = \text{cste}, \qquad \text{avec } \gamma > 1$$

▷ Cette relation, connue sous le nom de formule de Laplace, ne s'applique en toute rigueur qu'à un processus adiabatique *réversible.*

2. Indice d'adiabatique

appelé aussi **exposant** ou **constante adiabatique** γ : quantité sans dimension désignant la puissance à laquelle est élevé le volume dans l'équation adiabatique. Il est égal au rapport des capacités calorifiques à pression constante et à volume constant.

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} = \frac{c_{p\,\text{mol}}}{c_{V\,\text{mol}}}$$

- Pour un gaz parfait monoatomique : $\gamma = 5/3$.
- Les capacités calorifiques massiques c_p et c_V ont pour différence la constante massique R_s des gaz : $c_p - c_V = R_s$
- De même, les capacités calorifiques molaires ont pour différence la constante R des gaz parfaits (relation dite de Mayer) : $c_{p\,\text{mol}} - c_{V\,\text{mol}} = R$

Au cours d'un processus adiabatique, les variations d'entropie et de chaleur sont nulles :

$$\Delta Q = 0 \qquad \Delta S = 0$$

3. Processus adiabatique et énergie interne

Le travail effectué dans un changement de volume est égal à la variation d'énergie interne.

Chaleur ∝ différence de température			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$W_{12} = mc_V(T_2 - T_1)$ $= C_V(T_2 - T_1)$ $= \Delta U$	Q	J	chaleur
	m	kg	masse du gaz
	c_V	J / K kg	capacité cal. massique à V = cste
	C_V	J / K	capacité calorifique
	T	K	température
	U	J	énergie interne

4. Processus polytropique

a) Caractéristique d'un processus polytropique : processus pour lequel le produit pV^n reste constant. **Exposant polytropique** n : quantité sans dimension désignant la puissance à laquelle est élevé le volume dans l'équation polytropique.

Équation polytropique			
	Symbole	Unité	Dénomination
$pV^n = \text{cste}$ $TV^{n-1} = \text{cste}$	p	Pa	pression
	V	m^3	volume
	n	1	exposant polytropique
	T	K	température

Les transformations polytropiques peuvent être vues comme une généralisation des cas mentionnés jusqu'ici :

cas particuliers de processus polytropique		
$n = 0$	$p = \text{cste}$	processus isobare
$n = 1$	$pV = nRT = \text{cste}$	processus isotherme
$n = \gamma$	$pV^\gamma = \text{cste}$	processus adiabatique
$n \to \infty$	$p^{1/\infty}V = \text{cste}$	processus isochore

▷ La plupart des cas sont restreints à $1 < n < \gamma$ et concernent des systèmes pour lesquels de la chaleur est échangée avec l'extérieur, mais sans équilibration de ces échanges.

■ Les transformations se produisant rapidement dans des systèmes non isolés appartiennent à cette classe.

Dans le diagramme (p, V), les polytropes avec $1 < n < \gamma$ ont des pentes plus raides que les isothermes, mais plus faibles que les isentropes $pV^\gamma = \text{cste}$.

b) Travail, chaleur et entropie pour un processus polytropique.

Travail des forces extérieures :

$$W_{12} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{n-1}$$

Chaleur produite :

Chaleur $\propto$ différence de température			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$Q_{12} = mc_V(T_2 - T_1)\frac{n-\gamma}{n-1} = C_V(T_2 - T_1)\frac{n-\gamma}{n-1}$$	Q	J	chaleur
	m	kg	masse du gaz
	c_V	J / K kg	cap. cal. massique à V = cste
	C_V	J / K	capacité calorifique
	T	K	température
	n	1	exposant polytropique
	γ	1	indice d'adiabatique

Variation d'entropie :

$$\Delta S = C_V \frac{n-\gamma}{n-1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

21.4.6 États d'équilibre

État d'équilibre, état atteint de lui-même par un système, après une durée suffisante.

L'**état d'équilibre** est caractérisé, selon la transformation indiquée après **le** mot **état** dans la classification ci-dessous, par :

état isolé isochore : maximum d'entropie S
état isotherme-isobare : minimum d'enthalpie libre $G = U + pV - TS$
état isotherme-isochore : minimum d'énergie libre $F = U - TS$
état adiabatique-isobare : minimum d'enthalpie $H = U + pV$
état adiabatique-isochore : minimum d'énergie interne U

Différentielles des potentiels thermodynamiques			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$dU = -p\,dV + T\,dS$	U	J	énergie interne
	F	J	énergie libre
$dF = -p\,dV - S\,dT$	H	J	enthalpie
	G	J	enthalpie libre
$dH = V\,dp + T\,dS$	p	Pa	pression
	V	m^3	volume
$dG = V\,dp - S\,dT$	T	K	température
	S	J / K	entropie

Aperçu des critères d'équilibre :

Le système est ...	isotherme	isobare	isochore	adiabatique	isolé
entropie S maximum			$dV = 0$		$dU = 0$
énergie interne U minimum			$dV = 0$	$\delta Q = 0$	
énergie libre F minimum	$dT = 0$		$dV = 0$		
enthalpie H minimum		$dp = 0$		$\delta Q = 0$	
enthalpie libre G minimum	$dT = 0$	$dp = 0$			

21.5 Principes de la thermodynamique

Principe : loi à caractère général régissant un ensemble de phénomènes physiques.

■ Le Premier Principe de la thermodynamique stipule essentiellement que l'énergie ne peut être ni détruite, ni créée.

21.5.1 Principe zéro de la thermodynamique

État d'équilibre : état macroscopique d'un système isolé atteint de lui-même après une durée suffisante.

● À l'équilibre, les propriétés macroscopiques ne changent plus au cours du temps.

Si deux systèmes entrent en contact, des échanges se produiront jusqu'à ce que les variables **intensives** (pression, température, potentiel chimique) caractéristiques des deux systèmes, aient même valeur.

▷ L'équilibre thermique nécessite des températures identiques pour tous deux ; il a été précédé d'un **échange de chaleur** entre les deux systèmes.

Le **Principe zéro de la thermodynamique** concerne l'équilibre thermique des systèmes entre eux ; il s'énonce :

● Deux systèmes en équilibre thermique avec un troisième, sont en équilibre thermique entre eux.

▷ La thermométrie repose sur ce principe.

21.5.2 Premier principe de la thermodynamique

Quantité conservée : une propriété du sytème qui ne change pas.

■ L'énergie totale E d'un système isolé ($\rightarrow$ *Système isolé*) est une quantité conservée.

▹ Une quantité conservée peut être utilisée pour caractériser un état macroscopique.

En physique, le principe de la conservation de l'énergie a une importance fondamentale.

● Toutes les expériences confirment la validité de ce principe aussi bien à l'échelle macroscopique que microscopique.

▹ En plus du travail reçu ou fourni par un système, il faut aussi tenir compte de la chaleur échangée avec l'environnement.

Énergie interne U : énergie présente dans les degrés de liberté internes d'un gaz.

▹ Pour un système isolé, l'énergie interne est identique à l'énergie totale du système.

1. Formulation du premier principe

Premier principe de la thermodynamique : la variation totale d'énergie d'un système procède par échange de travail et de chaleur.

● Ainsi, la variation d'énergie interne lors d'une transformation *réversible* ou *irréversible* d'un système est donnée par la somme des quantités de travail ΔW et de chaleur ΔQ échangées avec l'extérieur.

Énergie interne = travail + chaleur			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Delta U = \Delta W + \Delta Q$	U	J	énergie interne
	W	J	travail
	Q	J	quantité de chaleur

- $\Delta W < 0$ est le travail *fourni* par le système *à* l'extérieur.
- $\Delta W > 0$ est le travail *reçu* par le système *de* l'extérieur.

▹ Il est fréquent de trouver une définition inverse sur le signe de W dans la littérature.

Le travail et la chaleur échangés avec l'extérieur dépendent de la transformation qu'a subie le système.

▹ Ceci a, par exemple, son importance dans les processus chimiques pour le concept même de réaction.

▹ Les quantités infinitésimales de travail et de chaleur ne sont pas des différentielles totales, aussi sont-elles souvent écrites avec un δ pour signifier une variation infinitésimale ; une différence petite et finie de quantité est notée avec un Δ.

▹ Par contre, la différentielle de l'énergie interne est totale ; elle est donc notée $\mathrm{d}U$:
$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$

2. Travail dans un processus réversible

Travail = − pression × variation de volume			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Delta W_{rev} = -p\,\Delta V$	W	J	travail
$W_{rev} = -\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$	p	Pa	pression
	V	m^3	volume

▷ Dans un processus irréversible, il est possible d'avoir $\Delta W_{irr} = 0$, par exemple.

3. Chaleur dans un processus réversible

Chaleur = température × variation d'entropie			$\mathbf{ML^2T^{-2}}$
$\Delta Q_{rev} = T\,\Delta S$	Symbole	Unité	Dénomination
$Q_{rev} = \int_{S_1}^{S_2} T \; dS$	Q T S	J K J / K	chaleur température entropie

▷ Ceci n'est valable que dans les cas de **réversibilité**.

Une description en terme de capacité calorifique C_V à volume constant, valable seulement quand il y a réversibilité, a pour forme :

Chaleur = capacité cal. × variation de température			$\mathbf{ML^2T^{-2}}$
$\Delta Q_{rev} = C_V\,\Delta T$	Symbole	Unité	Dénomination
$Q_{rev} = \int_{T_1}^{T_2} C_V \; dT$	Q C_V T	J J / K K	chaleur capacité cal. à V = cste température

● Ces expressions ne s'appliquent qu'à des processus réversibles ; rappelons que le premier principe de la thermodynamique, lui, est valable dans tous les cas.

21.5.2.1 Autres formulations du premier principe de la thermodynamique

Sélection de divers énoncés, tous équivalents, de ce premier principe :

- **Dans un bilan en énergie, les quantités de travail et de chaleur échangées par un système avec l'extérieur, se combinent ensemble pour donner la variation totale d'énergie interne du système.**

▷ Le fait que l'on additionne algébriquement travail et chaleur découle des travaux de R. Mayer (1814–1878) and J.P. Joule (1818–1889) qui ont prouvé, par des expériences précises, que la chaleur est une forme d'énergie.

- **L'énergie interne U d'un système est une fonction d'état.**

▷ Ceci signifie que l'énergie totale contenue dans un système est restée identique après avoir repris le même état macroscopique.

- **Le mouvement perpétuel de première espèce est interdit.**

▷ Le mouvement perpétuel de première espèce conduirait à une machine qui, d'une façon permanente, génèrerait de l'énergie sans changer son milieu extérieur.

- **La variation d'énergie interne lors d'un changement infinitésimal quelconque de l'état est une différentielle totale :**

$$dU = \delta W + \delta Q$$

▷ La variation d'énergie interne dépend seulement de l'état initial et de l'état final, mais non du chemin parcouru.

21.5.2.2 Représentation microscopique

Si aucune quantité de travail, ni aucune quantité de chaleur n'est transférée au système, alors l'énergie cinétique moyenne des molécules, $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$, reste inchangée.

Lorsqu'un système est échauffé à travers les parois d'un cylindre, sans que du travail soit produit, alors l'énergie cinétique des molécules augmente par collisions avec les parois.

▷ Ainsi, dans ces collisions, de l'énergie est transférée des parois aux molécules. Il s'ensuit un échauffement du système et un refroidissent des parois.

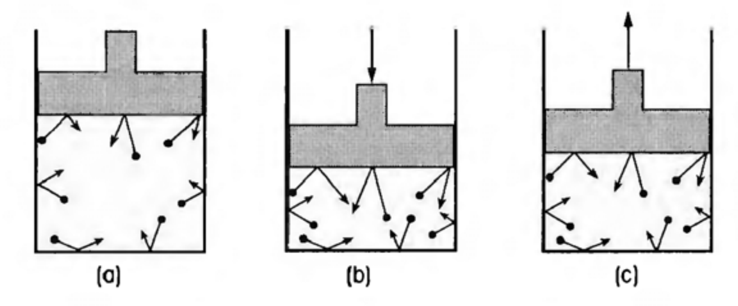


Fig. 21.6 : *Modification de la vitesse moyenne des molécules par compression, en* (b), *et expansion, en* (c).

Si le système effectue un travail de détente, c'est à dire si on laisse le piston se déplacer vers l'extérieur, alors les molécules perdent de l'énergie cinétique lors des chocs sur le piston mobile. Les molécules ralentissent et le système se refroidit (Fig. 21.6).

■ Une bouteille de gaz se refroidit au fur et à mesure que le gaz s'évacue.

Si un travail de compression est effectué sur le système, c'est à dire si le piston est déplacé vers l'intérieur du cylindre, alors les molécules, choquant le piston qui se déplace, acquièrent un supplément de quantité de mouvement ; leur énergie cinétique moyenne augmente (voir Fig. 21.6).

▷ Dans une détente irréversible de Joule-Thomson ($\rightarrow$ *Liquéfaction de gaz – effet Joule-Thomson*), les gaz réels s'échauffent ou (selon leur température d'inversion) se refroidissent.

21.5.3 Deuxième principe de la thermodynamique

● Toutes les expériences confirment qu'à l'équilibre, l'entropie atteint une valeur maximum :
$S = S_{max}$ à l'équilibre

1. Formulation du deuxième principe

Il n'existe aucun processus dans la nature qui diminue l'entropie totale.
L'entropie ne peut qu'augmenter pour un système thermodynamiquement isolé soumis à des transformations irréversibles.

▷ Après un changement d'état, le système regagne à nouveau un équilibre, augmentant son entropie :
$\Delta S \geq 0$

Pour un sous-système, $\Delta S < 0$ peut être vrai, mais seulement s'il y a eu dépense de travail.

▷ Le système qui fournit ce travail augmente son entropie d'une façon correspondante.

Processus réversible : l'entropie reste constante :

$$dS = 0$$

Processus irréversible : l'entropie augmente

$$dS > 0$$

2. Autres formulations du deuxième principe

- **Le mouvement perpétuel de deuxième espèce est impossible.** Il conduirait, en effet, à une machine qui produirait du travail en refroidissant un seul réservoir de chaleur, c'est à dire transformerait complètement la chaleur en travail.

▷ Un deuxième réservoir, qui s'échaufferait, est toujours nécessaire.

- **Il n'existe aucun processus pour convertir de l'anergie en exergie.**

▷ La chaleur n'est pas complètement convertible en travail mécanique, seule sa partie exergique peut l'être.

- **Tout système macroscopique isolé tend vers l'état le plus probable.**

▷ Cet état est caractérisé par le plus grand nombre de possibilités de réalisation, c'est à dire par l'entropie la plus élevée (désordre augmenté).

21.5.4 Troisième principe de la thermodynamique

Tout solide à température finie possède une énergie d'excitation intrinsèque correspondant à de la chaleur.

■ Les oscillations du réseau cristallin constituent des excitations dépendant de la température.

Au zéro absolu, un corps n'a plus aucune énergie d'excitation.

■ Les oscillations du réseau sont gelées.

▷ Cependant, à $T = 0$, l'énergie cinétique n'est pas nulle car les atomes possèdent quantiquement une **énergie du point zéro**.

1. Troisième principe de la thermodynamique

Ce principe permet de définir la valeur absolue de l'entropie.

- **Au zéro absolu, tout corps à une entropie nulle :**
  $S = 0$ J/K pour $T = 0$ K

▷ Les verres à spin constituent une exception.

2. Autres formulations du troisième principe

- La capacité calorifique de toute substance au zéro absolu est :
  $c_{T=0} = 0$ J/(K kg)

- Le zéro absolu ne peut jamais être expérimentalement atteint.

▷ Toute quantité de chaleur (énergie) reçue, la plus infime soit-elle, produit une augmentation finie de température.

21.6 Cycle de Carnot

21.6.1 Processus cyclique

Cycle : processus périodique consistant, après un certain nombre de transformations, au retour à l'état initial du système (voir Fig. 21.7).

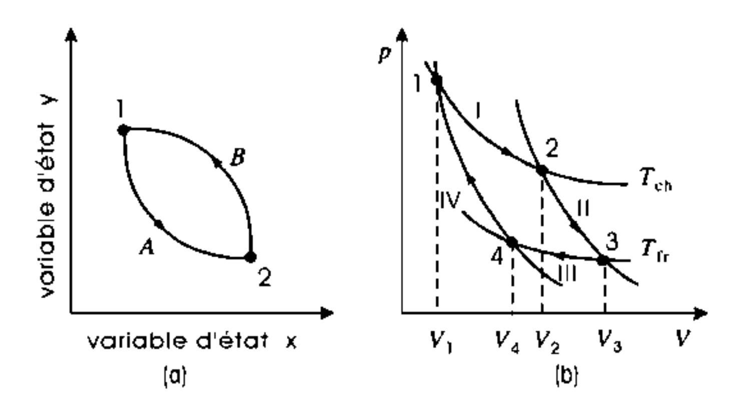


Fig. 21.7 : *Représentation schématique d'un cycle en général* (a) *et du cycle de Carnot en particulier* (b).

Cycle de Carnot : cycle réversible introduit par Carnot en 1824 avec un gaz parfait comme fluide caloporteur de la chaleur (appelé aussi *agent moteur*).

Thermostat : source de chaleur à température invariable capable de fournir ou de recevoir de la chaleur sans modification.

■ Mer, lac, grosse chaudière, condenseur.

Le cycle de Carnot permet la production de travail par échange de chaleur entre deux thermostats à des températures différentes.

21.6.2 Machine thermique

Machine thermique : toute machine qui produit du travail à partir d'échanges de chaleur.

■ Moteurs à explosion, machines à vapeur, turbines.

▷ Le processus inverse, c'est à dire le transfert de chaleur d'une source froide à une source chaude est également possible, mais en fournissant du travail au système.

Machine ditherme : machine thermique qui, au cours d'un cycle, échange de la chaleur avec deux thermostats aux températures différentes. Une machine fonctionnant suivant un cycle de Carnot est ditherme.

Réfrigérateur et **pompe à chaleur** sont des machines thermiques dithermes qui transfèrent de la chaleur d'une source froide à une source chaude.

■ Réfrigérateurs, conditionneurs à air, thermopompes.

▷ Réfrigérateur et pompe à chaleur se différencient dans l'utilisation qui est faite des sources de chaleur : on se sert du réfrigérateur pour le refroidissement d'un milieu, de la pompe à chaleur pour un échauffement.

- Une machine de Carnot peut être utilisée pour entretenir des basses températures ou pour liquéfier de l'air en petite quantité (→ *Liquéfaction de gaz*).

21.6.3 Étapes d'un cycle de Carnot

Le cycle de Carnot comporte quatre transformations **réversibles** successives effectuées sur le fluide caloporteur (gaz parfait) (Fig. 21.8) :

- une détente isotherme à une température T_1
- une détente adiabatique avec refroidissement jusqu'à T_2 ($T_2 < T_1$)
- une compression isotherme à la température T_2
- une compression adiabatique avec réchauffement jusqu'à T_1

Les sources de chaleur sont deux thermostats aux températures T_1 (source chaude) et T_2 (source froide).

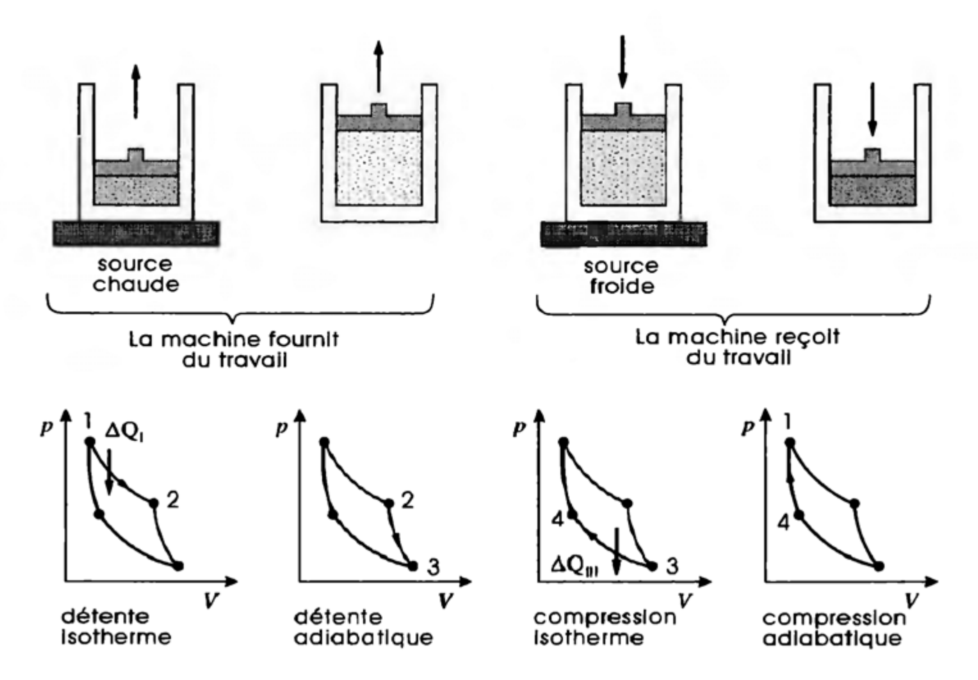


Fig. 21.8 : *Étapes d'un cycle de Carnot.*

1. Première étape

Une détente isotherme : du volume V_1 au volume V_2 à température constante T_1. Pour l'isotherme, on a :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

L'énergie interne d'un gaz parfait ne varie pas à température constante :

$$\Delta U_I = \Delta W_I + \Delta Q_I = 0$$

La quantité de chaleur reçue par le fluide caloporteur est :

$$\Delta Q_I = -\Delta W_I = NkT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

2. Deuxième étape

Une détente adiabatique : de V_2 à V_3 du fluide caloporteur isolé qui se refroidit jusqu'à la température T_2 de la source froide. Si γ est l'indice d'adiabatique du fluide, alors :

$$\frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Le travail fourni par le gaz est :

$$\Delta W_{II} = \Delta U_{II} = C_V \,(T_2 - T_1)$$

▷ Comme $\Delta Q_{II} = 0$ (processus adiabatique), le travail effectué dans la détente est pris sur l'énergie interne.

3. Troisième étape

Une compression isotherme : de V_3 à V_4 du fluide caloporteur à la température T_2.

Comme pour la transformation 1, la quantité de chaleur fournie est :

$$\Delta Q_{III} = -\Delta W_{III} = NkT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}$$

▷ Le fluide caloporteur (système gaz) perd cette quantité de chaleur.

4. Quatrième étape

Une compression adiabatique : de V_4 à V_1, avec échauffement jusqu'à la température T_1.

▷ Le système revient à son état initial.

Le travail reçu par le gaz est :

$$\Delta W_{IV} = \Delta U_{IV} = C_V \,(T_1 - T_2)$$

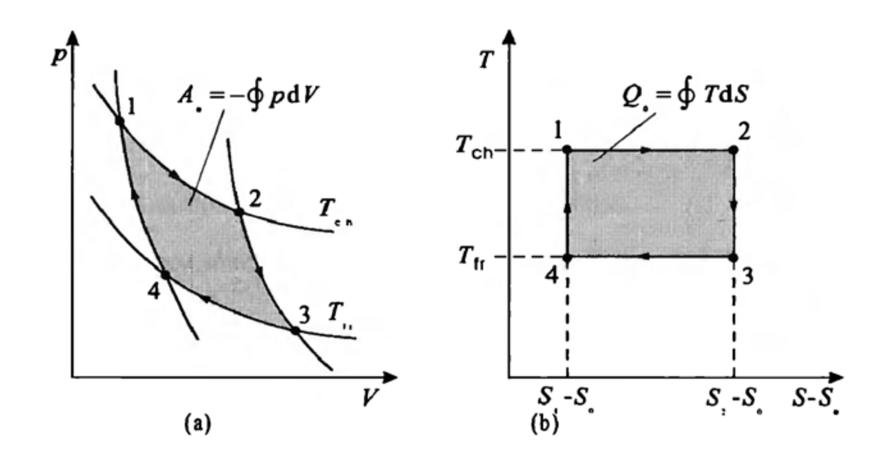


Fig. 21.9 : *Cycle de Carnot en diagrammes* (p, V), *en* (a), *et* (T, S), *en* (b).

Dans le plan (T, S), le cycle de Carnot est un rectangle construit sur les droites $T =$ cste (isothermes) des

transformations I et III, et S = cste (adiabatiques) des transformations II et IV (Fig. 21.9).

21.6.4 Bilan d'énergie et rendement d'un cycle de Carnot

Variation totale de l'énergie interne :

$$\Delta U_{\text{total}} = \underbrace{\Delta Q_I + \Delta W_I}_{I} + \underbrace{\Delta W_{II}}_{II} + \underbrace{\Delta Q_{III} + \Delta W_{III}}_{III} + \underbrace{\Delta W_{IV}}_{IV} = 0$$

● L'énergie interne n'a pas variée.

▷ C'est une affirmation qui traduit le premier principe de la thermodynamique.

Le travail fourni au cours du cycle est :

$$\Delta W = -Nk\,(T_1 - T_2)\ln\frac{V_2}{V_1} = -\Delta Q$$

▷ Travail fourni et chaleur reçue se compensent.

Rendement thermique : rapport du travail fourni à la quantité de chaleur perdue par la source chaude.

$\textbf{Rendement} = \mathbf{1} - \dfrac{\textbf{basse température}}{\textbf{haute température}}$			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\eta = 1 - \dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}$	η	1	rendement
	T_2	K	basse température
	T_1	K	haute température

▷ Le complément à 1 est dû à la part de chaleur non-convertible. (→ *Anergie*)

▷ Le rendement d'une machine de Carnot est **indépendant** du fluide caloporteur.

21.6.5 Chaleur réduite

Chaleur réduite : quotient de la chaleur à la température.

▷ La définition conduit directement à la notion d'entropie.

Dans un cycle de Carnot, la somme des chaleurs réduites est égale à zéro. Ceci est connu comme l'égalité de Clausius pour une machine ditherme réversible :

$$\frac{\Delta Q_I}{T_1} + \frac{\Delta Q_{III}}{T_2} = 0$$

▷ Les chaleurs réduites des processus II et IV sont nulles (adiabatiques).

● La chaleur réduite est une quantité conservée dans un cycle petit, quelconque et qui peut être parcouru réversiblement.

● Tout processus cyclique réversible peut être décomposé en une série de cycles de Carnot infinitésimaux (Fig. 21.10) :

$$\oint \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = 0$$

▷ Ceci est l'égalité de Clausius généralisée, autre forme d'énoncé du deuxième principe de la thermodynamique.

Fig. 21.10 : *Décomposition en cycles de Carnot élémentaires montrée dans une représentation en diagrammes* (p, V), *en* (**a**), *et* (T, S), *en* (**b**).

De la conservation de la chaleur réduite dans un cycle réversible, on peut conclure que la chaleur réduite, dans un processus réversible conduisant un système d'un état initial à un état final, est indépendante du chemin suivi.

▷ La chaleur réduite $\delta Q_{\mathrm{rev}}/T$ est une différentielle totale.

La notion d'entropie découle directement du concept de chaleur réduite :

$$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q_{\mathrm{rev}}}{T} \qquad S_1 - S_0 = \int_0^1 \frac{\delta Q_{\mathrm{rev}}}{T}$$

21.7 Machines thermiques

21.7.1 Cycles direct et inverse

1. Cycle direct

ou **moteur** : cycle parcouru dans le diagramme (p, V) dans le sens horaire, comme celui représenté sur la **Fig. 21.9**.

■ Le cycle de Carnot vu précédemment est un cycle direct (ou moteur).

● Dans un cycle moteur, de la chaleur est prise à la source chaude pour produire du travail ; une partie de la chaleur est restituée à la source froide.

La somme des quantités de chaleur reçues par le système (fluide caloporteur) est positive pour le processus cyclique ; le travail total fourni par le système est négatif (suivant la convention adoptée ici, concernant les mots *reçu* et *fourni*) :

$$\Delta Q > 0 \qquad \Delta W < 0$$

■ Les machines thermiques conçues sur des cycles moteurs, sont dites *motrices*.

2. Cycle inverse

ou **opérateur** ou encore, **récepteur** : cycle parcouru dans le diagramme (p, V) dans le sens trigonométrique, ou, si on préfère, anti-horaire (Fig. 21.11).

● Dans un cycle inverse, du travail est fourni au système pour transférer de la chaleur de la source froide à la source chaude.

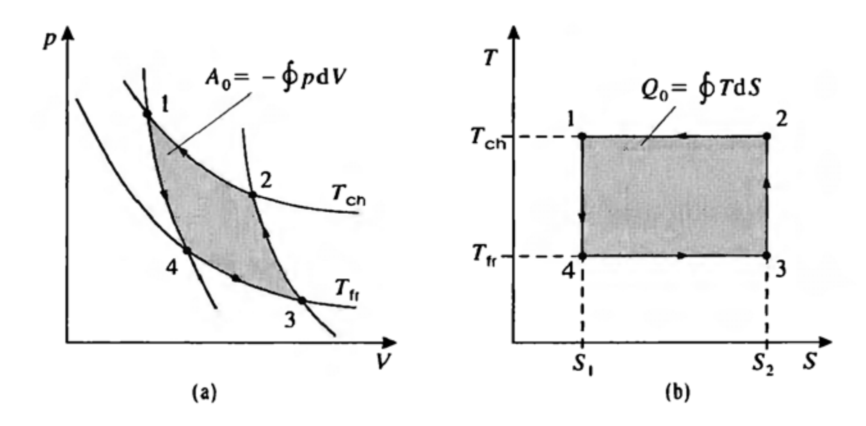


Fig. 21.11 : *Cycle inverse en diagramme de Clapeyron, en* (a), *et isentropique, en* (b).

La somme des quantités de chaleur fournies par le système (fluide caloporteur) est négative pour le processus cyclique ; le travail total reçu par le système est positif :

$$\Delta Q < 0 \qquad \Delta W > 0$$

■ Les pompes à chaleur, comme toute machine thermique opérant suivant un cycle inverse, sont dites *opératrices*.

21.7.2 Pompe à chaleur et machine réfrigérante

1. Pompe à chaleur

ou **thermopompe** : machine thermique opérant suivant un cycle inverse et qui transfère (= *pompe*) de la chaleur de la source froide vers la source chaude, en recevant du travail de l'extérieur.

▷ Les pompes à chaleur peuvent être utilisées aussi bien pour produire des basses températures, comme machines réfrigérantes (→ *Production des basses températures*), que pour le chauffage d'une maison à partir d'un environnement plus froid.

■ Les pompes à chaleur installées dans les habitations peuvent fonctionner comme appareils de chauffage en hiver ou comme appareils de refroidissement de l'air (climatiseurs) en été. Les deux types d'utilisation se font avec apport d'énergie extérieure.

2. Puissance frigorifique spécifique d'une pompe à chaleur

ε_W, quantité sans dimension : rapport de la chaleur transférée à la source chaude au travail reçu par le système ; est encore appelé coefficient d'amplification frigorifique.

Puissance frigorifique spécifique d'une pompe à chaleur			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\varepsilon_W = \frac{\lvert Q\rvert}{W}$$	ε_W	1	coef. de performance de la pompe
	Q	J	chaleur transférée
	W	J	travail reçu
$$\varepsilon_{W,C} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\eta_C}$$	$\varepsilon_{W,C}$	1	coef. de performance de Carnot
	T_1	K	source à temp. élevée
	T_2	K	source à temp. basse
	η_C	1	rendement de Carnot

- La puissance frigorifique spécifique ε_W, même dans un cycle inverse de Carnot, est toujours supérieur à 1.
- Plus la différence de température est faible, plus le coefficient de performance ε_W est élevé.

3. Machine réfrigérante et son rendement

Machine réfrigérante : machine thermique opérant suivant le même principe que les pompes à chaleur et qui prend de la chaleur à la source froide pour la transférer à la source chaude, en recevant du travail de l'extérieur.

▷ Les pompes à chaleur et les machines réfrigérantes se distinguent seulement par l'utilisation qui en est faite. L'intérêt de la pompe à chaleur réside dans le transfert de chaleur vers la source chaude, celui de la machine réfrigérante dans le refroidissement de la source froide.

Coefficient de performance d'une machine réfrigérante ε_W, quantité sans dimension : rapport de la chaleur extraite de la source froide au travail reçu de l'extérieur ; est encore appelé puissance frigorifique ou désigné par COP (*Coefficient Of Performance*).

Coefficient de performance d'une machine réfrigérante			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$\varepsilon_W = \dfrac{\lvert Q\rvert}{W}$	ε_W	1	coeff. de performance (machine réfrig.)
	Q	J	chaleur transférée
	W	J	travail reçu
$\varepsilon_{W,C} = \dfrac{T_2}{T_1 - T_2}$	$\varepsilon_{W,C}$	1	coeff. de performance de Carnot
	T_1	K	source à temp. élevée
	T_2	K	source à temp. basse

- Le coefficient de performance ε_K, même pour un cycle inverse de Carnot, est toujours supérieur à 1.
- Plus la différence de température est faible, plus le coefficient de performance ε_W est élevé.

21.7.3 Cycle de Stirling

1. Cycle de Stirling

Il consiste en deux isothermes et deux isochores parcourues dans le sens moteur (Fig. 21.12).

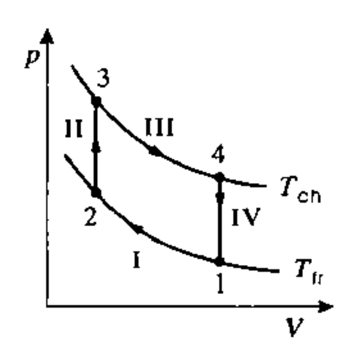


Fig. 21.12 : *Cycle de Stirling. Les étapes en sont : une compression isotherme* I, *un échauffement isochore* II, *une détente isotherme* III, *un refroidissement isochore* IV.

- Le rendement thermique d'un cycle de Stirling peut atteindre celui d'un cycle de Carnot.

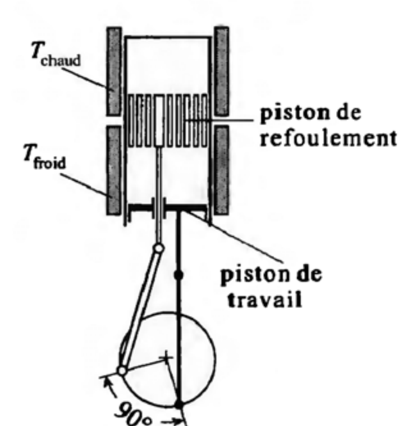
Le **rendement d'un cycle de Stirling** est donné par :

Rendement du cycle de Stirling			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\eta = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}}$$	η	1	rendement
	T_{ch}	K	temp. source chaude
	T_{fr}	K	temp. source froide

▷ Le rendement donné ci-dessus est celui d'une machine **régénérative** (→ *Régénérateur*) pour laquelle les transferts de chaleur, dans les transformations isochores (étapes II et IV), sont compensés.

2. Moteur de Stirling

ou **moteur à air chaud** : moteur thermique à combustion externe appliquant le cycle de Stirling et pour lequel l'agent moteur est un gaz déplacé en circuit fermé entre deux sources de chaleur (Fig. 21.13).



Compression et détente isothermes :

- le piston moteur se déplace
- le piston refouleur ne se déplace pas

Réchauffement et refroidissement isochores :

- le piston moteur ne se déplace pas
- le piston refouleur se déplace

Fig. 21.13 : *Moteur de Stirling*

Le moteur de Stirling possède deux pistons, l'un moteur, l'autre refouleur, calés à 90° l'un de l'autre sur le même arbre-manivelle.

Étapes d'un moteur de Stirling :

Compression isotherme : le piston refouleur est en position milieu et empêche le contact entre la source chaude et le gaz que le piston moteur comprime.

Réchauffement isochore : le piston refouleur se déplace vers le haut, tandis que le piston moteur se trouve en position milieu. Le gaz déplacé vient au contact de la source chaude.

Détente isotherme : tandis que le piston refouleur reste en position haute, le piston moteur redescend. Le gaz se détend.

Refroidissement isochore : le piston moteur reste en position basse, tandis que l'autre descend. Le gaz est déplacé de la source chaude à la source froide.

L'utilisation du moteur de Stirling se heurte au problème pratique des échanges incomplets de chaleur au cours du déplacement.

M Une amélioration est apportée par les **régénérateurs**, échangeurs de chaleur dans lesquels le fluide chaud et froid passe alternativement à travers des copeaux métalliques facilitant son échauffement et son refroidissement.

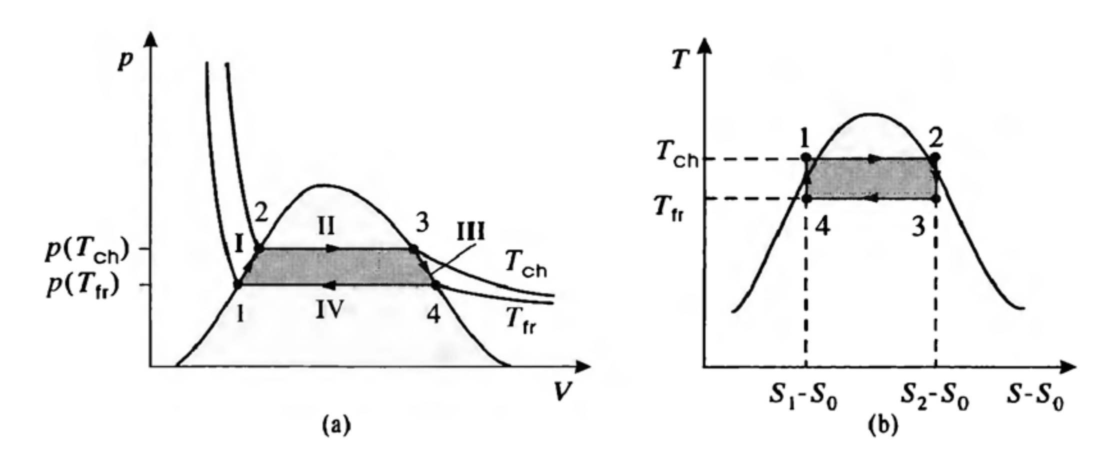


Fig. 21.14 : *Cycle de Clausius-Rankine (en grisé). La courbe en cloche d'équilibre liquide-vapeur est tracée sur les deux diagrammes* (p, V), *en* (a), *et* (T, S), *en* (b).

21.7.4 Machine à vapeur

Cycle de Clausius-Rankine : cycle effectué dans la région de coexistence de phases liquide–gaz. Il consiste en (voir Fig. 21.14) :

- une compression isentropique (adiabatique) $4 \to 1$
- un échauffement isobare $1 \to 2$
- une détente isentropique $2 \to 3$
- un refroidissement isobare $3 \to 4$

▷ Les transferts isobares de chaleur ne conduisent pas à une variation de température mais, comme toute chaleur de vaporisation, à modifier le rapport relatif des phases liquide et gazeuse.

● Le rendement η dépend fortement des valeurs d'enthalpie de la vapeur avant (H_2) et après la détente (H_3).

Les indices correspondent aux points de la Fig. 21.14.

Rendement d'une machine à vapeur			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\eta = \frac{H_2 - H_3}{H_2 - H_4} \approx 1 - \frac{H_3}{H_2}$$	η	1	rendement
	H	J	enthalpie

Machine à vapeur : machine thermique opérant suivant le cycle de Clausius-Rankine.

21.7.5 Systèmes ouverts

1. Système fermé

Système (fluide caloporteur) dont la masse reste invariable pendant tout le processus de travail.

■ La machine de Stirling opère en système fermé.

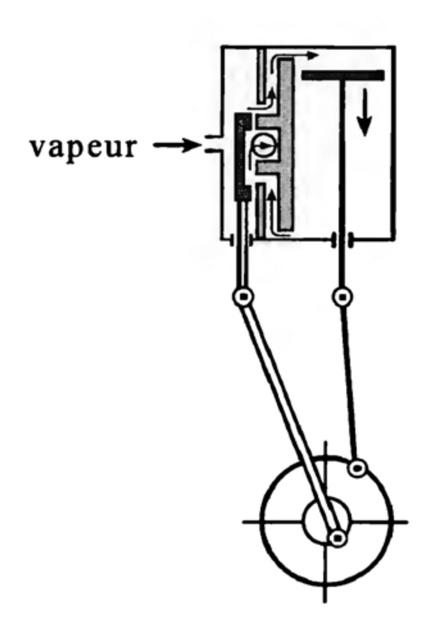


Fig. 21.15 : *Machine à vapeur. De la vapeur à haute pression est injectée à l'entrée (à gauche, sur le schéma) ; elle est rejetée à basse pression (par le tube, vu en coupe dans le milieu du schéma). Piston et soupapes opèrent en phases synchrones.*

▷ Les moteurs à combustion en système fermé ne peuvent utiliser leurs gaz de combustion comme fluide caloporteur. Par contre, en système ouvert, les gaz de combustion constituent le fluide caloporteur.

2. Système ouvert

Système dans lequel un certain nombre de particules est échangé (et renouvelé) avec l'extérieur. Le moteur à combustion interne en est un exemple.

■ D'une façon alternative dans la machine de Otto, un mélange carburé rempli le piston, puis les gaz brûlés s'en échappent.

▷ Cependant, le nombre total de particules peut quand même être considéré comme conservé dans le système.

On peut assimiler le moteur à combustion interne à un moteur à système fermé où l'air subirait un processus cyclique au cours duquel la chaleur reçue serait celle produite par la combustion.

▷ Le système contient, au début, toutes les particules qui constituent l'agent moteur et, à la fin, toutes celles qui le quittent.

▷ On utilise quelquefois le terme de **pseudocycle**, de préférence à **cycle**, pour décrire le fonctionnement des machines thermiques en système ouvert, en faisant remarquer que le retour périodique au même état initial n'est pas thermodynamiquement réalisé : le fluide caloporteur a, en effet, subi des transformations (ainsi, de combustible devient-il gaz brûlés dans une machine à combustion interne, ou d'eau devient-il vapeur dans la machine à vapeur).

■ Le pseudocycle de Otto, de Diesel, de la machine à vapeur...

Le bilan d'enthalpie est :

Bilan d'enthalpie d'un système ouvert				$\mathbf{ML^2T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\Delta H = \Delta W_{\text{ext}} + \Delta Q$	H	J	enthalpie	
	W_{ext}	J	travail externe	
	Q	J	quantité de chaleur fournie	

Si les vitesses et les énergies potentielles des particules entrantes et sortantes ne sont pas les mêmes, les différences d'énergie correspondantes sont à rajouter dans le bilan :

$$\Delta H + \Delta W_{\text{cin}}^{\text{flux}} + \Delta W_{\text{pot}} = \Delta W_{\text{ext}} + Q$$

3. Travail fonctionnel

travail total effectué (théoriquement) par une machine durant une étape du processus et qui inclut :

- le remplissage en particules,
- la variation de volume
- l'expulsion des particules

Ceci peut être défini comme l'intégrale :

$$W_f = \int_{p_1}^{p_2} V \, \mathrm{d}p$$

21.7.6 Moteurs de Otto et de Diesel

21.7.6.1 Cycle de Beau de Rochas

1. Cycle de Beau de Rochas

ou **cycle de Otto** : cycle en système ouvert ; Beau de Rochas fit, en 1862, la théorie du cycle qui porte son nom et qui fut appliquée pour la première fois par Otto, en 1867. Le cycle consiste en :

- une compression isentropique (adiabatique)
- un échauffement isochore
- une détente isentropique
- un refroidissement isochore

Rendement thermique η : dépend d'une part du rapport volumétrique à la compression (ou taux de compression), quotient du volume après détente au volume comprimé, et d'autre part du rapport γ des capacités calorifiques à pression et volume constants du gaz.

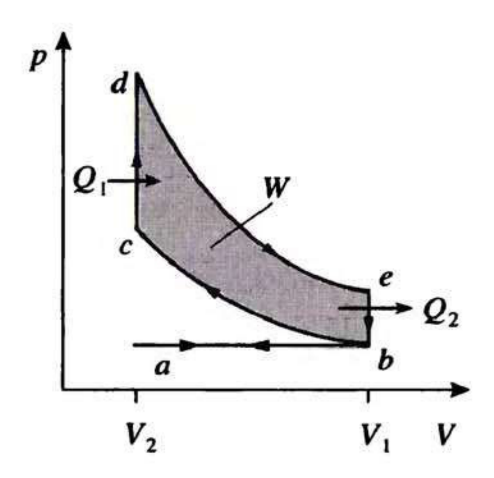


Fig. 21.16 : *Cycle de Beau de Rochas ou de Otto.*

Rendement du cycle de Otto			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$\eta = 1 - \varepsilon^{1-\gamma}$	η	1	rendement
$\varepsilon = \dfrac{V_1}{V_2}$	ε	1	taux de compression
	γ	1	rapport des capacités cal.
	V	m^3	volume

2. Moteur de Otto

Machine à combustion interne dite à *quatre temps* fonctionnant suivant le cycle de Beau de Rochas. Un mélange homogène carburé (mélange air-carburant) est introduit cycliquement ; une combustion rapide est opérée par un dispositif externe d'allumage (bougie).

Le fonctionnement du **moteur Otto** comprend les phases suivantes (voir Fig. 21.16) :

- $a \to b$: admission du mélange carburé
- $b \to c$: compression
- $c \to d$: allumage du mélange, échauffement du gaz
- $d \to e$: détente
- e : ouverture de la soupape d'évacuation
- $b \to a$: évacuation des gaz brûlés

▷ Des composés aux propriétés antidétonantes sont introduits dans les carburants pour éviter l'auto-allumage.

21.7.6.2 Cycle de Diesel et moteur Diesel

1. Cycle de Diesel

Cycle en système ouvert. Il consiste en :

- une compression isentropique (adiabatique)
- un échauffement isobare
- une détente isentropique
- un refroidissement isochore

Moteur Diesel : moteur à combustion interne fonctionnant suivant le cycle de Diesel. Le carburant est injecté dans de l'air préalablement comprimé. La combustion se fait alors par inflammation spontanée du mélange carburé.
Le fonctionnement du moteur Diesel comprend les phases suivantes (voir Fig. 21.17) :

- $a \to b$: admission de l'air
- $b \to c$: compression
- $c \to d$: injection du carburant et inflammation
- $d \to e$: détente
- e : ouverture de la soupape d'évacuation
- $b \to a$: évacuation des gaz brûlés

Fig. 21.17 : *Cycle de Diesel.*

2. Rendement thermique du moteur Diesel

η : dépend des rapports volumétriques à la compression V_1/V_2 et à la détente V_1/V_3, ainsi que du rapport γ des capacités calorifiques à pression et volume constants du gaz.

Rendement du cycle de Diesel			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\eta = 1 - \gamma^{-1}\frac{\left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{-\gamma} - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{-\gamma}}{\left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{-1} - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{-1}}$$	η	1	rendement
	γ	1	rapport des capacités cal.
	V	m^3	volume

▷ À compression égale, le moteur Diesel a un rendement thermique plus faible que celui d'un moteur de Otto ; cependant, comme le moteur Diesel atteint globalement des rapports de compression incomparablement plus élevé, son rendement est bien meilleur que celui de Otto.

21.7.7 Turbines à gaz

1. Cycle de Joule

Cycle en système ouvert qui a trouvé son utilisation, par exemple, dans les moteurs à réaction des avions. Il consiste en (voir Fig. 21.18 (a)) :

I : une compression isentropique (adiabatique) de (p_1, T_1) à (p_2, T_2)
II : un échauffement isobare
III : une détente isentropique
IV : un refroidissement isobare

Le **rendement thermique** η dépend du rapport des températures avant (T_1) et après (T_2) compression. Il s'exprime aussi en fonction des pressions :

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

2. Cycle d'Ericsson

Cycle en système fermé, comprenant (voir Fig. 21.18 (b)) :

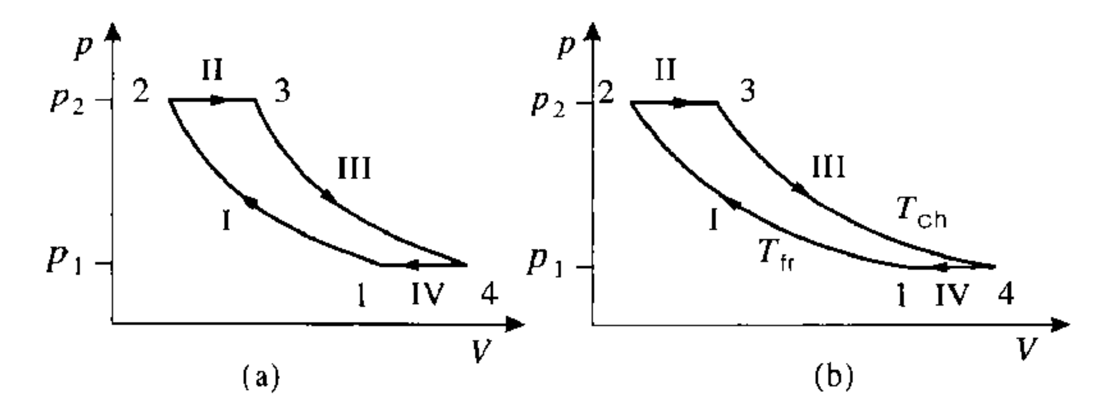


Fig. 21.18 : *Cycles de Joule, en* (a), *et d'Ericsson, en* (b).

I : une compression isotherme à T_{fr}
II : un échauffement isobare
III : une détente isotherme à T_{ch}
IV : un refroidissement isobare

Le **rendement thermique** η dépend du rapport des températures des deux isothermes :

$$\eta = 1 - \frac{T_{fr}}{T_{ch}} = \eta_C$$

● Dans les meilleures conditions, ce rendement peut atteindre celui d'un cycle de Carnot.

21.8 Liquéfaction des gaz

À des températures n'excédant pas le point critique, tous les gaz peuvent être liquifiées directement par compression.

■ L'ammoniac (NH_3), le dioxyde de soufre (SO_2) et le chlore (Cl_2) sont des gaz dont le point critique se situe au-dessus de la température ambiante.

Dans le cas contraire, le gaz est d'abord refroidi sous sa température critique.

21.8.1 Production des basses températures

Les **basses températures** peuvent être obtenues par :

- échange de chaleur avec des machines réfrigérantes
- retrait de chaleur par dissolution de substances
- refroidissement par une pompe à chaleur
- l'utilisation de l'effet Joule-Thomson

21.8.1.1 Mélanges réfrigérants

En général, les **mélanges réfrigérants** sont du type solide-liquide et servent de réservoir à température constante.

▷ Ces mélanges doivent doivent d'abord être amenés à cette température par d'autres procédés.

On utilise des systèmes au point de fusion car alors les fluctuations de chaleur ne conduisent pas à des variations de température, seulement à une variation du rapport relatif des phases solides et liquides.

▷ Des mélanges réfrigérants sont reportés Table 23.6, page 804,

21.8.1.2 Chaleur de dissolution

Chaleur de dissolution : quantité de chaleur utilisée pour dissoudre une substance solide dans un liquide.

Quand une substance est dissoute dans un liquide, de la chaleur est retirée du liquide.

● De ce fait la température peut descendre sous le point de fusion du solvant pur sans solidification du mélange. (→ *Abaissement du point de solidification*)

■ L'épandage de sel sur les chaussées pour éliminer le verglas en est une application.

▷ Ainsi, les mélanges réfrigérants en solution sont formés d'une phase solide (exemple, la glace) et d'une phase liquide (exemple, la solution saline) contenant le solvant dissous.

21.8.1.3 Machine thermique

Le refroidissement d'un système peut s'opérer selon un cycle inverse (→ *Moteur thermique*). Ici, de la chaleur est soustraite du système pris comme source froide du cycle, en lui fournissant extérieurement du travail. (→ *Pompe à chaleur*)

● Dans ce processus, le deuxième principe de la thermodynamique impose obligatoirement un transfert de chaleur vers une autre source (chaude).

■ Production de petite quantité d'air liquide ou d'hélium liquide.

▷ Bien sûr, un système peut aussi être refroidi dans un cycle moteur mais seulement si la source froide est à une température inférieure au système.

21.8.2 Effet Joule–Thomson

Un gaz comprimé que l'on laisse se détendre à travers un robinet, se refroidit si sa température est inférieure à la **température d'inversion**.

▷ La détente se fait sans travail extérieur ($\Delta W = 0$) et sans échange de chaleur avec l'extérieur (transformation rapide) ($\Delta Q = 0$) : le processus est une détente irréversible et adiabatique de gaz réel.

Le changement de température se produit seulement avec des gaz réels (gaz de Van der Waals), mais pas avec des gaz parfaits.

▷ L'écoulement du flux gazeux est ralenti par un **étranglement** (voir Fig. 21.19 (a)).

Le **coefficient de Joule–Thomson** δ détermine la courbe d'inversion :

Coefficient de Joule – Thomson			$\mathrm{M^{-1}LT^{2}\Theta^{-1}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\delta = \frac{V}{C_p}(T\alpha - 1) = \frac{T\alpha - 1}{c_p \rho}$$	δ	K / Pa	coef. de Joule-Thomson
	V	$\mathrm{m^3}$	volume
	C_p	J / K	capacité cal. à p = cste
	T	K	température
	α	1 / K	coeff. de dilation isobare
	c_p	J / K kg	capacité cal. massique à p = cste
	ρ	kg / $\mathrm{m^3}$	masse volumique

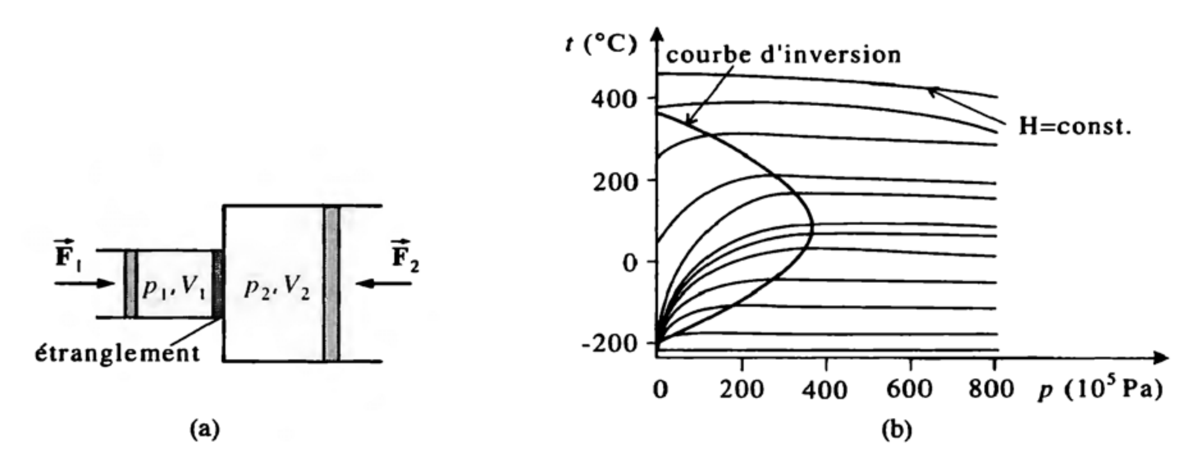


Fig. 21.19 : *Schéma de l'expérience de Joule–Thomson en* (a) *et, en* (b), *courbe d'inversion.*

Courbe d'inversion : courbe pression-température pour laquelle le coefficient δ est nul (Fig. 21.19 (b)).

Température d'inversion : température en-dessous de laquelle une détente irréversible provoque le refroidissement du gaz.

▷ Au-dessus de la température d'inversion, la détente irréversible conduit à un échauffement du gaz.

Température d'inversion d'un gaz de Van der Waals :

Température d'inversion = 6,75 × température critique				Θ
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$T_i = \frac{2a}{Rb}$$ $$T_i = 6,75\,T_{cr}$$	T_i	K	température d'inversion	
	T_{cr}	K	température critique	
	a	Nm^4 / mol^2	constante de pression interne	
	b	m^3 / mol	constante de covolume	
	R	J / K mol	constante des gaz parfaits	

▷ Cette valeur est seulement un maximum. La température d'inversion T_i dépend de la pression.

▷ Plutôt que les constantes molaires a, b et R, on peut aussi introduire les constantes massiques.

21.8.2.1 Procédés de liquéfaction

1. Procédé Linde

Méthode de liquéfaction de l'air qui utilise l'effet Joule-Thomson de refroidissement par détente.

Pour abaisser la température d'un gaz sous haute pression, un échangeur thermique est utilisé sur le principe du contre-courant. Dans l'échangeur, le gaz refroidi par détente est mis en contact thermique, à travers un serpentin, avec le gaz à haute pression, gaz détendu et gaz à haute-pression étant à contre-courant (Fig. 21.20).

● Cette méthode n'est valable que pour des gaz dont la température d'inversion, à une pression donnée du compresseur, est inférieure à la température ambiante.

■ L'air, les gaz CO_2, N_2, ... peuvent être liquéfiés de cette manière.

compresseur
soupape
de détente

Fig. 21.20 : *Procédé Linde (schéma).*

▷ Pour l'hydrogène et l'hélium, un pré-refroidissement est nécessaire car leurs températures d'inversion (hydrogène $T_i \approx -80^0$C) sont très inférieures à la température ambiante.
On peut utiliser de l'hydrogène liquide pour le pré-refroidissement de l'hélium, mais ceci est inhabituel à cause des dangers d'explosion et des coûts prohibitifs.

2. Procédé Claude de liquéfaction

Au cours d'une détente **réversible** d'un gaz réel, une diminution de température se produit toujours puisque le gaz effectue du travail.

▷ Ce procédé de détente adiabatique réversible (→ *Pompe à chaleur*) a l'avantage d'un haut rendement et est, de ce fait, employé pour liquéfier l'hélium.

Procédé Claude : méthode de liquéfaction utilisant une détente adiabatique réversible accompagnée de production de travail moteur.

▷ Par ce procédé, la quantité extraite d'air liquide est augmentée ; de plus, une partie du travail produit dans la détente est récupérée.

22 Transitions de phase, réactions et transferts de chaleur

22.1 Phases et états d'agrégation

22.1.1 Phases

Système homogène : système dont les propriétés restent identiques en tout point.

■ Un réservoir d'air sec dans les conditions normales.

Système hétérogène : système dont les propriétés peuvent changer brusquement au passage d'une interface.

■ Un réservoir d'eau, de vapeur et d'air.

Phase : partie homogène d'un système hétérogène.

Limite de phase : interface de séparation entre deux phases.

■ Une enceinte fermée contenant de l'eau et de la vapeur : la surface de l'eau constitue une interface entre la phase gazeuse (vapeur) et la phase liquide (eau).

Transition de phase, passage de la substance d'une phase à une autre ; se traduit par une modification de la stucture interne de la substance.

▷ Ce changement de structure conduit à modifier la dépendance du système à la température.

■ De l'eau est chauffée ; elle se met à bouillir dès que la température d'ébullition est atteinte. Tout transfert de chaleur supplémentaire ne conduira pas à une augmentation de température de l'eau mais à plus d'eau évaporée (Fig. 22.1).

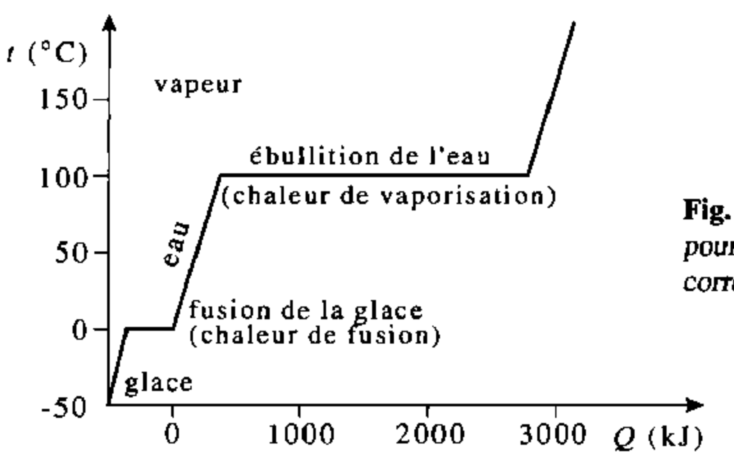


Fig. 22.1 : *Quantité relative de chaleur à fournir pour augmenter la température de l'eau. Les paliers correspondent à des changements d'états.*

22.1.2 États d'agrégation

État d'agrégation : phase d'une substance déterminée par certaines propriétés et une structure intrinsèque.

Il existe quatre états d'agrégation de la matière, à savoir l'état :

solide : le corps, par exemple un réseau cristallin, possède un ordre interne fixe avec de très grandes forces de liaison interne. Il est caractérisé par une constance de forme, de surface et de volume. Tout changement de son volume requiert de fortes pressions.

liquide : le corps ne possède plus d'ordre interne fixe bien que de fortes interactions internes soient encore présentes. Il n'a pas de forme propre mais sa surface est définie. Son volume est constant et ne peut changer que sous de fortes pressions.

gaz : le corps ne possède aucun ordre interne et n'a que de faibles interactions intermoléculaires. Il n'a ni forme fixe, ni surface définie et son volume est celui de l'enceinte qu'il remplit totalement. Son volume peut être modifié par pression.

plasma : c'est un état de la matière d'énergie élevée. Les atomes sont ionisés et séparés en composantes chargées. Le corps n'a pas de structure interne compacte, mais des interactions électromagnétiques sont présentes. (→ *Physique des plasmas*)

- Par apport d'énergie, un corps solide peut passer à l'état liquide ou gazeux, et un corps liquide à l'état gazeux.

22.1.3 Transitions entre états d'agrégation

1. Vaporisation et liquéfaction

- **Vaporisation** : transformation d'un liquide en un gaz.

▷ La vaporisation d'une substance se produit si sa pression de vapeur augmente par rapport à la pression environnante.

Chaleur de vaporisation : chaleur à fournir pour vaporiser un liquide.

Chaleur massique de vaporisation : énergie calorifique nécessaire pour vaporiser 1 kg de matière. Elle dépend de la pression et de la température.

Chaleur massique de vaporisation = $\dfrac{\textbf{chaleur de vaporisation}}{\textbf{masse}}$			$\mathrm{L^2T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$q = \dfrac{\Delta Q}{m}$	q	J / kg	ch. massique de vaporisation
	ΔQ	J	ch. de vaporisation
	m	kg	masse de matière vaporisée

À une pression et une température déterminées, la quantité de chaleur nécessaire à la vaporisation du liquide s'appelle *chaleur latente* de vaporisation.

M Pour déterminer la chaleur latente de vaporisation (chaleur de condensation), la vapeur est condensée dans des calorimètres spéciaux et la chaleur transférée au calorimètre est mesurée.

Point d'ébullition : température à laquelle la substance bout.

▷ Le point d'ébullition dépend de la pression externe.

▷ Les points d'ébullition de nombreuses substances figurent dans les Tables, section 23.1/3, page 783.

- **Liquéfaction** : transformation d'un gaz en un liquide.

▷ La liquéfaction se produit à la même température que la vaporisation. Dans des conditions particulières, une substance peut se vaporiser à plus haute température (→ *Retard à l'ébullition*) ou se condenser à plus basse température (→ *Retard à la condensation*), que son point d'ébullition.

Chaleur de liquéfaction : chaleur cédée dans la liquéfaction du gaz.

▷ Sa valeur numérique est celle de la chaleur de vaporisation.

2. Fusion et solidification

● **Fusion** : transformation d'un solide en un liquide.

▷ La fusion se produit si la pression de sublimation du solide est plus basse que la pression de vapeur du liquide.

Point de fusion : température à laquelle la substance fond.

▷ Le point de fusion dépend de la pression externe.

▷ Les points de fusion de nombreuses substances figurent dans les Tables 23.1/3, page 783.

Chaleur de fusion : quantité de chaleur à fournir pour fondre un solide. On définit, comme pour la vaporisation, une chaleur latente de fusion.

Chaleur massique de fusion : énergie calorifique nécessaire pour fondre 1 kg de matière.

Chaleur massique de fusion $= \dfrac{\text{chaleur de fusion}}{\text{masse}}$			L^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$q = \dfrac{\Delta Q}{m}$	q ΔQ m	J / kg J kg	ch. massique de fusion chaleur de fusion masse de matière fondue

● **Solidification** : transformation d'un liquide en un solide.

▷ La solidification se produit à la même température que la fusion.

Chaleur de solidification : chaleur cédée dans la solidification d'un liquide.

▷ Sa valeurs numérique est celle de la chaleur de fusion.

● **Sublimation** : transformation d'un solide en un gaz.

Chaleur de sublimation : chaleur à fournir pour sublimer un solide.

▷ La chaleur de sublimation est égale à la somme des chaleurs de fusion et de vaporisation.

● **Condensation** : processus inverse à la sublimation.

Dans quelques ouvrages, la condensation désigne, au sens large, la transformation d'un gaz en un état condensé (solide ou liquide).

22.1.4 Vapeur

Vapeur humide ou **vapeur saturante** : désigne la vapeur en équilibre avec le liquide dans une coexistence de phase.

Pression de vapeur saturante p_v, pascal (Pa) en unités SI : pression de vapeur du gaz saturant.

▷ Sa valeur varie exponentiellement avec la température.

Fig. 22.2 : *Courbe de pression de vapeur d'eau. Une zone a été agrandie*

Courbe de pression de vapeur : courbe $p_v(T)$ représentant la vapeur saturante d'un système biphasé en fonction de la température (Fig. 22.2).

La vapeur est **insaturée** s'il n'y a pas équilibre avec le liquide.

▷ Au cours du temps, le liquide s'évapore jusqu'à ce qu'un équilibre soit atteint, ou jusqu'à ce que sa vaporisation soit totale.

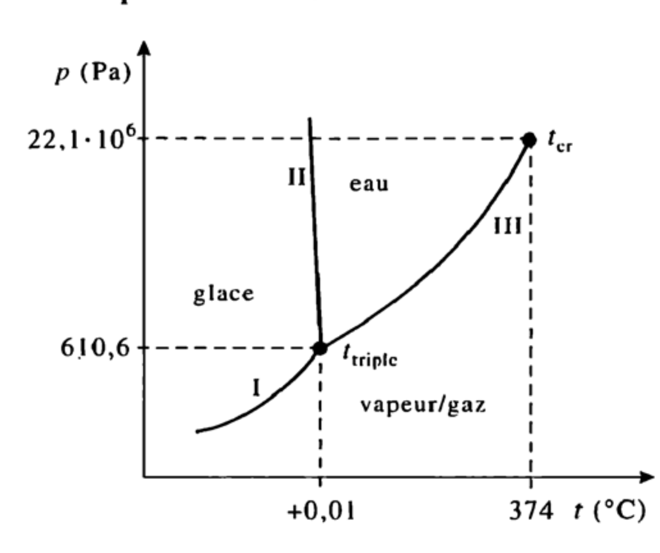


Fig. 22.3 : *Diagramme de phase de l'eau avec ses points triple et critique. La courbe de sublimation figure en I, celle de fusion en II et celle de vaporisation en III.*

Point triple : point pour lequel les phases solide, liquide et gazeuse coexistent en équilibre (Fig. 22.3). Il n'existe qu'un seul point triple par corps pur.

▷ Au point triple, pression p_{tr} et température T_{tr} sont fixes. (→ ***Règle des phases de Gibbs***)

■ Pour l'eau, la température et la pression au point triple sont respectivement $T_{tr} = 273,16$ K et $p_{tr} = 610,6$ Pa.

▷ Les points triples sont particulièrement appropriés pour la définition des points de référence des échelles de température.

22.2 Classification des transitions de phase

Changement d'entropie : le système considéré, possédant une entropie (= *désordre*) plus élevée dans une phase que dans l'autre, subit une variation brusque de son entropie dans la transition de phase ; de la chaleur

a été fournie ou cédée dans la transformation.

Changement d'entropie $= \dfrac{\textbf{quantité de chaleur}}{\textbf{température}}$				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\Delta S = \dfrac{\Delta Q}{T}$	S	J / K	entropie	
	Q	J	quantité de chaleur	
	T	K	température	

22.2.1 Transitions de phase du premier ordre

Transition de phase du premier ordre (ou de première espèce) : transformation caractérisée par un dégagement ou une absorption brusque de chaleur et par une variation de masse volumique. Les conséquences en sont :

● Un **saut d'entropie** qui, dans le diagramme entropique (T, S) (Fig. 22.3), est décrit par une quantité de chaleur additionnelle, appelée chaleur de la transition de phase ou chaleur latente, de valeur égale à la variation d'enthalpie.

■ Les transitions entre les différents états d'agrégation de la matière sont toutes du premier ordre, exceptées celles au point critique.

Relation entre variations de quantité de chaleur et température :

$\Delta Q = C\,\Delta T$ $\quad C$ est la capacité calorifique

● Puisque la température reste constante au cours de la transition, la capacité calorifique diverge : $C \longrightarrow \infty$

De même, le volume subit un saut dans le diagramme (p, V).

● Une divergence du coefficient de compressibilité de la substance se produit à la transition de phase du premier ordre :

$$K = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}\bigg|_{T=\text{cste}} \longrightarrow \infty$$

En résumé, les transitions de phase du premier ordre sont caractérisées par :

- un saut en entropie
- une divergence de la capacité calorifique
- une divergence du coefficient de compressibilité

22.2.2 Transitions de phase du second ordre

Transition de phase du second ordre (ou de seconde espèce) : caractérisée par une singularité de la courbe des températures dans le diagramme (T, S) (Fig. 22.4).

▷ L'entropie n'a pas de discontinuité, $\Delta S = 0$; cependant les dérivées de l'entropie par rapport à la température ont des valeurs distinctes suivant les phases.

■ Les transitions de phase au point critique sont du second ordre.

En résumé, les transitions de phase du second ordre sont caractérisées par :

- un point singulier en entropie

Fig. 22.4 : *Transitions de phase du premier* (a) *et du second* (b) *ordres.*

- un saut fini de la capacité calorifique
- une divergence du coefficient de compressibilité

22.2.3 Transitions lambda

Transition lambda (transition λ) : caractérisée par les propriétés suivantes :

- L'entropie en fonction de la température T ne présente pas de discontiniuté, mais une tangente verticale pour la température $T = T_\lambda$ (Fig. 22.5).
- La dérivée de l'entropie par rapport à la température diverge $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}T} \to \infty$.
- La capacité calorifique diverge $C \to \infty$; il en est de même pour les coefficients de dilatation isobare et de compressibilité isotherme.

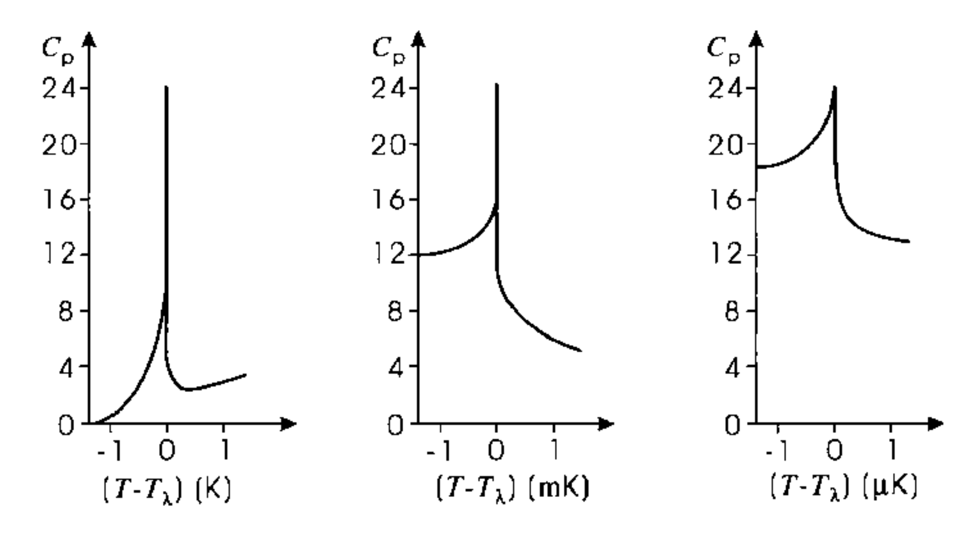


Fig. 22.5 : *Transition lambda : dans le diagramme* (C_P, T), C_P *offre à la transition une singularité évoquant la lettre grecque* λ.

■ La transition superfluide de l'hélium (^{3}He ou ^{4}He) est du type λ, comme le sont aussi certaines transformations allotropiques de divers alliages binaires et composés chimiques.

22.2.4 Régions de coexistence de phase

Région de coexistence : région où deux phases existent ensemble simultanément.

Dans la région de coexistence biphasée, la température est constante pour des isobares.

▷ La région de coexistence se traduit par des sauts en entropie dans le diagramme entropique (T, S) et en volume, dans le diagramme (p, V).

La région où coexistent deux phases devient de plus en plus petite à mesure que la pression et la température augmentent (Fig. 22.6), jusqu'à disparaître au point critique.

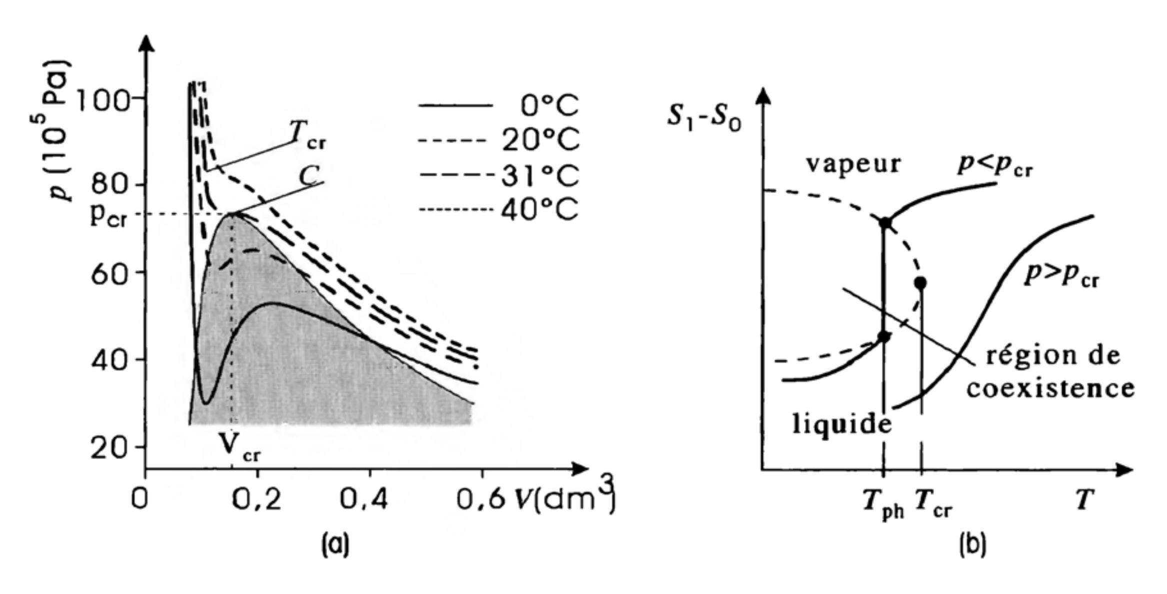


Fig. 22.6 : *Région de coexistence biphasée représentée, en* (a) *sur un diagramme* (p, V) *de Clapeyron, et en* (b) *sur un diagramme* (S, T).

Point critique : endroit du diagramme de phase où la région de coexistence se réduit à un point.

● Au-dessus du point critique, aucune transition de phase ne peut se faire ; la notion de phase disparaît.

22.2.5 Exposants critiques

Au point critique, il n'y a plus de limite de phase.

▷ De grandes fluctuations en densité peuvent produire alors une opalescence, dite critique, due à une diffusion intense de la lumière. Le phénomène disparaît une fois le point critique dépassé.

■ Une substance transparente devient soudainement imperméable à la lumière. Son aspect est opalin.

● Au point critique, certaines grandeurs thermodynamiques divergent.

Des lois de puissance sont utilisées pour décrire ces quantités qui divergent au point critique.

Exposants critiques : exposants des lois de puissances décrivant les singularités observées.

Pour la transition de phase liquide-gaz, jusqu'à six exposants critiques $\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma', \delta$ (en notation standard) sont nécessaires.

Différence de densité : différence entre les densités du liquide et du gaz : $z = \rho_{\text{liq}} - \rho_g$.
Cette différence disparaît pour $T \to T_{\text{cr}}$, comme :

$$z = \rho_{\text{liq}} - \rho_g \propto \left(1 - \frac{T}{T_{\text{cr}}}\right)^{\beta}$$

La **capacité calorifique massique** au volume critique $C_{V=V_{\text{cr}}}$ peut diverger d'une façon distincte pour $T \to T_{\text{cr}}$.

▷ Cela dépend de l'approche menée (par valeurs inférieures ou supérieures) vers la température critique.

$$C_{V=V_{\text{cr}}} \propto \begin{cases} \left(\dfrac{T}{T_{\text{cr}}} - 1\right)^{-\alpha} & \text{chute pour} \quad T|_{\rho\approx\rho_{\text{cr}}} \geq T_{\text{cr}} \\ \left(1 - \dfrac{T}{T_{\text{cr}}}\right)^{-\alpha'} & \text{chute pour} \quad T|_{\rho\approx\rho_{\text{cr}}} \leq T_{\text{cr}} \end{cases}$$

La **compressibilité** montre un comportement analogue :

$$\chi \propto \begin{cases} \left(\dfrac{T}{T_{\text{cr}}} - 1\right)^{-\gamma} & \text{chute pour} \quad T \geq T_{\text{cr}} \\ \left(1 - \dfrac{T}{T_{\text{cr}}}\right)^{-\gamma'} & \text{chute pour} \quad T \leq T_{\text{cr}} \end{cases}$$

Pour l'**isotherme critique :**

$$p - p_{\text{cr}} \propto |\rho - \rho_{\text{cr}}|^{\delta} \qquad \text{pour} \qquad T = T_{\text{cr}}$$

Les gaz simples ont aussi un comportement décrit par des exposants critiques.

22.3 Transitions de phase et gaz de Van der Waals

22.3.1 Équilibre de phase

Courbe de pression de vapeur : courbe représentative de la pression de vapeur saturée d'un système biphasé en fonction de la température.

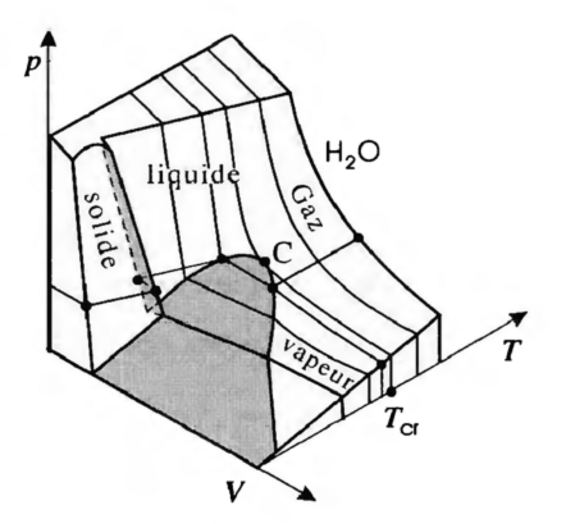


Fig. 22.7 : *Diagramme de phase tridimentionnel (p, V, T). La courbe de pression de vapeur $p(T)$ et le diagramme (p, V) sont les projections sur les plans respectifs (p, T) et (p, V).*

- La pression de vapeur $p_g(T)$ est une fonction de la température seule ; elle ne dépend pas du volume V de la vapeur.

Une variation du volume de vapeur change seulement la quantité de vapeur.

▷ La vapeur en excés est condensée en liquide ; une pression trop faible de vapeur conduit à une vaporisation du liquide et ce jusqu'à atteindre la saturation.

L'équilibre entre vapeur et liquide se traduit par une pression de vapeur p_g calculable à l'aide de la relation de Clapeyron.

Les **critères d'équilibre** sont :

$p_{\text{liq}} = p_g$	stabilité mécanique
$T_{\text{liq}} = T_g$	stabilité thermique
$\mu_{\text{liq}}(p,T) = \mu_g(p,T)$	stabilité chimique

22.3.2 Construction de Maxwell

1. Équation d'état de Van der Waals

L'équation d'état d'un gaz de Van der Waals prend en compte le covolume des molécules et les forces (modélisées) entre ces molécules.

▷ La description, simple, reproduit bien le comportement des gaz réels, mais est très imprécise quant aux liquides.

Équation de Van der Waals			ML²T⁻²
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\left[p + \left(\frac{n}{V}\right)^2 a\right](V - nb) = nRT$$ $R = 8{,}314\,\text{J}/(\text{K mol})$	p	Pa	pression
	n	mol	nombre de moles
	V	m^3	volume
	a	Nm^4/mol^2	pression interne
	b	m^3/mol	volume moléculaire
	nb	m^3	covolume
	R	J / (K mol)	cste des gaz parfaits
	T	K	température

Cette équation décrit aussi les états **métastable** et **instable**.

- Des états métastables (arcs ED et AB de la Fig. 22.8) se caractérisent, par ailleurs, par une dérivée négative de la pression par rapport au volume et donc une compressibilité positive. Ils peuvent être crées au cours d'un changement d'état. (→ *Retard à la liquéfaction et à la vaporisation*)
- Un état instable se caractérise, par ailleurs, par une dérivée positive de la pression par rapport au volume et une compressibilité négative. Cet état (arc DB de la Fig. 22.8) ne peut pas être produit au cours d'une transformation réversible.

2. Construction de Maxwell

Construction qui remplace une portion d'isotherme sous-critique de Van der Waals, par un segment d'isobare. Certains ouvrages parlent de règle ou de théorème de Maxwell.

Commentaires à la construction de Maxwell menée Fig. 22.8 :

- La ligne droite doit être tracée de façon à ce que les deux aires, en grisé sur le diagramme (p, V), soient égales.

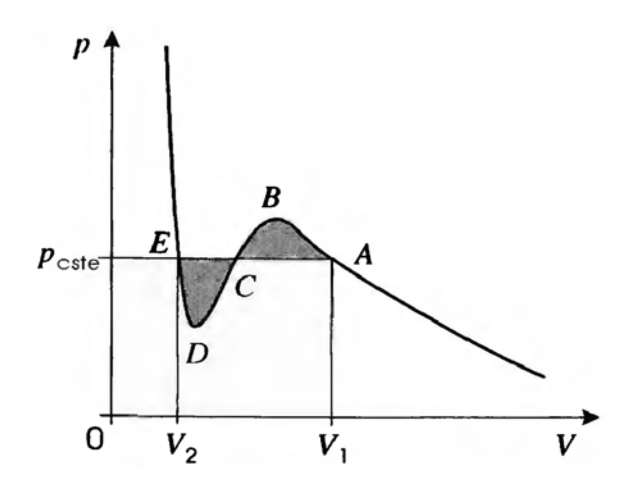


Fig. 22.8 : *Construction de Maxwell.*

▷ Les isothermes construites à partir de l'équation d'état de Van der Waals sont coupées en deux parties de même aire par la droite $p = \text{cste}$; la phase est liquide en E, c'est de la vapeur en A ; le segment EA correspond à un processus *normal* de transition de phase.

● Les points d'intersection E et A de la ligne droite avec la courbe définissent la région de coexistence des phases.

Dans ce domaine, l'équation de Van der Waals décrit les états métastables et instables de la substance (voir ci-dessus).

La longueur du segment EA diminue à mesure que la température augmente et s'annule au point critique.

▷ Ainsi avec l'augmentation de la température voit-on diminuer la région de coexistence de phase, jusqu'à sa disparition.

3. Point et température critiques dans l'équation de Van der Waals

Point critique : point où la région de coexistence de phase disparaît.

Isotherme critique : l'isotherme passant par le point critique.

Température, pression et volume molaire au point critique peuvent se calculer.

● Le point critique est un point d'inflexion à tangente horizontale de l'isotherme de Van der Waals dans un diagramme (p, V).

▷ Parmi toutes les isothermes de Van der Waals, seule l'isotherme critique possède un tel point d'inflexion.

Température critique T_{cr} : température de l'isotherme critique.

▷ Chaque gaz est caractérisé par une température critique au-dessus de laquelle il ne peut être liquéfié, quelle que soit la pression à laquelle il est soumis.

Température critique (équation de Van der Waals)			Θ
	Symbole	Unité	Dénomination
$T_{\text{cr}} = \dfrac{8a}{27Rb}$	T_{cr}	K	température critique
	a	$\text{Nm}^4 / \text{mol}^2$	pression interne
$R = 8,314\,\text{J}/(\text{K mol})$	b	m^3 / mol	volume moléculaire effectif
	R	J / (K mol)	cste des gaz parfaits

4. Pression critique dans l'équation de Van der Waals

p_{cr}, pression au point critique.

Pression critique (équation de Van der Waals)			$ML^{-1}T^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$p_{cr} = \frac{a}{27b^2}$	p_{cr}	Pa	pression critique
	a	Nm^4 / mol^2	pression interne
	b	m^3 / mol	volume moléculaire effectif

▷ Au-dessus du point critique, aucune construction de Maxwell n'est possible ; phases liquide et gazeuse ne se distinguent plus.

● Il est possible de passer sans transition de phase de l'état gazeux à l'état liquide, et vice-versa, par un processus évoluant dans une région située au-dessus de l'isotherme critique.

▷ Un tel processus ne peut être mené qu'au-delà du point critique.

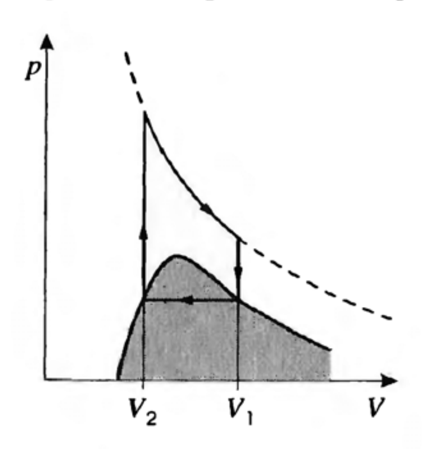


Fig. 22.9 : *Cycle fermé avec une seule transition de phase.*

■ La compression isotherme d'un gaz en-dessous de sa température critique conduit à une transition de phase. L'échauffement d'un liquide au-dessus de sa température critique, suivi d'une dilatation isotherme et d'un refroidissement isochore (Fig. 22.9), change le liquide en gaz sans transition de phase.

22.3.3 Retards à la vaporisation et à la condensation

Le domaine métastable (avec une dérivée négative par rapport au volume) de l'isotherme de Van der Waals peut être reproduit dans une expérience de non-équilibre.

■ Si un gaz est comprimée isothermiquement avec soin (c'est à dire en évitant tout choc et la présence de germes de condensation), alors il peut suivre la partie d'isotherme allant du point d'intersection avec la droite horizontale jusqu'au maximum de la courbe.

Retard à la condensation : quand la vapeur ne se condense pas, bien que la température soit inférieure à celle de condensation.

Retard à la vaporisation : quand le liquide ne bout pas, bien que sa température excède celle d'ébullition.

Liquide surchauffé : liquide porté à l'état métastable par échauffement isochore.

Vapeur sous-réfrigérée : gaz porté à l'état métastable par refroidissement isochore.

- Le système métastable évolue, sous l'influence d'une légère perturbation (comme un choc), vers l'état stable de la coexistence de phase.

▷ En pratique, on évite ces états instables par addition infime de germes (centres de condensation) ou par agitation du liquide.

Des phénomènes analogues s'observent aussi dans la transition de phase solide-liquide.

22.3.4 Théorème des états correspondants

Variable réduite : variable d'état normalisée à sa valeur au point critique ; une autre dénomination est celle de **coordonnée réduite**.

$$\overline{p} = \frac{p}{p_{cr}} \qquad \overline{v} = \frac{v}{v_{cr}} \qquad \overline{T} = \frac{T}{T_{cr}}$$

- Les variables réduites $\overline{p}$, $\overline{v}$, $\overline{T}$ sont sans dimension.

Gaz simple : gaz dont les particules (atomes, molécules) ne possèdent pas de moments électriques dipolaires importants et n'ont pas de fortes corrélations entre elles, même en phase liquide.

■ Les gaz nobles, ainsi que N_2, O_2, H_2 ou CO, CH_4, sont des gaz simples.

Théorème des états correspondants : loi introduite par Van der Waals :

- Tous les gaz simples satisfont à la même équation d'état en variables réduites.

Équation de Van der Waals en variables réduites :

$$\left(\overline{p} + \frac{3}{\overline{v}^2}\right)(3\overline{v} - 1) = 8\overline{T}$$

22.4 Exemples de transitions de phase

22.4.1 Changement de phase en magnétisme

Pour atteindre l'**aimantation à saturation**, les **paramagnétiques** nécessitent des champs magnétiques extérieurs de plus grande intensité que pour les **ferromagnétiques**. (→ *Physique de l'état solide, propriétés magnétiques*)

1. Température de Curie

Après suppression du champ externe, un aimant dipolaire permanent reste dans un état ferromagnétique. Cet état dépend fortement des traitements mécanique, thermique et magnétique que le matériau a initialement subit.

▷ Le ferromagnétisme se rencontre dans des solides ayant une structure cristalline bien définie. Les ferromagnétiques amorphes représentent une classe d'exception.

Point de Curie ferromagnétique : température à laquelle se produit la transition du ferromagnétisme au paramagnétisme.

▷ La condition de ferromagnétisme n'est possible qu'en dessous du point de Curie.

■ Les éléments fer, cobalt et nickel sont ferromagnétiques sous leurs points de Curie respectifs.

▷ Pour les points de Curie de divers métaux, voir Tables 23.1.3, page 790.

2. Domaines de Weiss et parois de Bloch

Dans une substance ferromagnétique non magnétisée, les moments magnétiques des porteurs élémentaires (atomes, molécules) ne sont pas orientés au hasard, mais alignés parallèlement sur de grands domaines pouvant atteindre plusieurs dixièmes de millimètres cubes.

▷ Ces régions possèdent un moment magnétique dipolaire macroscopique.

Domaines de Weiss : nom donné à ces régions d'alignement.

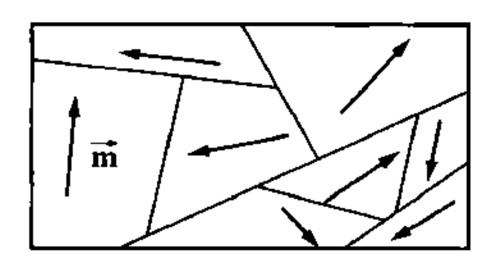


Fig. 22.10 : *Domaines de Weiss ; les moments dipolaires macroscopiques sont schématiquement indiqués par des flèches.*

Dans un ferromagnétique, non magnétisé, les moments magnétiques dipolaires de chacun des domaines de Weiss sont orientés au hasard (Fig. 22.10).

▷ Aussi le matériau se présente-t-il globalement sans magnétisme.

L'**aimantation spontanée** varie d'une faņn continue, sur environ 300 atomes, entre deux domaines de Weiss consécutifs.

Parois de Bloch : interfaces entre les domaines de Weiss.

● En appliquant un champ magnétique externe, les domaines de Weiss de similaire alignement s'agrandissent jusqu'à ce qu'ils aient tous la même orientation : l'aimantation est alors **saturée**.

22.4.2 Transitions de phase ordre–désordre

Dans des transitions de phase de cette nature, la phase à basse température possède un certain ordre (de ses atomes et molécules) qu'elle perd au-dessus de la température de transition.

▷ En principe, dans cette catégorie devraient aussi figurer les transitions solide–liquide et solide–gaz. Cependant, on suivra ici l'habitude de ne retenir que les transitions de phase solide–solide.

Paramètre d'ordre : description de l'arrangement des atomes ou des molécules dans un réseau cristallin.

▷ Les transitions de phase ordre–désordre peuvent provoquer un nouvel arrangement des atomes du réseau.

■ La transition de phase β dans le laiton (CuZn) à $t = 465°C$: dans la phase à basse température, le laiton a une structure où cuivre et zinc ont des positions bien ordonnées dans les différents sous-réseaux. À plus haute température, elles sont statistiquement distribuées.

L'**ordre d'orientation** décrit l'ordonnance de certaines molécules relativement l'une à l'autre.

■ Dans les halogènures d'ammonium NH_4Cl, NH_4Br et NH_4I, les ions NH_4^+ tétraédriques peuvent prendre deux positions distinctes dans le réseau cristallin (Fig. 22.10). Au-dessus de la température critique, les deux positions se retrouvent statistiquement distribuées ; en-dessous de $T_{cr} = 256$ K, tous les tétraèdres ont même orientation dans le cas de NH_4Cl, tandis que pour NH_4Br, ils prennent une orientation alternée.

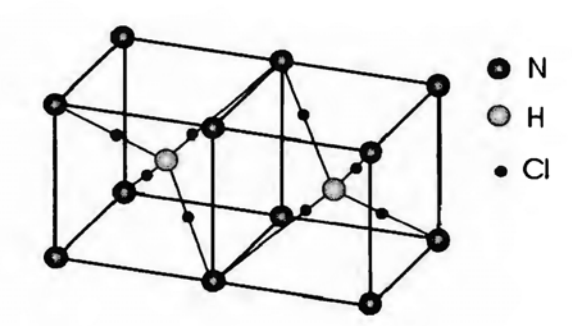


Fig. 22.11 : *Une orientation possible de l'ion NH_4^+ tétraédrique dans NH_4Cl.*

22.4.3 Changements de la structure cristalline

1. Transitions de phase solide-solide

Les phases solides de beaucoup de corps peuvent prendre une structure cristalline diversifiée selon la pression et le volume (et la composition, pour les alliages).

■ Pour des pressions allant jusqu'à 8 000 bars, cinq variétés différentes de glace sont dénombrées (glace I, II, III, V, VI), alors que la glace ordinaire à $p \approx 1$ bar n'est qu'une d'entre elles.

▹ À des pressions extrêmement élevées, quelques substances non métalliques peuvent même acquérir une **phase métallique**.

■ Le carbone et l'hydrogène ont cette propriété.

Si le catalyseur approprié manque, les transitions solide-solide peuvent souvent être retardées d'une manière appréciable.

■ Le diamant (Fig. 22.12) n'est pas stable à la pression atmosphérique. Cependant la transition de phase vers le graphite est appréciablement retardée ; de fait, le diamant est stable.

2. Structures du carbone

À présent, trois importantes variétés allotropiques du carbone solide sont connues :

Graphite : phase la plus stable, métalliquement conductrice, de structure lamellaire (couches parallèles superposées) avec un pavage hexagonal des atomes dans chaque couche. Trois des électrons de valence assurent les liaisons entre atomes voisins dans le plan, le quatrième pouvant librement être déplacé dans ce plan (**sp^2-hybride**). Les divers feuillets ne sont pas liés entre eux par des interactions de nature chimique et peuvent donc glisser les uns sur les autres, aussi le graphite est-il un bon lubrifiant.

Diamant : phase métastable aux pressions courantes (mais stable de fait), isolant électrique, de structure de type cubique. Les quatre électrons de valence assurent des liens simples, chacun avec quatre atomes voisins. Cette structure explique la grande dureté mécanique du diamant.

Fullerène : molécule de structure sphérique close d'atomes de carbone, devant son nom à l'architecte R. Buckminster Fuller qui utilisa des structures de ce type. Trois électrons de valence sont utilisés dans la liaison avec les atomes voisins, le quatrième pointant en dehors de la surface sphérique. Les fullerènes sont produits par sublimation du graphite par un arc électrique dans une atmosphère à basse pression de gaz nobles (**méthode de Huffmann-Krätschmer**). Des applications potentielles concernent la supraconductivité (fullerènes dopés par des alcalins), le stockage d'énergie (batterie, capteur d'électrons), la photochimie (photo-sensibilisateur), la microélectronique (microconducteur, commutateur optique...).

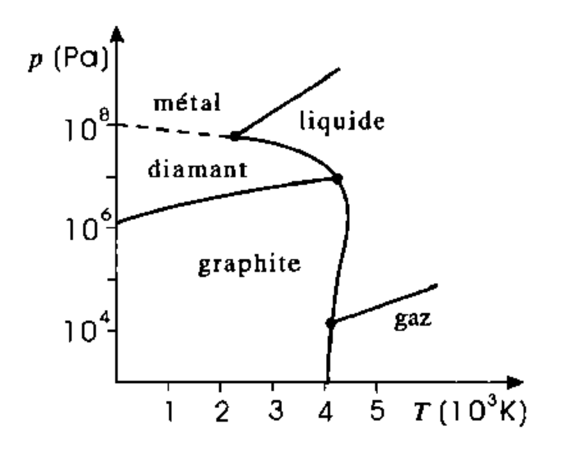


Fig. 22.12 : *Diagramme de phase du carbone (sans fullerènes).*

Structures de fullerènes les plus fréquentes :

- **Fullerène de Buckminster** C_{60} : molécule la plus connue et la plus stable dessinant la forme d'un ballon (d'où parfois son nom de footballène). Principalement produit par la méthode de Huffmann-Krätschmer à partir du graphite, sa structure comprend 20 hexagones et 12 pentagones.
- C_{70} : second type très connu ayant la forme d'un ballon de rugby.
- **Petits fullerènes** dits de Bucky : molécules C_{32}, C_{44}, C_{50} et C_{58}, de structure instable et de forme sphérique.
- **Gros fullerènes** : grosses molécules C_{240}, C_{540}, C_{960} à la structure instable.

Assemblages de structure proche des fullerènes :

- **Tube de Bucky** : macromolécule tubulaire, de longueur le micromètre et de diamètre quelques nanomètres, de structure similaire au graphite. Utilisation en électrotechnique (fils moléculaires).

- **Oignon de Bucky** : arrangement en couches de fullerènes sphériques qui devrait favoriser une grandes résistance à la compression. N'est cependant pas encore entré dans le domaine des applications.

22.4.4 Cristaux liquides

Quelques substances organiques de masse molaire élevée, formées de molécules oblongues, conservent un ordre à longue distance après la fusion.

▷ De telles molécules gardent une certaine orientation, même en phase liquide, et possèdent donc une anisotropie.

Les cristaux liquides se classent en deux catégories d'états mésomorphes : les phases nématique et smectique. (→ *Physique de l'état solide, cristaux liquides*)

▷ Avec l'augmentation de la température, quelques substances peuvent former diverses variétés de cristaux liquides. Il y a ainsi plusieurs températures de transformation, d'où le qualificatif de thermotropes ajouté parfois aux cristaux liquides.

Généralement, les cristaux liquides sont formés par des substances organiques complexes ayant plusieurs températures de transformation et des points de fusion aux alentours de 100°C.

▷ C'est seulement après avoir trouvé des substances caractérisées par des températures de transformation se succédant à quelques degrés Celsius, que les cristaux liquides sont devenus techniquement intéressants.

L'**anisotopie optique** des cristaux liquides nématiques a pour résultat une forte diffusion de la lumière.

▷ Au cours de la transition de phase vers un liquide isotrope, la diffusion disparaît.

Avec les cristaux liquides, dont le moment électrique dipolaire est suffisamment important, la transparence à la lumière et la réflexion peuvent être contrôlées d'une manière simple par un champ électrique.

■ Les **cristaux liquides à affichage** (LCD pour *Liquid Crystal Display*) ont ce principe pour base.

22.4.5 Supraconductivité

Supraconducteur : conducteur électrique pour lequel la résistance ohmique chute à une valeur extrêmement faible en-dessous d'une température critique T_{cr} de transition à l'état supraconducteur.

▷ Les porteurs de charge ne sont plus les électrons libres mais des **paires de Cooper**.

▷ Pour la plupart des supraconducteurs métalliques, la température critique se situe dans le domaine de 1 à 10 kelvins.

Supraconducteur à haute température critique SHTc : supraconducteur céramique notamment à base d'oxydes de cuivre, caractérisé par une **température critique** élevée.

▷ Pour des supraconducteurs SHTc, l'air liquide est un bon réfrigérant ; ce n'est pas le cas pour les supraconducteurs communs où l'hélium liquide, cher, est nécessaire. Cependant, le mouvement thermique des lignes de champ magnétique engendre, dans les supraconducteurs SHTc, une résistance électrique relativement élevée qui diminue continuement avec la température ; aussi les instabilités générées limitent-elles sévèrement le champ d'application de ces supras.

Effet Meissner–Ochsenfeld : un champ magnétique extérieur ne peut pas pénétrer dans la masse d'un supraconducteur ; cet effet de diamagnétisme parfait persiste tant que le champ extérieur n'atteint pas une certaine valeur critique fonction de la température. (→ *Physique de l'état solide, supraconducteur*)

▷ Sauf à atteindre le champ critique magnétique H_{cr}, aucun champ magnétique ne peut pénétrer un supraconducteur.

■ Les applications les plus essentielles des supraconducteurs concernent le transport du courant électrique (élimination des pertes par effet Joule dans les câbles) et la production de champs magnétiques intenses par des bobines.

22.4.6 Superfluidité

Superfluidité : absence quasi complète de viscosité pour un liquide qui peut alors s'écouler en remontant les parois du réservoir.

■ Si un flacon en verre est partiellement plongé, fond en premier, dans un liquide superfluide, il se remplit lentement de liquide superfluide jusqu'à ce que les niveaux intérieur et extérieur de liquide s'égalisent.

Un liquide superfluide est caractérisé par :

- une viscosité nulle : $\eta \to 0$
- une conductivité thermique infinie : $\lambda \to \infty$

▷ Il n'y a plus de gradient de température car toutes les fluctuations de chaleur se compensent à la fois.

Hélium II : phase liquide très ordonnée et à basse température, obtenue lors de la transition superfluide. À des pressions inférieures à 25 bars, l'hélium II ne se transforme pas en hélium solide même s'il est porté à des températures extrêmement basses.

La transition de phase de l'hélium liquide (hélium I) en hélium II s'effectue au point λ à 2,18 K à la pression normale.

- L'hélium II a une conductivité thermique extrêment élevée.
- L'hélium II ne se vaporise pas comme les autres liquides.

▷ Aucune bulle ne se forme dans la masse du volume liquide ; l'hélium II ne s'évapore qu'en surface.

La viscosité de l'hélium II peut atteidre des valeurs extrêment faibles.

■ L'hélium II peut s'écouler dans des tubes capillaires si minces qu'ils seraient impraticables à de l'hélium gazeux.

22.5 Gaz composés

Gaz composés : gaz à plusieurs **composants** (espèces chimiques) distingués par leurs particules.

Fraction molaire x_i : quantité sans dimension, quotient du nombre de moles d'un composant au nombre total de moles.

$\text{Fraction molaire} = \dfrac{\text{nbre de particules d'un type}}{\text{nbre total de particules}}$			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$x_i = \dfrac{N_i}{N}$	x_i	1	fraction molaire du constituant i
	N_i	1	nbre de particules de type i
	N	1	nbre total de particules

▷ La somme de toutes les fractions molaires vaut un :

$$\sum_{i=1}^{K} x_i = \sum_{i=1}^{K} \frac{N_i}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

Concentration c_i : quantité de substance i par volume ou unité de masse.

Dans le concept de concentration entrent des définitions distinctes. (→ *Réactions chimiques*)
La notion de concentration utilisée ici pour les solutions fait appel à la molarité, rapport de la quantité de substance dissoute au volume du solvant :

$$c_i = \frac{n_i}{V}$$

Fraction massique ξ_i : quotient de la masse du composant d'un type de particules sur la masse totale de toutes les particules. Elle peut s'exprimer en fonction de la fraction molaire et de la masse molaire selon :

$\text{Fraction massique} = \dfrac{\text{masse totale du composant } i}{\text{masse totale du mélange}}$				1
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\xi_i = \dfrac{m_i}{m_{tot}} = x_i \dfrac{M_i}{M_{tot}}$	ξ_i	1	fraction massique	
	m_i	kg	masse totale de type i	
	m_{tot}	kg	masse totale des particules	
	x_i	1	fraction molaire	
	M_i	kg / mol	masse molaire du composant i	
	M_{tot}	kg / mol	masse molaire du mélange	

▷ Dans quelques livres, la fraction molaire est symbolisée par κ_i, la fraction massique par x_i ou w_i.

22.5.1 Pression partielle et loi de Dalton

La **pression totale** p [pascal (Pa) en unités SI)] d'un mélange de gaz raréfiés, est le quotient de toutes les forces exercées par l'aire de la surface où elles s'exercent :

$$p = \frac{F}{A}$$

Pression partielle p_i d'un type de particules : somme de toutes les forces exercées par un type défini de particules par unité d'aire de surface en cause.

$\text{Pression partielle} = \dfrac{\text{force partielle}}{\text{aire}}$				$ML^{-1}T^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$p_i = \dfrac{F_i}{A}$	p_i	Pa	pression partielle des particules i	
	F_i	N	partie due à i de la force normale à l'aire	
	A	m^2	aire	

Loi de Dalton :

- La somme de toutes les pressions partielles des divers composants d'un gaz est égale à la pression totale :

$$\sum_{i=1}^{K} p_i = \sum_{i=1}^{K} \frac{F_i}{A} = \frac{F}{A} = p$$

Les composants d'un gaz se répartissent indépendamment les uns des autres dans tout le volume. Chaque composant se comporte comme si aucun autre existait.

- Chaque composant occupe uniformément le volume.
- À l'équilibre, la pression partielle d'un composant est partout la même.

Le quotient de la pression partielle p_i sur la pression totale p est égal à la fraction molaire x_i du composant gazeux :

$$\frac{p_i}{p} = \frac{N_i}{N} = x_i$$

22.5.2 Identité d'Euler et équation de Gibbs–Duhem

Identité d'Euler : représentation de l'énergie interne $U(T, S, p, V, \mu_i, N_i)$ comme fonction d'autres variables thermodynamiques.

Identité d'Euler sur l'énergie interne				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$U = TS - pV + \sum_i \mu_i N_i$	U	J	énergie interne	
	T	K	température	
	S	J / K	entropie	
	p	Pa	pression	
	V	m^3	volume	
	μ_i	J	potentiel chimique relatif à i	
	N_i	1	nbre de particules de type i	

Équation de Gibbs–Duhem : relation entre différentielles : les variables intensives T, p, μ_1, ..., μ_K conjuguées aux variables extensives S, V, $N_1, \ldots, N_K$ ne peuvent toutes être indépendantes les unes des autres :

$$0 = S \; \mathrm{d}T - V \; \mathrm{d}p + \sum_i N_i \; \mathrm{d}\mu_i$$

L'écriture en termes de différentielles de l'énergie interne est :

$$\mathrm{d}U = T \, \mathrm{d}S - p \, \mathrm{d}V + \sum_{i=1}^{K} \mu_i \, \mathrm{d}N_i$$

▷ Cette expression est reliée à l'équation de Gibbs-Duhem à travers le développement en différentielle totale de l'identité d'Euler :

$$\mathrm{d}U = T \; \mathrm{d}S - p \; \mathrm{d}V + \sum_i \mu_i \; \mathrm{d}N_i + S \; \mathrm{d}T - V \; \mathrm{d}p + \sum_i N_i \; \mathrm{d}\mu_i$$

Température, pression et potentiel chimique (variables intensives) sont les dérivées de l'énergie interne par rapport aux variables extensives respectives d'entropie, de volume et de nombre de particules :

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T \qquad \frac{\partial U}{\partial V} = -p \qquad \frac{\partial U}{\partial N_l} = \mu_l, \quad l = 1 \ldots K$$

22.6 Systèmes à plusieurs phases

Système hétérogène : système dont les propriétés changent d'une manière discontinue aux limites de phase.

■ Le contenu d'un réservoir d'eau, de vapeur d'eau et d'air.

Phase : partie homogène d'un système hétérogène.

Limite de phase : interface de séparation entre deux phases.

■ La surface de l'eau dans une bouilloire, contenant de l'eau (phase liquide) et de la vapeur d'eau (phase gazeuse), constitue la limite de phase.

22.6.1 Équilibre de phase

Dans un système à P phases ($i = 1, 2, \ldots, P$) et K composants ($l = 1, 2, \ldots, K$), on a pour chaque phase :

$$dU^{(i)} = T^{(i)}\, dS^{(i)} - p^{(i)}\, dV^{(i)} + \sum_{l=1}^{K} \mu_l^{(i)}\, dN_l^{(i)} \qquad i = 1, 2, \ldots, P$$

▷ Pour la description complète d'un système, $K + 2$ variables extensives sont suffisantes.

Si le système total est en équilibre thermodynamique, les variables intensives des P phases et des K composants, satisfont à :

$T^{(1)} = T^{(2)} = \ldots = T^{(P)}$		équilibre thermique
$p^{(1)} = p^{(2)} = \ldots = p^{(P)}$		équilibre mécanique
$\mu_l^{(1)} = \mu_l^{(2)} = \ldots = \mu_l^{(P)}$	$(l = 1, \ldots, K)$	équilibre chimique

■ Pour un système liquide-gaz en équilibre :

$$T_{liq} = T_g \qquad p_{liq} = p_g \qquad \mu_{liq} = \mu_g$$

▷ Il n'y a pas d'équilibre thermique tant qu'un échange d'énergie s'opère et donc tant que les températures T ne sont pas égalisées. D'une manière analogue, l'équilibre chimique n'est pas réalisé tant qu'un échange de particules a lieu et donc tant que les potentiels chimiques μ_l relatifs à chaque type de particules l ne sont pas égaux ; quant à l'équilibre mécanique, il ne s'opère qu'après stabilisation du volume et égalisation des pressions.

■ Dans une bouilloire fermée, l'eau se vaporise jusqu'à ce que la pression de vapeur saturante soit atteinte. Si la bouilloire est ouverte, l'environnement extérieur fait partie du système. Quand l'air n'est pas saturé, l'eau se vaporise complètement avant même que l'équilibre soit réalisé.

22.6.2 Règle des phases de Gibbs

La **règle des phases de Gibbs** donne le nombre F (sans dimension) de variables intensives indépendantes (dites *degrés de liberté* ou *variance du système*) nécessaires à une description complète d'un système.

Degrés de liberté = composants + 2 − phases			
	Symbole	Unité	Dénomination
$F = K + 2 - P$	F	1	nbre de degrés de liberté
	K	1	nbre de composants
	P	1	nbre de phases

▷ Le concept de degré de liberté utilisé ici ne doit pas être confondu avec celui f entrant dans la description microscopique d'un système dans laquelle chaque particule possède ou prend de l'énergie.

■ Dans une bouilloire fermée contenant de la vapeur d'eau ($K = 1$), trois variables extensives sont nécessaires pour une description complète du système, par exemple S, V, N. Une d'elles (par exemple, V) fixe la taille du système. Les propriétés intensives sont complètement décrites avec déjà $F = 1 + 2 - 1 = 2$ variables indépendantes, comme par exemple la pression et la température.

Courbe de pression de vapeur, courbe $p_v(T)$: pression de vapeur d'un système biphasé en fonction de la température.

▷ L'application de la règle $F = K + 2 - P = 1 + 2 - 2 = 1$ à un système diphasé à un seul composant montre qu'il n'y a qu'un seul degré de liberté : les variables pression et température dépendent l'une de l'autre.

Point triple d'un système à un composant : point pour lequel trois phases sont, ensemble, en équilibre.

▷ Ici, $F = 1 + 2 - 3 = 0$, la variance est nulle.

● Au point triple, toutes les variables intensives sont rigoureusement fixées.

■ Pour l'eau, $T_{tr} = 273,16$ K et $p_{tr} = 610,6$ Pa.

▷ Les points triples sont particulièrement bien adaptés comme points fixes pour la définition des échelles de température.

Au point triple, seul le rapport relatif des quantités des différentes phases entre elles est variable.

▷ Les valeurs des points triples de nombreuses substances figurent dans la Table 23.1/2, page 782.

22.6.3 Relation de Clapeyron

Relation de Clapeyron ou de Clausius-Clapeyron : équation différentielle de la pression de vapeur $p(T)$, si l'entropie et le volume par particule sont connus en fonction de T et p.

Relation de Clapeyron

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} = \frac{s_g - s_{liq}}{v_g - v_{liq}} = \frac{S_g - S_{liq}}{V_g - V_{liq}} = \frac{Q}{(V_g - V_{liq})T}$$

Symbole	Unité	Dénomination
p	Pa	pression
T	K	température
S_{liq}	J / K	entropie phase liquide
S_g	J / K	entropie phase gazeuse
V_{liq}	m^3	volume du liquide
V_g	m^3	volume du gaz
s_{liq}	J / (K kg)	entropie massique du liquide
s_g	J / (K kg)	entropie massique du gaz
v_{liq}	m^3/kg	volume massique du liquide
v_g	m^3/kg	volume massique du gaz
Q	J	chaleur de vaporisation

▷ V_g et V_{liq} ne sont pas les volumes entiers des phases gazeuse et liquide, mais les volumes qu'une égale quantité de substance prendrait comme liquide ou comme gaz.

▷ Plutôt que les quantités massiques, on pourrait aussi utiliser les quantités molaires correspondantes, ou bien l'entropie et le volume par particule.

Comme très souvent $V_g \gg V_{liq}$, l'approximation suivante est justifiée :

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} \approx \frac{Q}{V_g T}$$

▷ Bien sûr, cette relation n'est pas valable au voisinage du point triple.

Avec cette approximation, l'écriture en terme de quantités massiques est :

Relation de Clapeyron dans le cas $V_g \gg V_{liq}$	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T} \approx \frac{q\rho_g}{T}$$	p	Pa	pression
	T	K	température
	q	J / kg	chaleur massique de vap.
	ρ_g	kg / m^3	masse volumique du gaz

22.7 Pression de vapeur des solutions

Courbe de pression de vapeur ou courbe $p_v(T)$: pression de vapeur d'un système biphasé en fonction de la température.

▷ Ici, la pression de vapeur saturante est, bien sûr, à l'équilibre.

La **tonométrie** est la mesure de l'abaissement de la pression (ou tension) de vapeur d'un solvant en présence d'un constituant dissous.

L'**ébullition** d'une substance se produit quand la pression de vapeur est plus élevée que la pression extérieure. L'étude des points d'ébullition des solutions concerne l'**ébulliométrie**.

Il y a **solidification** quand la pression de sublimation est plus basse que la pression de vapeur. La **cryométrie** a pour objet la mesure des points de congélation des solutions.

22.7.1 Loi de Raoult

La **loi de Raoult** donne l'abaissement de pression partielle de vapeur d'un solvant en équilibre avec une solution diluée d'une substance peu volatile.

● L'abaissement relatif de pression partielle du solvant est proportionnel à la **fraction molaire** de la substance dissoute.

Fraction molaire (subst. dissoute) = $\frac{\text{abaissement de pression de vapeur}}{\text{pression de vapeur originelle}}$			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{\Delta p}{p(T)} = x_{\mathrm{dis.}}$$	Δp	Pa	abaissement de pression de vapeur
	$p(T)$	Pa	pression de vapeur originelle
	$x_{\mathrm{dis.}}$	1	fraction molaire (subst. dissoute)

▷ Cette loi, valable *a priori* pour de très faibles concentrations (Fig. 22.13), couvre en fait un plus large domaine.

22.7.2 Augmentation du point d'ébullition et abaissement du point de fusion

En dissolvant une substance, la pression de vapeur du solvant est abaissée.

▷ Ainsi, le système n'atteint la pression de vapeur correspondant à la pression environnante qu'à de plus hautes températures.

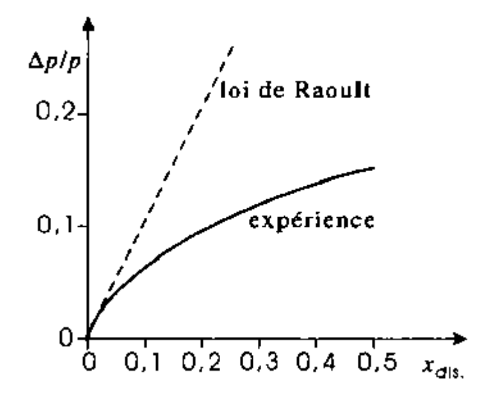


Fig. 22.13 : *Comparaison de la loi de Raoult à l'expérience.*

1. Augmentation du point d'ébullition

- En dissolvant une substance, la température d'ébullition augmente proportionnellement à la quantité de matière dissoute.

Constante ébullioscopique E, kelvin (K) en unités SI : facteur de proportionnalité entre l'augmentation du point d'ébullition et la fraction molaire de la substance dissoute.

Augmentation du point d'ébullition ∝ fraction molaire			Θ
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Delta T = E \cdot x_{\text{dis.}}$	ΔT	K	augmentation du point d'ébullition
	E	K	constante ébullioscopique
	$x_{\text{dis.}}$	1	fraction molaire (subst. dissoute)

▷ Pour des valeurs de constantes ébullioscopiques, voir Table 23.8/2, page 805

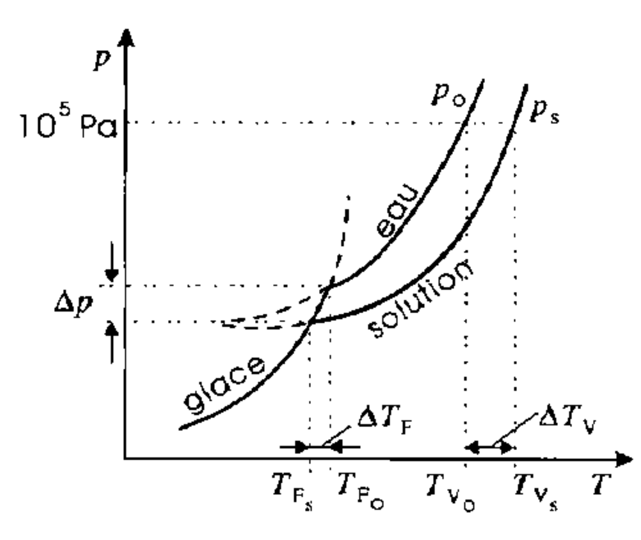


Fig. 22.14 : *Augmentation du point d'ébullition de ΔT_V et abaissement du point de fusion de ΔT_F.*

2. Abaissement du point de fusion

Il est dû à un abaissement de la pression de fusion : la courbe de pression de vapeur coupe la courbe de sublimation à de plus basses températures (Fig. 22.14).

■ L'épandage de sel en saison hivernale a pour effet d'abaisser le point de fusion de l'eau et de prévenir la formation de glace.

● En dissolvant une substance, la température de fusion est abaissée proportionnellement à la quantité de matière dissoute.

Constante cryoscopique K, kelvin (K) en unités SI : facteur de proportionnalité entre l'abaissement du point de fusion et la fraction molaire de la substance dissoute.

Abaissement du point de fusion $\propto$ fraction molaire			Θ
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Delta T = K \cdot x_{\text{dis.}}$	ΔT	K	abaissement du point de fusion
	K	K	constante cryoscopique
	$x_{\text{dis.}}$	1	fraction molaire (subst. dissoute)

▷ Pour des valeurs de constantes cryoscopiques, voir Table 23.8/2, page 805

▷ Avec les solvants électrolitiques, on doit encore tenir compte de la dissociation ionique.

22.7.3 Loi de Henry

Loi de Henry, dite aussi loi de Henry-Dalton : la pression d'un gaz au-dessus d'un solvant est proportionnelle, à l'équilibre, à la concentration x du gaz dissous.
Pour des points de référence connus à p_0, x_0 :

$$\frac{x}{x_0} = \frac{p}{p_0}$$

■ Dans une bouteille d'eau minérale, un équilibre apparaît entre le dioxyde de carbone CO_2 dissous et gazeux.

▷ La loi montre que la solubilité d'un gaz dans un solvant est proportionnelle à la pression partielle de ce gaz.

▷ La loi est aussi valable, avec une bonne approximation, dans le cas de pressions partielles de plusieurs gaz.

- Dans la loi de Henry, la pression de vapeur du gaz mesurée donne la quantité dissoute de gaz dans le solvant.
- Dans la loi de Raoult, la substance dissoute est faiblement volatile et le solvant donne la pression de vapeur.

22.7.4 Pression osmotique des solutions

Soluté : corps dissous dans un solvant.

Paroi semi-perméable : membrane poreuse se laissant traverser **sélectivement** par les molécules du solvant, mais pas par celles du soluté.

■ Membrane en cellophane, couche externe du protoplasme des cellules végétales ou animales,. . .

Osmose : phénomène de diffusion sélective qui a lieu lorsque deux solutions de concentrations différentes sont séparées par une membrane semi-perméable : le solvant de la solution la plus concentrée migre vers la solution la plus diluée, sans passage du soluté.

▷ La migration a lieu sous l'influence de la différence des potentiels chimiques des deux solutions.

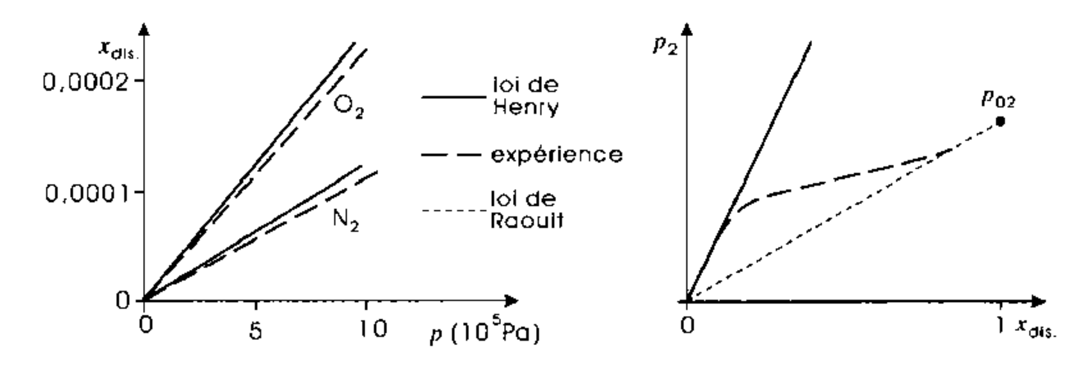


Fig. 22.15 : *Comparaison des lois de Raoult et de Henry avec l'expérience.*

Pression osmotique : pression d'équilibre s'instaurant entre les deux liquides.

▷ À l'équilibre, les potentiels chimiques dus à la pression et à la différence de concentration sont égaux.

▷ La condition d'équilibre nécessite que la membrane soit suffisamment résistante.

■ Des globules rouges de sang mis dans de l'eau pure, gonflent, puis éclatent. En effet, leurs parois sont perméables à l'eau, imperméables aux solutés de la solution cellulaire : pour réaliser l'égalité des pressions de vapeur des deux côtés, l'eau pénètre ; la paroi cellulaire n'est cependant pas assez résistante pour réaliser l'équilibre.

La pression osmotique exercée par le soluté en solution diluée obéit à la relation de Van't Hoff :

Pression osmotique			**$ML^{-1}T^{-2}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$P_{osm.} = \frac{nRT}{V}$$	$P_{osm.}$	Pa	pression osmotique
	V	m^3	volume de la solution
	n	mol	quantité de soluté
	R	J / (K mol)	cste des gaz parfaits
	T	K	température

- La loi de la pression osmotique, $P_{osm.}V = nRT$, de même forme que l'équation d'état des gaz parfaits, montre la grande similitude entre une substance dissoute et un gaz.
- La loi de Raoult peut se déduire de la relation de Van't Hoff : la validité de l'une entraîne celle de l'autre.

22.7.5 Mélange air-vapeur (air humide)

Les mélanges air-vapeur jouent un rôle très important dans, notamment, la production d'énergie et la technique des climatiseurs.

■ Mélange carburé (vapeur d'essence-air) dans les moteurs à combustion interne ou mélange vapeur-air dans les climatiseurs à air.

La **déshydration** d'un gaz peut être réalisée en retirant l'eau par des procédés chimiques, cribles moléculaires, refroidissement, chauffage ou en réalisant des mélanges.

▷ En général, des déshydrateurs sont utilisés, voir Table 23.7, page 804.

■ Les gels de silicate, le pentoxyde de phosphore et l'acide sulfurique sont de bons déshydrateurs.

L'**humidification** d'un gaz se fait par pulvérisation d'eau, par refroidissement ou par mélange avec de l'air humide.

1. Humidité atmosphérique

Humidité absolue f, kg/m^3 en unités SI : quotient de **la masse d'eau** m_{eau} présente (en phase gazeuse ou liquide) par le volume d'air V_{air} considéré :

$$f = \frac{m_{\text{eau}}}{V_L}$$

Degré d'humidité x (ou **contenance en eau**) : quantité sans dimension, rapport de la masse d'eau m_{eau} au volume d'air V_{air} considéré :

$$x = \frac{m_{\text{eau}}}{V_{\text{air}}}$$

Humidité atmosphérique relative φ : quantité sans dimension, rapport de la pression partielle de vapeur d'eau p_v à la pression de vapeur saturante p_S à la même température.

$\text{Humidité relative} = \dfrac{\text{pression de vapeur d'eau}}{\text{pression de vapeur saturante}}$				1
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\varphi = \dfrac{p_v}{p_S} = \dfrac{f}{f_{\max}}$	φ	1	humidité relative	
	p_v	Pa	pression partielle	
	p_S	Pa	press. de vapeur saturante	
	f	kg / m^3	humidité absolue	
	$f_{\max}$	kg / m^3	humidité maximale	

▷ L'humidité relative est usuellement donnée en pourcent :

- **vapeur insaturée :** $\varphi < 100\%$
- **vapeur saturée :** $\varphi = 100\%$

▷ Une bonne **ambiance d'intérieur** d'habitation correspond à une humidité relative de 50 %.

M Les **hygromètres** sont des appareils mesurant l'humidité atmosphérique relative.
Les **hygromètres à absorption** utilisent les propriétés hygroscopiques (telles la variation de longueur d'un cheveu) de certains corps.
Les **hygromètres à condensation** sont basés sur la détermination du point de rosée.
Les **hygromètres à aspiration** mesurent la chute de température occasionnée par l'évaporation de l'eau.
Les **hygromètres électroniques** mesurent la variation de la capacité d'un condensateur.
Le **psychromètre** mesure l'humidité ambiante en comparant les données d'un thermomètre gardé à $\varphi = 100\%$ à un autre à température ambiante (voir Table 23.8/3, page 805).

● L'humidité atmosphérique relative augmente si le mélange vapeur–air est refroidi.

▷ Ceci a pour origine l'abaissement de la pression de vapeur d'eau avec la température, voir Fig. 22.16.

Si la température décroît au-delà du **point de rosée**, alors **une condensation d'eau** s'opère :

$$p_v = p_S$$

2. Vapeur saturée

Vapeur saturée : vapeur sèche à exactement $\varphi = 100\%$.

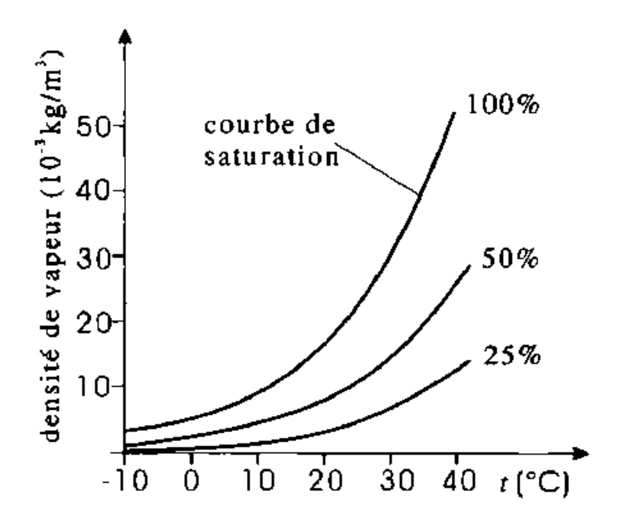


Fig. 22.16 : *Densité de vapeur d'eau en fonction de la température.*

▷ La vapeur saturée est extrêmement instable, une petite fuite de chaleur pouvant conduire à la formation d'un brouillard.

Vapeur sursaturée : vapeur existant à des températures inférieures au point de rosée. De petites gouttes d'eau se forment et se constituent en brouillard.

Germes de condensation : petites particules sur lesquelles les **gouttes d'eau** se forment et qui accélèrent la condensation.

Brouillard : formation de gouttes d'eau sur des germes de condensation.

Nuages : amas de vapeur d'eau condensée due à la montée de masses d'air humide refroidies en altitude.

À très basses températures, la transition vapeur–solide conduit à la formation d'eau solide (cristaux de glace, neige) sur des germes de cristallisation atmosphériques.

Grêle : précipitations de grains de glace résultant du refroidissement dans l'air, à des températures inférieures à 0°C, de gouttes liquides (pluies).

Vapeur humide : mélange biphasé de vapeur saturée et de liquide à la température d'ébullition. Des bulles de vapeur dans un liquide en ébullition peuvent entraîner avec elles de petites quantités d'eau.

La masse de vapeur humide est composée de la masse en vapeur saturée et de la masse d'eau :

$$m_{\text{humide}} = m_{\text{saturée}} + m_{\text{eau}}$$

Quantité de vapeur x_{vapeur} : rapport de la masse en vapeur saturée à la masse de vapeur humide.

Contenance en eau x_{eau} : rapport de la masse d'eau à la masse de vapeur humide :

$$x_{\text{vapeur}} = \frac{m_{\text{saturée}}}{m_{\text{humide}}} \qquad x_{\text{eau}} = \frac{m_{\text{eau}}}{m_{\text{humide}}}$$

Vapeur surchauffée : vapeur à une température plus élevée que celle qui correspond à la vapeur saturée.

● De la vapeur sursaturée est insaturée.

3. Masse volumique de l'air humide

Masse volumique de l'air humide : somme de la masse volumique de l'air sec et de la masse volumique du composant vapeur.

Masse volumique de l'air humide			ML^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\begin{aligned}\rho_{\text{humide}} &= \frac{1}{T}\left(\frac{p_{\text{sec}}}{R_{\text{sec}}}+\frac{p_{\text{vapeur}}}{R_{\text{vapeur}}}\right)\\ p_{\text{sec}} &= p_{\text{humide}}-p_{\text{vapeur}}\\ R_{\text{sec}} &= 287\,\text{J/(kg K)}\\ R_{\text{vapeur}} &= 462\,\text{J/(kg K)}\end{aligned}$$	ρ	kg / m^3	masse volumique
	T	K	température
	p_{humide}	Pa	pression air humide
	p_{sec}	Pa	pression air sec
	p_{vapeur}	Pa	pression de vapeur
	R_{sec}	J / (kg K)	cste mass. de l'air sec
	R_{vapeur}	J / (kg K)	cste mass. de la vapeur

L'air sec obéit à la loi de Dalton. (→ *Pression partielle*)

- L'air humide est plus léger que l'air sec.

4. Enthalpie massique de l'air humide

- L'enthalpie de l'air humide est la somme de l'enthalpie de l'air sec et de l'enthalpie de la vapeur.

L'enthalpie massique de l'air humide est le produit du degré d'humidité par la somme des enthalpies massiques de l'air sec et de la vapeur.

Enthalpie massique de l'air humide			L^{2}T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$h_{\text{humide}} = h_{\text{sec}} + x\,h_{\text{vapeur}}$$	h_{humide}	J / kg	enthalpie massique, air humide
	h_{sec}	J / kg	enthalpie massique, air sec
	h_{vapeur}	J / kg	enthalpie massique, vapeur
	x	1	degré d'humidité

La variation d'enthalpie massique est déterminée par la variation de température et la valeur de la capacité calorifique massique à pression constante. Pour la vapeur, l'enthalpie massique de vaporisation $\Delta h_{\text{vap.}}$ doit être ajoutée. Voir Table 23.8/6, page 807.

Variation d'enthalpie massique			L^{2}T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\begin{aligned}\Delta h_{\text{sec}} &= c_{\text{p sec}}\Delta T\\ \Delta h_{\text{vapeur}} &= c_{\text{p vapeur}}\Delta T + \Delta h_{\text{vap.}}\end{aligned}$$	h_{sec}	J / kg	enthalpie mass., air sec
	h_{vapeur}	J / kg	enthalpie mass., vapeur
	$h_{\text{vap.}}$	J / kg	enthalpie mass. de vap.
	T	K	température
	$c_{\text{p sec}}$	J / (kg K)	cap. cal. mass., air sec
	$c_{\text{p vapeur}}$	J / (kg K)	cap. cal. mass., vapeur

5. Diagramme de Mollier

C'est une représentation graphique des relations entre degré d'humidité, humidité atmosphérique relative, température et enthalpie massique.

Diagramme (h,x) : diagramme permettant de se rendre compte de la dépendance de l'enthalpie h avec le degré d'humidité x (Fig. 22.17).

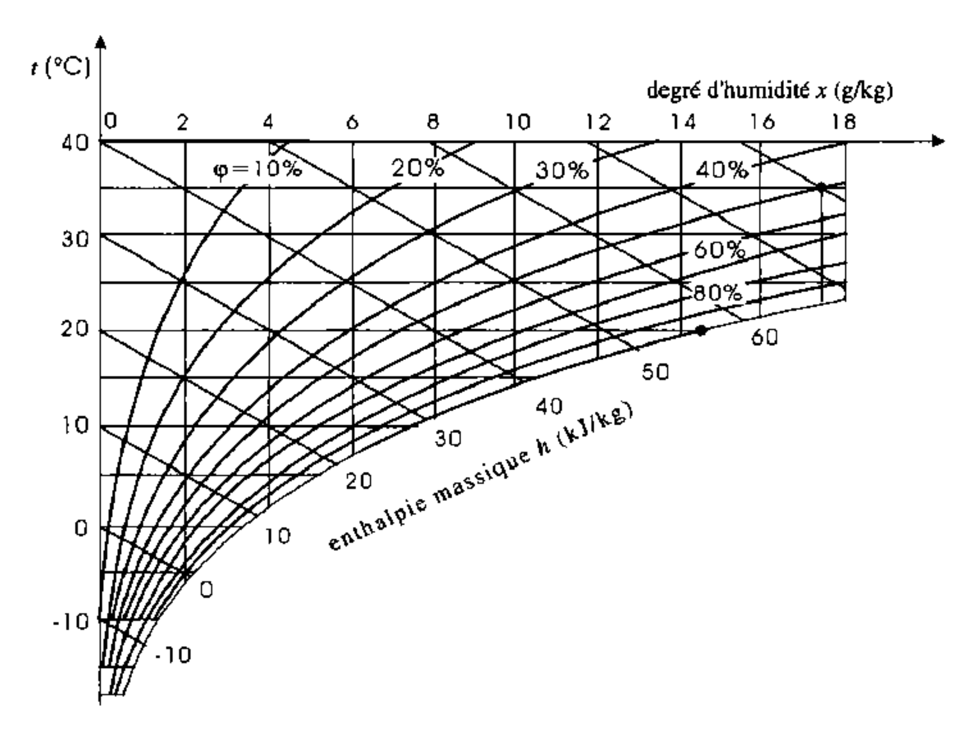


Fig. 22.17 : *Diagramme* (h,x) *de Mollier. Les lignes horizontales sont d'égale température, les verticales sont d'égal degré d'humidité x, les inclinées d'égale enthalpie h et celles courbées vers le côté droit sont d'égale humidité relative φ.*

▷ En pratique, le degré d'humidité x est tracé en abscisse (axe x) et la température en ordonnée (axe y). Les points d'égale enthalpie massique sont sur des lignes droites décroissantes, tandis que ceux d'égale humidité atmosphérique relative sont sur des lignes courbées vers la droite.

Ligne de saturation : ligne concernant une **humidité relative** $\varphi = 100\%$ et donc limitant inférieurement le diagramme.

● Un diagramme (h, x) n'est **valable** que pour une **pression totale** fixée (ou sur un domaine).

La pression partielle de vapeur est variable et proportionnelle au degré d'humidité.

▷ D'autres représentations sont possibles dans lesquelles l'enthalpie massique est fonction de la pression de vapeur ou en implantant une courbe pression–humidité à la figure.

22.8 Réactions chimiques

Réaction chimique : processus dans lequel des particules d'une sorte réagissent avec d'autres pour en donner de nouvelles.

▷ Cette opération s'écrit sous la forme d'une équation de réaction chimique.

■ Deux molécules d'hydrogène et une molécule d'oxygène réagissent pour former deux molécules d'eau :

$2\,H_2 + O_2 \rightleftharpoons 2\,H_2O$

Équation de réaction : description où entrent les substances initiales et les produits finals, ainsi que leurs contributions quantitatives.

Réactifs : substances initiales susceptibles de disparaître après réaction.

Produits : substances produites dans la réaction.

Notation d'une équation de réaction dans laquelle les substances $A_1, A_2, \ldots$ sont transformées en substances $B_1, B_2, \ldots$:

Équation de réaction	Symbole	Unité	Dénomination
$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots \rightleftharpoons b_1 B_1 + b_2 B_2 + \ldots$	a_1	1	coef. stœchiométrique, réactif 1
	a_2	1	coef. stœchiométrique, réactif 2
	b_1	1	coef. stœchiométrique, produit 1
	b_2	1	coef. stœchiométrique, produit 2

Les **coefficients stœchiométriques** a_i, b_i désignent les nombres relatifs de particules réagissantes et produites dans la réaction.

■ Dans la formulation ci-dessus, a_1 particules de type A_1 et a_2 particules de type A_2 réagissent pour former b_1 particules de type B_1, etc.

▷ Le signe $\rightleftharpoons$ indique une réaction réversible, donc limitée à un certain équilibre. La relation entre les deux réactions, directe et inverse, est déterminée par la loi d'action de masse. (→ *Loi d'action de masse*)

22.8.1 Stœchiométrie

Stœchiométrie : calcul quantitatif des réactions chimiques.

1. Relation entre les masses réactives

Pour que la réaction :

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots \rightleftharpoons b_1 B_1 + b_2 B_2 + \ldots$$

se fasse, si possible complètement, les rapport de masses doivent obéir à :

Rapport des masses ∝ rapport des masses molaires	Symbole	Unité	Dénomination
$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_1 M_1}{a_2 M_2}$	m_1	kg	masse totale, substance 1
	m_2	kg	masse totale, substance 2
	a_1	1	coef. stœchiométrique, substance 1
	a_2	1	coef. stœchiométrique, substance 2
	M_1	kg / mol	masse molaire, substance 1
	M_2	kg / mol	masse molaire, substance 2

2. Solutions

Concentration c_i : quantité de substance i par volume ou unité de masse.

Pour décrire la concentration d'une solution, d'autres définitions sont couramment utilisées et rappelées ici :

- **Fraction massique** : rapport de la masse totale de la substance considérée à la masse totale du mélange (→ *Gaz composés*) :
  $$\xi_i = \frac{m_i}{m_{tot}} = x_i \frac{M_i}{M_{tot}}$$
  Pourcent en masse : fraction massique donnée en pourcent.
  $$\text{masse en } \% = \xi_i \cdot 100\% = \frac{m_i}{m_{tot}} \cdot 100\%$$
  Plus couramment, on appelle **titre** massique, volumique ou molaire, le rapport de la grandeur choisie pour décrire le soluté (masse, volume ou mole) à cette même grandeur pour la solution (soluté + solvant).
- Rapport de la masse de la substance à la masse restante m_{res} :
  $$\frac{m_i}{m_{res}} = \frac{m_i}{m_{tot} - m_i} = \frac{\xi_i}{1 - \xi_i}$$
  Ce rapport de masse, particulièrement adapté à la préparation de solutions, est indépendant de la température.
- **Molarité** c : nombre de moles d'une substance par litre de solvant.
- Masse de substance dissoute (soluté) par unité de volume de solvant.
- **Pourcent en volume** : rapport exprimé en %, du volume d'une substance au volume total.
  $$\text{volume en } \% = \frac{V_i}{V_{tot}} \cdot 100$$
  Cette définition est très significative en présence de mélange de liquides.

Le concept de concentration utilisé ici pour les solutions, est fondé sur celui de molarité :

$$c_i = \frac{n_i}{V} = \frac{\text{nombre de moles}}{\text{volume de solvant}}$$

■ Une solution aqueuse de sel NaCl à 0,5 molaire est de 0,5 mol de NaCl par litre d'eau.

Pour la préparation d'une solution de molarité c désirée, la relation suivante est toute indiquée :

Masse de substance à dissoudre				**M**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$m = cVM$	m	g	masse de substance à dissoudre	
	c	mol / ℓ	molarité	
	V	ℓ	volume de solvant	
	M	g / mol	masse molaire de substance à dissoudre	

■ Pour préparer 250 mℓ de solution NaCl à 0,1 molaire, la masse nécessaire de NaCl est :

$$m = 0,1\,\text{mol}/\ell \times 0,25\,\ell \times 42\,\text{g}/\ell = 1,05\,\text{g}$$

Normalité : quantité d'éléments actifs (ions monovalents) d'une solution rapporté à un litre de solvant.

▷ Le fait que les groupes monovalents aient des charges égales est à souligner ; ainsi pour la base NaOH, on ne comptera pas deux groupes Na^+ et OH^-, mais seulement un seul.

■ Une solution de HCl une fois molaire contient H_3O^+ Cl^- et est de normalité 1.
Une solution de H_2SO_4 une fois molaire contient $2H_3O^+$ SO_4^{2-} et est de normalité 2.

22.8.2 Règle des phases pour les réactions chimiques

Règle des phases de Gibbs étendue : fixe le nombre de degrés de liberté en incluant les réactions chimiques.

Degrés de liberté = constituants + 2 − phases − réactions			
	Symbole	Unité	Dénomination
$F = K + 2 - P - R$	F	1	nombre de degrés de liberté
	K	1	nombre de constituants
	P	1	nombre de phases
	R	1	nombre d'équations de réaction

▷ Le nombre total de variables extensives est $(K - R + 2)$.

22.8.3 Loi d'action de masse

Notation d'une équation de réaction chimique :

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots \rightleftharpoons b_1 B_1 + b_2 B_2 + \ldots$$

La **loi d'action de masse** décrit, à l'équilibre, les concentrations des substances initiales et finales d'une réaction chimique.

Loi d'action de masse			
	Symbole	Unité	Dénomination
	a_1	1	coef. stœchiométrique, réactif 1
	a_2	1	coef. stœchiométrique, réactif 2
	b_1	1	coef. stœchiométrique, produit 1
$\dfrac{x_{B_1}^{b_1} x_{B_2}^{b_2} \cdots}{x_{A_1}^{a_1} x_{A_2}^{a_2} \cdots} = K(p, T)$	b_2	1	coef. stœchiométrique, produit 2
	x_{A_1}	1	fraction molaire, réactif 1
	x_{A_2}	1	fraction molaire, réactif 2
	x_{B_1}	1	fraction molaire, produit 1
	x_{B_2}	1	fraction molaire, produit 2
	K	1	constante d'équilibre

▷ Plutôt que la fraction molaire, la concentration absolue de la substance peut être utilisée ; la constante d'équilibre doit cependant être modifiée en conséquence.

$$\frac{c_{B_1}^{b_1} c_{B_2}^{b_2} \cdots}{c_{A_1}^{a_1} c_{A_2}^{a_2} \cdots} = K'$$

● Dans la formulation de la loi d'action de masse, les substances de la voie d'entrée (réactifs) apparaissent au dénominateur par leur concentration élevée à la puissance de leur multiplicité respective ; celles de la voie de sortie (produits) figurent, sous une forme équivalente, au numérateur.

La constante d'équilibre $K(p, T)$ reflète l'équilibre de la réaction et indique laquelle des deux réactions, directe ou inverse, l'emporte.

$K > 1$: l'équilibre est en faveur des produits de réaction. La concentration de ceux-ci prédomine à l'équilibre. Pour une égale concentration des produits et des réactifs, la réaction directe domine.

$K < 1$: l'équilibre est du côté des réactifs. Leur concentration prédomine à l'équilibre. Pour une égale concentration des produits et des réactifs, la réaction inverse domine.

Pour le déroulement de la réaction, les *produits des concentrations* au numérateur et au dénominateur sont déterminants, *non pas* les concentrations elles-mêmes.

■ Si les concentrations subissent des changements mais que le produit de leurs valeurs reste constant, alors les concentrations finales ne changent pas. Ainsi :

$$\frac{x_C}{x_A \cdot x_B} = \frac{x_C}{0,5\,x_A \cdot 2\,x_B} = K$$

Ceci revêt une grande importance quand la constante d'équilibre est faible :

■ Une substance P est produite à partir d'une matière coûteuse C et d'une matière économique E. L'équation de la réaction s'écrit :

$$C + E \rightleftharpoons P \qquad \text{avec} \qquad \frac{x_P}{x_C \cdot x_E} = K$$

Pour une réaction incomplète (K très faible), une utilisation optimale de la substance chère peut être atteinte si la matière bon marché est ajoutée en excès. Ainsi, pour une concentration double de matière bon marché, seulement une concentration moitié de la matière onéreuse est nécessaire pour réaliser la même quantité de produit P.

La constante d'équilibre est reliée au potentiel chimique μ_j des partenaires de la réaction :

$$K(p,T) = \mathrm{e}^{\left[-\frac{1}{kT}\left(\sum_j b_j\mu_j(p,T) - \sum_i a_i\mu_i(p,T)\right)\right]}$$

▷ La constante d'équilibre dépend de la pression et de la température.

Description en terme d'enthalpie libre :

Constante d'équilibre			
	Symbole	Unité	Dénomination
$K(p,T) = \mathrm{e}^{\left(-\frac{\Delta G(p,T)}{kT}\right)}$	K	1	constante d'équilibre
	G	J	enthalpie libre
	k	J / K	cste de Boltzmann
	T	T	température

■ $\Delta G(p,T) > 0$ signifie qu'il faut fournir de l'énergie pour que la réaction se produise.
$\Delta G(p,T) = 0$, la réaction est en équilibre.
$\Delta G(p,T) < 0$, la réaction a lieu spontanément.

▷ Pour les plus importantes réactions, celles acide–base, les constantes d'équilibre de dissociation figurent dans les Tables de constantes chimiques.

▷ Souvent les concentrations des solvants (comme H_2O), restant constantes, sont incluses dans la constante d'équilibre.

22.8.4 Valeur du pH et produit de solubilité

La dissociation de la molécule d'eau :

$$2\,H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-$$

conduit à, selon la loi d'action de masse :

$$\frac{x_{H_3O^+} \times x_{OH^-}}{x^2_{H_2O}} = K \qquad \frac{c_{H_3O^+} \times c_{OH^-}}{c^2_{H_2O}} = K'$$

▷ La concentration de l'eau, restant invariable, est incluse dans la constante.

■ Pour l'eau :
$c_{H_3O^+} \times c_{OH^-} = 10^{-14}\,\text{mol}^2/\ell^2$ (à $t = 22\,°C$)

▷ À partir de la concentration de H_3O^+ dans l'eau, on peut tirer des conclusions quant à la concentration de OH^-.

1. Valeurs de pH et pOH

Valeur de pH : logarithme décimal changé de signe, de la concentration en ions H_3O^+ :

$$\text{pH} = -\log\left(\frac{c_{H_3O^+}}{1\,\text{mol}/\ell}\right)$$

Valeur de pOH : logarithme décimal changé de signe, de la concentration en ions OH^- :

$$\text{pOH} = -\log\left(\frac{c_{OH^-}}{1\,\text{mol}/\ell}\right)$$

▷ La somme des deux valeurs vaut 14 :
pH + pOH = 14

- Les solutions acides ont des concentrations élevées en H_3O^+ et de faibles valeurs de pH.
- Les solutions basiques ont des concentrations faibles en H_3O^+ et des pH élevés.
- Les solutions neutres ont des concentrations égales en H_3O^+ et OH^- et donc :

$$\text{pH} = \text{pOH} = 7$$

▷ Il n'y a pas de relation thermodynamique exacte entre l'activité des ions hydrogène et la valeur de pH. Les échelles conventionnelles de pH sont réalisées à l'aide d'une série de solutions tamponnées.

Les concentrations en ions H_3O^+ et OH^- peuvent être changées par addition d'acides ou de bases.

■ En fait, l'acide chlorhydrique HCL se dissocie complètement dans l'eau selon :

$$HCl + H_2O \rightarrow H_3O^+ + Cl^-$$

Un excès en ions H_3O^+ conduit à une valeur de pH plus faible donnée par :

$$\text{pH} = -\log\left(\frac{c_{H_3O^+}}{1\,\text{mol}/\ell}\right) = -\log\left(\frac{c_{\text{acide}} + c_{\text{diss.}}}{1\,\text{mol}/\ell}\right)$$

ou en concentrations :

$$(c_{\text{acide}} + c_{\text{diss.}}) \cdot c_{\text{diss.}} = 10^{-14}\,\text{mol}^2/\ell^2$$

2. Acidité et basicidité

La **constante d'acidité** K_A décrit la dissociation des acides.

La **constante de basicité** K_B décrit la dissociation des bases.

▷ Le degré de dissociation des acides et des bases est plus grand pour des solutions diluées d'acides et de bases que pour des concentrées.

pK_A et pK_B sont les logarithmes décimaux changés de signe, des constantes respectives d'acidité et de basicité.

$$pK_A = -\log K_A \qquad pK_B = -\log K_B$$

3. Produit de solubilité

Constante de produit de solubilité L : constante résultant de l'application de la loi d'action de masse à une substance dissoute dans un solvant. Elle décrit la concentration ionique d'une solution saturée.

▷ Un sel non dissous se dépose dans le fond du flacon et n'a pas a être pris en compte. Ainsi, seuls restent les termes du numérateur de la loi d'action de masse.

■ Constante du produit de solubilité du chlorure d'argent. La dissociation de AgCl :
$AgCl$ (dépôt) $\rightleftharpoons Ag^+ + Cl^-$ (en solution saturée)
est déterminée par la constante du produit de solubilité :

$$c_{Ag^+} \times c_{Cl^-} = L = 1,6 \cdot 10^{-10} \, \frac{\text{mol}^2}{\ell^2}$$

4. Concentrations effectives

Les concentrations effectives ou **activités en concentration** a, tiennent compte des interactions entre ions. Elles se substituent, dans la loi d'action de masse, aux concentrations des substances qui peuvent être déterminées analytiquement.

[M] Le coefficient d'activité moyenne f, moyenne géométrique des coefficients d'activité des anions et cations, peut seul être mesuré.

Activité a : concentration effective dans un solvant :

$$a = f \cdot c$$

22.9 Égalisation des températures

Un transfert de chaleur ne peut s'opérer, entre deux corps, que vers celui qui est à la température la plus basse ; ainsi, le corps "chaud" se refroidit et le corps "froid" s'échauffe.
Au cours du processus, l'entropie totale augmente.

L'**échange de chaleur** s'effectue, en général, par contact direct des deux corps à température différente.

Température finale T_f : température du système total des deux corps après complet transfert de chaleur.

22.9.1 Température de mélange de deux systèmes

1. Règle des mélanges de Richmann

● La température finale d'un mélange de deux systèmes est déterminée par la capacité calorifique totale des parties.

Règle des mélanges de Richmann			
	Symbole	Unité	Dénomination
$C_A(T_f - T_A) = C_B(T_B - T_f)$	C_A	J / K	capacité cal., substance A
	C_B	J / K	capacité cal., substance B
	T_A	K	temp. initiale, substance A
	T_B	K	temp. initiale, substance B
	T_f	K	temp. finale du mélange

Ici, aucun travail mécanique ou transfert de chaleur ne provient de l'extérieur.

▷ De plus, la transformation est irréversible : $\Delta S > 0$

L'énergie interne U du système total reste constante dans l'échange. La quantité de chaleur est aussi constante car, transférée par un système, elle est absorbée par l'autre. Cependant l'entropie augmente.

Température du mélange $= \dfrac{\sum(\textbf{capacité cal.} \times \textbf{température})}{\sum(\textbf{capacités cal.})}$				Θ
	Symbole	Unité	Dénomination	
$T_f = \dfrac{C_A T_A + C_B T_B}{C_A + C_B}$	T_f	K	temp. finale du système	
	C_A	J / K	capacité cal., substance A	
	T_A	K	temp. initiale, substance A	
$= \dfrac{c_A m_A T_A + c_B m_B T_B}{c_A m_A + c_B m_B}$	c_A	J / (K kg)	cap. cal. massique, subst. A	
	m_A	kg	masse de substance A	
	C_B	J / K	cap. cal., substance B, ...	

2. Systèmes de capacités caloriques identiques

● Pour des capacités calorifiques identiques, $c_A = c_B = c$, la température T_f du mélange dépend seulement des masses en présence m_A et m_B :

$$T_f = \frac{m_A T_A + m_B T_B}{m_A + m_B} \quad \text{pour} \quad c_A = c_B$$

Pour des **systèmes de masses égales**, $m_A = m_B$, on obtient la valeur moyenne des températures comme température du mélange :

$$T_f = \frac{T_A + T_B}{2} \qquad \text{pour} \quad C_A = C_B$$

Pour un système de **masse plus grande** que l'autre ($m_B \gg m_A$, pour $c_A = c_B$ ou $C_B \gg C_A$), la température du mélange est approximativement égale à celle du système de plus grande masse :

$$T_f \approx \frac{C_A}{C_B} T_A + T_B \approx T_B \quad \text{pour} \quad C_B \gg C_A$$

▷ Un bain de chaleur à température fixe doit avoir une capacité calorifique beaucoup plus élevée que le système à échauffer mis dans le bain.
À cause de sa capacité calorique élevée, l'eau est un transporteur de chaleur particulièrement bon.

3. Généralisation à plusieurs systèmes

Quand plusieurs systèmes sont mis ensemble, la température finale est :

$$T_f = \frac{C_1 T_1 + C_2 T_2 + C_3 T_3 + \ldots}{C_1 + C_2 + C_3 + \ldots} = \frac{c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2 + c_3 m_3 T_3 + \ldots}{c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3 + \ldots}$$

22.9.2 Processus réversible et irréversible

● Dans les cas irréversibles (contact direct), la température finale du mélange est:

$$T_f = \frac{C_A T_A + C_B T_B}{C_A + C_B}$$

▷ Dans un contact direct (processus irréversible), le système total est tel que $\Delta U = \Delta Q = 0$ et $\Delta S > 0$.

● En installant, entre les systèmes A et B, une machine thermique (**pompe à chaleur**) réversible, alors :

$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = 0$

Pour la température finale du mélange, on obtient (processus réversible) :

$T_f = (T_A^{C_A} T_B^{C_B})^{\frac{1}{C_A+C_B}}$

En conclusion :

- Un processus **réversible** conduit à une température de mélange qui est la **moyenne géométrique** de T_A et de T_B pondérée par C_A et C_B.
- Un processus **irréversible** conduit à une température de mélange qui est la **moyenne arithmétique** de T_A et de T_B pondérée par C_A et C_B.

Cas réversible explicité en termes de grandeurs dont les rapports sont sans dimension :

$$\frac{T_f}{T_A} = \left(1 + \frac{T_B - T_A}{T_A}\right)^{\frac{C_B}{C_A+C_B}}$$

▷ Pour de très faibles différences de température, le terme à exposant ci-dessus peut être développé. Le premier ordre conduit à la formulation du cas irréversible.

● La température finale, quand il y a réversibilité, est plus basse que s'il y a irréversibilité.
$T_f^{\text{rév}} < T_f^{\text{irr}}$

Le travail effectué par une machine thermique réversible est :

$$\Delta W = \Delta U = C_A(T_f - T_A) + C_B(T_f - T_B)$$

22.10 Transfert de la chaleur

Un **transfert de la chaleur** peut s'opèrer suivant les trois mécanismes distincts suivants de :

a) Convection : l'énergie thermique s'échange à l'intérieur du **fluide** (matériau gazeux ou liquide) par **déplacement** de parties macroscopiques de fluide sous l'influence de différences de température.

■ Déplacement de l'eau chaude des tropiques vers l'hémisphère Nord par le Gulf Stream. Refroidissement des moteurs par ventilation ou soufflage.

b) Rayonnement thermique : l'énergie thermique s'échange par émission ou absorption de rayonnement électromagnétique.

■ La chaleur radiante du soleil ; lampes à infra-rouge.

▷ Tout corps, qui n'est pas au zéro absolu, émet un rayonnement thermique.

c) Conduction : l'énergie thermique s'échange par contact direct de deux corps sans déplacement de matière ; les particules d'un corps transmettent l'énergie par chocs avec les particules de l'autre corps.

■ Transfert de chaleur à travers murs et fenêtres ; bouilloire chauffée par une plaque électrique.

■ Dans les réactions chimiques exothermiques ou endothermiques, de la chaleur doit être enlevée ou, au contraire, apportée pour entretenir ces réactions, éviter de les emballer et garantir aussi une exploitation sûre des appareillages.

Les **transferts de chaleur** sont d'une importance capitale pour la conduite de nombreux processus physiques et chimiques.

22.10.1 Courant thermique

Courant thermique ou **flux de chaleur** Φ, watt (W) ou joule par seconde (J/s) en unités SI : quantité de chaleur transférée par unité de temps. La forme différentielle s'obtient en passant à la limite sur un intervalle de temps tendant vers zéro.

$\text{Courant thermique} = \dfrac{\text{quantité de chaleur}}{\text{durée}}$			ML^2T^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Phi = \dfrac{Q}{t}$	Φ	J / s = W	courant thermique
$\Phi = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{\delta Q}{dt}$	ΔQ	J	quantité de chaleur
	Δt	s	durée

■ Dans le refroidissement lent et uniforme d'un corps, une quantité de chaleur de 90 J est transférée en 15 s à l'environnement. Le courant thermique est :

$$\Phi = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{90\,\text{J}}{15\,\text{s}} = 6\,\text{W}$$

[M] Le courant thermique peut être déterminé via la loi de transmission de chaleur (→ *Transmission de chaleur*) par contact thermique d'un petit capteur de coefficient connu de conduction de chaleur (→ *Conduction de chaleur*) : on mesure la différence de température entre les deux faces du capteur. L'avantage d'une telle mesure est qu'elle ne nécessite pas une connaissance des paramètres du matériau à la zone de contact ; par contre, le courant thermique est influencé par la présence du capteur et la mesure, de ce fait, ne peut être conduite qu'avec une précision limitée.

22.10.2 Transmission de la chaleur

1. Transmission de la chaleur

La transmission de la chaleur est une forme spéciale de transport de chaleur depuis un corps (typiquement un solide), appelé *matériau* dans la suite, vers un fluide (gaz ou liquide, par exemple de l'air ou de l'eau froide), appelé *milieu* dans la suite (Fig. 22.18).

● La chaleur échangée est proportionnelle au produit de l'aire de contact, par la différence de température et par la durée d'échange.

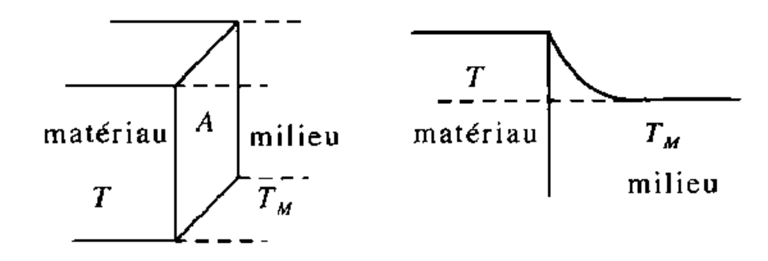


Fig. 22.18 : *Transmission de la chaleur.*

2. Coefficient de transmission de chaleur

Exprimé par α, watt par kelvin et mètre carré ($W.K^{-1}.m^{-2}$) dans SI, il désigne le facteur de proportionnalité donnant l'intensité de l'échange de chaleur au cours du contact.

Chaleur ∝ surface × différence de température × temps				**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\Delta Q = \alpha \cdot A \cdot (T - T_M) \cdot \Delta t$	ΔQ	J	chaleur échangée	
	α	W / (K m²)	coef. de transmission	
	A	m²	aire de la surface de contact	
	T	K	température du matériau	
	T_M	K	température du milieu	
	Δt	s	durée	

▷ La durée ne doit pas être trop longue, car l'échange de chaleur conduirait à une variation de température.

■ Un cube de fer de 30 cm de coté est à une température de 70°C ; il est refroidi dans l'air à 20°C. En supposant que la surface de contact est de déperdition faible et que seules cinq faces contribuent :

$$A = 5 \cdot (30\,\mathrm{cm})^2 = 0,45\,\mathrm{m}^2$$

La perte de chaleur en 30 s est :

$$Q = \alpha A t (T_A - T_B) = 5,8\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\,\mathrm{K}} \cdot 0,45\,\mathrm{m}^2 \cdot 30\,\mathrm{s} \cdot 50°\mathrm{C} \simeq 3,92\,\mathrm{kJ}$$

Le coefficient de transmission de chaleur décrit l'aptitude d'un matériau à céder de la chaleur à un milieu.

▷ Le coefficient de transmission dépend des propriétés intrinsèques aux matériaux conducteurs de chaleur (capacité calorifique, densité, coefficient de conductivité thermique).

● La vitesse avec laquelle le transfert de chaleur s'effectue est une donnée très importante.

▷ Des coefficients de transmission de chaleur sont donnés dans la Table 23.4, page 799.
Ils ont diverses valeurs suivant que les fluides sont des gaz au repos (environ 10 W/K m²), des gaz lourds en mouvement (~ 100 W/K m²), de l'eau (de 100 à plusieurs milliers de W/K m²) ou de la vapeur d'eau condensée (plus de 10 000 W/K m²).

3. Courant thermique

Quand il y a transmission de la chaleur, le courant thermique est donné par :

Courant thermique ∝ surface × diff. de température				**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\Phi = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = \alpha \cdot A \cdot (T - T_M)$	Φ	J/s	courant thermique	
	α	W / (K m²)	coef. de transmission	
	A	m²	aire	
	T	K	température du matériau	
	T_M	K	température du milieu	

4. Évolution temporelle du refroidissement

Dans un régime stationnaire, la courbe des températures est une fonction exponentielle du temps. La vitesse de refroidissement d'un matériau dépend de sa surface de contact avec le milieu, de sa capacité calorifique et de sa température.
Au fur et à mesure que la chaleur se transmet au milieu, le taux de transfert de chaleur reste proportionnel à la différence de température $T_d = T_{\text{substance}} - T_{\text{milieu}}$. La température du matériau est alors décrite, à tout instant, par une équation différentielle du temps dont la solution est une fonction exponentielle :

Évolution de la température avec le temps			Θ
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{\mathrm{d}T_d}{\mathrm{d}t} = -\frac{\alpha \cdot A}{C} \cdot T_d$$ $$T(t) = (T_0 - T_M)\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha A}{C}t} + T_M$$	T	K	temp. du matériau
	T_0	K	température initiale
	T_M	K	température du milieu
	α	W / (K m^2)	coef. de transmission
	A	m^2	aire de contact
	C	J/K	capa. cal. du matériau
	t	s	temps écoulé

- La capacité calorifique du milieu évacuant la chaleur doit être beaucoup plus élevée que celle du matériau refroidi.

22.10.3 Conduction thermique

1. Conduction thermique

Il y a conduction thermique quand il y a un échange de chaleur entre deux matériaux A et B à travers une cloison séparatrice.

▷ La conduction thermique est un phénomène non convectif.

Chaleur $\propto \frac{\text{aire}}{\text{épaisseur}} \times$ diff. de température $\times$ temps			$\mathrm{ML^2T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\Delta Q = \lambda \cdot \frac{A}{s} \cdot (T_A - T_B) \cdot \Delta t$$	ΔQ	J	chaleur échangée
	λ	W/(K m)	conductivité thermique
	A	m^2	aire de contact
	s	m	épaisseur du mur
	Δt	s	durée

Définition à partir du courant thermique :

Courant thermique $\propto \frac{\text{aire}}{\text{épaisseur}} \times$ diff. de température			ML^2T^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\Phi = \frac{\delta Q}{dt} = \lambda \cdot \frac{A}{s} \cdot (T_A - T_B)$$	Q	J/s	quantité de chaleur
	λ	W/(K m)	conductivité thermique
	A	m^2	aire de contact
	s	m	épaisseur du mur

■ Pour une différence de température de 20 K, la chaleur perdue par seconde à travers une vitre de 5 mm d'épaisseur et 1 m^2 de surface, est :

$$\Phi = \lambda \frac{A}{s}(T_A - T_B) = 1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m\,K}} \cdot \frac{1\,\mathrm{m}^2}{0,005\,\mathrm{m}} \cdot 20\,\mathrm{K} = 4\,\mathrm{kW}$$

2. Conductivité thermique

Ou **coefficient de conductibilité thermique** λ, en watt par kelvin et par mètre W/(K m) en unités SI : quantité traduisant la propriété d'un matériau à conduire la chaleur.

▷ La conductivité thermique est déterminée par des caractères intrinsèques au matériau comme sa densité, sa capacité calorifique et le libre parcours moyen.

▷ Les conductivités thermiques de divers matériaux sont données plus loin, Table 23.3, page 792.
Les valeurs vont de quelques centaines de W/(m.K) pour les métaux, à 0,1 – 1W/(m.K) pour les liquides et à 0,02 W/(m.K) pour les gaz.

3. Description microscopique

Dans un gaz, les particules se heurtent entre elles, échangent énergie et quantité de mouvement et continuent à se mouvoir à d'autres vitesses. Ce processus collisionnel est à la base des phénomènes de transport de l'énergie et de la matière.

Libre parcours moyen l : distance moyenne (sur un grand nombre de chocs) parcourue par une particule (atome, molécule, ou – dans un métal – électron) entre deux collisions successives.

Vitesse moyenne $\bar{v}$: moyenne arithmétique des modules des vitesses.

Pour une distribution de Maxwell-Boltzmann (→ *Gaz parfaits – énergie cinétique*) :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_M}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\sqrt{\bar{v^2}}$$

Conductivité thermique λ : capacité d'un système à transporter de la chaleur.

Conductivité thermique (microscopiquement)			$MLT^{-3}\Theta^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\lambda = \frac{1}{3}\bar{v}\,l\,\rho\,c_V$$	λ	W / (K m)	conductivité thermique
	$\bar{v}$	m / s	vitesse moyenne
	l	m	libre parcours moyen
	ρ	kg / m^3	volume massique
	c_V	J / (K kg)	capacité cal. mass. à V=cste

▷ Le produit de la masse volumique et de la capacité calorifique peut être remplacé, si nécessaire, par le produit de la densité molaire et de la capacité calorifique molaire, ou par le produit de la densité des particules et de la chaleur massique par particule.

Dans le cas des gaz monoatomiques ($f = 3$ degrés de liberté) :

Conductivité thermique (gaz monoatomique)			MLT$^{-3}\Theta^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\lambda = \frac{1}{2} k \bar{v} l \rho_N$	λ	W / (K m)	conductivité thermique
$k = 1,38066 \cdot 10^{-23}$ J/K	k	J / K	constante de Boltzmann
	$\bar{v}$	m / s	vitesse moyenne
	l	m	libre parcours moyen
	ρ_N	1 / m^3	densité de particules

4. Conductivité des mélanges de gaz

Dans les mélanges de gaz, la conductivité thermique peut être calculée d'une manière approchée en additionnant les conductivités thermiques relatives à chaque gaz pondérées par la concentration relative de ces gaz.

Conductivité thermique totale du mélange			MLT$^{-3}\Theta^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\lambda = x_1\lambda_1 + x_2\lambda_2 + \ldots$	λ	W / (m K)	conductivité thermique totale
$x_1 = \dfrac{n_1}{n_1 + n_2 + \ldots}$	x_1	1	fraction molaire du gaz 1
	λ_1	W / (m K)	conductivité therpique, gaz 1
	n_1	mol	quantité de particules, gaz 1

▷ La mesure de la conductivité thermique des gaz est une méthode importante d'analyse des gaz, en particulier pour en évaluer les impuretés.

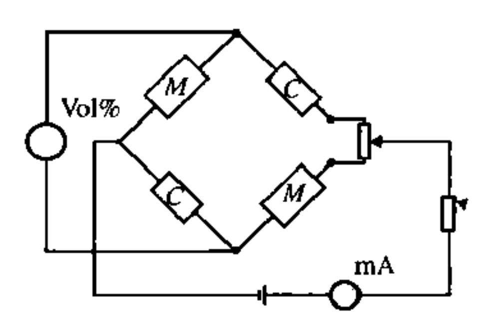


Fig. 22.19 : *Mesure de la conductivité thermique en utilisant le pont de Wheatstone pour la mesure de la conductivité inconnue d'un gaz (M) ; le gaz (C) sert de comparaison. La tension est proportionnelle à la concentration.*

M La détermination de la conductivité thermique des gaz dans un contexte d'analyse d'impuretés procède par mesure comparative avec un gaz pur. Le gaz (M) à mesurer et le gaz pur (C) de comparaison sont confinés dans des enceintes et chauffés au moyen de résistances électriques (Fig. 22.19). Celles-ci font parties d'un pont de Wheatstone (→ *Pont de Wheatstone*) que l'on équilibre. La concentration en impuretés du gaz (M) entraîne une modification de la chaleur émise par la résistance, et donc de sa valeur. Il s'ensuit une variation de tension électrique, appréciée par le pont de mesure, proportionnelle à la concentration en impuretés.

5. Conduction à travers plusieurs parois

Courant thermique à travers plusieurs parois d'épaisseurs $s_1, s_2, \ldots$, de surfaces identiques A et de mêmes conductivités thermiques λ :

$$\Phi = \frac{\lambda \cdot A}{s_1 + s_2 + \ldots}(T_A - T_B)$$

Avec des parois d'épaisseurs égales, mais dont les coefficients de conductivité thermique sont distincts :

$$\Phi = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}} \frac{A}{s}(T_A - T_B)$$

Dans le cas général, où les conductivités thermiques et les épaisseurs de cloisons sont différentes, le courant thermique est :

$$\Phi = \frac{1}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \ldots} A(T_A - T_B)$$

▷ Ici, toutes les cloisons ont mêmes surfaces.

■ Une cloison de bois de 2 cm d'épaisseur est placée derrière une vitrine de 1 m² de surface et de 5 mm d'épaisseur ($\lambda = 0,2$ W/m.K pour le verre). Pour une différence de température de 20°C, la chaleur perdue par seconde est :

$$\Phi = \frac{A(T_A - T_B)}{s_1/\lambda_1 + s_2/\lambda_2} = \frac{1\,\mathrm{m}^2 \cdot 20°\mathrm{C}}{(0,005\,\mathrm{m}/(1\,\mathrm{W/m\,K})) + (0,02\,\mathrm{m}/(0,2\,\mathrm{W/m\,K}))} \simeq 190,5\,\mathrm{W}$$

6. Courant thermique à travers la paroi d'un tube

Courant thermique $\propto \frac{\text{longueur du tube}}{\ln(\text{rapport des diamètres})}$			ML^2T^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Phi = \frac{2\pi l}{\ln\left(\frac{d_A}{d_I}\right)}\lambda(T_A - T_B)$	Φ	W	courant thermique
	d_I	m	diamètre intérieur, tube
	d_A	m	diamètre extérieur, tube
$= \frac{2\pi l}{\ln\left(\frac{d_I + 2s}{d_I}\right)}\lambda(T_A - T_B)$	s	m	épaisseur, paroi du tube
	l	m	longueur du tube
	λ	W / (K m)	conductivité thermique
	T	K	température

■ Pour une différence de température de 25 °C, le courant thermique traversant une conduite de béton (diamètre intérieur 40 cm, épaisseur 4 cm) de 3 m de longueur, est :

$$\Phi = \frac{2\pi l}{\ln\left(\dfrac{d_l + 2s}{d_l}\right)}\lambda(T_A - T_B) = \frac{2\pi \cdot 3\,\mathrm{m}}{\ln\left(\dfrac{0,4 + 0,08\,\mathrm{m}}{0,4\,\mathrm{m}}\right)} \cdot 1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K\,m}} \cdot 25°\mathrm{C} = 2,6\ \mathrm{kW}$$

Courant thermique à travers plusieurs tubes coaxiaux :

$$\Phi = \left[\frac{1}{2\pi l\lambda_1}\ln\left(\frac{d_1^A}{d_1^l}\right) + \frac{1}{2\pi l\lambda_2}\ln\left(\frac{d_2^A}{d_2^l}\right) + \ldots\right]^{-1}(T_A - T_B)$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi l\lambda_1}\ln\left(\frac{d_1^l + 2s_1}{d_1^l}\right) + \frac{1}{2\pi l\lambda_2}\ln\left(\frac{d_1^l + 2s_1 + 2s_2}{d_1^l + 2s_1}\right) + \ldots\right]^{-1}(T_A - T_B)$$

▷ Les tubes sont, ici, emboîtés sans jeu, $d_1^A = d_2^l$: le diamètre interne du tube 2 est égal au diamètre extérieur du tube 1.

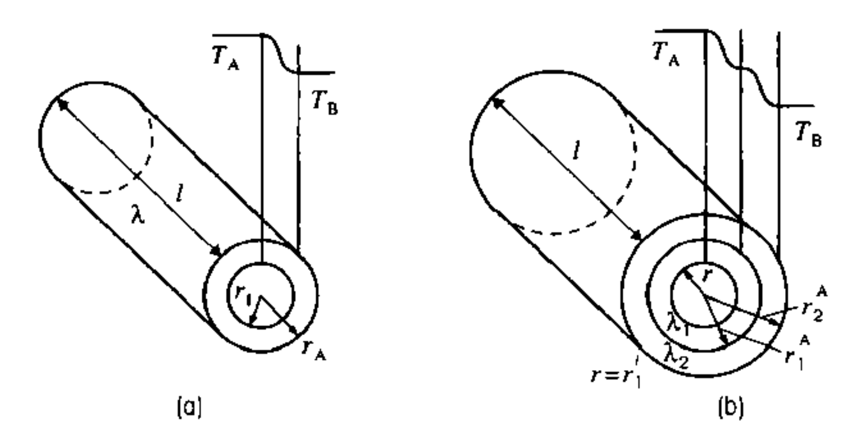


Fig. 22.20 : *Conduction de la chaleur à travers un tube,* (a) *sans et* (b) *avec gaine.*

● Un interstice d'air entre deux tubes serait à traiter comme un tube de conductivité thermique égale à l'air.

22.10.4 Résistance thermique

1. Définition

Résistance thermique R_{th}, kelvin par watt (K/W) en unités SI : facteur de proportionnalité entre courant thermique et différence de température.

Résistance thermique = $\dfrac{\text{différence de température}}{\text{courant thermique}}$			$M^{-1}L^{-2}T^3\Theta$
	Symbole	Unité	Dénomination
$R_{\mathrm{th}} = \dfrac{T_A - T_B}{\Phi}$	R_{th}	K / W	résistance thermique
	T	K	température
	Φ	W	courant thermique

● La résistance thermique dépend du coefficient de conductivité thermique, de l'épaisseur de la cloison et de l'aire de la surface.

Résistance thermique = $\dfrac{\text{épaisseur de la paroi}}{\text{conductivité} \times \text{aire}}$			$M^{-1}L^{-2}T^{3}\Theta$
	Symbole	Unité	Dénomination
$R_{th} = \dfrac{s}{\lambda A}$	R_{th}	K / W	résistance thermique
	s	m	épaisseur de paroi
	λ	W / m	conductivité thermique
	A	m^2	aire

2. Analogie avec l'électricité

La résistance thermique (électrique) influence le courant thermique (électrique) sous une différence donnée de température (voltage).

Analogie entre grandeurs thermodynamiques et électriques :

différence de température	ΔT	$\equiv$	différence de potentiel (tension)	U
courant thermique	Φ	$\equiv$	courant électrique	I
résistance thermique	R_{th}	$\equiv$	résistance électrique	R
conductivité thermique	λ	$\equiv$	conductivité électrique	κ
cloisons en série		$\equiv$	résistances en série	

- Analogue à la résistance électrique, la résistance thermique dépend de la section (aire du mur), de la longueur du résistor (épaisseur du mur) et du matériau (conductivité thermique).

3. Loi d'Ohm en thermodynamique

La relation entre température, courant thermique et résistance thermique peut formellement être écrite comme une loi d'Ohm.

Courant thermique = $\dfrac{\text{différence de température}}{\text{résistance thermique}}$			$ML^{2}T^{-3}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Phi = \dfrac{T_A - T_B}{R_{th}}$	Φ	W	courant thermique
	T	K	température
	R_{th}	K / W	résistance thermique

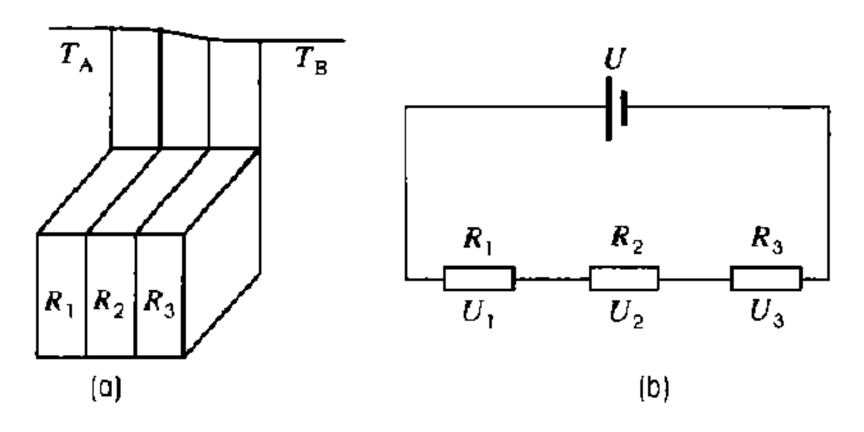


Fig. 22.21 : *Liaison série de résistances* (a) *thermiques,* (b) *électriques.*

4. Liaison série de plusieurs résistances thermiques

En présence de plusieurs murs (résistances thermiques) placés les uns à la suite des autres, la situation se traite d'une façon analogue à une liaison série de résistors électriques (Fig. 22.21).

Résistance totale = $\sum$ résistances individuelles			**$M^{-1}L^{-2}T^{3}\Theta$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$	R_{tot}	K / W	résistance totale
$R_1 = \dfrac{s_1}{\lambda_1 A_1}$	R_1	K / W	résistance, mur 1
	s_1	m	épaisseur, mur 1
$R_2 = \dfrac{s_2}{\lambda_2 A_2}$	λ_1	W / (K m)	conductivité therm., mur 1
	A_1	m	aire, mur 1
	R_2	K / W	résistance, mur 2 ...

Courant thermique total = $\dfrac{\text{différence de température}}{\sum \text{résistances individuelles}}$			**$ML^{2}T^{-3}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Phi = \dfrac{T_A - T_B}{R_1 + R_2 + \ldots}$	Φ	W	courant thermique
	T	K	température
	R_1	K / W	résistance, mur 1
	R_2	K / W	résistance, mur 2

22.10.5 Transfert thermique

1. Transfert thermique,

Désigne un échange de chaleur entre deux fluides liquides ou gazeux A et B séparés par un ou plusieurs murs (Fig. 22.22).

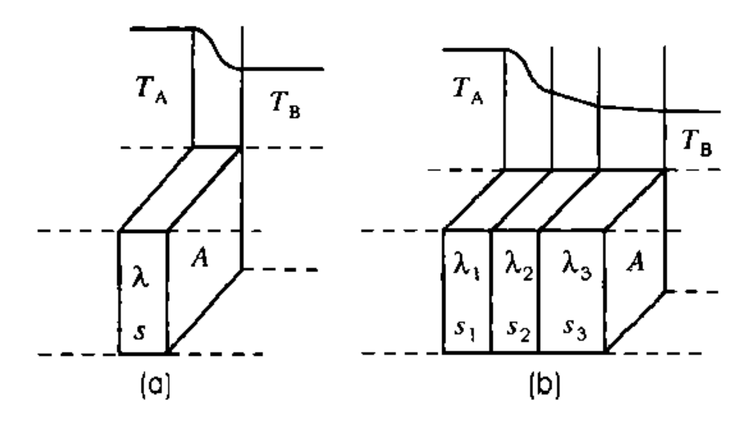


Fig. 22.22 : *Transfert thermique à travers* (a) *une et* (b) *plusieurs parois.*

Le transfert thermique procède suivant les étapes suivantes (Fig. 22.23) :

- Transmission de chaleur du milieu A à la première cloison faisant intervenir le coefficient α_1 de transmission de chaleur.

- Conduction thermique à travers le mur 1 d'épaisseur s_1 et de coefficient λ_1 de conductivité thermique.
- Conduction thermique à travers les autres cloisons.
- Transmission de chaleur du dernier mur au milieu B avec le coefficient α_2 de transmission de chaleur.

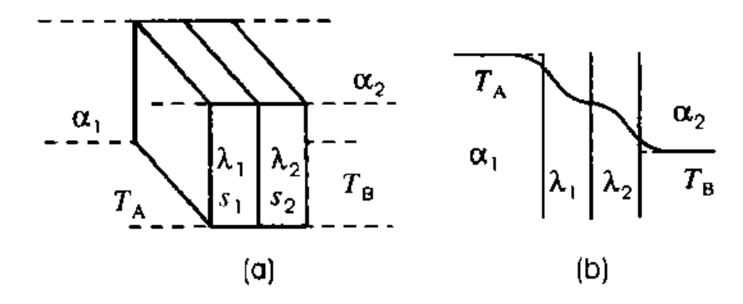


Fig. 22.23 : *Conduction thermique à travers un et plusieurs murs ; en* (a), *ordre des couches ; en* (b), *températures successives.*

■ Les fenêtres à double vitrage sont à faible perte de chaleur. La chaleur de l'air (intérieur de l'habitation) se transmet sur la première vitre, puis par conduction à travers le verre, le mélange gazeux, la deuxième vitre, et enfin à l'air extérieur.

2. Courant et résistance thermiques

Expression du courant thermique en tenant compte des résistances thermiques :

Courant thermique $= \dfrac{\textbf{différence de température}}{\sum \textbf{résistances individuelles}}$			$\mathbf{ML^2T^{-3}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\Phi = \frac{T_A - T_B}{R_A + R_B + R_1 + R_2 + \ldots}$$	Φ	W	courant thermique
	T	K	température
	R_A	K / W	résistance therm., milieu A
	R_B	K / W	résistance therm., milieu B
	R_1	K / W	résistance thermique, mur 1
	R_2	K / W	résistance thermique, mur 2

Expressions des résistances thermiques des milieux :

Résistance thermique $= \dfrac{1}{\textbf{transmission} \times \textbf{aire}}$			$\mathbf{M^{-1}L^{-2}T^3\Theta}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$$R_A = \frac{1}{\alpha_1 A}$$	R_A	K / W	résistance thermique, milieu A
	α_1	W / (K m^2)	coef. de transmission, milieu A
$$R_B = \frac{1}{\alpha_2 A}$$	A	m^2	aire de contact
	R_B	K / W	résistance thermique, milieu B
	α_2	W / (K m^2)	coef. de transmission, milieu B

Expressions des résistances thermiques des murs :

Résistance thermique = $\frac{\text{épaisseur du mur}}{\text{conductivité} \times \text{aire}}$				$M^{-1}L^{-2}T^{3}\Theta$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$R_1 = \frac{s_1}{\lambda_1 A}$ $R_2 = \frac{s_2}{\lambda_2 A}$	R_1 s_1 λ_1 A_1 R_2	K / W m W / (K m) m K / W	résistance, mur 1 épaisseur, mur 1 conductivité thermique, mur 1 aire, mur 1 résistance, mur 2 ...	

L'écriture complète du courant thermique a pour forme :

$$\Phi = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \ldots} \cdot A(T_A - T_B)$$

■ Un mur de maison consiste en deux cloisons de briques d'épaisseur 9 cm séparées par une couche de 5 cm d'air. Pour une différence de température de 15°C entre l'intérieur et l'extérieur, la quantité de chaleur perdue par seconde et par m² est :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{At(T_A - T_B)}{1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 + s_1/\lambda_1 + s_2/\lambda_2 + s_3/\lambda_3} \\ &= \frac{1\,\mathrm{m}^2 \cdot 1\,\mathrm{s} \cdot 15°\mathrm{C}}{2 \cdot (1/(8,1\,\mathrm{W/m^2\,K})) + 0,05\,\mathrm{m}/(0.026\,\mathrm{W/m\,K}) + 2 \cdot 0,09\,\mathrm{m}/(0,6\,\mathrm{W/m\,K})} \\ &= 6,07\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

3. Coefficient de transfert thermique

Coefficient de transfert thermique k, appelé souvent **valeur k** [watt par kevin par mètre carré (W/K.m²) en unités SI] : coefficient total de chaleur transférée entre des milieux séparés par des cloisons. Pour beaucoup de cas (comme pour des murs ou des constructions d'épaisseurs standard), les valeurs k sont tabulées (voir Tables 23.4 et 23.4, page 798).

Courant thermique ∝ aire × différence de température				ML^2T^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\Phi = k \cdot A \cdot (T_A - T_B)$	Φ k A T	W W / (K m²) m² K	courant thermique coef. de transfert aire température	

Expression du coefficient de transfert de chaleur en fonction des coefficients de transmission et de conductivité :

$\dfrac{1}{\textbf{transfert}} = \dfrac{1}{\textbf{transmission}} + \dfrac{1}{\textbf{conductivité}}$			$MT^{-3}\Theta^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \ldots$	k	W / K m²	coef. de transfert thermique
	α_1	W / (K m²)	coef. de transmission, milieu A
	α_2	W / (K m²)	coef. de transmission, milieu B
	s_1	m	épaisseur, mur 1
	λ_1	W / (K m)	conductivité thermique, mur 1
	s_2	m	épaisseur, mur 2
	λ_2	W / (K m)	conductivité thermique, mur 2

Relation avec la résistance thermique totale :

$\textbf{Résistance thermique} = \dfrac{1}{\textbf{transfert} \times \textbf{aire}}$			$M^{-1}L^{-2}T^{3}\Theta$
	Symbole	Unité	Dénomination
$R_{tot} = \frac{1}{kA} = R_A + R_B + R_1 + R_2 + \ldots$	R	K / W	résistance thermique
	k	W / K.m²	coef. de transfert
	A	m²	aire

4. Transfert thermique à travers des tubes coaxiaux

Expression du courant thermique en fonction des résistances thermiques :

$\textbf{Courant thermique} = \dfrac{\textbf{différence de température}}{\sum \textbf{résistances individuelles}}$			$ML^{2}T^{-3}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Phi = \frac{T_A - T_B}{R_A + R_B + R_1 + R_2 + \ldots}$	Φ	W	courant thermique
	T	K	température
	R_A	K / W	résistance therm., milieu A
	R_B	K / W	résistance therm., milieu B
	R_1	K / W	résistance thermique, tube 1
	R_2	K / W	résistance thermique, tube 2

Pour les résistances thermiques des milieux :

$\textbf{Résistance thermique} = \dfrac{1}{\textbf{aire} \times \textbf{transmission}}$			$M^{-1}L^{-2}T^{3}\Theta$
	Symbole	Unité	Dénomination
$R_A = \frac{1}{l \cdot \pi d \cdot \alpha_1}$	R_A	K / W	résistance thermique, milieu A
$R_B = \frac{1}{l \cdot \pi \cdot (d + 2s_1 + 2s_2) \cdot \alpha_2}$	R_B	K / W	résistance thermique, milieu B
	α_1	W / (K m²)	coef. transmission, milieu A
	α_2	W / (K m²)	coef. transmission, milieu B
	d	m	diamètre interne, tube 1
	l	m	longueur du tube

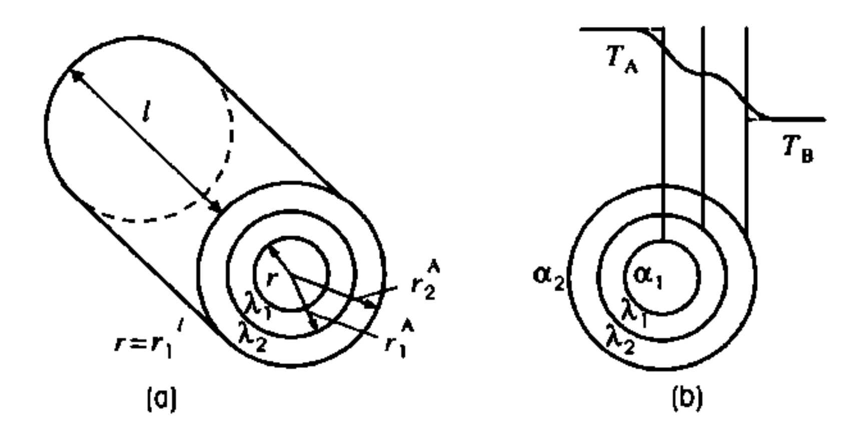


Fig. 22.24 : *Transfert thermique à travers plusieurs tubes coaxiaux ; en* (a), *dimensions ; en* (b), *températures successives.*

Pour les résistances thermiques des parois des tubes (Fig. 22.24) :

Résistance thermique = $\dfrac{\textbf{ln(rapport des diamètres)}}{\textbf{conductivité} \times \textbf{long. du tube}}$			$\mathbf{M^{-1}L^{-2}T^{3}\Theta}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$R_1 = \dfrac{1}{2\pi l \lambda_1} \ln\left(\dfrac{d_1^A}{d_1^I}\right)$	R_1	K / W	résistance du tube
	d_1^I	m	diamètre intérieur, tube 1
	d_1^A	m	diamètre extérieur, tube 1
$R_2 = \dfrac{1}{2\pi l \lambda_2} \ln\left(\dfrac{d_2^A}{d_2^I}\right)$	λ_1	W / K m	conductivité therm., tube 1
	l	m	longueur du tube
	R_2	K / W	résistance, tube 2 ...

- Le diamètre extérieur du tube interne est toujours égal au diamètre intérieur du prochain tube le gainant.
  $d_1^A = d_2^I \qquad d_2^A = d_3^I$
- Si un interstice d'air existe entre deux tubes successifs, l'air sera à traiter comme si on avait affaire à un tube d'air.

Expression des résistances de transfert de chaleur quand interviennent les épaisseurs des tubes :

Résistance thermique = $\dfrac{1}{\textbf{aire} \times \textbf{transmission}}$			$\mathbf{M^{-1}L^{-2}T^{3}\Theta}$
	Symbole	Unité	Dénomination
	R_A	K / W	résistance, milieu A
$R_A = \dfrac{1}{l \cdot \pi d \cdot \alpha_1}$	α_1	W / (K m²)	coef. transmission A
	s_1	m	épaisseur, tube 1
	d	m	diamètre int., tube 1
$R_B = \dfrac{1}{l \cdot \pi \cdot (d + 2s_1 + 2s_2) \cdot \alpha_2}$	l	m	longueur du tube
	R_B	K / W	résistance, milieu B
	α_2	W / (K m²)	coef. transmission B
	s_2	m	épaisseur, tube 2

Résistances thermiques des parois des tubes :

Résistance = $\dfrac{\textbf{ln(rapport des diamètres)}}{\textbf{conductivité} \times \textbf{long. du tube}}$				$M^{-1}L^{-2}T^{3}\Theta$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$R_1 = \dfrac{1}{2\pi l\lambda_1}\ln\left(\dfrac{d+2s_1}{d}\right)$	λ_1	W / (K m)	conduct. therm., tube 1	
	s_1	m	épaisseur, tube 1	
$R_2 = \dfrac{1}{2\pi l\lambda_2}\ln\left(\dfrac{d+2s_1+2s_2}{d+2s_1}\right)$	d	m	diamètre int., tube 1	
	l	m	longueur du tube	
	R_2	K / W	résistance, tube 2	

Résistance totale :

$$R_{\text{tot.}} = \frac{1}{l\pi d\alpha_1} + \frac{1}{l\pi(d+2s_1+2s_2)\alpha_2} + \frac{1}{2\pi l\lambda_1}\ln\left(\frac{d+2s_1}{d}\right) + \frac{1}{2\pi l\lambda_2}\ln\left(\frac{d+2s_1+2s_2}{d+2s_1}\right) + \ldots$$

▷ D'une façon formelle, on doit aussi imposer aux tubes un coefficient de transmission matériau-milieu, comme défini précédemment. Cependant, il était plus intéressant de donner ici des quantités se rapportant à la longueur du tube plutôt qu'à sa surface. On trouvera dans les ouvrages spécialisés, les expressions prenant en compte ce coefficient.

22.10.6 Rayonnement thermique

Rayonnement thermique : rayonnement électromagnétique émis par tout corps dont la température absolue n'est pas nulle, $T \neq 0$ K.

Loi de Stefan-Boltzmann : relation entre l'énergie thermique émise par unité de temps par une surface d'aire A à la température T et la température environnante (→ *Physique atomique, rayonnement thermique*).

● L'énergie rayonnée augmente avec la puissance 4 de la température.

Constante de Stefan-Boltzmann σ, dite aussi **constante du rayonnement du corps noir** :

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\ \text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$$

Émissivité $\varepsilon \leq 1$: quantité sans dimension, dépendant fortement du matériau, des conditions de surface et de la température.

La **dépendance en fréquence** du rayonnement thermique est décrite par la **loi de Planck** (→ *Physique atomique, rayonnement thermique*).

La Terre reçoit de l'énergie thermique du soleil sous forme de rayonnement électromagnétique. La valeur reçue par unité de temps et de surface est appelée **constante solaire**. Selon le standard NIM, elle vaut :

$$q_S = 1,37\,\text{kW}/\text{m}^2$$

D'après le standard CIE, elle est $q_s = 1,35\,\text{kW}/\text{m}^2$.

22.10.7 Comportement d'un matériau sous rayonnement thermique

Au cours d'un transfert thermique, aucune énergie rayonnée n'est perdue. Si le rayonnement frappe un corps, les processus suivants peuvent avoir lieu (Fig. 22.25) :

a) **Absorption :** la puissance rayonnée se dépose et se convertie.

b) **Transmission :** le rayonnement traverse le matériau sans être perturbé.

c) **Réflexion :** le rayonnement est réfléchi.

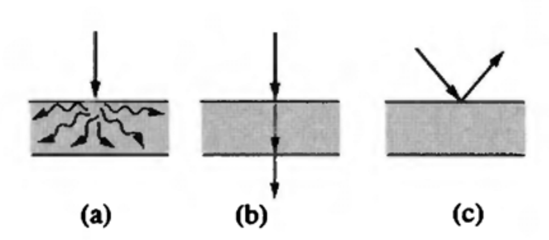


Fig. 22.25 : *Absorption* (a), *transmission* (b) *e réflection* (c) *du rayonnement.*

Les trois effets sont généralement en compétition : le rayonnement est partiellement absorbé, partiellement transmis et partiellement réfléchi. Des coefficients relatifs traduisent ces divers effets partiels.

▷ La conservation de l'énergie impose que leur somme soit égale à l'unité.

1. Absorption

Absorptivité α : quantité sans dimension, rapport de la puissance absorbée à celle reçue par un corps soumis à un rayonnement :

$$\textbf{Absorptivité} = \frac{\textbf{puissance rayonnée absorbée}}{\textbf{puissance totale incidente}} \qquad \textbf{1}$$

Formule	Symbole	Unité	Dénomination
$\alpha = \frac{\Phi_a}{\Phi_0}$	α	1	absorptivité
	Φ_a	W	puissance absorbée
	Φ_0	W	puissance incidente

▷ L'absorptivité dépend de la longueur d'onde du rayonnement, mais peu de la température du corps.

■ Un verre rouge absorbe les longueurs d'onde correspondant à des couleurs autres que le rouge. Les feuilles apparaissent vertes parce qu'elles absorbent la partie rouge du spectre de la lumière blanche.

▷ La détection du spectre d'absorption d'un matériau par un spectromètre UV peut être utilisée à des fins d'analyse.

2. Radiateur à corps noir

Corps noir : tout matériau d'absorptivité $\alpha = 1$ quelle que soit sa température.

■ Les panneaux solaires sont noirs pour tenter d'absorber toute la lumière.

▷ Cependant l'absorption totale n'est pas parfaitement réalisable.

3. Loi de Kirchhoff

Elle stipule que l'absorptivité est égale à l'émissivité pour tout corps non transparent. (→ *Physique atomique*)

4. Transmission

Transmitivité τ, quantité sans dimension, rapport de la puissance transmise à celle reçue par un corps soumis à un rayonnement :

$\text{Transmitivité} = \dfrac{\text{puissance rayonnée transmise}}{\text{puissance totale incidente}}$			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$\tau = \dfrac{\Phi_t}{\Phi_0}$	τ	1	transmitivité
	Φ_t	W	puissance transmise
	Φ_0	W	puissance incidente

▷ Comme l'absorptivité, la transmitivité dépend de la longueur d'onde et peu de la température du corps.

5. Réflexion

Réflectivité ρ : quantité sans dimension, rapport de la puissance réfléchie à celle reçue par un corps soumis à un rayonnement :

$\text{Réflectivité} = \dfrac{\text{puissance rayonnée réfléchie}}{\text{puissance totale incidente}}$			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$\rho = \dfrac{\Phi_r}{\Phi_0}$	ρ	1	réflectivité
	Φ_r	W	puissance réfléchie
	Φ_0	W	puissance incidente

▷ La réflectivité dépend de la longueur d'onde et peu de la température du corps.

● Aucune puissance incidente rayonnée ne peut être perdue. Les fractions absorbée, transmise et réfléchie font, totalisées, la puissance rayonnée totale.

Absorptivité + transmitivité + réflectivité = 1			
	Symbole	Unité	Dénomination
$\alpha + \tau + \rho = 1$	α	1	absorptivité
	τ	1	transmitivité
	ρ	1	réflectivité

22.11 Transport de chaleur et de masse

Densité de courant thermique ou densité de flux de chaleur q_{th}, watt par mètre carré (W/m^2) en unités SI : quantité de courant thermique par élément de surface élémentaire ΔA à travers laquelle passe le flux de chaleur :

$$q_{th} = \lim_{\Delta t \to 0} \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t \, \Delta A} = \frac{\delta^2 Q}{dt \, dA}$$

Le vecteur densité de courant thermique $\vec{\mathbf{q}}_{th}$ a comme module la densité de courant thermique q_{th} et pour direction celui du flux de chaleur.

▷ Le vecteur densité pointe vers les températures décroissantes.

22.11.1 Loi de Fourier

La **loi de Fourier** nous indique que le courant thermique s'écoule vers les températures décroissantes.

$$\vec{\mathbf{q}}_{th} = -\lambda \cdot \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, T$$

Conductivité thermique λ : constante de proportionnalité dans la loi de Fourier et dépendant du matériau.

▷ λ est identique à la constante apparaissant dans la loi sur la conduction thermique (→ *Conduction de la chaleur*) et dont des valeurs sont reportées dans les Tables 23.3, page 792.

Le courant thermique total s'obtient par intégration sur l'aire totale, de la composante normale à la surface du vecteur densité de courant :

$$\Phi = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}t} = -\int\limits_{\text{aire}} \vec{\mathbf{q}}_{th} \cdot \vec{\mathbf{n}} \cdot \, \mathrm{d}F = -\int (q_x n_x + q_y n_y + q_z n_z)\ \mathrm{d}F$$

▷ $\vec{\mathbf{n}}$ est un vecteur unité normal à la surface ; le signe négatif indique que le courant thermique se déplace de la région la plus chaude vers la plus froide.

22.11.2 Équation de continuité

1. Vecteur densité de courant thermique

Le courant thermique est décrit à l'aide du vecteur densité de courant thermique comme une intégrale sur la surface à travers laquelle le flux s'écoule :

$$\Phi = -\int \vec{\mathbf{q}}_{th} \cdot \vec{\mathbf{n}}\ \mathrm{d}A = -\int \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right)\ \mathrm{d}V$$

Écriture avec les opérateurs vectoriels différentiels :

$$\Phi = \frac{\partial Q}{\partial t} = -\int \mathrm{div}\ \vec{\mathbf{q}}_{th}\ \mathrm{d}V$$

▷ La conversion a été opérée en utilisant le théorème de Gauss.

Densité volumique de quantité de chaleur e : analogue thermique de la densité volumique de charge électrique :

$$e = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}V} \qquad Q = \int e\ \mathrm{d}V$$

Cette expression complète la description du courant thermique :

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int e\ \mathrm{d}V = -\int \mathrm{div}\ \vec{\mathbf{q}}_{th}\ \mathrm{d}V$$

2. Équation de continuité de la thermodynamique

C'est une équation qui concerne la conservation de la *densité de chaleur*.

● Une variation de la densité volumique de quantité de chaleur ne peut se faire que par entrée ou sortie de courant thermique.

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q}_{th} = 0$$

▷ Cette équation s'obtient par intégration du courant thermique sur un volume arbitraire.

● L'équation de continuité, comme son expression dérivée, n'a de sens que s'il y a transfert de chaleur pour une égalisation des températures et si *aucun travail* n'est effectué sur ou par le système.

Si du travail est effectué, alors en accord avec le premier principe de la thermodynamique :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q}_{th} = -\frac{\delta^2 W}{\mathrm{d}V\ \mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

▷ Ici, on a supposé que le travail W est donné par l'intégrale sur la pression p pour un changement de volume $\mathrm{d}V$.

$$\Delta W = -\int p\ \mathrm{d}V$$

Cette variation de pression peut être vue comme une source de chaleur. Mais d'autres changements peuvent contribuer à une variation de chaleur.

22.11.3 Équation de conduction de la chaleur

1. Loi de la conduction

Quantité de chaleur = capacité cal. × diff. température				$\mathbf{ML^2T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\Delta Q = C_V \Delta T = c \cdot m \cdot \Delta T$	Q	J	quantité de chaleur	
	C_V	J / K	capacité cal., volume constant	
	T	K	température	
	c	J / (K kg)	capacité cal. massique	
	m	kg	masse	

Équation de conduction de la chaleur : description de la quantité de chaleur transportée dans le temps et dans l'espace :

$$c\rho_m \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, T = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{c\rho_m}\Delta T = \frac{1}{c\rho_m}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

▷ Cette équation a été obtenue en appliquant la loi de Fourier, l'équation de continuité et la définition de la quantité de chaleur via la capacité calorifique.

▷ Attention, ici ΔT ne dénote aucune différence de température ; Δ est l'opérateur de Laplace :

$$\Delta T = \operatorname{div} \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

2. Coefficient de conductibilité thermométrique

Ou, plus simplement, **conductivité thermométrique** κ, mètre carré par seconde (m^2/s) en unités SI : constante de proportionnalité déterminant avec quelle vitesse une différence de température s'annule.

Conductivité thermométrique				L^2T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\kappa = \dfrac{\lambda}{c\rho_m}$	κ	m^2/s	conductivité thermométrique	
	λ	$W/(m\,K)$	conductivité thermique	
	c	$J/(K\,kg)$	capacité cal. massique	
	ρ_m	kg/m^3	masse volumique	

▷ Plutôt que le produit de la masse volumique et de la capacité calorifique massique, on peut utiliser le produit de la densité molaire et de la capacité calorifique molaire, ou le produit de la densité de particules et de la chaleur massique par particule.

● Équation de conduction de la chaleur sans terme de source, en notation courte :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\,\Delta T = 0$$

où Δ est l'opérateur de Laplace.

22.11.4 Loi de Fick et équation de diffusion

1. Définitions de base pour l'équation de transport

Une description similaire à celle relative au flux de chaleur (et donc de différence en quantité de chaleur) peut être menée en termes de **flux de matière**, et donc de différence en concentration.

Vecteur densité de flux de particules $\vec{\mathbf{j}}$: vecteur orienté suivant les densités décroissantes en particules et, donc, en concentration ρ_N ; son module correspond à la variation du nombre de particules par unité de temps.

Diffusion : processus conduisant à un équilibre des concentrations dans une phase donnée.

● **Loi de Fick** : relation entre le vecteur densité de flux de particules et le gradient de concentration :

$$\vec{\mathbf{j}} = -D\,\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\rho_N$$

Constante de diffusion D : caractérise la façon dont la concentration diminue dans un système.

Équation de continuité : relation entre le flux de particules et leur densité :

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\mathbf{j}} = w$$

Le terme w de droite décrit le changement du nombre total de particules causé, par exemple, par une variation du potentiel chimique.

▷ Si $w = 0$, alors la densité de particules ne peut varier que si le bilan des flux entrant et sortant n'est pas équilibré.

● **Équation de diffusion**, description du changement de densité de particules au cours du temps :

$$\frac{\partial \rho_N}{\partial t} - D\,\Delta\rho_N = w$$

▷ L'équation de diffusion a été obtenue à partir de la loi de Fick et de l'équation de continuité.

▷ L'équation de diffusion : écrite en termes de densité de particules, s'applique aussi aux den molaires et aux masses volumiques.

2. Description microscopique

Libre parcours moyen l : distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions.

Vitesse moyenne $\bar{v}$: moyenne arithmétique des modules des vitesses.

Pour une distribution de Maxwell-Boltzmann (→ *Gaz parfait – théorie cinétique*) :

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_M}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}}\sqrt{\overline{v^2}}$$

Constante de diffusion D : constante intervenant dans les équations de transport de la matière ; voir T 23.10, page 810.

Constante de diffusion (microscopiquement)			L²T⁻
	Symbole	Unité	Dénomination
$D = \frac{1}{3}\bar{v}\,l$	D $\bar{v}$ l	m² / s m / s m	cste de diffusion vitesse moyenne libre parcours moy

22.11.5 Solutions des équations de conduction et de diffusion

La solution tridimensionnelle de l'équation de diffusion est :

$$\rho(x,y,z,t) = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi Dt}\right)^3}\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}\right)}$$

▷ Avec les coordonnées d'espace x, y, z, la fonction décrit la distribution de densité ou la distribu de concentration ρ comme une gaussienne centrée à l'origine.

La largeur de la courbe est déterminée par le dénominateur $4Dt$ de l'argument de l'exponentielle.

▷ La largeur augmente au cours du temps. Simultanément, l'amplitude de la fonction diminue en t

● Cependant la description des processus de diffusion n'est valable qu'en l'absence de supplémentaires (tourbillons) ; autrement, des flux macroscopiques additionnels (par exen l'agitation de la substance dissoute dans le solvant) pourraient dominer le processus tout entier.

En un point pour lequel la densité est c fois ($0 < c < 1$) celle au centre :

$$\rho_1 = c \cdot \rho_0 \qquad \rho_1 = \rho(x_1, 0, 0, t) \qquad \rho_0 = \rho(0,0,0,t)$$

Le développement en temps de la distance à ce point est :

$$x = \sqrt{-(\ln c)\cdot 4Dt}$$

La vitesse d'extension décroît au cours du temps selon :

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{-\frac{(\ln c)D}{t}}$$

▷ Les flancs de la distribution (c très faible) se déplacent plus vite vers l'extérieur que dans une ré où c est grand.

▷ La relation parcours–temps, en racine carrée du temps ($x \propto \sqrt{Dt}$), est typique d'un processus de diffusion.

Interprétation : la concentration initiale élevée (par exemple, une goutte colorée dans un liquide) diminue rapidement en se diluant (la goutte colorée s'estompe). Mais le nombre total de particules reste constant.

▷ L'intégrale d'espace sur ρ ne dépend, en effet, pas du temps :

$$\int \rho \, \mathrm{d}V = \int \sqrt{\left(\frac{1}{4Dt}\right)^3} \mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}\right)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 1$$

Symboles de la thermodynamique

Symbole	Unité	Dénomination
α	1	Absorptivité
α	W / (K m^2)	Coefficient de transmission
α	1 / K	Coefficient de dilatation volumique
α_ℓ	1 / K	Coefficient de dilatation linéique
β	1 / K	Coefficient de dilation surfacique
γ	1	Coefficient d'adiabaticité
ε_{cin}	J	Energie cinétique moyenne
ε	1	Rapport de compression
η	1 / (m s)	Viscosité
η	1	Rendement
η_C	1	Rendement de Carnot
θ	°C	Température en degrés Celsius
κ	m^2 / s	Conductivité thermométrique
κ	Pa	Module de compression
λ	W / (K m)	Conductivité thermique
μ	J	Potentiel chimique
ν	Hz	Fréquence de collision
ξ_i	1	Fraction massique
ρ	1	Réflectivité
ρ	kg / m^3	Masse volumique
ρ_m	mol / m^3	Densité molaire
ρ_N	1 / m^3	Densité en particules
σ	m^2	Section efficace
σ	W / m^{2}K^4	Constante de Stefan
τ	s	Temps de collision
τ	1	Transmitivité
φ	1	Humidité relative
Φ	J / s = W	Courant thermique
χ_T	Pa^{-1}	Compressibilité
a	Nm^4 / mol^2	Constante de pression interne molaire
a_s	Nm^4 / kg^2	Constante de pression interne massique
A	m^2	Aire
b	m^3 / mol	Covolume molaire
b_s	m^3 / kg	Covolume massique
B	J	Anergie
$B(T)$	mol / m^3	Deuxième coefficient du viriel
c	mol / ℓ	Molarité
c	J / (K kg)	Capacité calorifique massique
c_{mol}	J / (K mol)	Capacité calorifique molaire
c_p	J / (K kg)	Capacité cal. massique à pression constante
c_V	J / (K kg)	Capacité cal. massique à volume constant
C	J/K	Capacité calorifique (totale)

Symbole	Unité	Dénomination
$C(T)$	mol^2/m^6	Troisième coefficient du viriel
d	m	Diamètre
D	m^2/s	Constante de diffusion
E	K	Constante ébullioscopique
E	J	Énergie totale
E_x	J	Exergie
f	1	Degré de liberté
f	kg/m^3	Humidité absolue
f_{max}	kg/m^3	Humidité maximum
F	J	Énergie libre
F	N	Force
G	J	Enthalpie libre
h	m	Altitude
h	J / kg	Enthalpie massique
H	J	Enthalpie
H	J / kg	Pouvoir calorifique massique
H_g	J/m^3	Pouvoir calorifique d'un gaz
H_o	J / kg	Pouvoir calorifique
j	$1/(m^2\,s)$	Flux de particules
k	J / K	Constante de Boltzmann
k	$W/(K^2)$	Coefficient d'échange de chaleur
K	K	Constante cryoscopique
K	1	Constante d'équilibre (loi d'action de masse)
l	m	Longueur du tube
l	m	Libre parcours moyen
m	kg	Masse totale
m_N	kg	Masse des particules
M	kg / mol	Masse molaire
n	1	Coefficient polytropique
n	mol	Quantité de matière
N	1	Nombre de particules
N_A	mol^{-1}	Nombre d'Avogadro
N_L	m^{-3}	Constante de Loschmidt
p	Pa	Pression
p_{cr}	Pa	Pression critique
p_v	Pa	Pression de vapeur
p_S	Pa	Pression de vapeur saturante
p_n	Pa	Pression normale
P	W	Puissance
q	J / kg	Chaleur massique
q_{th}	W/m^2	Flux thermique
q_S	W/m^2	Constante solaire
Q	J	Quantité de chaleur
R	J / (K mol)	Constante des gaz parfaits
R_s	J / (K kg)	Constante d'un gaz
R_{th}	K / W	Résistance thermique

Symbole	Unité	Dénomination
s	J / (K kg)	Entropie massique
S	J / K	Entropie
t	s	Temps
T	K	Température
$T_{éb}$	K	Température d'ébullition
T_{cr}	K	Température critique
T_i	K	Température d'inversion de Joule-Thomson
T_f	K	Température de fusion
T_n	K	Température normale
T_1	K	Température de la source chaude
T_2	K	Température de la source froide
U	J	Énergie interne
$\overline{v}$	m / s	Vitesse moyenne
v_{rms}	m / s	Vitesse quadratique moyenne
v_P	m / s	Vitesse la plus probable
v_{cr}	m^3 / mol	Volume critique molaire
v	m^3 / kg	Volume massique
V	m^3	Volume
V_n	m^3	Volume normal
V_m	m^3 / mol	Volume molaire
W_{cin}	J	Énergie cinétique
$\overline{W}$	J	Énergie moyenne
x	1	Degré d'humidité
x_i	1	Fraction molaire
z	m	Hauteur, altitude

Constantes utilisées en Thermodynamique			
k	$1,380\,66 \cdot 10^{-23}$ J/K Constante de Boltzmann	q_S	$1,37$ kW / m^2 Constante solaire
N_A	$6,022\,1367 \cdot 10^{23}$ mol^{-1} Nombre d'Avogadro	R	$8,314$ J/(K mol) Constante des gaz parfaits
N_L	$2,686\,75 \cdot 10^{25}$ m^{-3} Constante de Loschmidt	T_n	$273,15$ K Température normale
p_n	$101\,325$ Pa Pression normale	σ	$5,67 \cdot 10^{-8}$ W / (m^2 K^4) Constante de Stefan

23 Tables de la thermodynamique

23.1 Températures caractéristiques

23.1.1 Échelles et points de référence

23.1/1 : Table de conversion des échelles de température

Échelle	Kelvin	Celsius	Fahrenheit	Rankine
$T_K =$	T_K	$\theta_C + 273,15$	$\frac{5}{9}(459,67 + \theta_F)$	$\frac{5}{9}T_R$
$\theta_C =$	$T_K - 273,15$	θ_C	$\frac{5}{9}(\theta_F - 32)$	$\frac{5}{9}(T_R - 491,67)$
$\theta_F =$	$\frac{9}{5}(T_K - 255,37)$	$1,8\,\theta_C + 32$	θ_F	$T_R - 459,67$
$T_R =$	$\frac{9}{5}T_K$	$\frac{9}{5}(273,15 + \theta_C)$	$459,67 + \theta_F$	T_R

23.1/2 : Points de référence des échelles de température

Substance		Point de	Température	
Formule	Nom	référence	T en K	θ en °C
^4He	Hélium-4	λ	2,18	−270,97
^4He	Hélium-4	ébullition	4,21	−268,94
$p - H_2$	Para-hydrogène	triple	13,81	−259,34
$n - H_2$	Hydrogène (normal)	triple	13,803 3	−259,346 7
$p - H_2$	Para-hydrogène	ébullition	20,27	−252,88
$n - H_2$	Hydrogène (normal)	ébullition	20,39	−252,76
Ne	Néon	triple	24,556 1	−248,593 9
Ne	Néon	ébullition	27,07	−246,08
N_2	Azote	trans. de phase	35,5	−237,65
O_2	Oxygène	trans. de phase	43,7	−229,79
O_2	Oxygène	triple	54,358 4	−218,791 6
N_2	Azote	triple	63,14	−210,01
N_2	Azote	ébullition	77,35	−195,80
O_2	Oxygène	ébullition	90,18	−182,97
C_5H_{12}	Isopentane	fusion	113,5	−159,65
C_7H_{14}	Métylcyclohexane	fusion	146,85	−126,30
$C_4H_{10}O$	Diéthyl-Éther	fusion	156,85	−116,30
CS_2	Sulfure de carbone	fusion	161,55	−111,60
C_7H_8	Toluène	fusion	178,05	−95,10
CO_2	Dioxyde de carbone	fusion	194,65	−78,50
$CHCl_3$	Chloroforme	fusion	209,65	−63,50
Hg	Mercure	fusion	234,28	−38,87
H_2O	Eau	fusion	273,15	0,00
H_2O	Eau	triple	273,16	0,0100
H_2O	Eau	ébullition	373,15	100,00
$C_{12}H_{10}O$	Diphényl-Éther	triple	300,03	26,88

Suite page suivante

Table 23.1/2 (suite)

Substance		Point de référence	Température	
Formule	Nom		T en K	θ en °C
Na_2SO_4, 10 H_2O	Sulfate de sodium	trans. de phase	305,43	32,38
$C_7H_6O_2$	Acide benzoïque	triple	395,51	122,36
In	Indium	fusion	429,748 5	156,598 5
$C_{10}H_8$	Naphtalène	ébullition	491,15	218,0
Sn	Étain	fusion	505,05	231,9
$C_{14}H_{10}O$	Benzophénol	ébullition	579,05	305,9
Cd	Cadmium	fusion	594,05	320,9
Pb	Plomb	fusion	600,65	327,50
Hg	Mercure	ébullition	629,73	356,58
Zn	Zinc	fusion	692,677	419,527
S	Soufre	ébullition	717,82	444,67
Sb	Antimoine	fusion	903,65	630,5
Au	Or	fusion	1337,33	1064,18
Cu	Cuivre	fusion	1357,77	1084,62
Ni	Nickel	fusion	1728	1455
Al	Aluminium	fusion	933,473	660,323
Ag	Argent	fusion	1234,93	961,78
Co	Cobalt	fusion	1768	1495
Pd	Palladium	fusion	1827	1554
Pt	Platine	fusion	2045	1772
Rh	Rhodium	fusion	2239	1966
Ir	Iridium	fusion	2683	2410
W	Tungstène	fusion	3683	3410

23.1.2 Points de fusion et d'ébullition

23.1/3 : Points de fusion et d'ébullition des éléments

Élément	Pt de fusion θ en °C	Pt d'ébullition θ en °C	Élément	Pt de fusion θ en °C	Pt d'ébullition θ en °C
Actinium	1050	3200 ± 300	Nickel	1455	2730
Aluminium	660,37	2467	Niobium	2468 ± 10	5127
Américium	994 ± 4	2607	Or	1064,43	2808 ± 2
Antimoine	630,5	1750	Osnium	2700	5300
Argent	961,93	2212	Oxygène (O_2)	−218,4	−182,962
Arsenic	817 à 2,8 MPa	sublimation à 613	Palladium	1554	2970
			Phosphore(rouge)	590 (4,3 MPa)	
Azote (N_2)	−209,86	−195,8	Phosphore(jaune)	44,1	280
Barium	725	1640	Platine	1772	3827 ± 100
Béryllium	1275 ± 5	2970	Plomb	327,502	1740
Bismuth	271,3	1560 ± 5	Plutonium	641	3232
Bore	2300	2550	Polonium	254	962
Brome (Br_2)	−7,2	58,78	Potassium	63,25	760
Cadmium	320,9	765	Praséodymium	931	3520
Calcium	839 ± 2	1484	Promethium	1042	(3000)
Carbone	sublimation à 3652		Protactinium	< 1600	
			Radium	700	< 1140

Suite page suivante

Table 23.1/3 (suite)

Élément	Pt de fusion θ en °C	Pt d'ébullition θ en °C	Élément	Pt de fusion θ en °C	Pt d'ébullition θ en °C
Cérium	798	3443	Radon	−71	−61,8
Césium	$28,40 \pm 0,01$	669,3	Rhenium	3180	5627
Chlore(Cl_2)	−100,98	−34,6	Rhodium	1966 ± 3	3727 ± 100
Chrome	1857 ± 20	2672	Rubidium	38,89	686
Cobalt	1495	2870	Ruthenium	2310	3900
Cuivre	$1083,4 \pm 0,2$	2567	Samarium	1074	1794
Dysprosium	1412	2467	Scandium	1541	2836
Étain (cub.)	231,9681	2270	Sélénium	217	$684 \pm 1,0$
Europium	822	1527	Silicium	1410	2355
Fer	1535	2750	Strontium	769	1384
Fluor	−219,62	−188,14	Soufre (rh.)	112,8	444,674
Gadolinium	1313	3273	Soufre (mcl.)	119,0	
Gallium	29,78	2403	Sodium	$91,81 \pm 0,03$	882,9
Germanium	93704	2830	Tantalum	2996	5425 ± 100
Hafnium	2227 ± 20	4602	Tellurium (rh.)	452	1390
Holmiun	1474	2700	Tellurium (a.)	$449,5 \pm 0,3$	$989,8 \pm 3,8$
Hydrogène (H_2)	−259,34	−252,8	Terbium	1356	3230
Indium	156,61	2080	Thalium	303,5	1457 ± 10
Iode (I_2)	113,5	184,35	Titanium	1660 ± 10	3287
Iridium	2410	4130	Thorium		
Krypton	−156,6	$-152,3 \pm 0,1$	Thulium	1545	1950
Lanthanum	918	3464	Tungstène	3410 ± 20	5660
Lithium	180,54	1342	Uranium	$1132,3 \pm 0,8$	3818
Mercure	−38,87	356,58	Vanadium	1890 ± 10	3380
Magnésium	648,8	1107	Xénon	−111,9	$-107,1 \pm 3$
Manganèse	1244 ± 3	1962	Ytterbium	819	1196
Molybdène	2610	5560	Zinc	419,58	907
Néodymium	1021	3074	Zirconium	1852 ± 2	4377
Neptunium	630 ± 1				

23.1/4 : Températures de transition de composés minéraux

Substance	Pt de fusion θ en °C	Pt d'ébullition θ en °C	Substance	Pt de fusion θ en °C	Pt d'ébullition θ en °C
Aluminium,			Antimoine,		
carbonate	stable si < 1400	diss. 2200	bromure	96,6	280
oxyde	2072	2980	chlorure	2,8	79
sulfite	1100	subl. 1500	hydrure	−8817,1	
phosphate	> 1500		oxyde	656	1550
Ammoniac	−77,7	−33,35	Barium,		
Ammonium,			permanganate	3,77	diss. 200
chlorure	subl. 340	520	oxyde	1918	ca. 2000
nitrate	169,6	210	bromure	490 ± 10	520
thiocyanate	149,6	diss. 170	chlorure	405	520
			iodure	510 ± 10	590
			oxyde	2530 ± 30	ca. 3900

Suite page suivante

Table 23.1/4 (suite)

Substance	Pt de fusion θ en °C	Pt d'ébullition θ en °C	Substance	Pt de fusion θ en °C	Pt d'ébullition θ en °C
Bismuth,			Fluor,		
bromure	218	453	dioxyde	−223,8	-144,8
séléniure	710	diss.	hydrure	−83,1	19,54
sulfure	diss. 685		Gallium,		
Bore,			arséniure	1238	
acide	236 ± 1		dichlorure	164	535
oxyde	45 ± 2	ca. 1860	trichlorure	77,9 ± 0,2	201,3
Cadmium,			Holmium,		
bromure	567	863	bromure	914	1470
chlorure	568	960	chlorure	718	1500
fluorure	1100	1758	iodure	989	1300
iodure	387	796	fluorure	1143	> 2200
oxyde	> 1500	subl. 1559	Hydrogène,		
tellurure	1121	1091	peroxyde	−0,41	150,2
Calcium,			disulfure	−89,6	70,7
fluorure	1423	ca. 2500	Indium,		
oxyde	2614	2850	antimoniure	535	
iodure	784	ca. 1100	phosphure	1070	
carbonate	1339	diss. 898,6	tellurure	667	
carbure	stab.25 - 447	2300	Lithium, oxyde	> 1700	
chlorure	782	> 1600	Magnésium,		
bromure	742	1815	chlorure	714	1412
Césium,			fluorure	1261	2239
bromure	636	1300	oxyde	2852	3600
chlorure	645	1290	Mercure,		
fluorure	682	1251	bromure	236	322
iodure	626	1280	chlorure	276	303
Chrome,			iodure	259	354
carbure	1980	3800	Ozone	−192,7 ± 2	−111,9
oxyde	2266 ± 25	4000	Phosphore, ac.	73,6	diss. 200
Cobalt, fluorure	ca. 1200	1400	Plomb,		
Cuivre,			bromure	373	916
chlorure	620	993	fluorure	855	1290
iodure	605	1290	iodure	402	954
Dysprosium,			Potassium,		
bromure	881	1480	bromure	734	1435
chlorure	718	1500	chlorate	356	diss. 400
fluorure	1360	> 2200	perchlorate	610 ± 10	diss. 400
iodure	955	1320	hydroxyde	360,4 ± 0,7	1320 - 1324
Eau lourde	3,82	101,42	Radium,		
Fer, oxyde	1594 ± 5		bromure	728	subl. 900
Erbium,			Rubidium,		
fluorure	1350	2200	bromure	693	1340
iodure	1020	1280	chlorure	718	1390
Europium,			fluorure	795	1410
bromure	677	1880	Silicium,		
chlorure	727	> 2000	tétrachlor.	−70	57,57
fluorure(EuF_2)	1380	> 2400	tétrafluor.	−90,2	−86
(EuF_3)	1390	2280	hydrure	−185	−111,8
iodure (EuI_2)	527	1580	quartz	1610	2230

Suite page suivante

Table 23.1/4 (suite)

Substance	Pt de fusion θ en °C	Pt d'ébullition θ en °C	Substance	Pt de fusion θ en °C	Pt d'ébullition θ en °C
Sodium,			Thorium,		
amide	210	400	carbure	2655 ± 25	ca. 5000(?)
bromure	747	1390	tétraiodure	566	839
chlorure	801	1413	oxyde	3220 ± 50	4400
cyanure	563,7	1496	Thulium,		
fluorure	993	1695	bromure	952	1440
hydroxyde	318,4	1390	fluorure	1158	> 2200
iodure	661	1304	iodure	1015	1260
métaborate	966	1434	Titane,		
Soufre,			carbure	3140 ± 90	4820
hydrure	-85,5	−60,7	fluorure	1200	1400
acide(100%)	10,36	330 ± 0,5	diiodure	600	1000
Strontium,			diiodure	600	1000
chlorure	875	1250	dioxyde	1830 - 1850	2500 - 3000
fluorure	1473	2489	Vanadium,		
oxyde	2430	≈ 3000	carbure	2810	3900
Tellure, bromure	210	339	dioxyde	1967	
Terbium,			Tungstène,		
bromure	827	1490	carbure	2870 ± 50	6000
fluorure	1172	2280(?)	Ytterbium,		
iodure	946	> 1300	bromure	677	1800
Thallium,			chlorure	702	1900
bromure	480	815	fluorure	1052	2380
chlorure	430	720			

23.1/5 : Températures de fusion et d'ébullition de composés organiques

Composés	Formule	Point de fusion θ en °C	Point d'ébullition θ en °C
Alcanes			
Méthane	CH_4	−182,48	−161,49
Éthane	CH_3CH_3	−183,27	−88,62
Propane	$CH_3CH_2CH_3$	−187,69	−42,07
Butane	$CH_3(CH_2)_2CH_3$	−138,35	−0,5
Pentane	$CH_3(CH_2)_3CH_3$	−129,72	36,07
Hexane	$CH_3(CH_2)_4CH_3$	−95,35	68,74
Heptane	$CH_3(CH_2)_5CH_3$	−90,61	98,42
Octane	$CH_3(CH_2)_6CH_3$	−56,8	125,66
Nonane	$CH_3(CH_2)_7CH_3$	−53,52	150,79
Décane	$CH_3(CH_2)_8CH_3$	−29,66	174,12
Isobutane	$(CH_3)_2CHCH_3$	−159,6	−11,73
Isopentane	$(CH_3)_2CHCH_2CH_3$	−159,9	27,85
Alcènes (Oléfines)			
Éthylène	$CH_2 = CH_2$	−169,15	−103,71
Propène	$CH_2 = CHCH_3$	−185,25	−47,7
Cyclohexane	$CH_2(CH_2)_3CH = CH$	−103,7	83,2

Suite page suivante

Table 23.1/5 (suite)

Composés	Formule	Point de fusion θ en °C	Point d'ébullition θ en °C
Alcynes			
Acétylène	$CH \equiv CH$	−80	−83,4
Propyne	$CH_3C \equiv CH$	−102,7	−23,22
Hydrocarbures aromatiques			
Benzène	C_6H_6	5,53	80,1
Naphtalène	$C_{10}H_8$	80,29	217,95
Toluène	$C_6H_5CH_3$	−94,99	110,63
Éthylbenzène	$C_6H_5CH_2CH_3$	−94,98	136,19
Propylbenzène	$C_6H_5(CH_2)_2CH_3$	−99,5	159,22
Ortho-Xylène	$C_6H_4(CH_3)_2$	−25,18	144,41
Styrolène	$C_6H_5CH = CH_2$	−30,63	145,2
Amines			
Méthylamine	CH_3NH_2	−93,49	−6,33
Diméthylamine	$(CH_3)_2NH$	−92,19	6,88
Triméthylamine	$(CH_3)_3N$	−117,3	2,87
Éthylamine	$CH_3CH_2NH_2$	−81	16,58
Propylamine	$CH_3CH_2CH_2NH_2$	−83	48,5
Aniline	$C_6H_5NH_2$	−63	184,13
Composés halogènes organiques			
Méthylchloride	CH_3Cl	−97,72	−24,22
Méthylbromide	CH_3Br	−93,6	3,56
Composés halogènes organiques (suite)			
Méthyliodure	CH_3I	−66,45	42,43
Dichlorométhane	CH_2Cl_2	−95,14	139,75
Trichloroéthane	$CHCl_3$	−63,49	61,73
Tétrachlorométhane	CCl_4	−23,02	76,54
Tétrabromométhane	CBr_4	92	190
Tétraioduréméthane	CI_4	171	135
Éthylchlorure	CH_3CH_2Cl	−136,4	12,27
Éthylbromure	CH_3CH_2Br	−117,6	38,35
Chlorobenzène	C_6H_5Cl	−45,58	131,7
Bromobenzène	C_6H_5Br	−30,82	156,06
Iodobenzène	C_6H_5I	−30,63	145,2
Alcools			
Méthanol	CH_3OH	−97,68	64,51
Éthanol	CH_3CH_2OH	−114,1	78,32
Propanol	$CH_3CH_2CH_2OH$	−126,2	97,2
Butanol	$CH_3(CH_2)_2CH_2OH$	−89,3	117,73
Isopropanol	$CH_3CHOHCH_3$	−88,5	82,5
Alcool n-amylique	$CH_3(CH_2)_3CH_2OH$	−78,2	138,35
Éthylèneglycol	CH_2OHCH_2OH	−13,56	197,3
Glycérine	$CH_2OHCHOCH_2CH_3$	18,6	290
Cyclohéxanol	$CH_2(CH_2)_4CHOH$	25,15	161,5
Éthers			
Méthyléther	CH_3OCH_3	−141,49	−24,84
Diéthyléther	$CH_3CH_2OCH_2CH_3$	−116,3	34,55
Méthylphényléther	$C_6H_5OCH_3$	−37,3	154

Suite page suivante

Table 23.1/5 (suite)

Composés	Formule	Point de fusion θ en °C	Point d'ébullition θ en °C
Aldéhydes			
Formaldéhyde	$HCHO$	−92	−19,1
Acétaldéhyde	CH_3CHO	−123	20,4
Propionaldéhyde	$CH_3CH_2CH_2CHO$	−80	48
Valéraldéhyde	$(CH_3)_2CHCH_2CHO$	−65	64,1
Benzaldéhyde	C_6H_5CHO	−26	178
Cétones			
Acétone	CH_3COCH	−94,7	56,29
Butanone	$CH_3CH_2COCH_3$	−86,69	79,64
Acétophénone	$C_6H_5COCH_3$	19,65	202
Acides organiques			
Acide formique	$HCOOH$	8,4	100,56
Acide acétique	CH_3COOH	16,63	117,9
Acide propionique	CH_3CH_2COOH	−20,8	140,99
Acide butyrique	$CH_3CH_2CH_2COOH$	−4,26	163,53
Acide chloroacétique	$ClCH_2COOH$	63	189,5
Acide dichloroacétique	$Cl_2CHCOOH$	10,8	192,5
Acide trichloroacétique	Cl_3CCOOH	56,3	197,55
Glycocolle	NH_2CH_2COOH	234	286
Acide lactique	$CH_3CHOHCOOH$	18	56
Acide oxalique	CO_2HCOOH	157	189,5
Acide adipique	$CO_2H(CH_2)_4COOH$	152	267
Acide benzoïque	$C_6H_5CO_2H$	121,7	249
Dérivés d'acides organiques			
Chlorure d'acétyle	CH_3COCl	−112	51
Bromure d'acétyle	CH_3COBr	−96	76,7
Iodure d'acétyle	CH_3COI	0	108
Acétamide	CH_3CONH_2	82,15	221,1
Formiate de méthyle	HCO_2CH_3	−99	32
Acétate de méthyle	$CH_3CO_2CH_3$	−98,05	56,9
Acétate d'éthyle	$CH_3CO_2CH_2CH_3$	−39,5	77,1
Acétate anhydrique	$(CH_3CO)_2O$	−73,05	140
Autre			
Urée	NH_2CONH_2	132,75	

23.1/6 : Points de fusion T_f et d'ébullition $T_{éb}$ d'huiles

Huile	T_f °C	$T_{éb}$ °C	Huile	T_f °C	$T_{éb}$ °C
Diesel	−5	60 ... 300	Gazole	−30	200 ... 300
Mazout	−5	200 ... 350	Huile de lin	−15	316
Huile de graissage	−5	380 ... 400	Pétrole	−70	150 ... 300
Goudron	−15	300	Térébentine	−10	160
Huile de transfo.	−5	175	Benzine	−30 ... −50	67 ... 100

23.1/7 : Températures de fusion d'alliages fusibles

Composé	T_f θ °C	Composé	T_f θ °C
(92,2% Hg; 2.8% Na)	−48,2	(90% K; 10% Na)	17,5
(94,5% Cs; 5,5% Na)	−30	(56% Na; 44% K)	19
(93% Cs; 7% N)	−28	(85,2% Na; 14,8% Hg)	21,4
(78% K; 22% Na)	−11,4	(60% Na; 40% K)	26
(80% K; 20% Na)	−10	(70% Na; 30% K)	41
(91,8% Rb; 8,2% Na)	−4,5	(50% Na; 50% Hg)	45
(70% K; 30% Na)	−3,5	(70% Hg; 30% Na)	55
(60% K; 40% Na)	5	(80% Na; 20% K)	58
(50% K; 50% Na)	11	(60% Na; 40% Hg)	60

23.1/8 : Température de fusion de céramiques réfractaires

Corps	T_f θ °C	Corps	T_f θ °C	Corps	T_f θ °C	Corps	T_f θ °C
HfC	3890 ± 150	NbB_4	2900	WB(α)	2400 ± 100	Be_3N_5	2205
TaC	3880 ± 150	VC	2810	UB_2	2385	BaS	2205
ZrC	3530	HfO_2	2790	VN	2360	Be_3N_2	2200
NbC	3480	W_2B	2770 ± 80	MoB	2350	Ti_2B	2200
HfB_2	3250 ± 100	W_2C	2730 ± 15	UC	2315	CrB_2	2200 ± 50
TiN	3205	UO_2	2730	La_2O_3	2310	$TaSi_2$	2200
TiC	3147	WC	2720	YC_2	2300 ± 50	Nd_2S_3	2200
TaB_2	3100	MoC	2700	W_2B_5	2300 ± 50	GeB_6	2190
TaN	3087 ± 50	ZrO_2	2700	BeB_6	2300	WSi_2	2165
NbB_2	3000	ZrB_{12}	2680	YB_6	2300	ThB_6	2150
HfN	2982	YN	2670	CaC_2	2300	ZrSi	2150
ZrN	2982	ThC_2	2656 ± 75	Th_2S	2300	Mo_2B	2140
TiB_2	2980	ScN	2650	Th_4S_7	2300	NdS	2140
ThO_2	2950	UN	2650 ± 100	NbB	2280	Ti_5Si_3	2120
ThN	2630 ± 50	BeO	2440	ScB_2	22500	GdB_6	2100
CoO	2603	Cr_2O_2	2400	Mo_3B_4	2250	Th_3N_4	2100
NbB_6	2540	Nb_5Si_3	2440	VB	2250	MoB_2	2100
SmB_6	2540	TaB	2430	Zr_5Si_3	2250	La_2S_3	2100
LaB_6	2530	ThS	2425	UC_2	2250	V_3B_2	2070
Ta_4Si	2510	TaS	2425	SrB_6	2235	Al_2O_3	2050
MgO	2500	Nb_2N	2420	UB_{12}	2235	CrB	2050
Ta_5Si_3	2500	Y_2O_3	2410	CaB_6	2230	Ce_3S_4	2050 ± 75
UB_4	2495	AlN	2400	BaB_6	2230	$MoSi_2$	2030
SrO	2460	U_2C	2400	Ba_3N_2	2220	TiO	2020
CeS	2450	VB_2	2400 ± 50	ThB_4	2210	$Al_2O_3 \cdot BaO$	2000

23.1.3 Températures de Curie et de Néel

23.1/9 : Transition de phase de ferromagnétiques
Température de Curie

Corps	T_C en K	Corps	T_C en K
Co	1400,15	CrO_2	380,15
Dy	105,15	UH_3	180,15
Er	29,15	Silicium-Fer (4 Si)	963,15
Fe	1033,15	Alperm (16 Al)	673,15
Gd	289,15	Permalloy (78,5 Ni)	873,15
Ho	29,15	Superpermaloy (78,5 Ni)	673,15
MnSb	587,15	Hipernik (50 Ni)	773,15
Ni	627,15	Permendur (50 Co)	1253,15
Tb	221	Perminvar (25 Co, 45 Ni)	988,15
Tm	22(?)	Perminvar (7 Co, 70 Ni)	923,15
FeRh	675		

23.1/10 : Transition de phase d'antiferromagnétiques
Température de Néel

Corps	T_N (K)	Corps	T_N (K)
Ce	125	Ho	131,55
$CoCl_2$	521,45	Mn	103,15
CoO	274,93	MnF_2	66,45
Cr	473,15	MnO	122,15
Cr_2O_3	305,95	Nd	7,5
Dy	178,5	$NiCl_2$	49,55
Er	85	NiO	523,15
Eu	87	−Pr	< 1,5
$FeCO_3$	57,15	Sm	15
$FeCl_2$	23,45	Tb	229
FeF_2	78,35	$TiCl_2$	103,15
FeO	198,15	Tm	51 - 60
FeRh	350		

23.1/11 : Transition de ferro et d'antiferroélectriques
Température de Curie

Corps	Type de transition	T_C (K)
$BaTiO_3$	F	193,15
	F	278,15
	F	393,15
CsH_2PO_4	F	160,15
KD_2PO_4	F	216,15
KH_2PO_4	F	123,15
$KNbO_3$	F	708,15
$KTaO_3$	F	13,15
$(NH_4)H_2PO_4$	AF	148,15
$NaNbO_3$	AF	793,15
$NaTaO_3$	AF	748,15
$PbTiO_3$	F	763,15
$PbZrO_3$	AF	506,15
RbH_2PO_4	F	147,15
WO_3	AF	1010,15

23.2 Données concernant des gaz réels

23.2/1 : Valeurs de la température, pression et masse volumique au point critique

Gaz	T_{cr} K	p_{cr} MPa	ρ_{cr} $\frac{10^2 kg}{m^3}$	Gaz	T_{cr} K	p_{cr} MPa	ρ_{cr} $\frac{10^2 kg}{m^3}$
Oxygène	155	5,06	4,1	Éthane	305	4,88	2,03
Azote	126	3,39	3,11	Propane	370	4,24	2,20
Hydrogène	33	1,29	0,31	Butane	425	3,78	2,28
Hélium	5	0,23	0,69	Isobutane	408	3,64	2,21
Néon	44	2,72	4,84	Ammoniac	405	11,2	2,35
Argon	151	4,85	5,31	Soufre	374	8,98	3,49
Chlore	417	7,69	5,73	Éthylène	283	5,10	2,27
Monoxyde de Carbone	133	3,48	3,01	Acétylène	309	6,22	2,31
Dioxyde de Carbone	304	7,36	4,68	Dioxyde d'azote	310	7,24	4,59
Dioxyde de Soufre	431	7,86	5,24	Oxyde d'azote	180	6,56	5,20
Méthane	191	4,62	1,62	Dichlorodifluo-			
Air	132	3,77		rométhane	385	4,10	5,55
				Trifluorométhane	471	4,36	5,54

23.2/2 : Pression et température au point triple

Substance	T_t (K)	p_t (hPa)	Substance	T_t (K)	p_t(hPa)
Ammoniac	195,5	60,6	Néon	24,56	431
Oxyde de Carbone	216,56	5180	Para-hydrogène	13,81	70,4
Oxygène	543,6	1,5	Eau	273,16	6,1
Azote	63,14	12,53			

23.2/3 : Constantes de Van der Waals

Gaz	a N m^4 mol^{-2}	b 10^{-6}m^3 mol^{-1}	Gaz	a N m^4 mol^{-2}	b 10^{-6}m^3 mol^{-1}
Acétone	1,58	98,5	Néon	0,21	17,1
Ammoniac	0,422	37,2	Propane	0,92	84,5
Argon	0,136	32,3	Propanol	1,5	101
Éthanol	1,22	84	Oxygène	0,138	31,8
Hélium	0,0035	23,8	Azote	0,141	39,2
Krypton	0,234	39,9	Eau	0,555	30,5
Méthane	0,228	27,1	Hydrogène	0,0245	26,6
Méthanol	0,95	67	Xénon	0,415	51

23.2/4 : Masse molaire, constante massique et masse volumique de gaz

La masse volumique est rapportée aux conditions normales, soit $T = 273,15$ K et $p = 101\,325$ Pa.

Gaz	M g mol^{-1}	R_s J K^{-1}kg^{-1}	ρ kg m^{-3}	Gaz	M g mol^{-1}	R_s J K^{-1}kg^{-1}	ρ kg m^{-3}
Air	28,96	286,91	1,293	Ammoniac	17,03	487,9	0,771
Chlore	70,91	117,19	3,214	CO	28,01	296,67	1,250
Méthane	16,04	517,97	0,717	CO_2	44,01	188,81	1,977
Éthane	30,07	276,35	1,357	Oxygène	32,00	259,69	1,429
Éthylène	28,05	296,21	1,260	Azote	28,02	296,61	1,250
Acétylène	26,04	319,14	1,175	Oxyde d'azote	30,01	276,93	1,340
Propane	44,10	188,45	2,010	Hydrogène	2,02	4122,0	0,0899
Propène	42,08	197,48	1,915	Vapeur d'eau	18,02	461,25	0,804

23.3 Propriétés thermiques de substances

23.3.1 Viscosité

Les viscosités sont reportées, ci-dessous, aux températures de 0°C et de 20°C, à la pression normale.

23.3/1 : Viscosité dynamique de gaz

Gaz	η(0°C) 10^{-6}Pa.s	η(20°C) 10^{-6}Pa.s	Gaz	η(0°C) 10^{-6}Pa.s	η(20°C) 10^{-6}Pa.s
Ammoniac	9,3	10,2	Air	17,2	18,4
Chlore	12,3	13,5	Méthane	10,2	11,0
Éthylène	9,4	10,3	Dioxyde SO_2	11,6	12,8
Éthyne	9,5	10,4	Oxygène	19,2	20,7
Monoxyde CO	16,6	18,0	Azote	16,5	17,8
Dioxyde CO_2	13,7	15,0	Hydrogène	8,4	9,0

23.3/2 : Viscosité dynamique de liquides

Substance	η(0°C) 10^{-6}Pa.s	η(20°C) 10^{-6}Pa.s	Substance	η(0°C) 10^{-6}Pa.s	η(20°C) 10^{-6}Pa.s
Acétone	395	322	Méthanol	820	587
Benzène	910	648	Pentane	282	232
Chloroforme	700	570	Mercure	1685	1554
Éthanol	1780	1200	Toluène	768	585
Heptane	517	409	Eau	1792	1002

23.3.2 Dilatation, capacité calorifique et conductibilité thermique

Dans les tables suivantes figurent des grandeurs thermiques telles que :

- le coefficient de dilatation linéïque α_ℓ, à 25°C
- la capacité calorifique massique c_p à pression constante, à 25°C
- la conductivité thermique λ, à 27°C

23.3/3 : Propriétés thermiques de métaux purs

Métal	$\alpha_\ell\ (10^{-6}\mathrm{K}^{-1})$	$c_p\ (\mathrm{J\cdot g^{-1}\cdot K^{-1}})$	$\lambda\ (\mathrm{W\cdot cm^{-1}\cdot K^{-1}})$
Aluminium	23,1	0,897	2,37
Antimoine	11,0	0,207	0,243
Argent	18,9	0,235	4,29
Barium	20,6	0,204	0,184
Béryllium	11,3	1,825	2,00
Bismuth	13,4	0,122	0,0787
Cadmium	30,8	0,232	0,968
Calcium	22,3	0,647	2,00
Cérium	5,2	0,192	0,113
Césium		0,242	0,359
Chrome	4,9	0,449	0,937
Cobalt	13,0	0,421	1,00
Cuivre	16,5	0,385	4,01
Dysprosium	9,9	0,173	0,107
Erbium	12,2	0,168	0,145
Étain	22,0	0,228	0,666
Europium	35	0,182	0,140
Fer	11,8	0,449	0,802
Gadolinium	9	0,236	0,105
Gallium		0,371	0,406
Hafnium	5,9	0,144	0,230
Holmium	11,2	0,165	0,162
Indium	32,1	0,233	0,816
Iridium	6,4	0,131	1,47
Lanthane	12,1	0,195	0,134
Lithium	46	3,582	0,847
Lutétium	9,9	0,154	0,164
Magnésium	24,8	1,023	1,56
Manganèse	21,7	0,479	0,0782
Mercure		0,140	0,0834
Molybdène	4,8	0,251	1,38
Néodyme	9,6	0,190	0,165
Neptunium			0,063
Nickel	13,4	0,444	0,907
Niobium	7,3	0,265	0,537
Or	14,2	0,129	3,17

Suite page suivante

Table 23.3/3 (suite)

Métal	α_ℓ ($10^{-6}K^{-1}$)	c_p ($J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$)	λ ($W \cdot cm^{-1} \cdot K^{-1}$)
Osmium	5,1	0,130	0,876
Palladium	11,8	0,244	0,718
Platine	8,8	0,133	0,716
Plomb	28,9	0,129	0,353
Plutonium	46,7		0,0674
Polonium			0,200
Potassium		0,757	1,024
Praséodyme	6,7	0,193	0,125
Prométhium	11		0,15
Rhénium	6,2	0,137	0,479
Rhodium	8,2	0,243	1,500
Rubidium		0,363	0,582
Ruthénium	6,4	0,238	1,17
Samarium	12,7	0,197	0,133
Scandium	10,2	0,568	0,158
Sodium	71	1,228	1,41
Strontium	22,5	0,301	0,353
Tantale	6,3	0,140	0,575
Technétium			0,506
Terbium	10,3	0,182	0,111
Thallium	29,9	0,129	0,461
Thorium	11,0	0,113	0,540
Thulium	13,3	0,160	0,169
Titane	8,6	0,523	0,219
Tungstène	4,5	0,132	1,74
Uranium	13,9	0,116	0,276
Vanadium	8,4	0,489	0,307
Ytterbium	26,3	0,155	0,385
Yttrium	10,6	0,298	0,172
Zinc	30,2	0,388	1,16
Zirconium	5,7	0,278	0,227

23.3/4 : Propriétés thermiques de matériaux de construction

Matériaux	α_ℓ ($10^{-6}K^{-1}$)	c_p ($J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$)	λ ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)
Métal			
Acier, V2A	16,0	0,51	14
Acier, doux	11 ... 13	0,49	47 ... 58
Fonte	10,5	0,532	58
Aluminium-bronze	24	0,435	128
Bronze	17,5	0,37	64
Constantan	15	0,410	23,3
Laiton	18	0,385	113
Monel	14	0,43	19,7
Maillechort	18,36	0,398	48
Bronze au phosphore	18,9	0,36	110

Suite page suivante

Table 23.3/4 (suite)

Matériaux	α_ℓ (10^{-6}K^{-1})	c_p (J · g^{-1} · K^{-1})	λ (W · m^{-1} · K^{-1})
Bétons			
Béton normal (1:2:4)	12	0,88	1,4...1,5
Béton armé	10...15	0,88	0,39...1,6
Bois			
Chêne	≈ 3	2,4	0,17
Érable	≈ 3	1,6	0,16
Bouleau	≈ 3	1,9	0,142
Hêtre	≈ 3	2,1	0,17
Aulne	≈ 3	1,4	0,17
Frêne	≈ 3	1,6	0,16
Pin	≈ 3	1,4	0,14
Sapin	≈ 3	2,1	0,14
Pierres à bâtir			
Brique	6	0,92	1
Grès	7...12	0,71	2,3
Argile	5	0,8	≈ 1,2
Schiste		0,76	≈ 0,5
Marbre	≈ 11	0,84	2,8
Verres			
Vitre	7,9	0,84	0,81
Quartz	0,6	0,73	0,81
Laine de verre		0,84	≈ 0,04

23.3/5 : Propriétés thermiques de gaz

Gaz	c_p (J·g^{-1}·K^{-1})	c_v (J·g^{-1}·K^{-1})	λ (W·m^{-1}·K^{-1})	Gaz	c_p (J·g^{-1}·K^{-1})	c_v (J·g^{-1}·K^{-1})	λ (W·m^{-1}·K^{-1})
Éthane	1,47	1,173	0,017	Air, sec	1,005	0,718	0,02454
Ammoniac	2,056	1,568	0,022	Méthane	2,19	1,672	0,030
Argon	0,312	0,52	0,016	Néon	1,03	0,618	0,046
Acéthylène	1,300	1,616	0,018	Propane	1,549	1,360	0,015
Chlore	0,473	0,36	0,0081	Oxygène	0,909	0,649	0,024
Ac. chlorhydrique	0,795	0,567	0,013	Sulfure de C.	0,582	0,473	0,0069
Gaz de haut-fourn.	1,05	0,75	0,02	Dioxyde de S.	0,586	0,456	0,0086
Hélium	5,20	3,121	0,143	Hydrogène sulf.	0,992	0,748	0,013
Dioxyde de C.	0,816	0,627	0,015	Azote	1,038	0,741	0,024
Monoxyde de C.	1,038	0,741	0,023	Hydrogène	14,05	9,934	0,171
Krypton	0,25	0,151	0,0088	Vap. d'eau (éb.)	1,842	1,381	0,016
Gaz d'éclairage	2,14	1,59		Xénon	0,16	0,097	0,0051

23.3/6 : Propriétés thermiques de liquides

Substance	c_p ($J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$)	λ ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)	Substance	c_p ($J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$)	λ ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)
Éther éthylique	2,298	0,13	Mercure	0,138	10
Alcool éthylique	2,38		Huile de colza	1,97	0,17
Acétone	2,22	0,16	Acide nitrique conc.	1,72	0,26
Benzine	2,02	0,13	Huile de graissage	2,09	0,13
Benzène	1,70	0,15	Acide sulfurique conc.	1,42	0,47
Gazole	2,05	0,15	Huile de transfo.	1,88	0,13
Glycérine	2,37	0,29	Trichloréthylène	0,93	0,12
Mazout	2,07	0,14	Toluène	1,67	0,14
Huile de lin	1,88	0,17	Eau	4,187	0,60
Éther de pétrole	1,76	0,14			

23.3/7 : Propriétés thermiques de matériaux synthétiques

Matériaux	α_ℓ ($10^{-6}K^{-1}$)	c_p ($J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$)	λ ($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$)
Acrylique	90	1,5	
Chlorure de polyvinyle (PVC), souple	240	1 . . . 2	0,16
Chlorure de polyvinyle (PVC), rigide	50	0,9	0,16
Polyéthylène		2,3	
Polystyrène	70	1,3	
Polyester	80	2,1	23
Polyester, 70% fil de verre	12		0,17
Bakélite (avec sciure de bois)	50	1,5	34
Bakélite (avec amiante)	30	1,3	60
Caoutchouc (peu vulcanisé)	220	2,1	15
Caoutchouc (avec noir de carbone)	160	1,6	17

23.3/8 : Conductivités thermiques à différentes températures

Substance	λ(0°C) ($W\,m^{-1}\,K^{-1}$)	λ(50°C) ($W\,m^{-1}\,K^{-1}$)	λ(100°C) ($W\,m^{-1}\,K^{-1}$)
Amiante	0,15	0,18	0,195
Acétone	0,17	0,16	0,15
Aniline	0,19	0,177	0,167
Éthanol	0,188	0,177	–
Huile de ricin	0,184	0,177	0,172
Béton cellulaire	0,11	0,11	0,13
Eau	0,551	0,648	0,683

23.3/9 : Capacités calorifiques massiques et conductivités thermiques de matériaux solides

Matériaux	c_p $J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$	λ $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	Matériaux	c_p $J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$	λ $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
Amiante	0,816		Poix		0,13
Basalte	0,86	1,67	Porcelaine	≈ 1	≈ 1
Glace	2,09	2,33	Quarz	0,80	9,9
Plâtre	1,1	0,81	Suie	0,84	0,07
Mica	0,87	0,35	Sable, sec	0,80	0,58
Graphite	0,71	168	Émeri	0,96	11,6
Caoutchouc dur	1,42	0,17	Neige	4,187	
Charbon de bois	0,84	0,084	Carbure de silic.	0,67	15,2
Pierre à chaux	0,909	2,2	Houille	1,02	0,24
Tartre	0,80	$1,2 \ldots 3$	Suif de bœuf	0,88	
Colophane	1,30	0,317	Tombac (alliage)	0,381	159
Liège	$\approx 2,0$	$\approx 0,05$	Argile, sèche	0,88	≈ 1
Craie	0,84	0,92	Tourbe, sèche	1,9	0,08
Cuir, sec	$\approx 1,5$	0,15	Fibre vulcanisée	1,26	0,21
Papier	1,336	0,14	Cire	3,34	0,084
Paraffine	3,26	0,26			

23.3/10 : Conductivités thermiques d'isolants thermiques

Matériaux	λ $(W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1})$	Matériaux	λ $(W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1})$
Matière souple en couches		Texture lâche	
Crin	0,038	Laine minérale	$0,037 \ldots 0,042$
Laine végétale	0,039	Laine de verre	0,042
Feutre, 75% crin, 25% lin	0,039	Liège (copeaux)	$0,043 \ldots 0,045$
Feutre, 50% crin, 50% lin	0,038	Plâtre (pulv.)	$0,075 \ldots 0,086$
Couche de lin entre du papier	0,04	Sciure de bois	$0,059 \ldots 0,061$
Thermofeutre (lin et amiante)	0,053	Charbon de bois	$0,052 \ldots 0,056$

23.3/11 : Coefficients de dilatation volumique de liquides, à 18°C

Liquide	α $(10^{-4} K^{-1})$	Liquide	α $(10^{-4} K^{-1})$
Acétone	14,3	Kérosène	10,0
Aniline	8,5	Méthanol	11,9
Chloroforme	12,8	Propanol	9,8
Diéthyléther	16,3	Mercure	1,8
Éthanol	11,0	Acide nitrique	12,4
Huile minérale	9,2	Ess. de térébentine	9,4
Glycérine	5,0	Toluène	10,8

23.3/12 : Coefficients de dilatation volumique de l'eau pour différentes températures

θ (°C)	α ($10^{-4}K^{-1}$)	θ (°C)	α ($10^{-4}K^{-1}$)
5 -10	0,53	20-40	3,02
10-20	1,50	40-60	4,58
20	2,07	60-80	5,87

23.4 Transfert thermique

23.4/1 : Coefficients de transfert thermique k en $\frac{W}{m^2 \cdot K}$ (les valeurs sont indicatives)

Matériaux	épaisseur (cm)								
	0,3	1	2	5	10	12	15	20	25
Verre	5,8	5,6							
Boiserie			3,8	2,4		1,7			
Béton gravier			4,1	3,5		3,1	2,8		
Scorie						2,7			1,7
Béton armé				4,2	3,7		3,3	2,9	

23.4/2 : Coefficients de transfert thermique k en $\frac{W}{m^2 \cdot K}$ de matériaux de construction

Matériaux	épaisseur (cm)						
	cloison intérieure			cloison extérieure			
	9	19	24	24	30	39	49
Tuile pleine	2,56	1,94	1,73	2,00	1,78	1,45	1,22
Brique évidée	2,00	1,63	1,36	1,50	1,28	1,10	0,87
Brique creuse	2,36	1,69	1,49	1,69	1,48	1,19	1,00
Brique recuite	2,73		1,99	2,35			
Pierre silicocalcaire							
Pierre évidée	2,24	1,88	1,62	1,85	1,57	1,37	1,10
Aggloméré	2,52	2,19	1,94	2,28	1,97	1,74	1,43
Monolithe	2,56	2,23	2,02	2,35	2,04	1,80	1,49
Pierre à bâtir	2,24	1,88	1,60	1,81	1,57	1,37	1,10
Béton aéré							
$600\ kg \cdot m^{-3}$	1,64	1,28	1,04	1,12	0,94	0,80	0,62
$800\ kg \cdot m^{-3}$	1,77	1,41	1,15	1,26	1,06	0,91	0,71
$1000\ kg \cdot m^{-3}$	1,90	1,52	1,26	1,38	1,17	1,01	0,79
Béton cellulaire							
$1200\ kg \cdot m^{-3}$	2,00	1,63	1,36	1,50	1,30	1,10	0,87
$1400\ kg \cdot m^{-3}$	2,17	1,81	1,52	1,72	1,48	1,29	1,02
$1600\ kg \cdot m^{-3}$	2,36	1,99	1,71	1,97	1,71	1,50	1,21
Béton cyclopéen (béton ordinaire avec gros éléments)							
$1400\ kg \cdot m^{-3}$			1,30	1,45	1,27		
$1600\ kg \cdot m^{-3}$			1,42	1,59	1,38		

23.4/3 : Coefficients de transmission thermique α
(les valeurs sont indicatives)

Conditions	α ($W\,m^{-2}\,K^{-1}$)
Air le long d'une surface plane et polie	
vitesse du vent $v \leq 5\,m \cdot s^{-1}$	$5,6 + \frac{4v}{m \cdot s^{-1}}$
vitesse du vent $v > 5\,m \cdot s^{-1}$	$7,12 \cdot \left(\frac{v}{m \cdot s^{-1}}\right)^{0,78}$
Air le long d'une paroi métallique polie	
vitesse du vent $v \leq 5\,m \cdot s^{-1}$	$5,8 + \frac{4v}{m \cdot s^{-1}}$
vitesse du vent $v > 5\,m \cdot s^{-1}$	$7,14 \cdot \left(\frac{v}{m \cdot s^{-1}}\right)^{0,78}$
Air le long d'un mur plan	
vitesse du vent $v \leq 5\,m \cdot s^{-1}$	$6,2 + \frac{4,2v}{m \cdot s^{-1}}$
vitesse du vent $v > 5\,m \cdot s^{-1}$	$7,52 \cdot \left(\frac{v}{m \cdot s^{-1}}\right)^{0,78}$
Air orthogonal à une paroi métallique	
air calme	3,5 ... 35
air modérément agité	23 ... 70
air fortement agité	58 ... 290
Eau dans un conduit	
en écoulement calme	350 ... 580
en écoulement tumultueux	$350 + 2100\sqrt{\frac{v}{m \cdot s^{-1}}}$
Eau dans une chaudière	580 ... 2300
Eau en agitation, dans une chaudière	2300 ... 4700
Eau bouillante, dans un conduit	4700 ... 7000
Eau bouillante, sur une plaque métallique	3500 ... 5800
Vapeur d'eau condensée	11 600

23.5 Données de corrections pratiques

23.5.1 Mesure de pression

p_0 et ρ_0 sont la pression et la masse volumique de l'air au niveau de la mer,à $\theta = 15°C$.

23.5/1 : Atmosphère normale à différentes altitudes h

h (m)	p/p_0	ρ/ρ_0	θ (°C)	h (m)	p/p_0	ρ/ρ_0	θ (°C)
0	1	1	15	5000	0,533	0,601	-17,5
1000	0,887	0,907	8,5	6000	0,465	0,538	-24
2000	0,784	0,822	2	7000	0,405	0,481	-30,5
3000	0,692	0,742	-4,5	8000	0,351	0,428	-37
4000	0,608	0,669	-11	10000	0,261	0,337	-50

23.5/2 : Pression p de l'air en fonction de l'altitude h

h (m)	p (hPa)	h (m)	p (hPa)	h (m)	p (hPa)	h (m)	p (hPa)
0	1013,25	700	931,9	2000	795,0	6000	471,8
100	1001,3	800	920,8	2400	756,3	8000	356,0
200	989,5	900	909,7	2800	719,1	10000	264,4
300	977,7	1000	898,8	3200	683,4	12000	193,3
400	966,1	1200	877,2	3600	649,2	15000	120,4
500	954,6	1400	856,0	4000	616,4	17500	81,2
600	943,2	1600	835,3	5000	540,2	20000	54,75

23.5.1.1 Réduction au niveau de la mer

Les pressions sont à corriger pour être ramenées au niveau de la mer. L'altitude h de la station de mesure et la différence de température t de la colonne d'air entre station et niveau de la mer doivent être prises en considération. En règle générale, l'influence de la latitude du lieu est négligeable devant les incertitudes liées à la détermination de la température de la colonne d'air. La correction est effectuée ainsi : de la première table, on extrait le facteur **(t-h)** qui est introduit dans la seconde table pour en déduire la correction à ajouter à la valeur mesurée.
Notons que l'unité de pression utilisée ici est le torr (1 torr = 1 mm Hg).

23.5/3 : Facteur (t-h) température t - altitude h

h	t colonne d'air (°C)				h	t colonne d'air (°C)			
(m)	−16	0	16	28	(m)	−16	0	16	28
2000	1,2	1,1	1,0	1,0	3500	172,6	162,3	152,5	145,9
2100	11,5	10,8	10,2	9,7	3600	184,1	173,1	162,7	155,6
2200	23,0	21,6	20,3	19,5	3700	195,6	183,9	172,9	165,3
2300	34,5	32,5	30,5	29,2	3800	207,1	194,7	183,1	175,0
2400	46,0	43,3	40,7	38,9	3900	218,6	205,5	193,2	184,8
2500	57,5	54,1	50,9	48,6	4000	230,1	216,3	203,4	194,5
2600	69,0	64,9	61,0	58,3	4100	241,6	227,1	213,5	204,2
2700	80,6	75,7	71,2	68,1	4200	253,1	237,9	223,7	213,9
2800	92,1	86,5	81,4	77,8	4300	264,6	248,8	233,9	223,6
2900	103,6	97,4	91,5	87,5	4400	276,1	259,6	244,0	233,4
3000	115,1	108,2	101,7	97,3	4500	287,6	270,4	254,2	243,1
3100	126,6	119,0	111,9	107,0	4600	299,1	281,2	264,4	252,8
3200	138,1	129,8	122,0	116,7	4700	310,6	292,0	274,5	262,5
3300	149,6	140,6	132,2	126,4	4800	322,1	302,8	284,7	272,2
3400	161,1	151,4	142,4	136,2	4900	333,6	313,6	294,9	282,0

23.5/4 : **Correction additionnelle à des mesures de pression**

Facteur	Mesure barométrique (torr)					Facteur	Mesure barométrique (torr)					
t-h	780	760	740	720	700	**t-h**	760	740	720	700	680	660
1	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	40	35,8	34,9	33,9	33,0	32,0	31,1
5	4,5	4,4	4,3	4,2	4,0	45	40,4	39,3	38,3	37,2	36,2	35,1
10	9,0	8,8	8,6	8,3	8,1	50	45,0	43,8	42,7	41,5	40,3	39,1
15	13,6	13,2	12,9	12,5	12,2	55	49,7	48,4	47,1	45,8	44,5	43,1
20	18,2	17,7	17,2	16,8	16,3	60	–	52,9	51,5	50,1	48,6	47,2
25	22,8	22,2	21,6	21,0	20,4	65	–	57,5	55,9	54,4	52,8	51,3
30	27,4	26,7	26,0	25,3	24,6	70	–	62,1	60,4	58,7	57,1	55,4
35	–	31,2	30,4	29,6	28,8	75	–	66,7	64,9	63,1	61,3	59,5
	720	700	680	660	640		680	660	640	620	600	
80	69,5	67,5	65,6	63,7	61,7	125	105,3	102,2	99,1	96,0	92,9	–
85	74,0	72,0	69,9	67,9	65,8	130	109,8	106,6	103,3	100,1	96,9	–
90	78,6	76,4	74,2	72,1	69,9	135	114,3	111,0	107,6	104,3	100,9	–
95	83,2	80,9	78,6	76,3	74,0	140	118,9	115,4	111,9	108,4	104,9	–
100	87,9	85,4	83,0	80,5	78,1	145	123,5	119,9	116,3	112,6	109,0	–
105	–	89,9	87,4	84,8	82,2	150	128,2	124,4	120,6	116,9	113,1	–
110	–	94,5	91,8	89,1	86,4	155	–	128,9	125,0	121,1	117,2	–
115	–	99,1	96,3	93,4	90,6	160	–	133,5	129,4	125,4	121,4	–
120	–	103,7	100,7	97,8	94,8	165	–	138,1	133,9	129,7	125,5	–
125	–	108,3	105,3	102,2	99,1	170	–	142,7	138,4	134,0	129,7	–
	640	620	600	580	560		620	600	580	560	540	
170	138,4	134,0	129,7	125,4	121,1	215	174,1	168,5	162,9	157,3	151,7	–
175	142,9	138,4	133,9	129,5	125,0	220	178,7	172,9	167,2	161,4	155,7	–
180	147,4	142,8	138,2	133,6	129,0	225	183,3	177,4	171,5	165,6	159,7	–
185	151,9	147,2	142,4	137,7	132,9	230	188,0	181,9	175,8	169,8	163,7	–
190	153,5	151,6	146,7	141,8	136,9	235	192,6	186,4	180,2	174,0	167,8	–
195	161,1	156,1	151,0	146,0	141,0	240	–	191,0	184,6	178,2	171,9	–
200	165,7	160,5	155,4	150,2	145,0	245	–	195,5	189,0	182,5	176,0	–
205	170,4	165,0	159,7	154,4	149,1	250	–	200,1	193,4	186,8	180,1	–
210	–	169,6	164,1	158,6	153,2	255	–	204,7	197,9	191,1	184,3	–
215	–	174,1	168,5	162,9	157,3	260	–	209,4	202,4	195,4	188,4	–
	580	560	540	520			560	540	520	500	480	
260	202,4	195,4	188,4	181,5	–	305	235,6	227,2	218,8	210,3	201,9	–
265	206,9	199,8	188,4	181,5	–	310	240,2	231,6	223,0	214,4	205,9	–
270	211,5	204,2	196,9	189,6	–	315	244,8	236,0	227,3	218,6	209,8	–
275	216,0	208,6	201,1	193,7	–	320	249,4	240,5	231,6	222,7	213,8	–
280	220,6	213,0	205,4	197,8	–	325	254,1	245,0	236,0	226,9	217,8	–
285	225,2	217,5	209,7	201,9	–	330	–	249,6	240,3	231,1	221,8	–
290	229,9	222,0	214,0	206,1	–	335	–	254,1	244,7	235,3	225,9	–
295	–	226,5	218,4	210,3	–	340	–	258,7	249,1	239,6	230,0	–
300	–	231,0	222,8	214,5	–	345	–	263,3	253,6	243,8	234,1	–

23.5.1.2 Mesures avec un baromètre à mercure (corrections de température)

Ces corrections ont pour cause les expansions thermiques différentes du mercure et de l'instrument de mesure à la même température.

23.5/5 : Mesure barométrique avec une réglette en laiton
À la hauteur mesurée sera soustraite la valeur donnée dans la Table.
Des valeurs intermédiaires pourront s'obtenir par interpolation linéaire.

Temp.	Hauteur mesurée (mm)								
θ (°C)	620	630	640	650	660	670	680	690	700
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0,51	0,51	0,52	0,53	0,54	0,55	0,56	0,56	0,57
10	1,01	1,03	1,04	1,06	1,08	1,09	1,11	1,13	1,14
15	1,52	1,54	1,56	1,59	1,61	1,64	1,66	1,69	1,71
20	2,02	2,05	2,08	2,12	2,15	2,18	2,21	2,25	2,28
25	2,52	2,56	2,60	2,64	2,68	2,72	2,77	2,81	2,85
30	3,02	3,07	3,12	3,17	3,22	3,27	3,32	3,36	3,41
35	3,52	3,58	3,64	3,69	3,75	3,81	3,86	3,92	3,98

Temp.	Hauteur mesurée (mm)								
θ (°C)	710	720	730	740	750	760	770	780	790
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0,58	0,59	0,60	0,60	0,61	0,62	0,63	0,64	0,64
10	1,16	1,17	1,19	1,21	1,22	1,24	1,26	1,27	1,29
15	1,74	1,76	1,78	1,81	1,83	1,86	1,88	1,91	1,93
20	2,31	2,34	2,38	2,41	2,44	2,47	2,51	2,54	2,57
25	2,89	2,93	2,97	3,01	3,05	3,09	3,13	3,17	3,21
30	3,46	3,51	3,56	3,61	3,66	3,71	3,75	3,80	3,85
35	4,03	4,09	4,15	4,21	4,26	4,32	4,38	4,43	4,49

23.5/6 : Mesure barométrique avec un verre gradué
À la hauteur mesurée sera soustraite la valeur donnée dans la Table.
Des valeurs intermédiaires pourront s'obtenir par interpolation linéaire.

Temp.	Hauteur mesurée (mm)								
θ (°C)	700	710	720	730	740	750	760	770	780
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0,060	0,061	0,062	0,063	0,064	0,064	0,065	0,066	0,067
10	0,121	0,122	0,124	0,126	0,127	0,129	0,130	0,132	0,134
15	0,181	0,184	0,186	0,189	0,191	0,193	0,196	0,198	0,201
20	0,242	0,245	0,248	0,252	0,255	0,258	0,261	0,264	0,268
25	0,303	0,307	0,311	0,315	0,319	0,323	0,327	0,331	0,335
30	0,363	0,368	0,373	0,378	0,383	0,387	0,392	0,397	0,402

23.5.2 Mesure de volume - Conversion à la température standard

23.5/7 : Correction de température sur la mesure volumétrique d'une enceinte en verre

La table suivante donne la correction additive à apporter au volume de l'enveloppe de verre référencée à 20 °C quand elle est portée à une autre température θ. Le coefficient de dilatation volumique du verre est de $0,000\,025/°C$.

Temp.	Volume à 20 °C					
θ (°C)	2000	1000	500	400	300	250
15	−0,25	−1,12	−0,06	−0,05	−0,04	−0,031
16	−0,20	−0,10	−0,05	−0,04	−0,03	−0,025
17	−0,10	−0,08	−0,04	−0,03	−0,02	−0,019
18	−0,10	−0,05	−0,02	−0,02	−0,02	−0,12
19	−0,05	−0,02	−0,01	−0,01	−0,01	−0,006
21	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0,006
22	0,10	0,05	0,02	0,02	0,02	0,012
23	0,15	0,08	0,04	0,03	0,02	0,019
24	0,20	0,10	0,05	0,04	0,03	0,025
25	0,25	0,12	0,06	0,05	0,04	0,031
26	0,30	0,15	0,08	0,06	0,04	0,038
27	0,35	0,18	0,09	0,07	0,05	0,044
28	0,40	0,20	0,10	0,08	0,06	0,050
29	0,45	0,22	0,11	0,09	0,07	0,056
30	0,50	0,25	0,12	0,10	0,08	0,062

23.5/8 : Corrections de température pour des solutions aqueuses

Les données concernant les solutions aqueuses sont fréquemment reportées à la température standard de 20 °C. Cependant les mesures de volume sont faites à une autre température et dans une enceinte en verre. La table suivante donne la correction additive à apporter à un volume standard à 20 °C pour l'amener à la température θ de mesure.

Temp.	Volume à 20 °C						
θ (°C)	2000	1000	500	400	300	250	150
15	−1,54	−0,77	−0,38	−0,31	−0,23	−0,19	−0,12
16	−1,28	−0,64	−0,32	−0,26	−0,19	−0,16	−0,10
17	−0,99	−0,50	−0,25	−0,20	−0,15	−0,12	−0,07
18	−0,68	−0,34	−0,17	−0,14	−0,10	−0,08	−0,05
19	−0,35	−0,18	−0,09	−0,07	−0,05	−0,04	−0,03
21	0,37	0,18	0,09	0,07	0,06	0,05	0,03
22	0,77	0,38	0,19	0,15	0,12	0,10	0,06
23	1,18	0,59	0,30	0,24	0,18	0,15	0,09
24	1,61	0,81	0,40	0,32	0,24	0,20	0,12
25	2,07	1,03	0,52	0,41	0,31	0,26	0,15
26	2,54	1,27	0,64	0,51	0,38	0,32	0,19
27	3,03	4,52	0,76	0,61	0,46	0,38	0,23
28	3,55	1,77	0,89	0,71	0,53	0,44	0,27
29	4,08	2,04	1,02	0,82	0,61	0,51	0,31
30	4,62	2,31	1,16	0,92	0,69	0,58	0,35

23.6 Génération de bains à basse température

Pour produire des bains à température constante, on peut utiliser des mélanges solides-liquides près du point de fusion. Ces bains doivent être agités. Le refroidissement s'obtient, selon la température désirée, avec de la neige carbonique (−78°C) ou de l'air liquide (−190 °C).

23.6/1 : Bains liquides à basse température

Substance	T_f θ (°C)	$T_{éb}$ θ (°C)	Substance	T_f θ (°)C	$T_{éb}$ θ (°C)
Isopentane	−159,9	27,85	Acétate d'éthyle	−84	77
Métylcyclopentane	−142,4	71,8	Carboglace + Acétone	−78	–
Chlorure allylique	−134,5	45	p-Cymène	−67,9	177,1
n-Pentane	−129,7	36,1	Chloroforme	−63,5	61,7
Alcool allylique	−129	97	N-méthylaniline	−57	196
Alcool éthylique	−117,3	78,5	Chlorobenzène	−45,6	132
Disulfure de carbone	−110,8	46,3	Anisole	−37,5	155
Alcool isobutylique	−108	108,1	Bromobenzène	−30,8	156
Acétone	−95,4	56,2	Tétrachlorure de carb.	−23	76,5
Toluène	−95	110,6	Nitrure de benzène	−13	205

23.7 Déshydrateurs

Le déssèchement des gaz peut s'opérer par absorption (action chimique) comme par adsorption (action physique).

23.7/1 : Efficacité des agents chimiques

Substance	Eau résiduelle (mg/l) dans l'air sec	Substance	Eau résiduelle (mg/l) dans l'air sec
P_2O_5	< 1 mg dans 40000 l	NaOH fondu	0,16
$Mg(ClO_4)_2$ anhyd.	–	$CaBr_2$	0,18
BaO	0,00065	$CaCl_2$ fondu	0,34
KOH fondu	0,002	$Ba(ClO_4)_2$	0,82
CaO	0,003	$ZnCl_2$	0,85
H_2SO_4	0,003	$ZnBr_2$	1,16
$CaSO_4$ anhyd.	0,005	$CaCl_2$ granulé	1,5
Al_2O3	0,005	$CuSO_4$ anhyd.	2,8

23.7/2 : Efficacité des agents physiques
Les déshydrateurs sont classés par ordre croissant d'efficacité.

Glaise (cuite à température peu élevée)
Amiante
Charbon de bois
Argile
Porcelaine (cuite à température peu élevée)
Laine de verre
Terre d'infusoires
Silicagel
Réfrigération

23.8 Pression de vapeur

23.8.1 Solutions

23.8/1 : Pression de vapeur saturée à 20°C

Substance	p_V (hPa)	Substance	p_V (hPa)
Acétone	240	Méthanol	129
Benzène	100	Pentane	565
Chloroforme	213	Tétrachlorure de carbone	121
Diéthyléther	584	Toluène	29,3
Éthanol	587	Eau	23,4

23.8/2 : Constantes cryoscopiques K et ébullioscopiques E

Substance	K (K)	E (K)	Substance	K (K)	E (K)
Ammoniac	1320	340	Acide ascétique	3900	3070
Benzène	5070	2640	Éthanol	–	1070
Diéthyléther	1790	1830	Tétrachlorure de carbone	29800	4880
Chloroforme	4900	3800	Eau	1860	520

23.8.2 Humidité relative

23.8/3 : Psychrométrie

La détermination de l'humidité relative ambiante φ se fait par la mesure de la différence des températures $\Delta\theta$ entre deux thermomètres placés, l'un dans l'ambiance (θ_a), l'autre en humidité 100% saturée. Pour $\Delta\theta = 0$, on a $\varphi = 100\%$.

θ_a	φ en % pour $\Delta\theta$ (°C) égal à :										
(°C)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	81	63	45	28	11	–	–	–	–	–
2	100	84	68	51	35	20	–	–	–	–	–
4	100	85	70	56	42	28	14	–	–	–	–
6	100	86	73	60	47	35	23	10	–	–	–
8	100	87	75	63	51	40	28	18	7	–	–
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	4	–
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11	–
14	100	90	79	70	60	51	42	33	25	17	9
16	100	90	81	71	62	54	45	37	30	22	15
18	100	91	82	73	64	56	48	41	34	26	20
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30	24
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34	28
24	100	92	84	77	69	62	56	49	43	37	31
26	100	92	85	78	71	64	58	50	45	40	34
28	100	93	85	78	72	65	59	53	48	42	37
30	100	93	86	79	73	67	61	55	50	44	39

23.8.3 Pression de vapeur d'eau

23.8/4 : Pression de vapeur d'eau à des températures ordinaires

θ (°C)	p_V (hPa)	θ (°C)	p_V (hPa)	θ (°C)	p_V (hPa)	θ (°C)	p_V (hPa)
0	6,0	10	12,1	20	23,8	30	43,2
2	7,0	12	13,8	22	27,0	32	48,6
4	8,0	14	15,8	24	30,5	34	54,3
6	9,2	16	18,6	26	34,3	36	60,6
8	10,5	18	21,1	28	38,6	38	67,6

23.8/5 : Pression de vapeur et enthalpie massique de l'eau

Température θ (°C)	Masse vol. ρ (kg m^{-3})	Volume mass. v (10^{-3}m^3 kg^{-1})	Pression de vap. p_V (bar)	Enth. mass. h (kJ kg^{-1})
5	1000	1,0	0,0087	21, 0
10	1000	1,0	0,0123	42,0
15	999	1,001	0,0170	62,9
20	998	1,002	0,0234	83,9
25	997	1,003	0,0317	104,8
30	996	1,004	0,0424	125,7
40	992	1,008	0,0738	167,4
50	988	1,012	0,1234	209
60	983	1,017	0,1992	251
70	978	1,023	0,3116	293
80	972	1,029	0,4736	335
90	965	1,036	0,7011	377
100	958	1,044	1,013	419
120	943	1,061	1,985	504
140	926	1,080	3,614	589
160	907	1,102	6,181	675
180	887	1,128	10,03	763
200	864	1,157	15,55	852
250	799	1,251	39,78	1085
300	712	1,404	85,93	1345
350	574	1,741	165,35	1672

La table suivante donne les caractéristiques des vapeurs saturée et humide de l'eau, à savoir les volum massiques v_V et v_E de la vapeur et de l'eau (bouillante), leurs enthalpies massiques h_V et h_E ; p est pression et θ la température en °C.

23.8/6 : Volume et enthalpie massiques de la vapeur d'eau

p (bar)	θ (°C)	v_E (10^{-3}m^3 kg^{-1})	v_V (m^3 kg^{-1})	h_E (kJ kg^{-1})	h_V (kJ kg^{-1})
0,01	6,98	1,0001	129,2	29,34	2514
0,02	17,53	1,0012	67,01	73,46	2533,6
0,04	28,98	1,0040	34,80	121,41	2554,5
0,06	36,18	1,0064	23,74	151,50	2567,5
0,08	41,53	1,0084	18,10	173,86	2577,1
0,1	45,83	1,0102	14,67	191,83	2584,4
0,2	60,09	1,0172	7,650	251,45	2609,9
0,4	75,88	1,0265	3,993	317,65	2636,9
0,6	85,95	1,0333	2,732	359,93	2653,6
0,8	93,51	1,0387	2,087	391,72	2665,8
1,0	99,63	1,0434	1,694	417,51	2675,4
1,4	109,3	1,0513	1,236	458,42	2690,3
2,0	120,23	1,0608	0,8854	504,70	2706,3
3,0	133,54	1,0735	0,6056	561,43	2724,7
4,0	143,62	1,0839	0,4622	604,67	2737,6
5,0	151,84	1,0928	0,3747	640,12	2747,5
6,0	158,84	1,1009	0,3155	670,42	2755,5
8,0	170,41	1,1150	0,2403	720.94	2767,5
10,0	179,88	1,1274	0,1943	762,61	2776,2
12,0	187,96	1,1386	0,1632	798,43	2782,7
15,0	198,29	1,1539	0,1317	844,67	2789,9
20,0	212,37	1,1766	0,09954	908,59	2797,2
30,0	233,84	1,2163	0,06663	1008,4	2802,3
40,0	250,33	1,2521	0,04975	1087,4	2800,3
50,0	263,91	1,2858	0,03943	1154,5	2794,2

23.9 Enthalpies massiques

23.9/1 : Pouvoirs calorifiques massiques H_u (valeurs moyennes)

Substance solide	H_u (MJ · kg^{-1})	Substance liquide	H_u (MJ · kg^{-1})	Substance gazeuse	H_u (MJ · m^{-3})
Anthracite	33,4	Alcool éthylique	26,9	Éthylène	85,99
Lignite	9,6	Benzène	40,2	Butane	124
Lignite, bloc	17	Diéthyléther	34	Gaz naturel, humide	29
Lignite, brique	20	Pétrole brut	41	Éthane	64,5
Houille grasse	31,0	Diesel, carburant	42,1	Gaz naturel, sec	43,9
Coke	29,2	Mazout	41,8	Gaz, haut-fourneau	5
Bois, sec	13,3	Essence	42,5	Méthane	35,9
Houille maigre	31,0	Alcool méthylique	19,5	Propane	93,4
Tourbe, sèche	14,6	Pétrole	40,8	Gaz de ville	20
Coke minier	30,1	Alcool à brûler	25,0	Hydrogène	10,8
Charbon de bois	31	Goudron de houille	34	Propylène	88,0

23.9/2 : Enthalpies mass. de fusion Δh_f et de vaporisation Δh_v de métaux purs

Métal	Δh_f ($kJ \cdot kg^{-1}$)	Δh_v ($kJ \cdot kg^{-1}$)	Métal	Δh_f ($kJ \cdot kg^{-1}$)	Δh_v ($kJ \cdot kg^{-1}$)
Aluminium	397	10 900	Néodyme	49,5	–
Antimoine	167	1050	Nickel	303	6480
Argent	105	2350	Niobium	334	7492
Baryum	56	1100	Or	65,7	1650
Béryllium	1390	32 600	Osmium	289	–
Bismuth	52,2	725	Palladium	157	–
Cadmium	56	890	Platine	111	2290
Calcium	216	3750	Plomb	23,0	8600
Cérium	39	2242	Potassium	59,6	1980
Césium	16,4	496	Praséodyme	48,9	–
Chrome	280	6700	Rhénium	178	3797
Cobalt	275	6503	Rhodium	218	–
Cuivre	205	4790	Rubidium	25,7	880
Dysprosium	68,1	–	Ruthénium	193	–
Erbium	119	–	Samarium	57,3	–
Étain	59,6	2450	Scandium	314	6785
Europium	60,6	–	Sodium	113	390
Fer	277	6340	Strontium	94	1585
Gadolinium	63,6	–	Tantale	199	4162
Gallium	80,8	3640	Terbium	67,9	–
Hafnium	146	3703	Thallium	20,6	794,6
Holmium	103	–	Thorium	59,5	2344
Indium	28,5	1970	Thulium	99	–
Iridium	117	3900	Titane	324	8990
Lanthane	81,3	2880	Tungstène	192	4350
Lithium	603	20 500	Uranium	36,6	1731
Lutécium	126	–	Vanadium	452	8998
Magnésium	368	5420	Ytterbium	44,3	–
Manganèse	266	4190	Yttrium	128	4421
Mercure	11,8	285	Zinc	111	1755
Molybdène	290	5610	Zirconium	219	6382

23.9/3 : Enthalpies massiques de fusion Δh_f et de vaporisation Δh_v

Substances	Δh_f $kJ \cdot kg^{-1}$	Δh_v $kJ \cdot kg^{-1}$	Substances	Δh_f $kJ \cdot kg^{-1}$	Δh_v $kJ \cdot kg^{-1}$
Acétone	98	525	Monoxyde de carbone	29,86	216
Alumine	1069	4730	Krypton	19,52	108
Acide formique	276	432	Méthane	58,62	510
Ammoniac	–	1370	Méthanol	92	1100
Alcool amylique	–	502	Acétate de méthyle	–	406
Argon	29,44	163	Naphthaline	148	314
Benzène	128	394	Chlorure de sodium	500	2900
Bore	2055	50000	Néon	16,58	91,2
Brome	67,8	183	Nitrobenzène	94,2	397
Butane	80,34	385	Octane	181	299
Alcool butylique	121,35	616	Ozone	–	316
Chlore	90,48	290	Pentane	116	360
Chloroforme	75	279	Phénol	122	510
Acide chlorhydrique	–	443	Phosphore, blanc	21,0	400
Deutérium	98,5	304	Phosphine	33,33	430
Diéthyléther	–	384	Propane	57,36	426
Acide acétique	192	406	Propanol-1	86,5	750
Éthane	95,23	489	Propylène	71,48	438
Éthanol	108	840	Pyridine	105	450
Chlorure d'éthyle	–	382	Sucre de canne	56	–
Éthylène	119,68	483	Oxygène	13,87	213
Fluor	81,9	172	Soufre	42	290
Acide fluorhydrique	–	375	Sulfure de carbone	57,8	352
Fréon 11 (CCl_3F)	50,24	182	Acide sulfurique	109	–
Fréon 12 (CCl_2F_2)	34,27	162	Dioxyde de soufre	115,64	390
Fréon 21 ($CHCl_2F$)	–	242	Sélénium	68,6	1200
Fréon 22 ($CHClF_2$)	47,68	234	Silicium	164	14 050
Glycérine	201	–	Azote	25,74	198
Heptane	141	318	Toluène	–	364
Hexane	152	332	Eau	334	2265
Iode	124	172	Eau lourde	318	2072
Chlorure de potassium	342	2160	Xénon	–	99,2
Nitrate de potassium	107	–	Xylène	109	343
Dioxyde de carbone	180,7	136,8			

23.9/4 : Chaleurs de vaporisation en fonction de la température

Substance	0°C	20°C	60°C	100°C	140°C	180°C	220°C
Méthanol	1220	1190	1130	1030	906	743	472
Éthanol	927	925	894	827	717	584	370
Propanol	–	–	–	688	598	488	358
Diéthyléther	388	367	329	287	234	134	–
Acide acétique	–	352	376	387	385	368	344

23.9/5 : Variation relative de volume lors de la fusion

Substance	$\Delta V/V$	Substance	$\Delta V/V$
Aluminum	0,066	Lithium	0,015
Antimoine	-0,0094	Magnésium	0,042
Argent	0,05	Mercure	0,036
Cadmium	0,047	Or	0,0519
Eau (glace)	-0,083	Plomb	0,036
Étain	0,026	Potassium	0,024
Gallium	-0,03	Sodium	0,025
Indium	0,025	Zinc	0,069

23.10 Diffusion dans les gaz

La dépendance en température du coefficient de diffusion des gaz est bien reproduite, pour la plupart des systèmes gazeux, par l'expression suivante :

$$D = D_0 \left(\frac{T}{273}\right)^a \exp\left(-\frac{S}{T} - \frac{S'}{T^2}\right)$$

où S, S' et a sont des paramètres empiriques.

23.10/1 : Paramètres de diffusion pour un domaine de température allant de T_1 à 10^4 K

Système gazeux	D_0 ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	a	S (K)	S' (K)	T_1 (K)
H – He	2,35	1,732	-	-	275
H – Ar	0,112	1,597	-	-	275
H – H_2	0,184	1,728	-	-	190
$^3He - ^4He$	1,55	1,501	−0, 9630	1,894	1,74
He – Ne	0,235	1,509	1,87	-	65
He – Ar	0,635	1,552	1,71	-	77
He – Kr	0,503	1,609	−32, 65	2036	77
He – Xe	0,391	1,644	−68, 87	5416	169
He – H_2	1,32	1,510	-	-	90
He – N_2	0,613	1,524	-	-	77
He – CO	0,613	1,524	-	-	77
He – CO_2	0,52	1,720	-	-	200
He – CH_4	0,57	1,750	-	-	298
He – O_2	0,45	1,710	-	-	244
He – air	0,62	1,729	-	-	244
He – SF_6	0,35	1,627	-	-	2900
Ne – Ar	0,278	1,546	1,82	1170	90
Ne – CO	0,22	1,776	-	-	195
Ne – H_2	0,99	1,731	-	-	90

Suite page suivante

Table 23.10/1 (suite)

Système gazeux	D_0 ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	a	S (K)	S' (K)	T_1 (K)
Ne – Kr	0,242	1,555	20,4	–	112
Ne – N_2	0,28	1,743	–	–	293
Ne – Xe	0,197	1,584	10,1	–	169
Ar – CH_4	0,172	1,785	–	–	307
Ar – CO	0,17	1,752	–	–	244
Ar – CO_2	0,177	1,646	89,1	–	276
Ar – Kr	0,14	1,556	47,3	–	169
Ar – air	0,165	1,749	–	–	244
Ar – N_2	0,17	1,752	–	–	244
Ar – O_2	0,167	1,736	–	–	243
Ar – SF_6	0,114	1,596	145,4	–	328
Ar – N_2	0,79	1,519	39,8	–	242
Ar – Xe	0,122	1,563	59,9	–	169
Kr – CO	0,13	1,766	–	–	248
Kr – Xe	0,0812	1,608	52,7	–	169
Kr – H_2	0,664	1,564	26,4	–	77
Kr – N_2	0,13	1,766	–	–	248
H_2 – CH_4	0,62	1,765	–	–	293
H_2 – D_2	0,99	1,500	6,072	38,10	14
H_2 – air	0,66	1,750	–	–	252
H_2 – N_2	0,66	1,548	−2,80	1067	65
H_2 – CO	0,66	1,548	−2,80	1077	65
H_2 – O_2	0,69	1,732	–	–	252
H_2 – SF_6	0,52	1,570	102,5	–	298
CH_4 – N_2	0,2	1,750	–	–	298
CH_4 – O_2	0,22	1,695	44,2	–	294
CH_4 – air	0,186	1,747	–	–	298
CH_4 – SF_6	0,119	1,657	69,2	–	298
CO – O_2	0,175	1,724	–	–	285
CO – air	0,182	1,730	–	–	285
CO – SF_6	0,129	1,584	139,4	–	294
N – N_2	0,29	1,774	–	–	280
N_2 – CO	0,175	1,576	36,2	3825	78
N_2 – O_2	0,182	1,724	–	–	285
N_2 – SF_6	0,122	1,590	119,4	–	328
O – He	0,84	1,749	–	–	280
O – Ar	0,23	1,841	–	–	280
O – N_2	0,28	1,774	–	–	280
O – O_2	0,28	1,774	–	–	280
O_2 – SF_6	0,138	1,522	129,0	–	297
Xe – H_2	0,54	1,712	16,9	–	242
Xe – N_2	0,106	1,789	–	–	242

23.11 Diffusion dans les liquides

Le coefficient de diffusion dans les liquides se calcule, avec une bonne approximation, à l'aide de l'expression empirique :

$$D_{12} = K_1 \cdot K_2$$

Le facteur K_1 est indépendant du solvant mais est déterminé à partir des caractéristiques de la substance dissoute ; K_2, par contre, dépend du solvant, mais non de la substance dissoute.

Remarque :
Les coefficients de diffusion à des températures différentes T et $\bar{T}$ varient avec la dureté dynamique η_2 du solvant selon :

$$D_{12}(\bar{T}) = D_{12}(T) \cdot \frac{\bar{T}}{T} \cdot \frac{\eta_2(T)}{\eta_2(\bar{T})}$$

Les températures sont en kelvin (K).

23.11/1 : K_1 **pour diverses substances**

Substance	θ (°C)	K_1 (10^{-3}cm$^{0.5} \cdot$ s$^{-0.5}$)	Substance	θ (°C)	K_1 (10^{-3}cm$^{0.5} \cdot$ s$^{-0.5}$)
Aniline	15	2,178	Pyridine	20	2,723
Acétone	15	3,546	Alcool propylique	15	2,243
Benzène	25	3,460	Tétrachlorométhane	25	3,578
Bromobenzène	15	2,403	Trichlorométhane	15	3,328
Alcool butylique	15	2,049	Toluène	25	3,037
Eau	25	2,591	Acide acétique	25	2,312
Diéthyléther	15	3,833	Chlorobenzène	15	2,591
Isoamyléther	15	2,282	Alcool éthylique	15	2,456
Alcool méthylique	15	2,861	Nitrobenzène	15	2,322

23.11/2 : K_2 **pour divers solvants**

Substance	θ (°C)	K_1 (10^{-3}cm$^{0.5} \cdot$ s$^{-0.5}$)	Substance	θ (°C)	K_1 (10^{-3}cm$^{0.5} \cdot$ s$^{-0.5}$)
Benzène	15	5,925	Tétrachlorométhane	25	4,239
Bromobenzène	25	5,094	Toluène	25	6,109
Eau	25	4,151	Chlorobenzène	25	5,676
Alcool méthylique	15	6,745	Alcool éthylique	25	3,831

23.12 Diffusion dans les solides

La dépendance en température du coefficient de diffusion dans les solides est donnée par l'expression empirique suivante :

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{Q}{kT}\right)$$

23.12/1 : Diffusion d'un métal dans un métal en fusion

Temp. T (K)	Or dans Argent D (10^{-5}cm^{2}s^{-1})	Indium dans Argent (D 10^{-5}cm^{2}s^{-1})	Antimoine dans Argent (D 10^{-5}cm^{2}s^{-1})
1253	2,46	3,81	4,11
1300	2,80	4,20	4,47
1350	3,19	4,63	4,85
1400	3,59	5,06	5,23
1450	4,00	5,50	5,62
1500	4,44	5,92	6,00
1533	4,73	6,25	6,25

23.12/2 : Coefficients d'autodiffusion

Métal	θ (°C)	D_0 ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	Q ($kJ \cdot mol^{-1}$)	Métal	θ (°C)	D_0 ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	Q ($kJ \cdot mol^{-1}$)
Ag	450-900	0,81	190,9	Sb, ∥	500-630	56	200,97
Al	330-460	0,10	127,7	Cd, ⊥	110-315	0,1	79,97
	450-650	1,71	142,4	Cd, ∥	110-315	0,05	76,2
Au	600-950	0,031	164,79	Mg, ⊥	468-635	1,5	136,087
	850-1050	0,107	176,93	Mg, ∥	468-635	1,0	134,81
Co	770-1050	0,50	273,82	α-Ti	690-850	$6,8 \cdot 10^{-8}$	122,67
	1000-1300	0,2	259,58	β-Ti	895-1580	0,0016	146,54
Cu	500-1000	70,0	234,5	α-Tl, ⊥	150-275	0,4	94,62
	700-900	120	277,6		200-415	0,39	104,25
α-Fe	900-1200	3,6	297,3	α-Tl, ∥	200-410	0,08	92,11
γ-Fe	1070-1350	1,05	283,9	α-Zr	300-700	$5 \cdot 10^{-8}$	92,11
	1407-1515	6,8	258,3		650-827	$5 \cdot 10^{-2}$	217,71
δ-Fe	700-1100	0,48	275,5	β-Zr	900-1500	0,0024	159,1
Ni	1042-1404	1,9	284,7	Cr	950-1250	10^{-4})	220,6
Pb	174-322	0,281	101,3		1200-1600	0,28	308,98
Pd	1050-1500	0,205	266,3	Hf	1795-1995	0,0012	162,03
Pt	1250-1725	0,22	278,4	Li	-65 - 250	0,24	55,27
δ-Pu	35-440	0,0045	99,6	Mo	1700-1920	2,77	464,73
α-Th	1100-1400	700	349,6		1850-2350	0,3	397,75
β-Th	1450-1550	10^5	417,4	Na	-65 - 250	0,2	41,87
Be, ⊥	550-1050	0,52	157,4	Nb	878-2400	1,1	401,93
Be, ∥	550-1050	0,62	164,9	Rb	-65 - 250	0,23	39,36
Ta	1250-2200	0,12	413,2	W	1287-1453	$6,3 \cdot 10^7$	568,57
	1827-2527	2	460,5		2000-2700	0,54	504,51
α-U	580-650	0,002	167,5		2660-3230	42,8	641
β-U	700-755	0,0135	175,8	In, ⊥	44-144	3,7	78,29
γ-U	800-1050	0,002	113,04	In, ∥	44-144	2,7	78,29
V	880-1356	0,36	308,36	β-Sn, ⊥	160-228	10,7	105,51
	1356-1833	214	394,15	β-Sn, ∥	160-228	7,7	107,18
Sb, ⊥	500-630	0,1	149,89	Cs	830-1030	47	257,07

23.12/3 : Diffusion dans des métaux purs

Les données ont été obtenues par des traceurs radioactifs.

Métal diffusé	θ (°C)	D_0 ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	Q ($kJ \cdot mol^{-1}$)
dans de l'Aluminium			
Ag	371-655	0,118	116,52
Al	450-650	1,71	142,35
Au	423-609	0,077	113,04
Cd	441-631	1,04	124,35
Ce	450-630	$1,6 \cdot 10^{-6}$	111,37
Co	369-655	0,131	116,35
Cr	422-654	464	174,76
Cu	433-652	0,647	135,11
Fe	550-636	135	192,59
Ga	406-652	0,49	122,42
Ge	401-653	0,481	121,33
In	400-600	0,123	115,55
La	500-630	$1,4 \cdot 10^{-6}$	113,04
Mn	450-650	0,22	120,58
Mo	400-630	$1,04 \cdot 10^{-9}$	54,85
Nb	350-480	$1,66 \cdot 10^{-7}$	82,27
Nd	450-630	$4,5 \cdot 10^{-7}$	104,67
Ni	360-630	$2,9 \cdot 10^{-8}$	65,73
Pd	400-630	$1,92 \cdot 10^{-7}$	86,67
Pr	520-630	$3,58 \cdot 10^{-7}$	99,94
Sb	448-620	0,09	121,84
Sm	450-630	$(3,45 \cdot 10^{-7}$	95,79
Sn	400-600	0,245	119,32
V	400-630	$6,05 \cdot 10^{-8}$	82,06
Zn	357-653	0,259	120,83
dans du Béryllium			
Ag (⊥c)	650-900	1,76	180,87
Ag (‖c)	650-900	0,43	164,54
Be (⊥c)	565-1065	0,52	157,42
Be (‖c)	565-1065	0,62	164,96
Fe	700-1076	0,67	216,04
Ni	800-1250	0,2	242,83
dans du Cadmium			
Ag	180-300	2,21	106,34
Cd	110-283	0,14	80,80
Zn	180-300	0,0016	79,55
dans du Calcium			
C	550-800	$3,2 \cdot \cdot \cdot \cdot 10^{-5}$	124,77
Ca	500-800	8,3	161,19
Fe	500-800	$2,7 \cdot 10^{-3}$	97,55
Ni	550-800	$1 \cdot 10^{-5}$	120,99
U	500-700	$1,1 \cdot 10^{-5}$	145,70

Métal diffusé	θ (°C)	D_0 ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	Q ($kJ \cdot mol^{-1}$)
dans du Chrome			
C	1200-1500	$9,0 \cdot 10^{-3}$	110,95
Cr	1030-1545	0,2	308,57
Fe	980-1420	0,47	332,01
Mo	1100-1420	$2,7 \cdot 10^{-3}$	242,83
dans du Cobalt			
C	600-1400	0,21	142,35
Co	1100-1405	0,83	283,45
Fe	1104-1303	0,21	262,51
Ni	1192-1297	0,10	252,04
S	1150-1250	1,3	22,61
dans du Cuivre			
Ag	580-980	0,61	193,01
As	810-1075	0,20	176,39
Au	400-1050	0,03	178,36
Cd	725-950	0,935	191,34
Ce	766-947	$2,17 \cdot 10^{-8}$	115,56
Cr	800-1070	1,02	223,99
Co	701-1077	1,93	226,50
Cu	698-1061	0,78	211,43
Eu	750-970	$1,17 \cdot 10^{-7}$	112,42
Fe	460-1070	1,36	217,71
Ga	–	0,55	192,17
Ge	653-1015	0,397	187,40
Hg	–	0,35	184,22
Lu	857-1010	$4,3 \cdot 10^{-9}$	109,48
Mn	754-950	10^7	382,67
Nb	807-906	2,04	251,46
Ni	620-1080	1,1	225,25
Pd	807-1056	1,71	227,64
Pm	720-955	$3,62 \cdot 10^{-8}$	115,14
Pt	843-997	$4,8 \cdot 10^{-4}$	157,00
S	800-1000	23	205,99
Sb	600-1000	0,34	175,85
Sn	980-910	0,11	188,41
Tb	770-980	$8,96 \cdot 10^{-9}$	114,93
Tl	785-996	0,71	181,29
Tm	705-950	$7,28 \cdot 10^{-9}$	101,11
Zn	890-1000	0,73	198,87
dans du Germanium			
Cd	750-950	$1,5 \cdot 10^{9}$	427,05
Fe	775-930	0,13	103,83
Ge	766-928	7,8	286,80

Suite page suivante

Table 23.12/3 (suite)

Métal diffusé	θ (°C)	D_0 ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	Q ($kJ \cdot mol^{-1}$)	Métal diffusé	θ (°C)	D_0 ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	Q ($kJ \cdot mol^{-1}$)
dans du Carbone				dans du Germanium (suite)			
Ag ($\perp$c)	750-1050	9280	269,21	Sb	720-900	0,22	210,18
C	2000-2200	5	682,45	Te	770-900	2,0	234,46
Ni ($\perp$c)	540-920	102	197,62	In	600-920	$2,9 \cdot 10^{-4}$	167,05
Ni ($\parallel$c)	750-1060	202	223,16	dans de l'Hafnium			
Th ($\perp$c)	1400-2200	$1,33 \cdot 10^{-5}$	608,76	Hf	1795-1995	$1,2 \cdot 10^{-3}$	162,03
Th ($\parallel$c)	1800-2200	2,48	480,23	dans du Lanthane			
U ($\perp$c)	1400-2200	6760	481,48	Au	600-800	1,5	188,82
U ($\parallel$c)	1400-1820	385	542,19	La	690-850	$2,2 \cdot 10^{-2}$	75,78
dans de l'Or				dans de la glace-α			
Ag	699-1007	0,072	168,31	Ag	748-888	1950	288,89
Au	850-1050	0,107	176,93	Au	800-900	31	261,26
Co	702-948	0,068	174,17	C	616-844	2,2	122,67
Fe	701-948	0,082	174,17	Co	638-768	7,19	260,42
Hg	600-1027	0,116	156,50	Cr	775-875	2,53	240,74
Ni	880-940	0,30	192,59	Cu	800-1050	0,587	238,65
Pt	800-1060	7,6	254,97	Fe	809-889	5,4	252,46
dans de l'Indium				K	500-800	0,036	177,10
Ag ($\perp$c)	25-140	0,52	53,59	Mn	800-900	0,35	219,81
Ag ($\parallel$c)	25-140	0,11	48,15	Mo	750-875	7800	305,64
Au	25-140	$9 \cdot 10^{-3}$	28,05	Ni	680-800	1,3	234,46
In ($\perp$c)	44-144	3,7	78,29	P	860-900	2,9	230,27
In ($\parallel$c)	44-144	2,7	78,29	Sb	800-900	1100	278,84
Tl	49-157	0,049	64,89	V	755-875	1,43	231,95
				W	755-875	0,29	230,69
dans de la glace-γ				dans du Magnésium			
Be	1100-1350	0,1	241,16	Ag	476-621	034	119,32
C	800-1400	0,15	142,35	Fe	400-600	$4 \cdot 10^{-6}$	88,76
Co	1138-1340	1,25	305,22	In	472-610	$5,2 \cdot 10^{-2}$	118,91
Cr	950-1400	10,8	291,82	Mg ($\perp$c)	467-635	1,5	136,07
Fe	1171-1361	0,49	284,12	Mg ($\parallel$c)	467-635	1,0	134,81
Hf	1110-1360	3600	407,38	Ni	400-600	$1,2 \cdot 10^{-5}$	95,88
Mn	920-1280	0,16	261,68	U	500-620	$1,6 \cdot 10^{-5}$	114,72
Ni	930-2050	0,77	280,52	Zn	467-620	0,41	119,74
P	950-1200	0,01	182,96	dans du Molybdène			
S	900-1250	1,7	221,90	C	1200-1600	$2,04 \cdot 10^{-2}$	171,66
V	1120-1380	0,28	290,15	Co	1850-2350	18	446,73
W	1050-1250	1000	376,81	Cr	1000-1500	$2,5 \cdot 10^{-4}$	226,09
dans de la glace-δ				Cs	1000-1470	$8,7 \cdot 10^{-11}$	117,23
Co	1428-1521	6,38	257,07	K	800-1100	$5,5 \cdot 10^{-9}$	104,84
Fe	1428-1492	2,01	240,74	Mo	1850-2350	0,5	405,70
P	1370-1460	2,9	230,27	Na	800-1100	$2,95 \cdot 10^{-9}$	88,97

Suite page suivante

Table 23.12/3 (suite)

Métal diffusé	θ (°C)	D_0 ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	Q ($kJ \cdot mol^{-1}$)
dans du Plomb			
Ag	200-310	0,064	60,29
Au	190-320	$8,7 \cdot 10^{-3}$	41,87
Cd	150-320	0,409	88,89
Cu	150-320	0,046	60,46
Pb	150-320	0,887	106,85
Tl	207-322	0,511	101,86
dans du Palladium			
Pd	1060-1500	0,205	265,86
dans du Potassium			
Au	5,6-52,6	$1,29 \cdot 10^{-3}$	13,52
K	-52-61	0,16	39,19
Na	0-62	0,058	31,19
Rb	0,1-59,9	0,090	36,76
dans du Lithium			
Ag	65-161	037	53,72
Au	47-153	0,21	43,92
Bi	141-177	$5,3 \cdot 10^{13}$	198,04
Cd	80-174	2,35	67,20
Cu	51-120	0,47	38,60
Ga	58-173	0,21	54,01
Hg	58-173	1,04	59,37
In	80-175	0,39	66,44
Li	35-178	0,14	52,75
Na	52-176	0,41	52,80
Pb	129-169	160	105,51
Sb	141-176	$1,6 \cdot 10^{10}$	173,75
Sn	108-174	0,62	62,80
Zn	60-175	0,57	54,34
dans du Platine			
Co	900-1050	19,6	310,66
Cu	1098-1375	0,074	249,11
Pt	1325-1600	0,33	285,54
dans du γ-Plutonium			
Pu	190-310	$2,1 \cdot 10^{-5}$	67,41
dans du δ-Plutonium			
Pu	350-440	$4,5 \cdot 10^{-3}$	99,65
dans du ε-Plutonium			
Pu	500-612	$2,0 \cdot 10^{-2}$	77,46
dans du β-Praséodyme			
Ag	800-900	$3,2 \cdot 10^{-2}$	90,02
Au	800-910	$3,3 \cdot 10^{-2}$	84,15
Ho	800-930	9,5	110,11
In	800-930	9,6	121,00
La	800-930	1,8	107,60
Pr	800-900	8,7	123,09
Zn	822-921	0,63	113,04

Métal diffusé	θ (°C)	D_0 ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	Q ($kJ \cdot mol^{-1}$)
dans du Molybdène (suite)			
P	2000-2200	0,19	337,04
Re	1700-2100	0,097	396,49
S	2200-2470	320	422,87
Ta	1700-2150	$3,5 \cdot 10^{-4}$	347,50
U	1500-2000	$7,6 \cdot 10^{-3}$	319,87
W	1700-2260	1,7	460,55
dans du Nickel			
Au	700-1075	0,02	230,27
Be	1020-1400	0,019	193,43
C	600-1400	0,012	142,35
Co	1149-1390	1,39	275,91
Cr	1100-1270	1,12	72,56
Cu	1050-1360	0,57	258,33
Fe	1020-1263	0,074	245,35
Mo	900-1200	$1,6 \cdot 10^{-3}$	213,53
Ni	1042-1404	1,9	284,70
Pu	1025-1125	0,5	213,53
Sb	1020-1220	$1,8 \cdot 10^{-5}$	113,04
Sn	700-1350	0,83	242,83
V	800-1300	0,87	278,42
W	1100-1300	2,0	299,36
dans du Phosphore			
P	0-44	$1,07 \cdot 10^{-3}$	39,36
dans du α-Praséodyme			
Ag	610-730	0,14	106,34
Au	650-780	$4,3 \cdot 10^{-2}$	82,48
Co	660-780	$4,7 \cdot 10^{-2}$	68,66
Zn	766-603	0,18	103,83
dans du Silicium			
Au	700-1300	$2,75 \cdot 10^{-3}$	196,78
C	1070-1400	0,33	281,35
Cu	800-1100	$4 \cdot 10^{-2}$	96,30
Fe	1000-1200	$6,2 \cdot 10^{-3}$	83,74
Ni	450-800	1000	408,21
Sb	1190-1398	12,9	383,93
Si	1225-1400	1800	460,55
dans du Tantale			
C	1450-2200	$1,2 \cdot 10{-}^{-2}$	168,73
Fe	930-11240	0,505	298,94
Mo	1750-2220	$1,8 \cdot 10^{-3}$	339,13
Nb	921-2484	0,23	413,24
S	1970-2110	100	293,08
Ta	1250-2200	1,24	413,24
dans du Tellure			
Hg	270-440	$3,4 \cdot 10^{-5}$	78,29
Se	320-440	$2,6 \cdot 10^{-2}$	119,74

Suite page suivante

Table 23.12/3 (suite)

Métal diffusé	θ (°C)	D_0 ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	Q ($kJ \cdot mol^{-1}$)
dans du Sélénium			
S (⊥c)	60-90	1700	125,19
S (‖c)	60-90	1100	65,31
Se	35-140	$1,4 \cdot 10^{-4}$	48,99
dans de l'Argent			
Au	718-942	0,85	202,17
Ag	640-955	0,67	189,24
Cd	592-937	0,44	174,55
Co	700-940	1,9	204,11
Cu	717-945	1,23	193,01
Fe	720-930	2,42	205,53
Ge	640-870	0,084	152,82
Hg	653-948	0,079	159,52
In	592-937	0,41	170,82
Ni	749-950	21,9	229,44
Pb	700-865	0,22	159,52
Pd	736-939	9,56	237,60
Ru	793-945	180	275,49
S	600-900	1,65	167,47
Sb	780-950	0,234	163,58
Sn	592-937	0,255	164,54
Te	770-940	0,47	162,87
Tl	640-870	0,15	158,68
Zn	640-925	0,54	174,59
dans du Sodium			
Au	1-77	$3,34 \cdot 10^{-4}$	9,25
K	0-91	0,08	35,29
Na	0-98	0,145	42,24
Rb	0-85	0,15	35,55
dans du α-Titane			
Ti	700-850	$8,6 \cdot 10^{-6}$	150,31
dans du β-Titane			
Ag	940-1570	$3 \cdot 10^{-3}$	180,87
Be	915-1300	0,8	168,31
C	1100-1600	$3,02 \cdot 10^{-3}$	83074
Cr	950-1600	$5 \cdot 10^{-3}$	146,96
		4,9	255,39
Co	900-1600	$1,2 \cdot 10^{-2}$	128,12
		2,0	219,81
Fe	900-1600	$7,8 \cdot 10^{-3}$	132,30
		2,7	230,27
Mo	900-1600	$8,0 \cdot 10^{-3}$	180,03
	20	305,64	

Métal diffusé	θ (°C)	D_0 ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	Q ($kJ \cdot mol^{-1}$)
dans du Tellure (suite)			
Te (⊥c)	300-400	$3,91 \cdot 10^{4}$	195,52
Te (‖c)	300-400	130	148,63
dans du α-Thallium			
Ag (⊥c)	80-250	$3,8 \cdot 10^{-2}$	49,40
Ag (‖c)	80-250	$2,7 \cdot 10^{-2}$	46,89
Au (⊥c)	110-260	$2,0 \cdot 10^{-5}$	11,72
Au (‖c)	110-260	$5,3 \cdot 10^{-4}$	21,77
Tl (⊥c)	135-230	0,4	94,62
Tl (‖c)	135-230	0,4	95,88
dans du β-Thallium			
Ag	230-310	$4,2 \cdot 10^{-2}$	49,82
Au	230-310	$5,2 \cdot 10^{-4}$	25,12
Tl	230-280	0,7	86,67
dans du α-Thorium			
Pa	770-910	126	312,75
Th	720-880	395	299,77
U	700-880	2210	332,01
dans de l'Étain			
Ag (⊥c)	135-225	0,18	77,04
Ag (‖c)	135-225	$7,1 \cdot 10^{-3}$	51,50
Au (⊥c)	135-225	0,16	74,11
Au (‖c)	135-225	$5,8 \cdot 10^{-3}$	46,05
Co	140-217	5,5	92,11
In (⊥c)	181-221	34,1	108,02
In (‖c)	181-221	12,2	107,18
Sn (⊥c)	160-226	10,7	105,09
Sn (‖c)	160-226	7,7	107,18
Tl	137-216	$1,2 \cdot 10^{-3}$	61,55
dans du α-Uranium			
U	580-650	$2 \cdot 10^{-3}$	167,47
dans du γ-Uranium			
Au	785-1007	$4,86 \cdot 10^{-3}$	127,28
Co	783-989	$3,51 \cdot 10^{-4}$	52,63
Cr	797-1037	$5,37 \cdot 10^{-3}$	102,41
Cu	787-1039	$1,96 \cdot 10^{-3}$	100,73
Fe	787-990	$2,69 \cdot 10^{-4}$	50,24
Mn	787-939	$1,81 \cdot 10^{-4}$	58,11
Nb	791-1102	$4,87 \cdot 10^{-2}$	166,01
Ni	787-1039	$5,36 \cdot 10^{-4}$	65,57
U	800-1070	$2,33 \cdot 10^{-3}$	119,32
Zr	800-1000	$3,9 \cdot 10^{-4}$	69,08

Suite page suivante

Table 23.12/3 (suite)

Métal diffusé	θ (°C)	D_0 ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	Q ($kJ \cdot mol^{-1}$)	Métal diffusé	θ (°C)	D_0 ($cm^2 \cdot s^{-1}$)	Q ($kJ \cdot mol^{-1}$)
dans du β-Titane (suite)				dans du Vanadium			
Mn	900-1600	$6,1 \cdot 10^{-3}$	141,10	C	845-1130	$4,9 \cdot 10^{-3}$	114,30
		20	242,83	Cr	960-1200	$9,54 \cdot 10^{-3}$	270,47
Nb	1000-1600	$5,0 \cdot 10^{-3}$	164,54	Fe	960-1350	0,373	297,26
		20	305,64	P	1200-1450	$2,45 \cdot 10^{-2}$	208,50
Ni	925-1600	$9,2 \cdot 10^{-3}$	123,93	S	1320-1520	$3,1 \cdot 10^{-2}$	142,35
		2,0	219,81	V	880-1360	0,36	308,36
P	950-1600	$3,62 \cdot 10^{-3}$	100,90	V	1360-1830	214,0	394,15
		5	236,55	dans de l'Yttrium			
Sc	940-1590	$4,0 \cdot 10^{-3}$	136,65	Y (⊥c)	900-1300	5,2	280,93
Sn	950-1600	$3,8 \cdot 10^{-4}$	132,30	Y (‖c)	900-1300	0,82	252,46
		10	289,73	dans du Zinc			
Ti	900-1540	$3,58 \cdot 10^{-4}$	130,63	Ag (⊥c)	271-413	0,45	115,56
		1,09	251,21	Ag (‖c)	271-413	0,32	108,86
U	900-1400	$5,1 \cdot 10^{-4}$	122,67	Au (⊥c)	315-415	0,29	124,43
V	900-1545	$3,1 \cdot 10^{-4}$	134,81	Au (‖c)	315-415	0,97	124,47
		1,4	239,48	Cd (⊥c)	225-416	0,117	84,24
W	900-1250	$3,6 \cdot 10^{-3}$	183,80	Cd (‖c)	225-416	0,114	86,00
Zr	920-1500	$4,7 \cdot 10^{-3}$	148,21	Cu (⊥c)	338-415	2,0	125,27
dans du Tungstène				Cu (‖c)	338-415	2,22	123,64
C	1200-1600	$8,91 \cdot 10^{-3}$	223,99	Ga (⊥c)	240-403	0,018	75,99
Fe	940-1240	$1,4 \cdot 10^{-2}$	276,33	Ga (‖c)	240-403	0,016	77,04
Mo	1700-2100	0,3	422,87	Hg (⊥c)	260-413	0,073	84,49
Nb	1305-2367	3,01	576,10	Hg (‖c)	260-413	0,056	82,48
Re	2100-2400	19,5	590,34	In (⊥c)	271-413	0,14	82,06
Ta	1305-2375	3,05	585,73	In (‖c)	271-413	0,062	79,97
W	1800-2403	1,88	587,41	Sn (⊥c)	298-400	0,13	77,04
dans du β-Uranium				Sn (‖c)	298-400	0,15	81,22
Co	692-763	$1,5 \cdot 10^{-2}$	114,93	Zn (⊥c)	240-418	0,18	96,30
U	690-750	$2,8 \cdot 10^{-3}$	185,06	Zn (‖c)	240-418	0,13	91,69
dans du α-Zirconium				dans du β-Zirconium (suite)			
Cr	700-850	$1,19 \cdot 10^{-8}$	75,36	Cr	700-850	$1,19 \cdot 10^{-8}$	75,36
Fe	750-840	$2,5 \cdot 10^{-2}$	200,97	Fe	750-840	$2,5 \cdot 10^{-2}$	200,97
Mo	600-850	$6,22 \cdot 10^{-8}$	103,67	Mo	900-1635	$1,99 \cdot 10^{-6}$	147,38
Nb	740-857	$6,6 \cdot 10^{-6}$	131,88			2,63	287,01
Sn	300-700	$1,0 \cdot 10^{-8}$	92,11	Nb	1230-1635	$7,8 \cdot 10^{-4}$	153,24
Ta	700-800	100	293,08	P	950-1200	0,33	139,42
V	600-850	$1,12 \cdot 10^{-8}$	95,88	Sn	300-700	$1 \cdot 10^{-8}$	92,11
Zr	750-850	$5,6 \cdot 10^{-4}$	190,50	Ta	900-1200	$5,5 \cdot 10^{-5}$	113,04
dans du β-Zirconium				U	900-1065	$5,7 \cdot 10^{-4}$	127,70
Be	915-1300	$8,33 \cdot 10^{-2}$	130,21	V	870-1200	$7,59 \cdot 10^{-3}$	191,76
C	1100-1600	$3,57 \cdot 10^{-2}$	143,19	V	1200-1400	0,32	241,58
Ce	880-1600	3,16	173,33	W	900-1250	0,41	233,62
		42,17	310,24	Zr	1100-1500	$2,4 \cdot 10^{-4}$	126,02
Co	920-1600	$3,26 \cdot 10^{-3}$	91,36				

Partie V Physique quantique

24 Photons - rayonnement électromagnétique et quanta de lumière

L'aspect corpusculaire de la lumière se manifeste dans trois effets : le rayonnement thermique, l'effet photoélectrique et l'effet Compton.

24.1 Loi du rayonnement de Planck

Le rayonnement thermique (rayonnement du corps noir) ne trouva pas une explication satisfaisante dans la théorie classique de la physique (Planck, 1900). D'après Einstein (1905), le rayonnement électromagnétique est quantifié en **photons**.

1. Photons et quantum d'action de Planck

Photon, symbole γ : le quantum d'énergie du rayonnement électromagnétique.

Énergie d'un photon, E_{Ph} : proportionnelle à la fréquence f ou à la pulsation $\omega = 2\pi f$ du rayonnement électromagnétique. Elle est généralement exprimée en électron Volt (eV).

$$E_{\text{Ph}} = hf = \hbar\omega$$

Quantité de mouvement d'un photon , $\vec{\mathbf{p}}_{\text{Ph}}$: proportionnelle au vecteur d'onde $\vec{\mathbf{k}}$ (avec $|\vec{\mathbf{k}}| = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ est la longueur d'onde du rayonnement électromagnétique) :

$$\vec{\mathbf{p}}_{\text{Ph}} = \hbar\vec{\mathbf{k}}, \quad |\vec{\mathbf{p}}_{\text{Ph}}| = \hbar k = h/\lambda$$

Le vecteur $\vec{\mathbf{k}}$ pointe dans la direction de propagation de l'onde électromagnétique.

Quantum d'action de Planck : constante de Planck.

$$h = 6.626\,075\,5(40) \cdot 10^{-34}\ \text{Js}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054\,572\,66(63) \cdot 10^{-34}\ \text{Js} = 6,582\,122(20) \cdot 10^{-22}\ \text{MeVs}$$

2. Rayonnement thermique et corps noir

Rayonnement thermique : rayonnement émis par un corps qui se trouve à une température donnée. Tout corps absorbe et réemet une partie du rayonnement thermique environnant. Cet échange permanent d'énergie entre corps et environnement conduit à un équilibre thermique.

Corps noir : corps idéal, dont le facteur d'absorption est égal à l'unité pour toutes les radiations électromagnétiques qu'il reçoit, quelle que soit leur fréquence. Son pouvoir réfléchissant est nul (Fig. 24.1).

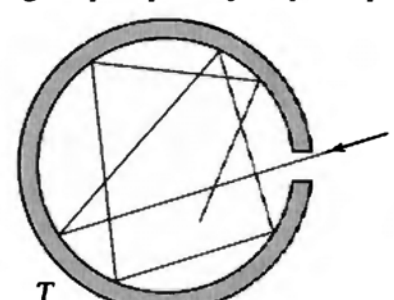


Fig. 24.1 : *Modèle d'un corps noir*

Cavité noire : modèle d'un corps noir en forme d'enceinte isotherme, fermée à l'exception d'une très petite ouverture. La paroi interne est imperméable aux rayonnement (idéalement réfléchissante) et l'ensemble est à une température donnée. La probabilité qu'un photon pénètre dans la cavité et puisse ressortir après plusieurs réflexions sur la paroi interne est négligeable (coefficient d'absorption $\alpha = 1$). Un équilibre interne se produit et par l'ouverture de la cavité est émis un rayonnement qui coresspond à cet équilibre.

Rayonnement du corps noir : le rayonnement qui est émis par le corps noir. La densité spectrale d'énergie rayonnée dépend de la température d'équilibre du corps noir.

▷ Selon la loi de Kirchhoff (voir page 773) la luminance énergétique spectrale $L_{e,f}$ d'un corps quelconque peut être ramenée à celle d'un corps noir, en tenant compte de son coefficient d'absorption et de sa température.

Le champ de rayonnement dans la cavité est défini par :

Luminance énergétique			$ML^{-1}T^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$u = \dfrac{Q}{V}$	u	J/m^3	luminance énergétique
	Q	J	énergie rayonnée
	V	m^3	volume

3. Loi de Planck

Décrit la relation entre la fréquence, la température et la luminance énergétique du rayonnement du corps noir :

Luminance énergétique spectrale			$ML^{-1}T^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$u_f(f,T) = \dfrac{8\pi f^2}{c^3} \dfrac{hf}{e^{hf/(kT)} - 1}$	$u_f(f,T)$	Jsm^{-3}	luminance énergétique spectrale
	c	ms^{-1}	vitesse de la lumière
	f	s^{-1}	fréquence
	h	Js	constante de Planck
	k	JK^{-1}	constante de Boltzmann
	T	K	température

Cette loi établit une correspondance entre l'image classique de l'émission et de l'absorption continue des ondes électromagnétiques et l'image quantifiée en terme de photons.

▷ Calcul de la densité d'énergie u_f du rayonnement du corps noir isotrope, homogène non polarisé, à partir de la luminance énergétique spectrale $L_{e,f}$:

$$u_f = 2 \int d\Omega \, \frac{L_{e,f}}{c} = 8\pi \frac{L_{e,f}}{c}$$

4. Relation entre la densité spectrale d'énergie rayonnante et la fréquence

La relation entre la densité spectrale d'énergie rayonnante du corps noir et la pulsation ω, respectivement la longueur d'onde λ, s'écrit :

$$u_\omega(\omega,T) = u_f(f,T)\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{2\pi}\cdot u_f(f,T)$$

$$u_\omega(\omega,T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/(kT)}-1}$$

$$u_\lambda(\lambda,T) = u_f(f,T)\cdot\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\lambda}\right| = \frac{f^2}{c}\cdot u_f(f,T)$$

$$u_\lambda(\lambda,T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{hc/(k\lambda T)}-1}$$

M La loi du rayonnement du corps noir de Planck est à la base des mesures de hautes températures à l'aide d'un pyromètre optique.

5. Loi du déplacement de Wien, cas limites de la loi de Planck

- **Formule de Wien**, pour $hf \gg kT$:
  $$u_f(f,T) = \frac{8\pi f^3h}{c^3}\mathrm{e}^{-\frac{hf}{kT}}$$

- **Formule de Rayleigh-Jeans**, pour $hf \ll kT$:
  $$u_f(f,T) = \frac{8\pi f^2}{c^3}kT$$

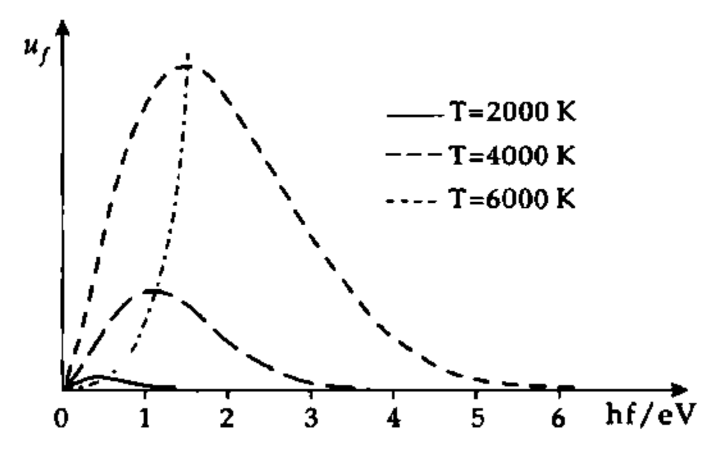


Fig. 24.2 : *Densité spectrale d'énergie rayonnante $u_f(f,T)$ pour différentes températures, selon la loi du rayonnement du corps noir de Planck. Ligne en tirets-points : formule de Rayleigh-Jeans*

- **Loi du déplacement de Wien** : le maximum de la densité spectrale d'énergie $u_f(f,T)$ se déplace vers des énergies de photon plus grandes, lorsque la température du corps noir augmente ; le maximum se déplace vers des fréquences plus élevées ou des longueurs d'onde plus courtes (Fig. 24.2) :

Loi du déplacement de Wien			L
	Symbole	Unité	Dénomination
$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$	λ_{max}	m	longueur d'onde au max . de $u_f(f,T)$
$b = 2.8978 \cdot 10^{-3}$ m · K	b	m · K	constante de Wien
	T	K	température

6. Loi de Stefan-Boltzmann

L'intégration de la densité spectrale d'énergie rayonnante sur toutes les fréquences donne le flux total Φ_{tot} (flux énergétique) émis par une surface d'aire A. Le flux énergétique Φ_{tot} est proportionnel à la quatrième puissance de la température T (voir page 822).

Flux énergétique ~ (température)^4			L
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Phi_{tot} = \sigma \cdot A \cdot T^4$	Φ_{tot}	W	flux énergétique
$\sigma = 5.67051(19) \cdot 10^{-8}$ W/(m^{2}K^4)	A	m^2	surface
	σ	W/(m^{2}K^4)	constante de Stefan-Boltzmann
	T	K	température

24.2 Effet photoélectrique

Effet photoélectrique : des photons d'énergie suffisante peuvent éjecter des électrons d'un matériau.

1. Propriétés des photoélectrons

Photoélectrons, électrons qui sont extraits d'un matériau par l'effet photoélectrique.

Courant photoélectrique : courant électrique qui est produit dans une **cellule photoélectrique** par les photoélectrons arrachés par effet photoélectrique à une **photocathode** et qui se déplacent vers une anode convenablement polarisée.

Formule d'Einstein pour l'effet photoélectrique : donne la valeur de l'énergie cinétique E_{cin} des électrons arrachés à un matériau par les photons d'une onde électromagnétique de fréquence f :

Énergie cinétique des photoélectrons			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
	E_{cin}	J	énergie cinétique des électrons
$E_{cin} = hf - W_A$	h	J · s	constante de Planck
	f	s^{-1}	fréquence
	W_A	J	tavail d'extraction

L'énergie cinétique des photoélectrons dépend de la fréquence du rayonnement incident, mais ne dépend pas de l'intensité de ce rayonnement. L'intensité du rayonnement détermine le nombre de photoélectrons extraits et par là, le courant photoélectrique dans une cellule photoélectrique.

2. Travail d'extraction

Ou **travail de sortie,** W_A : énergie nécessaire pour extraire un électron d'un matériau. Pour un élément simple, sa valeur correspond à l'énergie de liaison de l'électron à l'élément. Elle vaut typiquement quelques électronvolt (eV) (voir Tab. 30.3).

■ Travail de sortie W_A de quelques éléments (en eV): K 2.30, Na 2.75, Hg 4.49, Ge 5.0.

À chaque matériau correspond une fréquence seuil pour l'effet photoélectrique (**seuil photoélectrique**). Pour un rayonnement de fréquence f inférieure à ce seuil f_0 l'effet photoélectrique ne se produit pas (Fig. 24.3) :

$$f_0 = \frac{W_A}{h}$$

La composition chimique et l'état de surface déterminent le travail de sortie W_A et par là, la fréquence seuil f_0. L'effet photoélecrique ne peut être expliqué que par l'aspect corpusculaire (photon) du rayonnement électromagnétique.

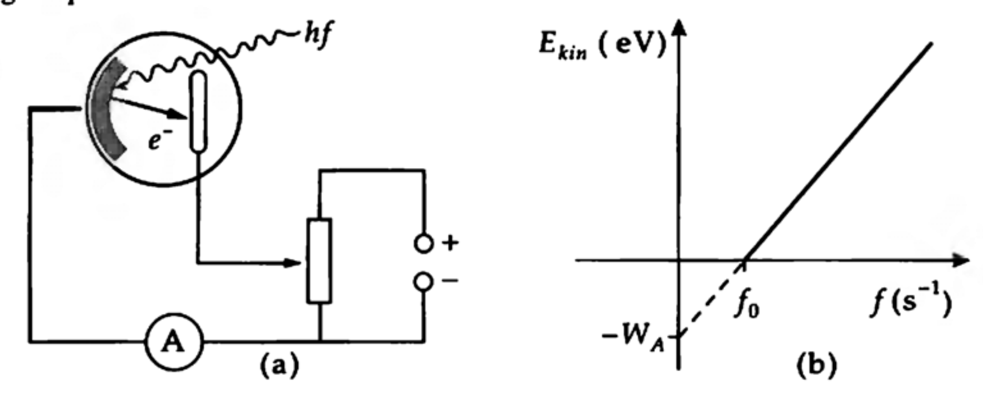


Fig. 24.3 : *à gauche : dispositif expérimental pour la mesure de l'effet photoélectrique, à droite : énergie cinétique des photoélectrons en fonction de la fréquence f du rayonnement incident*

3. Application de l'effet photoélectrique aux mesures physiques

[M] Lorsqu'on applique une différence de potentiel négative entre anode et cathode d'une cellule photoélectrique, le courant photoélectrique s'annule pour une valeur seuil U_s de cette différence de potentiel (tension d'arrêt). Cette valeur dépend de la vitesse maximale v_{max} des photoélectrons, $e \cdot U_s = mv_{max}^2/2$. Par la mesure de la fréquence f du rayonnement et de la tension seuil U_s, on peut déterminer la valeur de la constante de Planck h. La mesure indique une relation linéaire entre la tension d'arrêt la fréquence du rayonnement (Fig. 24.3). La pente de la droite donne la valeur de la constante de Planck $h = e \cdot \mathrm{d}U_G/\mathrm{d}f$.

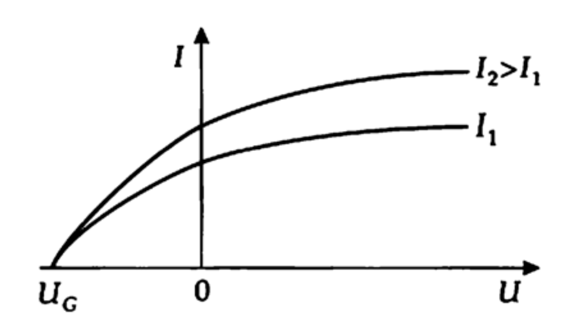


Fig. 24.4 : *Courant photoélectrique I en fonction de la différence de potentiel U entre anode et cathode, pour divers éclairement I*

[M] **Effet photoélectrique interne** : se manifeste dans les semiconducteurs par une modification de la conductivité. Il peut aussi engendrer une différence de potentiel (**effet photovoltaïque**). L'effet photoélectrique interne est utilisé dans les diodes semiconductrices pour la mesure d'intensités lumineuses (**photodiodes**).

24.3 Effet Compton

1. Diffusion de photons par des électrons

Effet Compton ou **diffusion Compton** : lors de la diffusion élastique d'un photon sur un électron libre (ou très faiblement lié), la longueur d'onde du rayonnement correspondant augmente. L'augmentation de la longueur d'onde depend de l'angle sous lequel le photon est diffusé. La variation de longueur d'onde $\Delta\lambda$ est indépendante de la longueur d'onde de l'onde incidente :

Variation de longueur d'onde dans l'effet Compton				**L**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\varphi)$$	$\Delta\lambda$	m	variation de la longueur d'onde	
	h	$\mathrm{J \cdot s}$	constante de Planck	
	m_e	kg	masse de l'électron	
	c	$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$	vitesse de la lumière	
	φ	1	angle de diffusion du photon	

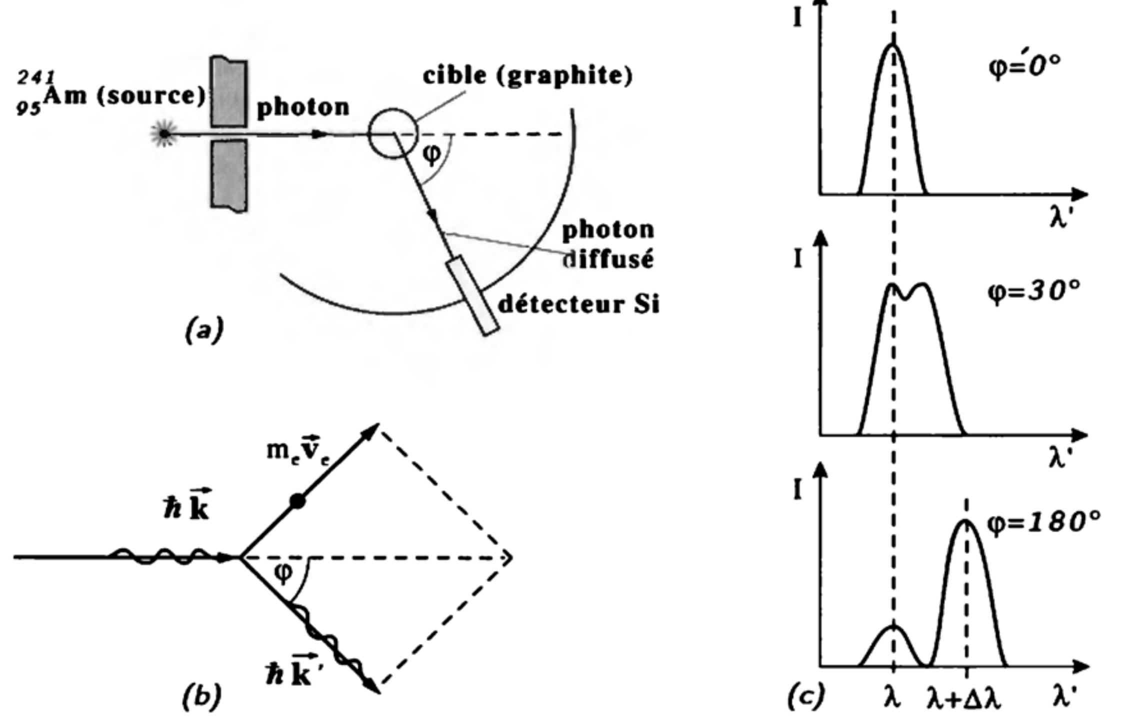


Fig. 24.5 : *Effet Compton. (a) : dispositif expérimental, (b) : cinématique du choc élastique photon-électron, (c) : intensité I du rayonnement diffusé en fonction de la longueur d'onde λ' de l'onde diffusée pour divers angles de diffusion φ. λ : longueur d'onde de l'onde incidente*

2. Lois de conservation lors de la diffusion

Conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie lors de la diffusion d'un photon sur une électron (relativiste) :

$$m_e c^2 + hf = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + hf'$$

$$\hbar\vec{k} = \frac{m_e \vec{v}'_e}{\sqrt{1-\beta^2}} + \hbar\vec{k}' \qquad rmavec\ :|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

- L'électron (libre) est au repos avant la diffusion.
- $\vec{k}$ est le vecteur d'onde de l'onde et pointe dans la direction de propagation du photon incident.
- Les quantités primées sont relatives à la situation après le choc.

▷ La ligne non déplacée du spectre des rayonnements diffusés provient de la diffusion de photons sur des électrons fortement liés. Dans ce cas, la conservation de la quantité de mouvement s'applique à l'atome entier, de masse beaucoup plus grande que l'électron. Le transfert de quantité de mouvement est alors très faible et la longueur d'onde est à peine modifiée lors de la diffusion (diffusion de Thomson).

3. Longueur d'onde de Compton

La longueur d'onde de Compton de l'électron, λ_C est le coefficient de proportionnalité dans la formule de la diffusion Compton :

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = 2.426\,310\,58(22) \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

Souvent, on appelle longueur d'onde de Compton, la valeur :

$$\bar{\lambda}_C = \frac{\hbar}{m_e c} = 3.861\,593\,23(35) \cdot 10^{-13}\ \text{m}$$

▷ La diffusion Compton peut se produire lors de la diffusion sur toute particule chargée. Il faut alors introduire la masse de la particule concernée dans la relation qui permet de calculer la longueur d'onde de Compton correspondante.

■ $\lambda_C^{\text{Proton}} = 1.321\,41 \cdot 10^{-15}\ \text{m} \approx 1\ \text{fm}$

4. Pression de radiation

Transfert de quantité de mouvement lors de la réflexion d'un rayonnement électromagnétique sur un corps (changement de direction de la quantité de mouvement du photon lors de sa réflexion sur une paroi fixe ou très lourde). La pression de radiation de la lumière du soleil sur un miroir est de l'ordre de grandeur de 10^{-11} bar, elle n'est pas significative. Puisque la pression de radiation qui agit sur de petites particules peut être du même ordre de grandeur que leur attraction gravitationnelle, elle peut affecter les processus astrophysiques. Par exemple, le fait que la chevelure des comètes est toujours dans la direction opposée au Soleil est une conséquence de la pression de radiation.

▷ Le satellite de forme sphérique Vanguard 1 (diamètre 16 cm) a été dévié de sa trajectoire de 1600 m en l'espace de 28 mois.

▷ L'intensité de la lumière émise par certains lasers atteint 10^{18} W/cm^2. Avec un tel rayonnement, il est possible de produire une pression de radiation de 100 Mbar à la surface d'un plasma. Cette pression peut conduire à la compression du plasma. De cette manière, il est possible, en physique des plasmas, d'atteindre de nouveaux domaines de pression et de température.

25 Ondes de matière - Mécanique ondulatoire des particules

Mécanique quantique : étude des lois du mouvement des particules subatomiques (qui ont des dimensions $< 10^{-8}$ m).

▷ Pour des particules de vitesses $v \approx c$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide, la description des phénomènes requiert l'utilisation de la mécanique quantique relativiste.

25.1 Nature ondulatoire des corpuscules

25.1.1.1 Hypothèses fondamentales de la mécanique quantique

Les hypothèses fondamentales de la mécanique quantique sont au nombre de deux :

1. Hypothèse quantique de Planck

Lors de l'émission ou de l'absorption de rayonnements électromagnétiques, les échanges d'énergie ne peuvent se faire que par multiples entiers d'un **quantum** d'énergie.

Énergie des Photons				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$E = \hbar \cdot \omega$ $\omega = 2\pi f$ $\hbar = \frac{h}{2\pi}$	E ω f h	J rad s^{-1} s^{-1} J · s	énergie pulsation fréquence quantum d'action, constante de Planck	

En physique atomique et subatomique, l'unité d'énergie usuelle est l'**électronvolt**.
L'électronvolt est l'énergie acquise par une charge égale à celle de l'électron accéléré par une différence de potentiel de 1 Volt. Il correspond à une énergie de $1.602\,177\,33(49) \cdot 10^{-19}$ J.

Vecteur d'onde, $\vec{\mathbf{k}}$: vecteur qui pointe dans la direction de propagation de l'onde électromagnétique, sa grandeur est

$$|\vec{\mathbf{k}}| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

λ est la longueur d'onde du rayonnement électromagnétique.

Quantité de mouvement d'un photon : proportionnelle au vecteur d'onde $\vec{\mathbf{k}}$:

Quantité de mouvement d'un photon				MLT^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\vec{\mathbf{p}} = \hbar \cdot \vec{\mathbf{k}} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi}$	$\vec{\mathbf{k}}$ h $\vec{\mathbf{p}}$	m^{-1} J · s kg · m/s	vecteur d'onde constante de Planck vecteur quantité de mouvement	

2. Ondes de matière

À toute particule libre, il est possible d'associer une **onde de de Broglie**, dont la longueur d'onde est inversement proportionnelle à la quantité de mouvement de la particule.

Longueur d'onde de de Broglie				L
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\lambda = \frac{h}{p}$	λ	m	longueur d'onde de de Broglie	
	h	J · s	constante de Planck	
	p	kg · m/s	quantité de mouvement de la particule	

- Un électron caractérisé par,
  $m = 9.109\,389\,7(54) \cdot 10^{-31}$ kg (masse de l'électron)
  $e = -1.602\,177\,33(49) \cdot 10^{-19}$ C (charge de l'électron)
  après accélération par une différence de potentiel U, a une onde associée de longueur d'onde :
  $$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m|e|U}} = \sqrt{\frac{150.5}{U}} \cdot 10^{-10}\ \text{m} \quad (U \text{ en Volt})$$

- Longueurs d'onde de de Broglie (en m) : électron (1 eV) $1.23 \cdot 10^{-9}$, électron (10^2 eV) $0.12 \cdot 10^{-9}$, particule α (10^2 eV) $1.4 \cdot 10^{-12}$, neutrons thermiques (0.025 eV) $0.18 \cdot 10^{-9}$, balle de golf (v = 25 m/s) $5.8 \cdot 10^{-34}$.

25.1.1.2 Dualité onde-corpuscule

Dualité onde-corpuscule : propriété des particules subatomiques (électrons, nucléons, atomes, molécules et photons) de se comporter soit comme une particule matérielle (lors de collisions ou de processus d'émission ou d'absorption) d'énergie et de quantité de mouvement définies, soit comme une onde (propagation, diffraction et interférences) de longueur d'onde définie.

M **Diffraction des électrons** : diffraction de faisceaux d'électrons par des structures périodiques qui forme des motifs d'interférences sur un écran placé derrière l'échantillon. La diffraction des électrons est une preuve de l'aspect ondulatoire des électrons (Davisson et Germer). La diffraction des électrons est utilisée pour l'analyse de la structure de surfaces ou de couches minces (principe de mesure Fig. 25.1).

Microscope électronique (E. Ruska, prix Nobel 1986) : fondé sur la faible longueur d'onde associée à des électrons de grande vitesse. Le pouvoir séparateur est environ 1000 fois meilleur que celui d'un microscope optique.

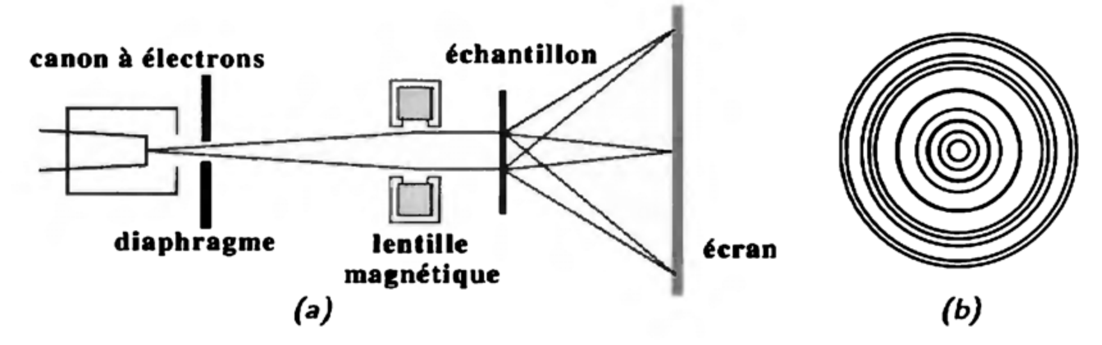


Fig. 25.1 : *Diffraction des électrons. (a) : principe du dispositif expérimental, (b) : motif d'interférences*

25.2 Relations d'incertitude de Heisenberg

Conséquences de l'aspect ondulatoire de la matière, elles indiquent que, au cours d'une même expérience, deux grandeurs conjuguées (position et quantité de mouvement, énergie et durée, moment cinétique et position angulaire) ne peuvent pas être mesurées simultanément avec une précision infinie. Le produit des incertitudes minimales sur chacune des grandeurs est de l'ordre de grandeur du quantum d'action (constante de Planck). Une onde plane de nombre d'onde $\vec{k}$ défini, qui correspond à une particule libre de quantité de mouvement constante $\vec{p}$, occupe tout l'espace : la particule n'est pas localisée dans l'espace ; sa position est indéterminée.

Relation d'incertitude de Heisenberg : établit la relation entre l'incertitude sur la détermination de la position x d'une particule Δx et de l'incertitude Δp_x sur la détermination simultanée de la projection p_x de sa quantité de mouvement.

incertitude sur la position × incertitude sur la quantité de mouvement ≥ ħ			ML^2T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar$	Δx	m	incertitude sur la position
	Δp_x	kg m/s	incertitude sur la quantité de mouvement
	$\hbar(= h/(2\pi))$	Js	constante de Planck

En physique subatomique, tout processus de mesure influence inmanquablement la grandeur mesurée. La sonde de mesure (onde ou particule incidente) influence l'objet à mesurer (particule). Si la sonde pour mesurer la position d'une particule est, par exemple, un photon, celui-ci va modifier la quantité de mouvement de la particule lorsqu'il touchera la particule (effet Compton). Il ne faut pas interpréter le terme "incertitude" au sens classique d'une limitation de la précision d'une mesure, mais comme un principe ; la notion de localisation précise d'une particule n'a pas de sens en physique subatomique.

- La composante p_x de la quantité de mouvement d'une particule et sa coordonnée x peuvent être déterminées simultanément sans incertitude.

La relation d'incertitude vaut pour d'autres grandeurs physiques conjuguées canoniques, par exemple l'énergie E et le temps t :

$$\Delta E \cdot \Delta t \approx h$$

25.3 Fonction d'onde et observable

1. Fonction d'onde et probabilité de présence

Fonction d'onde, $\psi(x, y, z, t)$: fonction complexe qui décrit complètement l'état d'une particule. Elle constitue une représentation mathématique et ne peut pas être déterminée expérimentalement. Néanmoins, certains de ses paramètres sont accessibles à l'expérience.

- La fonction d'onde contient toutes les informations quant aux résultats de mesure des grandeurs physiques d'un système quantique.

Densité de probabilité de présence : la probabilité $\mathrm{d}w(x, y, z, t)$ d'une particule de se trouver à l'instant t à la position $\vec{r} = (x, y, z)$ de l'élément de volume $\mathrm{d}V$ est donnée par le carré de la fonction d'onde :

Densité de la probabilité de présence = |fonction d'onde|²			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\mathrm{d}w(x, y, z, t) = \lvert\psi(x, y, z, t)\rvert^2 \, \mathrm{d}V$	w	1	densité de la probabilité de présence
	ψ	$\mathrm{m}^{-3/2}$	fonction d'onde
	$\mathrm{d}V$	m^3	élément de volume

- La fonction d'onde a la signification d'une amplitude de probabilité.

Normalisation de la fonction d'onde : une particule a la probabilité 1 (certitude) de se trouver quelque part dans l'espace. Par conséquent, l'intégrale de la densité de probabilité de présence sur tout l'espace doit être égale à 1.

$$\int \lvert\psi(x, y, z, t)\rvert^2 \, \mathrm{d}V = 1$$

- La fonction d'onde doit être normalisable. On dit que la fonction d'onde doit être de **carré sommable**.

2. Fonction d'onde d'une particule libre

Particule libre : particule non liée, décrite par une onde plane harmonique :

Fonction d'onde d'une particule libre			$\mathbf{L^{-3/2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\psi(\vec{r}, t) = a \cdot e^{j[(\vec{k}\cdot\vec{r}) - \omega t]}$	a	$\mathrm{m}^{-3/2}$	amplitude
$= a \cdot e^{\frac{j}{\hbar}[(\vec{p}\cdot\vec{r}) - E(p)t]}$	j	1	unité imaginaire
	ω	$\mathrm{rad\,s^{-1}}$	pulsation
	t	s	temps
	$\vec{k}$	m^{-1}	vecteur d'onde
	$\vec{r}$	m	vecteur position

3. Paquet d'ondes

Superposition de plusieurs ondes de fréquences voisines. Pour une particule, animée d'un mouvement à une dimension dans la direction x, le paquet d'ondes correspondant (Fig. 25.2) a la forme :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \, e^{j[kx - \omega(k)t]} \, \mathrm{d}k$$

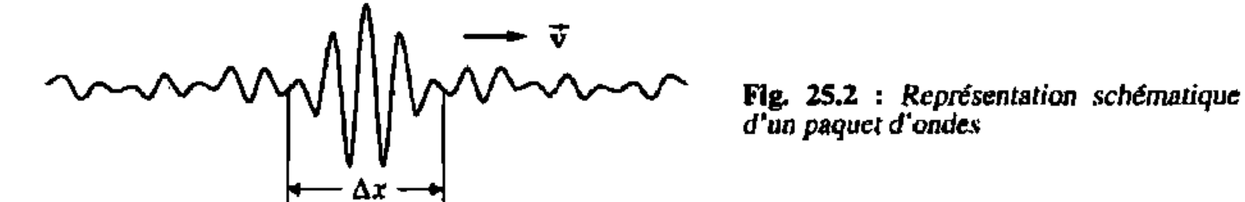


Fig. 25.2 : *Représentation schématique d'un paquet d'ondes*

La fonction d'amplitudes $f(k)$ détermine la distribution des poids des ondes planes de différentes fréquences. La probabilité de présence de la particule n'est différente de zéro que dans un domaine réduit de l'espace : la particule est "localisée" dans ce domaine. Cependant, plus on veut réduire l'étendue de

ce domaine, plus il faut superposer d'ondes de fréquences différentes. Il en résulte un élargissement du spectre des quantités de mouvement. Plus la localisation de la particule devient précise, plus sa quantité de mouvement devient imprécise.

La fonction d'amplitude $f(k)$ détermine aussi l'incertitude de la localisation et de la quantité de mouvement au temps initial. Au cours du temps, le centre de gravité du paquet d'ondes se déplace avec la vitesse moyenne donnée par $f(k)$. La largeur du spectre des quantités de mouvement Δp se conserve, alors que l'incertitude de la localisation Δx augmente : le paquet d'ondes se dilue (Fig. 25.3).

4. Observable

O : toute grandeur physique susceptible d'être décelée ou mesurée par une expérience ou une mesure.

■ Énergie, position, quantité de mouvement, moment cinétique orbital, spin.

En mécanique quantique, on associe à chaque observable O d'un système un opérateur hermitique $\hat{O}$ agissant sur la fonction d'onde ψ qui décrit l'état du système possédant la propriété O.

● Le temps n'est pas un opérateur de la mécanique quantique, mais un paramètre de la fonction d'onde.

Lors du passage à la mécanique quantique, la structure de la grandeur physique classique est utilisée pour la construction de l'opérateur correspondant.

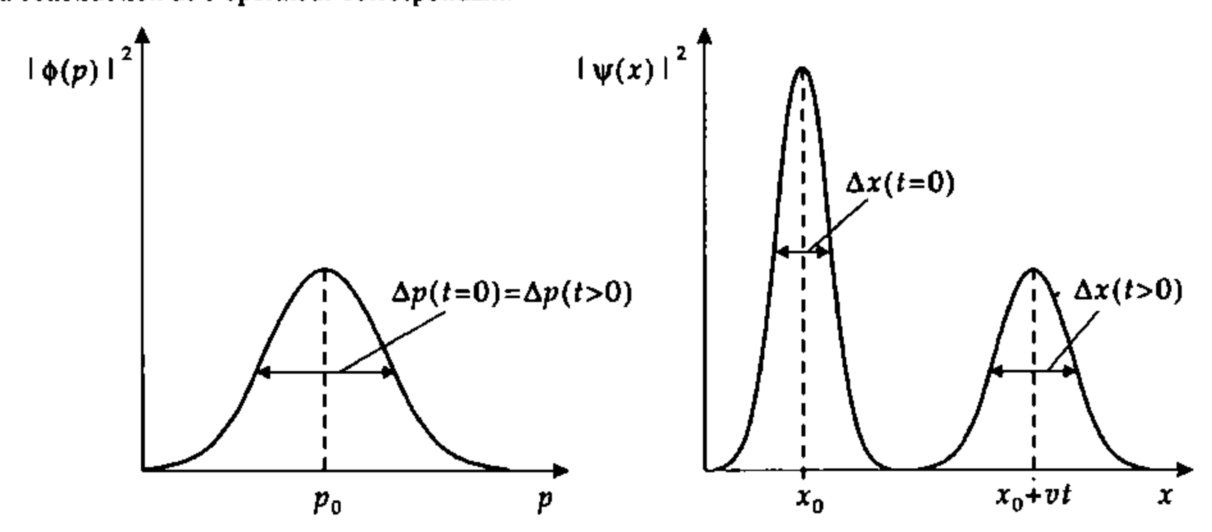


Fig. 25.3 : *Dilution du paquet d'ondes. $|\phi(p,t)|^2, |\psi(x,t)|^2$: densité de pobabilité de présence x et de quantité de mouvement p ; p_0, x_0 : valeurs moyennes de la quantité de mouvement et de la position à l'instant initial $t = 0$; v : vitesse moyenne (vitesse de groupe) ; $\Delta p(t), \Delta x(t)$: incertitudes de la quantité de mouvement et de la position à l'instant t*

■ Les composantes cartésiennes du moment cinétique de la mécanique classique, $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$

$l_x = yp_z - zp_y \quad l_y = zp_x - xp_z \quad l_z = xp_y - yp_x$

lors du passage à la mécanique quantique, sont remplacées par les opérateurs $\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z$, qui sont construits à partir des composantes de l'opérateur position $\hat{\vec{r}}$ et de celles de l'opérateur quantité de mouvement $\hat{\vec{p}}$:

$\hat{l}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \quad \hat{l}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \quad \hat{l}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$

En utilisant les représentations cartésiennes des composantes de ces opérateurs, on obtient :

$$\hat{l}_x = y\left(-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right) - z\left(-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \hat{l}_y = z\left(-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) - x\left(-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\hat{l}_z = x\left(-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right) - y\left(-\mathrm{j}\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

L'opérateur du moment cinétique est un opérateur vectoriel avec :
$\hat{\mathbf{l}} = (\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z) \quad \hat{\mathbf{l}}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2$

5. Aperçu des principales observables

Grandeur physique	Symbole	Opérateur
composante i de la position	$\hat{x}_i$	$x_i, \quad i = 1,2,3$
composante i de la qantité de mouvement	$\hat{p}_{x_i}$	$-\mathrm{j} \cdot \hbar \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3$
composante du moment cinétique :		
axe x	$\hat{l}_x$	$\mathrm{j} \cdot \hbar \left(\sin\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot(\theta) \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$
axe y	$\hat{l}_y$	$-\mathrm{j} \cdot \hbar \left(\cos\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot(\theta) \cdot \sin\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$
axe z	$\hat{l}_z$	$-\mathrm{j} \cdot \hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$
Carré du moment cinétique	$\hat{l}^2$	$-\hbar^2 \Delta_{\theta,\varphi}$
Énergie	$\hat{H}$	$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V$

Les coordonnées cartésiennes dans l'espace à trois dimensions sont désignées ici par les indices $i = 1, 2, 3$. Les composantes du moment cinétique sont données par rapport à un système de coordonnées sphériques.
Partie angulaire de l'opérateur de Laplace Δ en coordonnées sphériques :

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

■ L'application de l'opérateur position $\hat{x}$ à la fonction d'onde ψ signifie que l'on multiplie la fonction d'onde avec la coordonnée x. L'application de l'opérateur quantité de mouvement $\hat{p}_x$ à la fonction d'onde ψ signifie que l'on effectue la dérivation partielle de la fonction d'onde par rapport à x et que l'on multiplie le résultat par $-\mathrm{j}\hbar$.

6. Équation aux valeurs propres

Équation différentielle ou intégrale dont les solutions, satisfaisant aux conditions aux limites imposées, existent seulement pour certaines valeurs, dite **valeurs propres**, d'un paramètre A. Les solutions correspondantes sont les fonctions propres.

7. Fonctions propres

Solutions ψ_n de l'équation $\hat{O}\psi = A\psi$, où $\hat{O}$ est un opérateur linéaire. Une fonction propre peut être considérée comme un vecteur dans un espace abstrait et se nomme alors **vecteur propre**. $\hat{O}$ est l'opérateur correspondant à une observable O et A un nombre qui mesure la valeur de l'observable O. C'est l'une des valeurs propres. ψ_n est une des fonctions propres et l'état qu'elle décrit est un état propre du système.

■ Si on a $\hat{H}\psi_1 = E_1\psi_1$, E_1 sera l'énergie de l'état propre concerné.

Une **valeur propre** a_n peut faire partie d'un spectre de valeurs propres (spectre en énergie par exemple). L'indice n distingue alors les différentes fonctions propres (états) et les valeurs propres correspondantes.

$$\hat{O}\,\psi_n = a_n\,\psi_n\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

■ Le mouvement à une dimension (mouvement rectiligne) suivant l'axe x d'une particule libre de quantité de mouvement p est décrit par une onde plane. La partie spatiale de sa fonction d'onde est :
$\varphi(x) = e^{jkx} = e^{j\frac{px}{\hbar}}$
L'application de l'opérateur quantité de mouvement $\hat{p}_x$ à la fonction d'onde φ donne :
$$\hat{p}_x\,\varphi(x) = \frac{\hbar}{j}\,\frac{\partial}{\partial x}\,\varphi(x) = p\,\varphi(x)$$
L'onde plane est une fonction propre de l'opérateur quantité de mouvement, avec la valeur propre p.

▷ L'onde plane est aussi fonction propre de l'opérateur énergie (hamiltonien) $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m)$ avec la valeur propre $E = p^2/(2m)$.

Dégénérescence : à une valeur propre a_n peuvent correspondre plusieurs fonctions propres $\psi_{n1}, \psi_{n2}, \ldots$ (une valeur d'une grandeur physique peut correspondre à des états différents, par exemple, plusieurs états peuvent avoir la même énergie) :

$$\hat{O}\,\psi_{n1} = a_n\,\psi_{n1}\,, \quad \ldots \quad, \hat{O}\,\psi_{nN} = a_n\,\psi_{nN}\,, \quad \text{dégénérescence d'ordre N}$$

Parité π d'une fonction d'onde : caractérise le comportement de la fonction d'onde $\psi(\vec{r})$ par changement du signe des coordonnées de position (symétrie par rapport à l'origine), $\vec{r} \longrightarrow -\vec{r}$ (Fig. 25.4) :

$$\psi(-\vec{r}) = +\psi(\vec{r})\,, \quad \pi = +1\,, \quad \text{parité paire (ou positive)},$$
$$\psi(-\vec{r}) = -\psi(\vec{r})\,, \quad \pi = -1\,, \quad \text{parité impaire (ou négative)}.$$

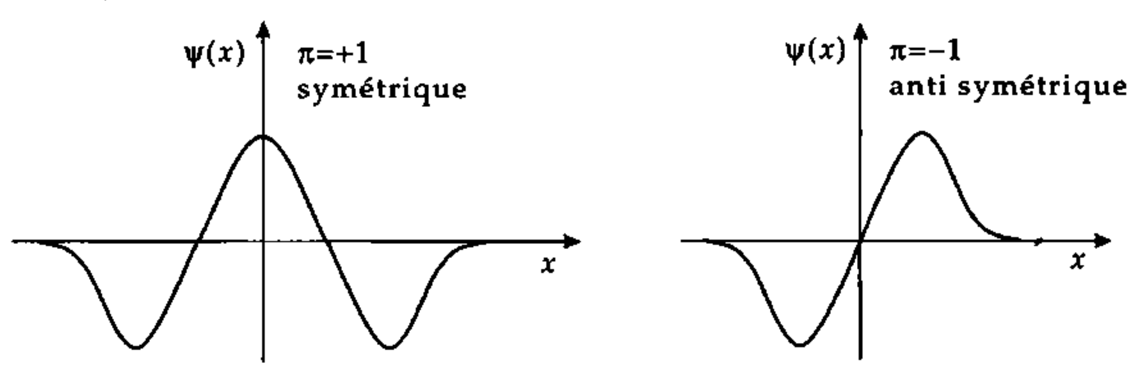


Fig. 25.4 : *Parité d'une fonction d'onde* $\psi(x)$. $\pi = +1$ *: parité paire, fonction symétrique,* $\pi = -1$ *: parité impaire, fonction antisymétrique*

8. Fonction propre simultanée

une fonction ψ est en même temps fonction propre pour un ensemble d'opérateurs $\hat{O}_1, \cdots, \hat{O}_k$:

$$\hat{O}_1\,\psi = a_1\,\psi\,, \qquad , \hat{O}_k\,\psi = a_k\,\psi$$

■ Les fonctions propres simultanées des opérateurs $\hat{\vec{l}}^2, \hat{l}_z$ sont les fonctions sphériques (harmoniques sphériques) $Y_l^m(\theta,\varphi)$:
$$\hat{\vec{l}}^2\,Y_l^m(\theta,\varphi) = \hbar^2\,l(l+1)\,Y_l^m(\theta,\varphi)$$
$$\hat{l}_z\,Y_l^m(\theta,\varphi) = \hbar\,m\,Y_l^m(\theta,\varphi)$$
Les nombres quantiques possibles pour le moment cinétique orbital sont $l = 0, 1, 2, \ldots$. Dans une représentation vectorielle, ils définissent le module du moment cinétique $|\vec{l}| = \hbar\sqrt{l(l+1)}$. À chaque valeur de l correspondent $2l + 1$ valeurs du **nombre quantique magnétique** m, qui déterminent les orientations possibles (projections) du vecteur moment cinétique par rapport à l'axe z (axe de quantification) (**quantification spatiale, directionnelle,** $m = -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots\, l-1, l$ (Fig. 25.5)).

L'angle α entre l'axe de quantification et le vecteur moment cinétique est donné par :
$\cos\alpha = m/\sqrt{l(l+1)}$

▷ Il n'existe pas de fonction qui soit en plus fonction propre de l'opérateur d'autres composantes du moment cinétique l_x ou l_y. Dans un état de moment cinétique caractérisé par les nombres quantiques l, m, ces dernières composantes n'ont pas de valeurs définies ; leur valeur moyenne s'annule.

■ nombres quantiques orbitaux : $l = 2$, $m = -2, -1, 0, 1, 2$.

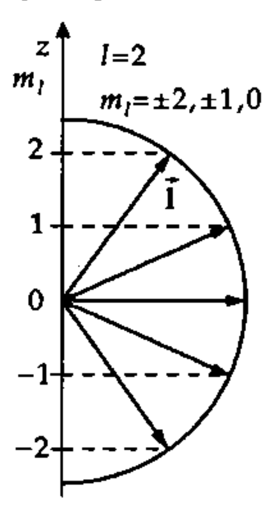


Fig. 25.5 : *Représentation vectorielle du moment cinétique $\vec{l}$. Quantification spatiale pour $l = 2$*

9. Valeurs propres d'opérateurs et leur signification

- Les valeurs propres d'un opérateur, qui représente une observable donnée, sont réelles :
  $a_n^* = a_n$
- Les valeurs propres d'un opérateur $\hat{O}$, sont les valeurs mesurables possibles de l'observable O. Après la mesure de l'observable O, qui a donné le résultat a_n, le système se trouve dans l'état propre ψ_n :
  État $\psi \xrightarrow{\text{mesure } O}$ résultat a_n, état ψ_n
- Une fonction d'onde quelconque ψ peut être développée selon l'ensemble complet des fonctions propres normées ψ_n de l'opérateur $\hat{O}$:
  $\psi = \sum_n c_n \psi_n$
  La normalisation de la fonction d'onde ψ requiert que :
  $\sum_n |c_n|^2 = 1$
  Les coefficients du développement c_n donnent la probabilité $|c_n|^2$, de trouver la valeur a_n, lors de la mesure de l'observable O d'un système dans l'état ψ.

Les mesures répétées de l'observable O d'un système dans l'état propre ψ_n donnent toujours la même valeur a_n, sans dispersion des résultats de mesure. Les mesures répétées de l'observable O d'un système dans un état quelconque ψ, qui n'est pas une fonction propre de $\hat{O}$, donnent des résultats qui sont dispersés autour de la valeur moyenne(valeur espérée, attendue *expectation value*).

10. Valeurs moyennes d'observables

Valeur espérée, $\overline{O}$, de l'observable O dans l'état ψ : valeur moyenne des mesures de l'observable O d'un système dans l'état ψ :

$$\overline{O} = \int \psi^* \hat{O} \psi \,\mathrm{d}V = \sum_n |c_n|^2 a_n$$

La valeur espérée est en général dépendante du temps.

■ Pour une particule en mouvement suivant l'axe x, les résultats des mesures de position peuvent être comprises entre $[-\infty, +\infty]$, c'est à dire que l'opérateur de position $\hat{x}$ possède un spectre continu de valeurs propres. Si la particule se trouve dans l'état ψ, le poids $\mathrm{d}w(x,t)$ des résultats de mesure est donné par la densité de probabilité de présence dans l'élément $\mathrm{d}x$ au point x :
$\mathrm{d}w(x,t) = |\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x$
On obtient la valeur espérée (valeur moyenne) de la position :
$$\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}w(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x,t)^*\,x\,\psi(x,t)\,\mathrm{d}x$$

■ La valeur moyenne de la composante p_x de la quantité de mouvement dans l'état ψ est :
$$\overline{p}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \cdot \frac{\hbar}{\mathrm{j}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi$$

11. Représentation matricielle d'opérateurs

La représentation matricielle de l'opérateur $\hat{O}$, dans la base des fonctions φ_i, $i = 1, \ldots, N$ est une matrice dont les éléments sont :

$$O_{ik} = \int \varphi_i^*\,\hat{O}\,\varphi_k\,\mathrm{d}V\,, \quad i,k = 1,\ldots,N$$

● Les observables, en mécanique quantique, sont représentées par des **matrices hermitiques** :
$O_{ik}^* = O_{ki}$

La matrice carrée est diagonale si la base est constituée des fonctions propres orthonormées ψ_n :

$$O_{nm} = \int \psi_n^*\,\hat{O}\,\psi_m\,\mathrm{d}V = a_m \int \psi_n^*\,\psi_m\,\mathrm{d}V = a_m\,\delta_{nm}$$

Les éléments diagonaux sont alors les valeurs propres a_m, c'est à dire les résultats de mesure de l'observable.

Si deux observables O_1, O_2, dont les opérateurs possèdent les fonctions propres $\psi_n^{(1)}, \psi_m^{(2)}$, sont mesurées successivement, l'état produit par la première mesure est généralement influencé par la seconde mesure (le système se trouve dans un état différent) :

$$\text{État}\,\psi \xrightarrow{\text{mesure}\,O_1} a_n, \psi_n^{(1)} \xrightarrow{\text{mesure}\,O_2} b_m, \psi_m^{(2)}$$

12. Commutateurs d'opérateurs

On appelle **commutateur**, $\hat{C}$, des opérateurs $\hat{O}_1$ et $\hat{O}_2$, l'opérateur défini par :

$$\hat{C} = [\hat{O}_1, \hat{O}_2] = \hat{O}_1\,\hat{O}_2 - \hat{O}_2\,\hat{O}_1$$

Deux opérateurs sont interchangeables, si leur commutateur s'annule :

$$\hat{C} = [\hat{O}_1, \hat{O}_2] = 0$$

Alors, on a :

$$\hat{O}_1\,(\hat{O}_2\,\psi) = \hat{O}_2\,(\hat{O}_1\,\psi)$$

Des opérateurs qui commutent $\hat{O}_1, \hat{O}_2$ ont un système de fonctions propres simultanées ψ_{nm} de valers propres a_n, b_m :

$$\hat{O}_1\,\psi_{nm} = a_n\,\psi_{nm}\,, \quad \hat{O}_2\,\psi_{nm} = b_m\,\psi_{nm}$$

- Les opérateurs qui commutent représentent des observables mesurables simultanément :

  État $\psi \overset{\text{mesure } O_1}{\longrightarrow} \{a_n, \psi_{nm}\} \overset{\text{mesure } O_2}{\longrightarrow} \{b_n, \psi_{nm}\}$

  L'état n produit par la mesure de O_1 n'est pas perturbé par la mesure de O_2 ; la mesure de O_2 spécifie seulement un état m.

a) Relations de commutation des opérateurs de position et de quantité de mouvement : Relations entre les produits des composantes des opérateurs de position et de quantité de mouvement ($i = 1, 2, 3$) :

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_k] = \hat{x}_i \cdot \hat{p}_k - \hat{p}_k \cdot \hat{x}_i = j \cdot \hbar \cdot \delta_{ik} \quad \text{avec} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1: & k = i \\ 0: & k \neq i \end{cases}$$

Ces relations de commutation établissent le principe d'incertitude de Heisenberg pour la position et la quantité de mouvement (voir page 828).

b) Relations de commutation pour l'opérateur de moment cinétique :

$$\begin{aligned} [\hat{l}_x, \hat{l}_y] &= \hat{l}_x \cdot \hat{l}_y - \hat{l}_y \cdot \hat{l}_x = \mathrm{j}\,\hbar\,\hat{l}_z \\ [\hat{l}_y, \hat{l}_z] &= \hat{l}_y \cdot \hat{l}_z - \hat{l}_z \cdot \hat{l}_y = \mathrm{j}\,\hbar\,\hat{l}_x \\ [\hat{l}_z, \hat{l}_x] &= \hat{l}_z \cdot \hat{l}_x - \hat{l}_x \cdot \hat{l}_z = \mathrm{j}\,\hbar\,\hat{l}_y \end{aligned}$$

L'opérateur du carré du moment cinétique orbital commute avec les opérateurs de toutes ses composantes,

$$[\hat{\mathbf{l}}^2, \hat{l}_x] = [\hat{\mathbf{l}}^2, \hat{l}_y] = [\hat{\mathbf{l}}^2, \hat{l}_z] = 0$$

▷ Tout ensemble d'opérateurs dont les composantes satisfont de telles relations de commutation, représente un moment cinétique.

13. Opérateur de Hamilton et évolution temporelle

Opérateur de Hamilton, ou **hamiltonien** $\hat{H}$: opérateur de l'énergie totale d'un système quantique. Il détermine l'évolution en temps de la fonction d'état ψ :

■ Particule libre de masse m : $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$

Particule de masse m dans un potentiel V : $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}})$

Particule de masse m dans un potentiel harmonique à une dimension : $\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\hat{x}^2$

Électron de l'atome d'Hydrogène : $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} - \dfrac{e^2}{r}$

Opérateur de l'évolution temporelle, $\hat{U}(t, t_0)$: décrit l'évolution au cours du temps d'un état ψ, de l'instant t_0 à l'instant t :

$$\psi(t) = \hat{U}(t, t_0)\,\psi(t_0) \qquad \hat{U}(t_0, t_0) = 1 \qquad \hat{U}(t, t_0) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{j}}{\hbar}H(t - t_0)}$$

▷ L'évolution temporelle d'une variable dynamique D est généralement exprimée à l'aide du **crochet de Poisson** de D avec l'hamiltonien.

14. Représentations de Schrödinger et de Heisenberg

Représentation de Schrödinger : formalisme de la mécanique quantique utilisant des opérateurs $\hat{O}^S$ indépendants du temps et des vecteurs d'états ψ^S dépendants du temps. Autrement dit, pour décrire un

système donné à un autre instant, on peut utiliser un nouveau vecteur d'état, tout en conservant le même opérateur :

$$\frac{\partial \hat{O}^{S}}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \psi^{S}(t)}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar} H \psi^{S}(t) \quad \textbf{équation de Schrödinger}$$

Représentation de Heisenberg : formalisme opposé, mais équivalent, à celui de Schrödinger : utilise des opérateurs $\hat{O}^{H}$ dépendants du temps et des vecteurs d'état ψ^{H} indépendants du temps,

$$\frac{\partial \psi^{H}}{\partial t} = 0 \quad \frac{d\hat{O}^{H}(t)}{dt} = +\frac{j}{\hbar}[H, \hat{O}^{H}(t)] \quad \textbf{équation de Heisenberg}.$$

Relation entre les deux représentations (descriptions) : égalité des grandeurs à l'instant $t = t_0$:

$$\psi^{S}(t) = \hat{U}(t, t_0)\, \psi^{H} \quad \hat{O}^{H}(t) = \hat{U}^{\dagger}(t, t_0)\, \hat{O}^{S}\, \hat{U}(t, t_0)$$

- Les descriptions de Schrödinger et de Heisenberg sont des formulations équivalentes en mécanique quantique. Elles livrent les mêmes prévisions physiques (valeurs moyennes (espérées) d'observables).

25.4 Équation de Schrödinger

- Les ondes électromagnétiques dans le vide (vitese de la lumière c) et les ondes de matière pour des particules libres sont soumises à des **relations de dispersion** différentes $\omega = \omega(k)$.

  Ondes électromagnétiques : $\omega(k) = c \cdot k$

  Ondes de matière : $\omega(k) = \frac{m_0 c^2}{\hbar} + \frac{\hbar k^2}{2m_0}$

  À ces relations de dispersion différentes, correspondent des équations différentielles différentes pour la propagation de ces ondes.

1. Équation différentielle de la fonction d'onde (équation de Schrödinger)

Équation de Schrödinger : équation différentielle de la fonction d'onde, non relativiste, qui décrit le comportement de particules subatomiques, analogue des équations du mouvement de Newton d'un point matériel en mécanique classique. L'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles, linéaire et homogène, du premier ordre en temps et du deuxième ordre en position. Ses solutions sont des fonctions complexes.

L'équation de Schrödinger dépendante du temps d'une particule de masse m placée dans un potentiel $V(\vec{r})$ s'écrit :

Équation de Schrödinger dépendante du temps			$ML^{1/2}T^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$-\frac{\hbar}{j}\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \hat{H}\,\psi(\vec{r},t)$	ψ	$m^{-3/2}$	fonction d'onde
$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{\vec{r}})$	j	1	unité imaginaire
$-\frac{\hbar}{j}\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r})\psi(\vec{r},t)$	m	kg	masse de la particule
$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	Δ	m^{-2}	Laplacien
	$V(\vec{r})$	J	potentiel
	$\hbar$	J · s	constante de Planck/2π

● L'hamiltonien d'un système quantique détermine son évolution temporelle.

▷ Il faut distinguer l'évolution temporelle d'un état, donnée par l'équation de Schrödinger dépendante du temps, du changement d'état entraîné par l'influence d'un dispositif de mesure. À la suite de la mesure d'une observable $\hat{O}$, qui donne le résultat a_n, le système se trouve dans un état propre ψ_n.

■ Une particule libre est décrite par une onde plane. En reportant cette fonction d'onde dans l'équation de Schrödinger, la dérivation par rapport au temps donne le terme hf et le Laplacien donne $\frac{h^2k^2}{8\pi^2 m}$.
Le facteur commun $ae^{j[2\pi ft-(\vec{k}\cdot\vec{r})]}$ de l'équation de Schrödinger se simplifie :

$$\begin{aligned} hf &= \frac{h^2k^2}{8\pi^2 m} + V(r) \\ &= \frac{p^2}{2m} + V(r) \end{aligned}$$

Ce qui est l'énergie, si hf est l'énergie d'un quantum de fréquence f.

2. Normalisation de la fonction d'onde

Correspond au fait que la probabilité de trouver une particule **quelque part** dans l'espace doit être égale à 1. Pour tout instant t, une particule donnée ne peut se trouver qu'une seule fois dans l'espace :

$\int$ **|fonctiond'onde|^2 × élément de volume ≡ 1**			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$\int_V \mathrm{d}\,w(x,y,z,t) = \int_V \|\psi(x,y,z,t)\|^2\,\mathrm{d}V \equiv 1$	ψ	$m^{-3/2}$	fonction d'onde
	dV	m^3	élément de volume

● Une solution de l'équation de Schrödinger ne représente une amplitude de probabilité que si elle est normalisable.

▷ L'onde plane n'est pas normalisable. La fonction d'onde normalisée d'une particule libre est un paquet d'ondes.

3. États stationnaires

État stationnaire : état pour lequel la probabilité de présence est indépendante du temps. La fonction d'onde d'un état stationnaire est :

$$\psi(\vec{\mathbf{r}},t) = e^{\frac{j}{\hbar}Et} \cdot \varphi(\vec{\mathbf{r}}) \qquad \hat{H}\,\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = E\,\varphi(\vec{\mathbf{r}}) \qquad |\psi(\vec{\mathbf{r}},t)|^2 = |\varphi(\vec{\mathbf{r}})|^2$$

Équation de Schrödinger stationnaire, ou **équation de Schrödinger indépendante du temps** : équation du mouvement d'une particule dont la probabilité de présence en un point ne dépend pas du temps :

$$\hat{H}\varphi = E\varphi \qquad \frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\varphi + (E - V(\vec{\mathbf{r}}))\varphi = 0$$

La condition de normalisation de $\psi(\vec{\mathbf{r}},t)$ est :

$$\int_0^\infty |\varphi(\vec{\mathbf{r}})|^2\,\mathrm{d}V = 1$$

Fonctions propres de l'énergie : les solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire (indépendante du temps). Ces solutions n'existent que pour certaines **valeurs propres** de l'énergie E.

Valeurs propres de l'énergie : les valeurs de l'énergie pour lesquelles existent des solutions de l'équation de Schrödinger indépendante du temps.

Spectre d'énergie d'une particule (ou d'un système) : l'ensemble de toutes les valeurs propres de l'énergie E.

Si le potentiel $V(r)$ est une fonction monotone croissante et que $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$, alors les valeurs de l'énergie, dans le domaine $E < 0$, forment un spectre **discret**. Pour $E \geq 0$ les valeurs de l'énergie forment un **continuum**.

25.4.1 Potentiels constants par parties

Potentiel constant par parties : potentiel à une dimension de valeur constante sur un domaine limité, interrompu par des sauts de potentiel finis.

Solution générale de l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour une particule de masse m et d'énergie E, placée dans un potentiel constant V :

$V = 0$ $\qquad \varphi(x) = A \cdot e^{\pm j k_1 x} \qquad k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E} = \frac{p_1}{m}$

onde plane se propageant vers la droite ou la gauche,
nombre d'onde k_1, quantité de mouvement p_1.

$V = V_0 > 0$ $\qquad E > V_0$:

$$\varphi(x) = A \cdot e^{+j k_2 x} + B \cdot e^{-j k_2 x} \qquad k_2 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)} = \frac{p_2}{m}$$

onde plane d'amplitude A se propageant vers la droite et vers la gauche avec l'amplitude B, nombre d'onde k_2, quantité de mouvement p_2.

$E < V_0$:

$$\varphi(x) = A \cdot e^{+k_3 x} + B \cdot e^{-k_3 x} \qquad k_3 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)}$$

exponentielle croissante ou décroissante, pas de mouvement possible en mécanique classique

▷ Pour des raisons de normalisation, il faut exclure les fonctions d'onde dont la valeur asymptotique ($x \to \pm\infty$) augmente exponentiellement.

Au voisinage d'une discontinuité (saut) de potentiel, la particule a des probabilités respectives de réflexion et de transmission, même si son énergie totale est plus grande que le saut de potentiel.

Coefficient de transmission, T : rapport de l'intensité (courant de particule) de l'onde transmise à celle de l'onde incidente.

Coefficient de réflexion, R : rapport de l'intensité de l'onde éfléchie à celle de l'onde incidente.

Le nombre de particules est conservé, par conséquent : $R = 1 - T$.

1. Saut de potentiel

Discontinuité de l'énergie potentielle d'une particule en un point de sa trajectoire, décrite par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ V_0 > 0 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

Énergie totale $E < V_0$: $\quad R = 1,\ T = 0$.

Énergie totale $E > V_0$: $\quad R = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2, \quad T = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2}$.

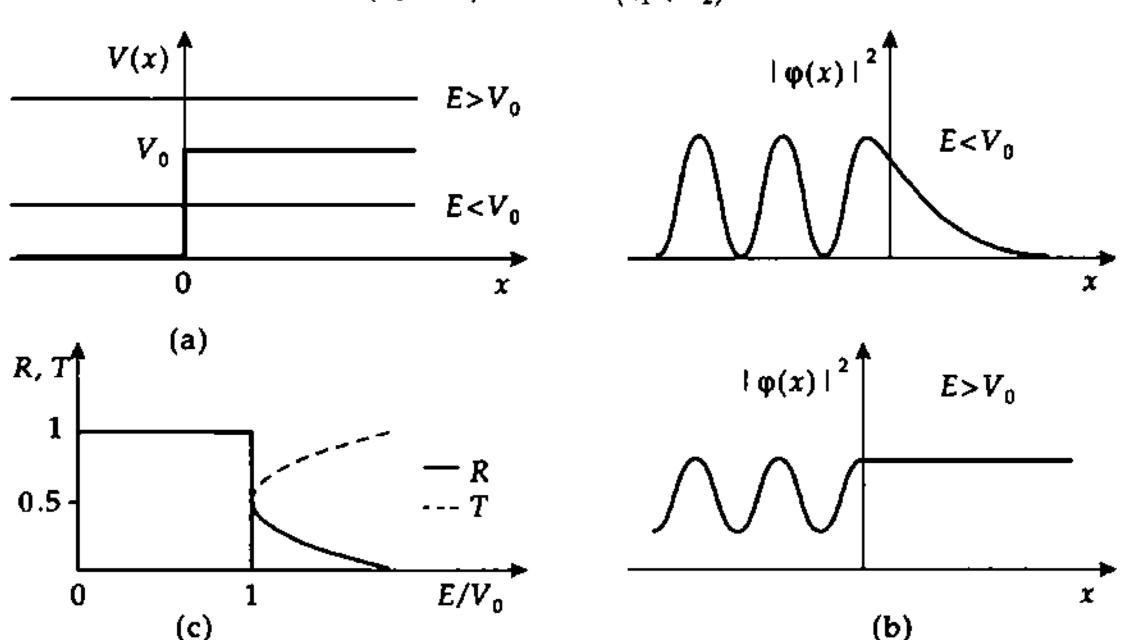


Fig. 25.6 : *Puits de potentiel. (a) : forme du potentiel, (b) : densité de la probabilité de présence* $|\varphi(x)|^2$ *pour* $E < V_0$ *et* $E > V_0$, *(c) : coefficient de réflexion* R *et coefficient de transmission* T *en fonction du rapport* E/V_0

▷ D'après la mécanique classique, il ne peut y avoir de mouvement pour le cas $E < V_0$ pour $x > 0$, puisque l'énergie cinétique serait alors négative. En mécanique quantique, la probabilité de présence de la particule dans ce domaine est cependant différente de zéro, car sa localisation au point de rebroussement classique $x = 0$ entraîne une incertitude sur la quantité de mouvement qui conduit à des énergies qui peuvent être supérieures au saut de potentiel. Selon la relation d'incertitude de l'énergie ΔE et du temps Δt, l'incertitude ΔE de l'énergie n'existe que pour une durée limitée Δt, de sorte qu'une particule venant de la gauche ne peut pas être observée à $x \to +\infty$. La densité de probabilité de présence de la particule décroît exponentiellement dans le domaine interdit par la mécanique classique ; la particule est réfléchie avec certitude.

2. Barrière de potentiel

Barrière ou mur de potentiel : succession de deux sauts de potentiel de signes contraires rencontrés par une particule de masse m en mouvement rectiligne. Elle peut être définie par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| > a \\ V_0 > 0 & \text{pour } |x| \leq a \end{cases}$$

$$E < V_0 : \quad T = \left(1 + \frac{{V_0}^2}{{V_0}^2 - (2E - V_0)^2} \sinh^2(2ak_3)\right)^{-1}$$

$$E > V_0 : \quad T = \left(1 + \frac{{V_0}^2}{{V_0}^2 - (2E - V_0)^2} \sin^2(2ak_2)\right)^{-1}$$

Coefficient de réflexion : $R = 1 - T$

Approximation pour $E < V_0$ et $2a \cdot k_3 \gg 1$:

$$T \approx \left(\frac{2k_1k_3}{k_1^2 + k_3^2}\right)^2 \mathrm{e}^{-4ak_3} \approx \mathrm{e}^{-4ak_3} \quad a \cdot k_3 \gg 1$$

▹ Un saut de potentiel peut être considéré comme une barrière de potentiel de largeur infinie. Dans ce cas, il ne peut y avoir d'effet tunnel (voir ci-dessous) ($T = 0,\ R = 1$).

● Dans le cas $E < V_0$, le coefficient de transmission augmente de façon monotone lorsque l'énergie incidente E augmente, le coefficient de réflexion diminue proportionnellement.
Pour la même énergie $E < V_0$, le coefficient de transmission augmente lorsque la largeur $2a$ de la barrière de potentiel diminue.

● Dans le cas $E > V_0$, il n'y a pas de réflexion ($R = 0,\ T = 1$) si l'énergie E correspond à une **énergie de résonance**, pour laquelle :
$2ak_2 = n\pi\,, \quad n = 1, 2, \ldots$.

■ Lors de la radioactivité α de noyaux lourds, des particules α sont émises avec une énergie cinétique bien inférieure à la hauteur de la barrière de potentiel due à la superposition du potentiel coulombien répulsif du potentiel attractif nucléaire. Pour le noyau ^{212}Po, la hauteur de la barrière de potentiel est d'environ 30 MeV, l'énergie cinétique des particules α émises est de 8,9 MeV. Cette valeur, de même que la durée de vie du noyau radioactif, ne peuvent être expliquées que par l'effet tunnel.

Effet tunnel : explique le passage d'une particule d'énergie $E < V_0$ à travers une barrière de potentiel de hauteur V_0 et de largeur $2a$. Un tel processus est interdit en mécanique classique. En mécanique quantique, lorsque la particule se trouve près du point de rebroussement classique, la fonction d'onde contient des termes de quantité de mouvement qui correspondent à des énergies supérieures à la hauteur de la barrière de potentiel. La relation d'incertitude entre l'énergie ΔE et le temps, permet alors à la particule, pour un intervalle de temps Δt limité, de surmonter la barrière de largeur finie (Fig. 25.7).
L'effet tunnel peut aussi s'interpréter par le phénomène d'onde évanescente, si l'amplitude de l'onde au deuxième saut de potentiel de la barrière a une valeur finie non nulle et que le coefficient de réflexion est différent de 1.

Microscope à effet tunnel : une pointe métallique extrêmement fine se déplace à quelques nanomètres au-dessus de l'échantillon. Le champ électrique intense arrache des électrons par effet d'émission de champ et le courant électrique devient mesurable. À l'aide d'un cristal piézoélectrique, la distance pointe-échantillon

est modulée de façon à maintenir le courant d'électrons constants. La tension de régulation du cristal piézoélectrique fournit l'image du profil de la surface de l'échantillon.

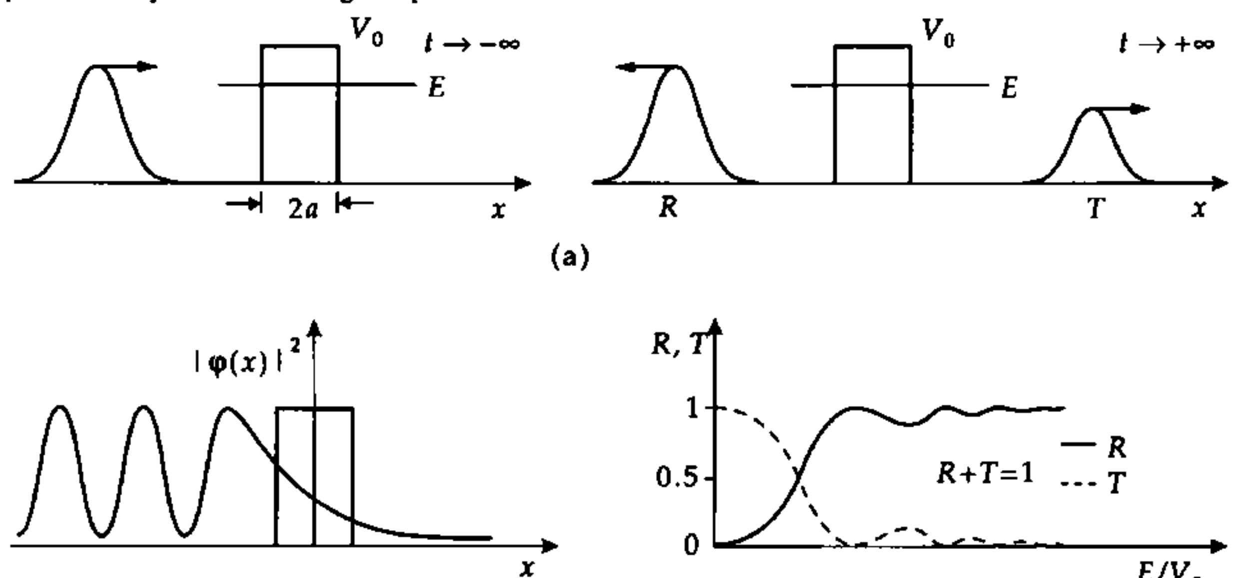


Fig. 25.7 : *Effet tunnel. (a) : séparation du paquet d'onde incident en une partie réfléchie et une partie transmise (solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps), (b) : densité de la probabilité de présence $|\varphi(x)|^2$ (solution stationnaire de l'équation de Schrödinger), (c) : coefficient de transmission T et de réflexion R en fonction du rapport E/V_0*

3. Puits de potentiel

Région de l'espace où le potentiel V d'une force attractive fonction des coordonnées d'espace possède un minimum. Le potentiel est dit potentiel carré s'il est défini par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| \le a \\ V_0 > 0 & \text{pour } |x| \le a \end{cases}$$

$E < V_0$: spectre discret, états liés.
$E > V_0$: spectre continu, états diffus, réflexion et transmission.

Pour les états liés, on doit avoir :

$$K^2 - k^2 + 2kK\ \cot(2ka) = 0 \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E \quad K^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$$

▷ L'équation qui détermine les valeurs propres de l'énergie peut être résolue graphiquement.

- Le nombre et la position des niveaux d'énergie liés dépendent de V_0a^2. Pour $V_0a^2 < \pi^2\hbar^2/(8m)$ il n'y a qu'un seul état lié.
- La distance entre niveaux d'énergie voisins augmente avec l'énergie d'excitation.
- Une particule liée a une certaine probabilité de se trouver même en dehors du domaine défini par les points de rebroussement du mouvement classique.
- La fonction d'onde de l'état fondamental est de parité positive (paire).
- Dans le spectre, des fonctions d'énergie successives possèdent diverses parités.

4. Puits de potentiel à murs infinis

Le potentiel est dit potentiel carré à murs infinis (particule encagée) s'il est défini par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad |x| \leq a/2 \\ \infty & \text{pour} \quad |x| > a/2 \end{cases}$$

- La fonction d'onde s'annule pour $|x| \geq a/2$. Elle satisfait la condition aux limites : $\varphi(-a/2) = \varphi(a/2) = 0$.
  À ces points, la fonction d'onde présente une discontinuité.
- Dans un potentiel carré à murs infinis, il n'existe que des états liés.
- La distance entre niveaux d'énergie voisins augmente avec l'énergie d'excitation.
- La fonction d'onde de l'état fondamental est de parité paire.

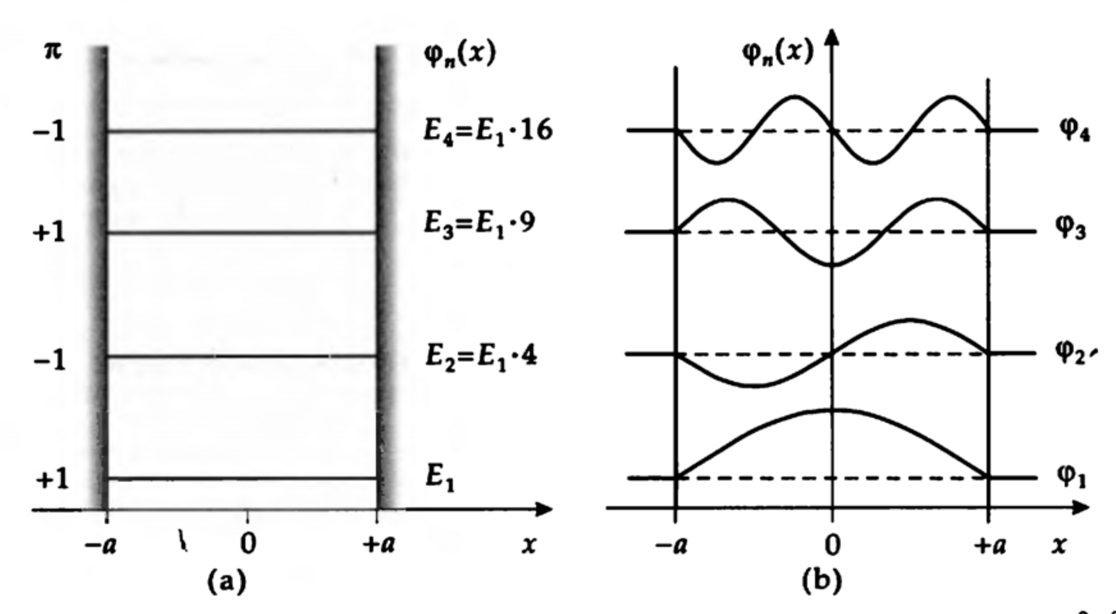


Fig. 25.8 : *Puits de potentiel à murs infinis. (a) : spectre des valeurs propres de l'énergie* $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \cdot n^2$, *$\pi$: parité des fonctions propres, (b) : fonctions propres* $\varphi_n(x)$

Valeurs propres de l'énergie :

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} n^2 \quad n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Énergie du niveau fondamental (énergie du zéro absolu, énergie résiduelle) :

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

Fonctions propres de parité paire (positive) :

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a} \quad n = 1, 3, 5, \ldots \qquad \pi = +1$$

Fonctions propres de parité impaire (négative) :

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \qquad n = 2, 4, 6, \ldots \qquad \pi = -1$$

25.4.2 Oscillateur harmonique

Oscillateur harmonique : particule de masse m, possédant une configuration d'équilibre stable vers laquelle elle est rappelée par une force proportionnelle à l'élongation. Elle effectue des oscillations de pulsations propres bien définies dans une ou plusieurs directions.

1. Équation de Schrödinger indépendante du temps

Oscillateur harmonique à une dimension de pulsation ω :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\varphi(x) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - \frac{m\omega^2}{2}x^2)\varphi(x) = 0$$

- Les énergies des différents états de l'oscillateur harmonique sont quantifiées :
  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots$
  $E_0 = \hbar\omega/2$ est l'énergie au zéro absolu ou **énergie résiduelle**.
- Les niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique sont équidistants :
  $\Delta E = E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$
- Une particule a une probabilité non nulle de se trouver en-dehors du domaine défini par les points de rebroussement du mouvement classique.
- La fonction d'onde du niveau fondamental est paire.

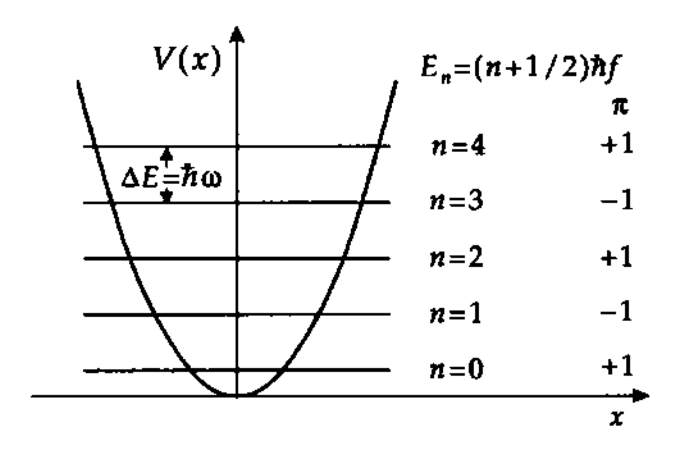


Fig. 25.9 : *Oscillateur harmonique. Spectre des valeurs propres de l'énergie,* $\Delta E = \hbar\omega$

2. Fonctions propres de l'oscillateur harmonique

Les fonctions propres de l'oscillateur harmonique sont données par :

$$\varphi_n(x) = (r_0)^{1/4}\sqrt{\frac{1}{2^n\, n!\sqrt{\pi}}}\, \mathrm{e}^{-r_0 x^2/2}\, H_n(\sqrt{r_0}x)$$

où $r_0 = \sqrt{m\omega/\hbar}$ est le **paramètre de l'oscillateur**, H_n sont les **polynômes d'Hermite** (Fig. 25.10) :

$$H_0(z) = 1 \quad H_1(z) = z \quad H_2(z) = 4z^2 - 2 \quad H_3(z) = 8z^3 - 12z \quad \ldots$$

- À cause de la relation d'incertitude de Heisenberg, la quantité de mouvement (et par conséquent l'énergie) d'une particule localisée près du minimum du potentiel est différente de zéro. Il existe un état fondamental de l'oscillateur harmonique qui ne correspond pas au minimum du potentiel.

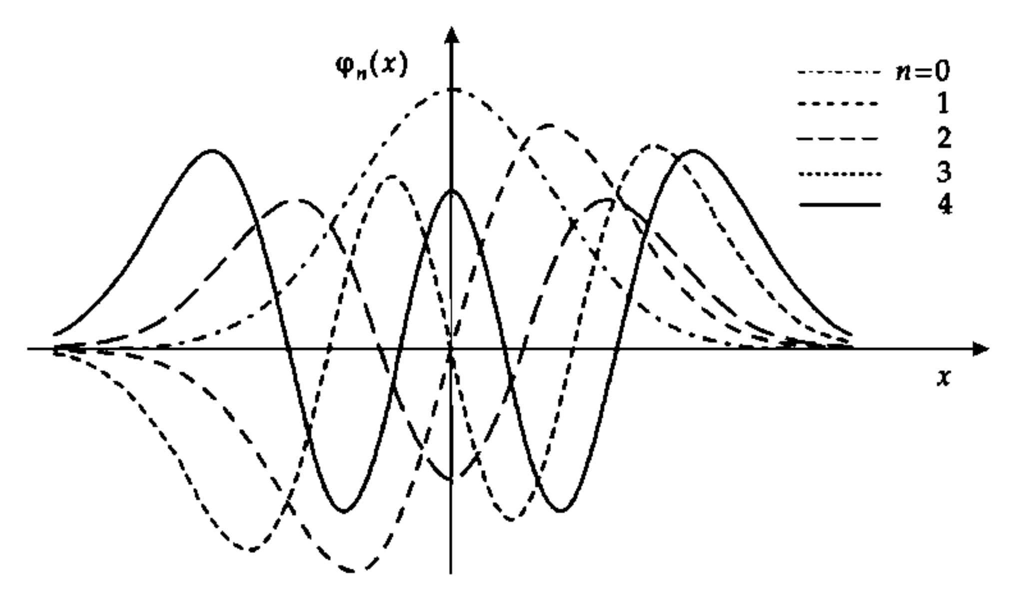


Fig. 25.10 : *Oscillateur harmonique : fonctions propres de l'énergie $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$*

Énergie résiduelle : état fondamental, niveau d'énergie le plus bas de l'oscillateur harmonique :

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

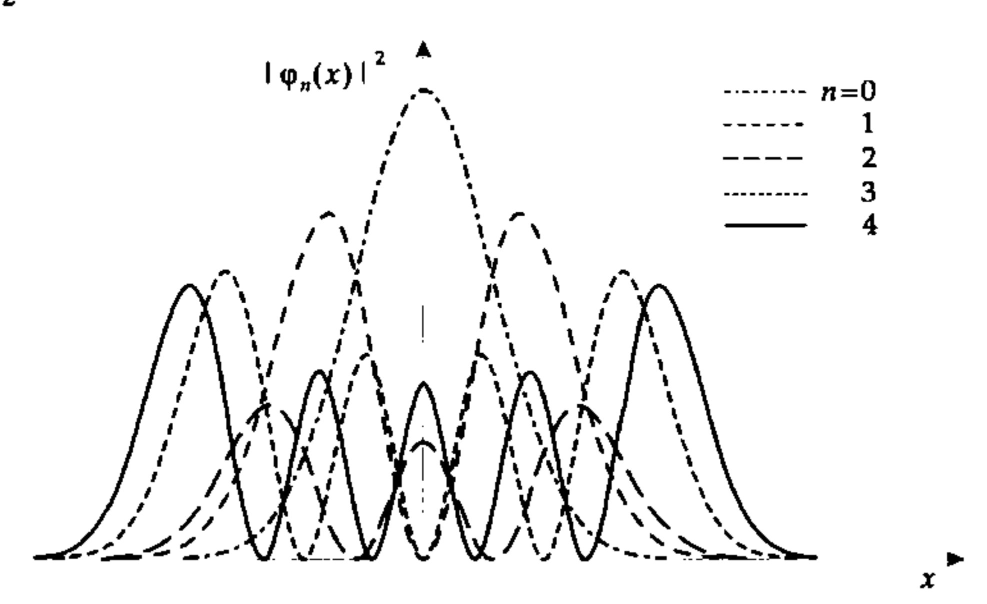


Fig. 25.11 : *Oscillateur harmonique : densité de la probabilité de présence $|\varphi_n(x)|^2$*

- L'oscillateur harmonique sert de modèle pour diverses interactions :
  - Vibrations dans les molécules, atomes et noyaux
  - Oscillations du réseau cristallin dans les solides

Phonon : quasi-particule associée à une onde élastique sinusoïdale progressive, longitudinale ou transversale. Le terme phonon est souvent utilisé pour désigner le quantum d'énergie de l'oscillateur harmonique $E = hf = \hbar\omega$. Si on fournit à l'oscillateur harmonique cette quantité d'énergie, il transite vers le niveau d'énergie immédiatement supérieur.

3. Principe de correspondance de Bohr

Principe de correspondance de Bohr : la mécanique et l'électrodynamique classiques doivent être approximativement valables pour les phénomènes quantiques, dans les conditions où la constante de Planck peut être considérée comme infiniment petite. La description classique d'un système mécanique correspond au cas limite de la description quantique pour des nombres quantiques élevés.

■ Pour de grands nombres quantiques n, la densité de la probabilité de présence d'une particule quantique placée dans un potentiel harmonique à une dimension, correspond à la probabilité de présence d'une particule classique : maximum au voisinage des points de rebroussement classiques (la vitesse de la particule y est minimale) et minimum au voisinage de la position d'équilibre (la vitesse de la particule y est maximale).

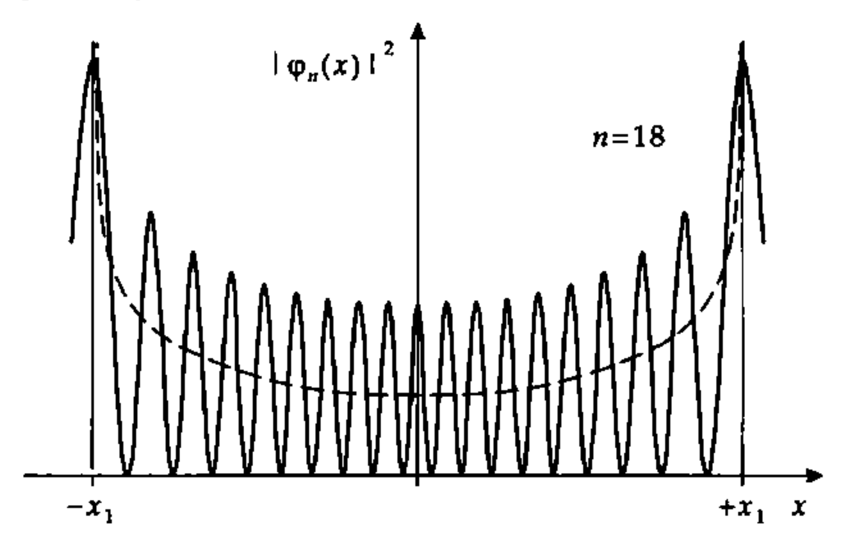


Fig. 25.12 : *Densité de probabilité de présence d'une particule dans un état propre de l'oscillateur harmonique de nombre quantique élevé. $\pm x_1$: points de rebroussement du mouvement classique. Tirets : probabilité de présence classique de la particule*

25.4.3 Principe de Pauli

Fermions : particule de spin demi-entier.

■ Les électrons (leptons) et les nucléons (protons, neutrons) sont des fermions de spin $s = 1/2$.

● Les fermions obéissent au **principe de Pauli**. La fonction d'onde d'un système de fermions indiscernables est antisymétrique par rapport à l'échange de deux particules quelconques du système.

Fonction d'onde antisymétrique pour deux particules :

$$\Psi_a(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_n(1) \cdot \psi_m(2) - \psi_n(2) \cdot \psi_m(1))$$

n et m désignent des nombres quantiques quelconques. La fonction d'onde $\Psi_a(1,2)$ est normalisée. Elle change de signe, si les particules 1 et 2 sont échangées :

$$\Psi_a(2,1) = -\Psi_a(1,2)$$

Principe d'exclusion de Pauli : pour deux fermions identiques (ou indiscernables), de mêmes nombres quantiques m et n identiques, on a $\Psi_A \equiv 0$, c'est à dire que la probabilité de présence de deux particules identiques dans un même état quantique est identiquement nulle. Deux fermions indiscernables ne peuvent pas occuper simultanément le même état quantique.

▷ Le principe d'exclusion de Pauli permet de constituer la table du remplissage des couches électroniques des atomes.

25.5 Spin et moment magnétique

25.5.1 Spin

Spin : moment cinétique intrinsèque des particules élémentaires et des noyaux atomiques. Le spin de chaque particule élémentaire prend une valeur déterminée. Au contraire du moment cinétique orbital, le nombre quantique de spin peut prendre des valeurs demi-entières.

1. Mise en évidence expérimentale du spin

Expérience de Stern et Gerlach (1921) : un jet d'atomes d'Argent (paramagnétique) issu d'un four, canalisé par des diaphragmes, traverse un champ magnétique non uniforme qui possède un fort gradient dans sa direction. L'électron célibataire de l'atome d'Argent qui, d'après la configuration électronique de cet atome, détermine le moment cinétique de l'atome, ne possède pas de moment cinétique orbital. Le moment magnétique de l'atome d'Argent ne peut donc venir que du spin de cet électron. Classiquement, on s'attend à un étalement du faisceau d'Argent après traversée du champ magnétique non uniforme, puisque l'orientation du moment magnétique de l'électron par rapport à la direction du champ magnétique pourrait être quelconque. Cependant, on observe un dédoublement du faisceau en deux composantes bien distinctes, ce qui signifie que le spin de l'électron ne peut prendre que deux orientations $m_s = \pm 1/2$ par rapport à la direction du champ magnétique (voir Fig. 25.13).

▷ Pour un atome dont le nombre quantique total est J, le jet atomique est décomposé en $2J+1$ faisceaux distincts.

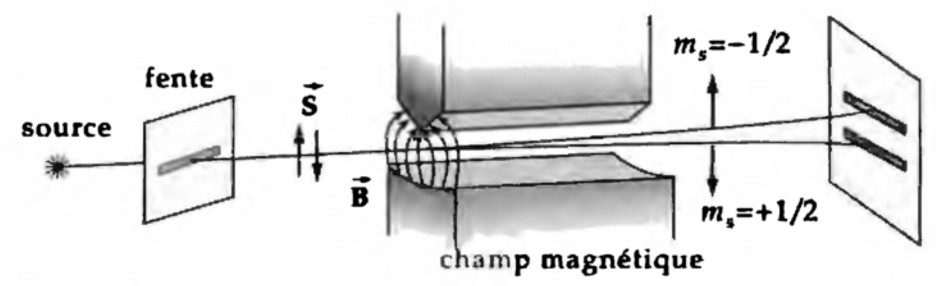


Fig. 25.13 : *Expérience de Stern et Gerlach pour la mise en évidence du spin de l'électron*

Expérience de Rabi (1938) : extrapolation de l'expérience de Stern et Gerlach pour la détermination des spins nucléaires de valeurs plus faibles. Le jet de particules subit successivement deux déviations de Stern et Gerlach parallèles mais de sens inverses, qui les dispersent suivant leur moment magnétique. Entre les deux régions de champ magnétique non uniforme est créée un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ de même direction que les champs déviateurs qui impose une précession de Larmor au moment magnétique des

particules. Un champ magnétique variable à haute fréquence perpendiculaire à $\vec{B}$, induit des transitions de résonance magnétique (spin flip) et les atomes correspondants n'atteignent plus le détecteur placé à la fin du système. De la valeur de la fréquence de résonance, on peut alors déduire le moment magnétique de la particule.

2. Opérateurs de spin et leurs propriétés

Opérateur de spin pour des particules de spin (moment cinétique intrinsèque) 1/2 : opérateur vectoriel de composantes cartésiennes $\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z$ (Fig. 25.14) :

$$\hat{\vec{s}} = (s_x, s_y, s_z) \qquad \hat{\vec{s}}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$$

Les **relations de commutation** pour l'opérateur de spin correspondent aux relations de commutation de l'opérateur de moment cinétique :

$$\begin{aligned} [\hat{s}_x, \hat{s}_y] &= \hat{s}_x \cdot \hat{s}_y - \hat{s}_y \cdot \hat{s}_x = \mathrm{j}\,\hbar \hat{s}_z \\ [\hat{s}_y, \hat{s}_z] &= \hat{s}_y \cdot \hat{s}_z - \hat{s}_z \cdot \hat{s}_y = \mathrm{j}\,\hbar \hat{s}_x \\ [\hat{s}_z, \hat{s}_x] &= \hat{s}_z \cdot \hat{s}_x - \hat{s}_x \cdot \hat{s}_z = \mathrm{j}\,\hbar \hat{s}_y \end{aligned}$$

de même que

$$[\hat{\vec{s}}^2, \hat{s}_x] = [\hat{\vec{s}}^2, \hat{s}_y] = [\hat{\vec{s}}^2, \hat{s}_z] = 0$$

z
m_s
$s=1/2$
$m_s=\pm 1/2$
1/2
$\vec{s}$
−1/2

Fig. 25.14 : *Représentation vectorielle du spin de l'électron $\vec{s}$ $(s = 1/2)$*

3. Matrices de Pauli

$\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$, représentation des opérateurs des composantes de spin par des matrices 2 × 2 :

$$\hat{\vec{s}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\vec{\sigma}} \qquad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Fonction propre de spin : χ_{sm_s} fonction propre simultanée de l'opérateur de la composante z du spin de valeur propre $\pm\hbar m_s$ et de l'opérateur du carré du spin de valeur propre $s(s+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$.

$$\begin{aligned} \hat{s}_z \chi_{sm_s} &= \hbar m_s \chi_{sm_s} \quad m_s = \pm\tfrac{1}{2} \\ \hat{\vec{s}}^2 \chi_{sm_s} &= \hbar^2 s(s+1)\chi_{sm_s} \quad s = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

État propre avec $m_s = +1/2$: spin orienté dans la direction des z positifs.
État propre avec $m_s = -1/2$: spin orienté dans la direction des z négatifs.

Représentation des fonctions propres de spin par les matrices de spin :

$$\chi_{sm_s=\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_{sm_s=-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

État de spin normalisé :

$$\chi = a\,\chi_{sm_s=\frac{1}{2}} + b\,\chi_{sm_s=-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

$|a|^2$ et $|b|^2$ sont les probabilités de mesurer la composante de spin $m_s = +1/2$ et $-1/2$ suivant z.

Orientation du spin dans la direction θ, φ :

$$a = \cos(\theta/2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\varphi}{2}} \qquad b = \sin(\theta/2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\varphi}{2}}$$

La fonction d'onde générale d'une particule de spin 1/2 a deux composantes :

$$\psi(\vec{\mathbf{r}}, s, t) = \begin{pmatrix} \psi_+(\vec{\mathbf{r}}, t) \\ \psi_-(\vec{\mathbf{r}}, t) \end{pmatrix}$$

$|\psi_+(\vec{\mathbf{r}},t)|^2\,\mathrm{d}V$ $|\psi_-(\vec{\mathbf{r}},t)|^2\,\mathrm{d}V$ sont les probabilités de trouver la particule à l'instant t dans l'élément de volume $\mathrm{d}V$ centré en $\vec{\mathbf{r}}$ avec un spin orienté dans la direction positive respectivement négative de z.

4. Moment cinétique total, moment angulaire total

$\hat{\vec{\mathbf{j}}}$: d'un électron, s'obtient par l'addition vectorielle du moment cinétique orbital $\hat{\vec{\mathbf{l}}}$ et du spin $\hat{\vec{\mathbf{s}}}$:

$$\hat{\vec{\mathbf{j}}} = \hat{\vec{\mathbf{l}}} + \hat{\vec{\mathbf{s}}} \qquad \hat{j}_z = \hat{l}_z + \hat{s}_z$$

Les nombres quantiques possibles de $\hat{\vec{\mathbf{j}}}^2$ et $\hat{j}_z$ sont :

$$j = l + 1/2\,, j = l - 1/2 \qquad m_j = -j, \ldots, +j$$

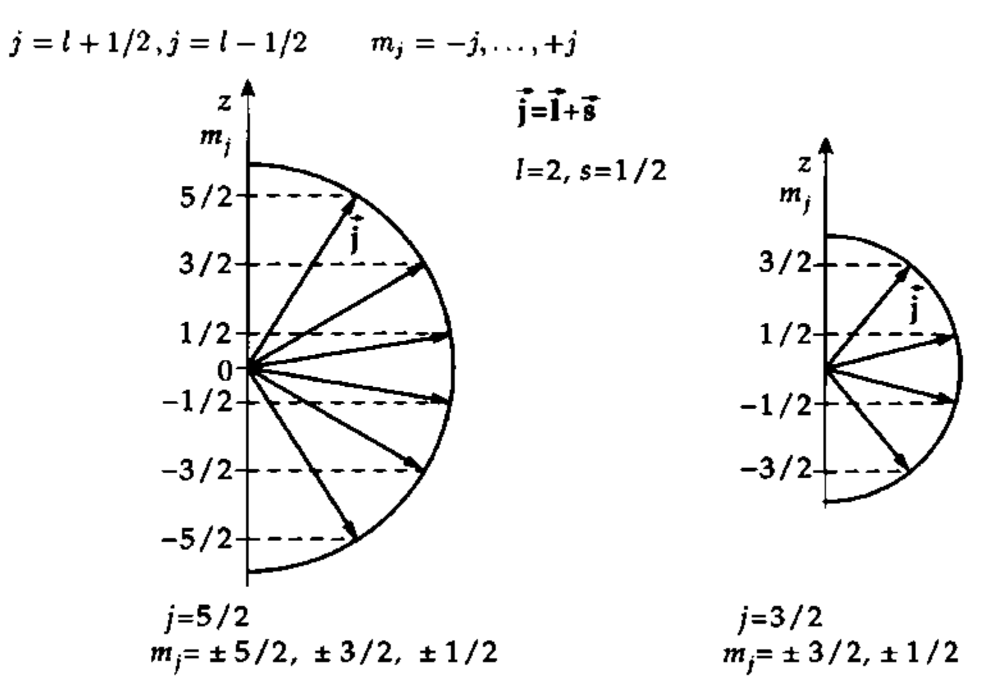


Fig. 25.15 : *États du moment angulaire $\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{l}} + \vec{\mathbf{s}}$ pour $l = 2$.*
m_j : nombre quantique magnétique du moment angulaire total $\vec{\mathbf{j}}$

En représentation vectorielle, un état de moment angulaire j n'a que $2j + 1$ orientations possibles par rapport à l'axe de quantification.

25.5.2 Moments magnétiques

1. Moment magnétique du mouvement orbital

$\hat{\vec{\mu}}_l$: s'exprime à l'aide de l'opérateur de moment cinétique orbital $\hat{\vec{l}}$:

Opérateur du moment magnétique orbital			
	Symbole	Unité	Dénomination
$\hat{\vec{\mu}}_l = -g_l \frac{e}{2m_e} \cdot \hat{\vec{l}}$	$\hat{\vec{\mu}}_l$	$J \cdot T^{-1}$	opérateur du moment magnétique orbital
$= -g_l \mu_B \cdot \frac{\hat{\vec{l}}}{\hbar}$	g_l	1	facteur g du moment cinétique
$g_l = 1$	e	C	charge élémentaire
	m_e	kg	masse de l'électron
	$\hat{\vec{l}}$	J	opérateur du moment cinétique

Magnéton de Bohr, μ_B : constante universelle définie par :

$$\mu_B = -\frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m_e} = 5,788\,382\,63(52) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{MeV/T} = 9,274\,015\,4 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{J/T}$$

2. Moment magnétique de spin

$\hat{\vec{\mu}}_s$: défini à partir de l'opérateur de spin $\hat{\vec{s}}$:

Opérateur du moment magnétique de spin			
	Symbole	Unité	Dénomination
$\hat{\vec{\mu}}_s = -g_s \frac{e}{2m_e} \cdot \hat{\vec{s}}$	$\hat{\vec{\mu}}_s$	$J \cdot T^{-1}$	opérateur du moment magnétique de spin
$= -g_s \mu_B \cdot \frac{\hat{\vec{s}}}{\hbar}$	g_s	1	facteur g du spin
$g_s = 2,0023$	e	C	charge élémentaire
	m_e	kg	masse de l'électron
	$\hat{\vec{s}}$	J	opérateur de spin

Facteur gyromagnétique, g : facteur de proportionnalité entre le moment cinétique et le moment magnétique correspondant de l'électron :

$$g_l = 1 \qquad g_s \approx 2$$

▷ En mécanique quantique relativiste, le facteur gyromagnétique du spin de l'électron ne prend pas la valeur exacte 2.
$$\frac{g_s - 2}{2} = (1159,652\,193 \pm 0,000\,010) \cdot 10^{-6}$$

▷ Le moment magnétique de l'électron relatif au spin correspond au moment magnétique d'un mouvement orbital de moment cinétique $l = 1$.

● En représentation vectorielle, le moment magnétique et le moment cinétique ont des directions opposées.

3. Moment magnétique total

$\vec{\mu}$ de l'électron dans l'atome : somme vectorielle des moments magnétiques de spin et orbital.

$$\hat{\vec{\mu}} = \hat{\vec{\mu}}_s + \hat{\vec{\mu}}_l = -\frac{e_0}{2m_e}(\vec{l} + 2 \cdot \vec{s})$$

- Le moment magnétique total $\vec{\mu}$ de l'électron n'est pas anti-parallèle au moment cinétique total (moment angulaire total) $\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{l}} + \vec{\mathbf{s}}$.

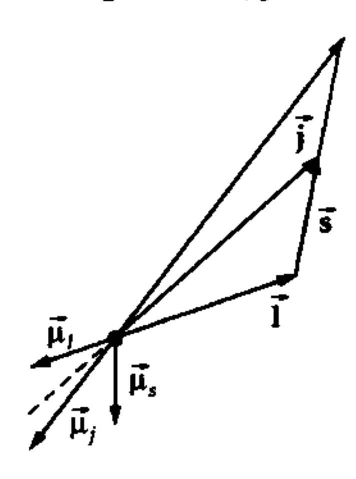


Fig. 25.16 : *Couplage du moment cinétique orbital* $\vec{\mathbf{l}}$ *et du spin* $\vec{\mathbf{s}}$ *pour former le moment angulaire total* $\vec{\mathbf{j}}$ *et les moments magnétiques correspondants* $\vec{\mu}_l$, $\vec{\mu}_s$, $\vec{\mu} = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s$

4. Énergie potentielle dans un champ magnétique

L'énergie potentielle E_{pot} d'un électron non lié, placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}} = (0, 0, B_z)$ parallèle à l'axe z est :

$$E_{\text{pot}} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{\mathbf{B}} = g_s \frac{e}{2m_e} s_z \cdot B_z$$

Dans un état propre de la composante suivant z de l'opérateur de spin, de nombre quantique magnétique $m_s = \pm 1/2$, il s'ensuit que :

$$E_{\text{pot}} = g_s \frac{e\hbar}{2m_e} m_s \cdot B_z = g_s \mu_{\text{B}} \cdot B_z$$

De manière analogue, pour un électron sur une orbite de moment cinétique (l, m) :

$$E_{\text{pot}} = g_l \frac{e\hbar}{2m_e} m \cdot B_z = g_l \mu_{\text{B}} \cdot m \cdot B_z$$

L'énergie potentielle d'un atome dans un état caractérisé par les nombres quantiques J, M_J pour le moment angulaire total et sa projection sur l'axe z, L pour le moment cinétique orbital total et S pour le spin total, placé dans un champ magnétique homogène $\vec{\mathbf{B}} = (0, 0, B_z)$ parallèle à l'axe z est :

Énergie potentielle dans un champ magnétique			$\mathbf{ML^2T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$E_{\text{pot}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{\mathbf{B}}$	E_{pot}	J	énergie potentielle
$= g(L, S, J) \cdot \mu_{\text{B}} \cdot M_J \cdot B$	M_J	1	projection du moment cinétique total
	$g(L, S, J)$	1	facteur de Landé
	μ_{B}	J/T	magnéton de Bohr
	B	T	induction magnétique

Facteur de Landé $g(L, S, J)$: nombre par lequel il faut multiplier le rapport entre le magnéton de Bohr μ_B et le moment cinétique élémentaire $\hbar$ pour obtenir la valeur du rapport gyromagnétique d'un système de nombres quantiques L, S, J :

$$g(L,S,J) = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}$$

Précession de Larmor : précession, de vitesse angulaire constante, du vecteur moment magnétique d'un atome (ou système) autour du vecteur $\vec{\mathbf{B}}$ du champ magnétique uniforme dans lequel il est placé.

Fréquence de Larmor : fréquence de la précession de Larmor. Dans le cas du moment magnétique orbital, elle est :

$$\omega_L = g_l \, \mu_{\mathrm{B}} \cdot \frac{B}{\hbar}$$

Magnétisme du spin nucléaire : est produit par le moment magnétique d'un noyau atomique par suite de son spin.

M Le magnétisme du spin nucléaire est utilisé pour refroidir des substances jusqu'à une température de quelques μK. Un champ magnétique externe oriente les moments magnétiques des noyaux d'un corps préalablement refroidi. Après coupure du champ magnétique externe, les noyaux tendent à s'orienter aléatoirement. Ce processus est accompli adiabatiquement (désaimantation adiabatique) ($\Delta Q = 0$). L'augmentation du désordre, qui correspondrait à une augmentation de l'entropie, entraîne par conséquent un abaissement de la température. La température la plus basse obtenue par cette méthode avec des noyaux de Cu se situe aux environs de $50 \cdot 10^{-9}$.

26 Physique atomique et moléculaire

Atome : plus petite quantité d'un corps simple ou élément susceptible d'entrer dans une combinaison chimique. L'atome, électriquement neutre, est constitué d'un **noyau** de charge positive Ze entouré d'un nuage de Z **électrons** chargés négativement qui se déplacent dans le champ coulombien du noyau.
Nombre de charge ou **numéro atomique**, Z : nombre des protons contenus dans le noyau de l'atome.

- Les atomes sont électriquement neutres. La somme des électrons d'un atome est égale au nombre de protons que contient son noyau.

Rayon de l'atome , R_A : son ordre de grandeur est 10^{-10} m (usuellement : 1 Ångström = 1Å = 10^{-10} m). Le noyau de l'atome, en revanche, a un rayon qui n'est que de 1fm = 10^{-15} m.

Les rayons des atomes et des ions sont résumés dans le tableau Tab. 30.2. Les valeurs dépendent de la méthode de mesure utilisée et ne sont que des indications d'ordre de grandeur. La Figure 26.1 donne un aperçu de l'évolution du rayon en fonction du numéro atomique.

- Rayons atomiques de quelques élements (en nm) : He 0,122 ; Li 0,155 ; O 0,056 ; Fe 0,126 ; Rb 0,248 ; U 0,153.

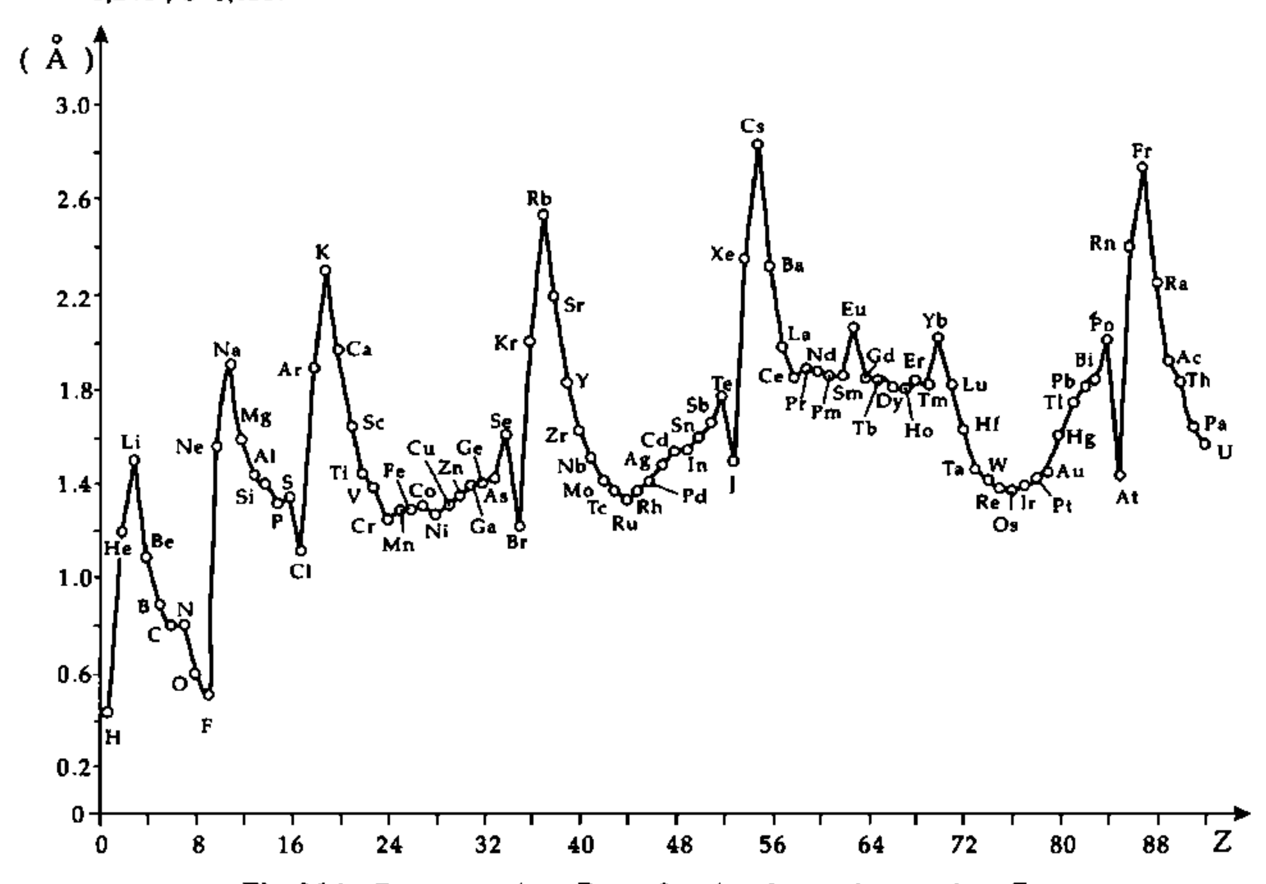


Fig. 26.1 : *Rayon atomique R_A en fonction du numéro atomique Z*

Ions : particules chargées, formées d'un atome auquel on a prélevé ou ajouté un ou plusieurs électrons (v. page 555).

La charge d'un ion est reportée en haut à droite du symbole de l'élément : H^+ (ion Hydrogène positif, une fois chargé), Cl^- (ion Chlore négatif, une fois chargé).

Énergie d'ionisation, E_i, ou **travail d'ionisation**, W_i : énergie nécessaire pour arracher un électron d'un état lié stationnaire d'un atome. L'énergie d'ionisation du premier électron est généralement caractéristique d'un élément.

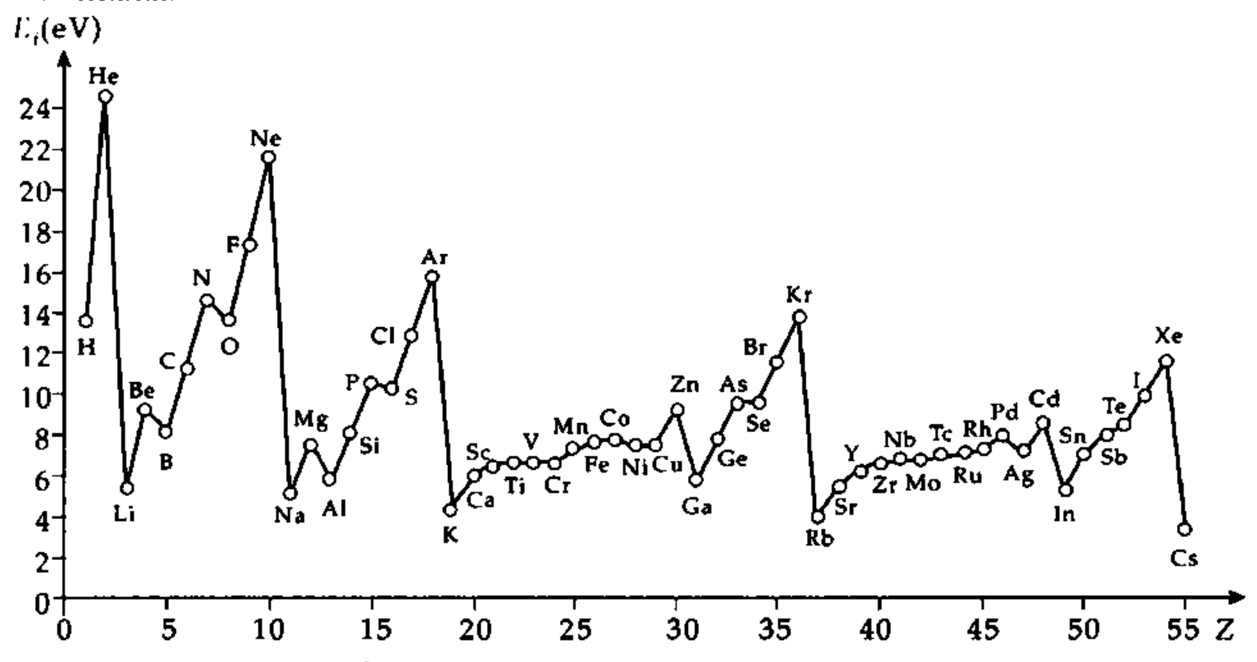


Fig. 26.2 : *Énergie d'ionisation E_i en fonction du numéro atomique Z*

26.1 Principes de base de la spectroscopie

Niveaux d'énergie : états stationnaires d'un atome d'énergie déterminée. Un niveau est caractérisé par des nombres quantiques comme le moment cinétique total L, le spin total S et le moment angulaire total J.

État fondamental : l'état stationnaire de plus basse énergie d'un atome.

État excité : état stationnaire dont l'énergie est supérieure à celle de l'état fondamental.

Schéma de niveaux : représentation graphique des énergies des états stationnaires d'un atome.

Spectroscopie : mesure et analyse des rayonnements émis ou absorbés par un atome (ou une molécule, un noyau etc.).

Spectre : répartition des valeurs d'une grandeur physique (amplitude, intensité, énergie, nombre de particules ...) en fonction d'une grandeur ordonnée (fréquence, longueur d'onde, énergie ...). Ici, intensité des rayonnements émis ou absorbés par des atomes, molécules ou noyaux, en fonction de la fréquence, de la longueur d'onde ou du nombre d'onde.

1. Spectre d'émission

Distribution des fréquences du rayonnement émis par un corps. Les spectres d'émission sont consécutifs à des transitions entre un niveau excité vers un niveau de plus faible énergie ou vers le niveau fondamental.

M L'excitation de l'échantillon peut être produite par décharge dans un plasma, effet thermo-ionique, radioactivité, etc. La lumière émise par la désexcitation des atomes est analysée par des spectrographes appropriés à la longueur d'onde des rayonnements émis.

● Le spectre d'émission de l'atome d'Hydrogène est un **spectre de raies**.

2. Forme des raies spectrales

Forme des raies : distribution de l'intensité $I(\omega)$ dans un domaine limité de fréquences autour d'une raie spectrale ω_0, qui correspond à la transition spontanée d'un état stationnaire initial i vers un état final f d'un atome.

$$I(\omega) \sim \frac{(\Delta\omega)/2}{(\omega-\omega_0)^2+(\Delta\omega)^2/4}$$

Largeur naturelle , $\Delta\omega$: différence des valeurs des fréquences, pour lesquelles l'intensité est réduite de moitié par rapport à sa valeur maximum I_{max} (Fig. 26.3). On dit couramment, la **largeur à mi-hauteur** de la courbe de distribution de l'intensité d'une ligne spectrale. On utilise parfois l'abbréviation anglaise **FWHM**, (*Full Width at Half Maximum*).

- La largeur d'une raie $\Delta\omega$ correspond à une incertitude sur l'énergie de l'état initial de la transition, $\Delta E = \hbar\Delta\omega$, qui est reliée à la vie moyenne τ de cet état i par la relation d'incertitude énergie-temps de Heisenberg :
  $\Delta E \sim \hbar/\tau$

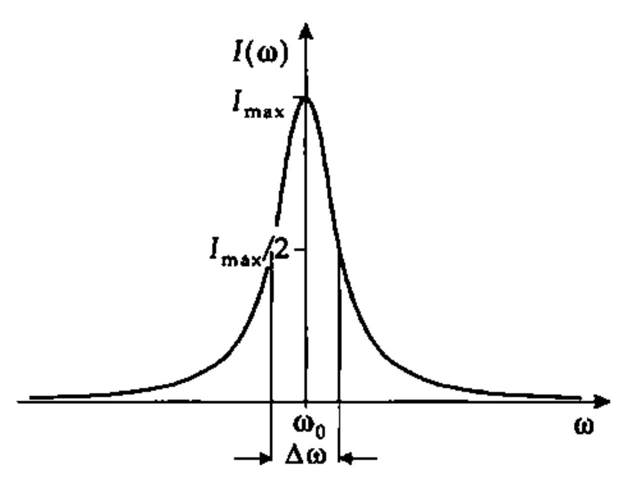


Fig. 26.3 : *Largeur $\Delta\omega$ d'une raie spectrale*

Élargissement d'une raie spectrale : augmentation de la largeur mesurée d'une raie par rapport à sa largeur naturelle. Elle peut être produite par l'effet Doppler, par des collisions atomiques dépendantes de la pression ou des interactions avec des champs de rayonnement.

■ La durée de vie moyenne des états excités d'atomes est généralement comprise entre 10^{-7} s et 10^{-8} s. Ce qui correspond à une incertitude sur la fréquence $\Delta\omega \approx 10^8$ Hz.

▷ Les transitions à partir d'états métastables de grande vie moyenne ($\tau \approx 10^{-3}$ s) ont des petites largeurs de raies ($\Delta\omega \approx 10^3$ Hz).

- Les spectres d'émission ou d'absorption de molécules sont constitués de suites de raies, qui apparaissent sous forme de **spectres de bandes** si le pouvoir de résolution des spectromètres est faible.

- Le rayonnement thermique émis par des corps est un rayonnement électromagnétique qui présente un **spectre continu** .

3. Spectre d'absorption

La distribution de fréquence de l'intensité d'un rayonnement incident sur un échantillon. Certaines fréquences sont absorbées par l'échantillon et leur intensité sera alors nulle ou nettement affaiblie. Les fréquences absorbées sont celles qui correspondent à une transition de l'état fondamental vers un des états excités des atomes, molécules ou noyaux de l'échantillon.

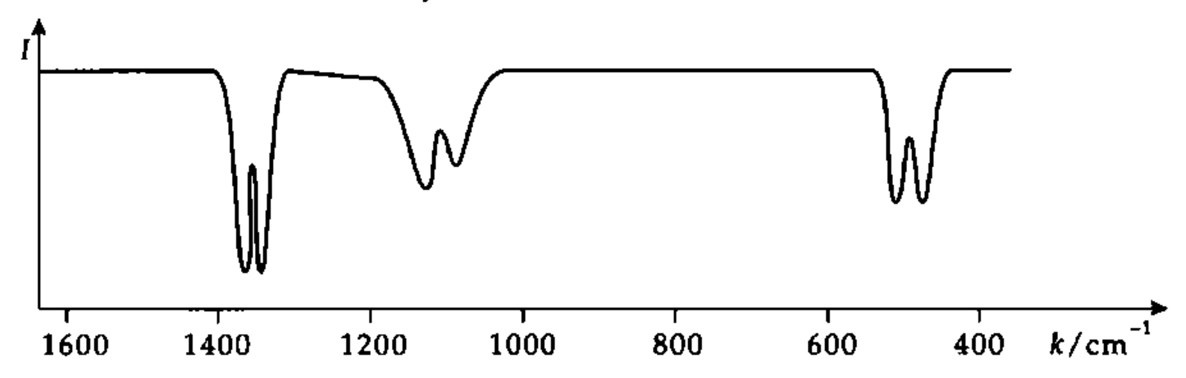


Fig. 26.4 : *Spectre d'absorption de* SiO_2 *dans l'infrarouge. k : nombre d'onde, I : intensité mesurée du rayonnement*

M On observe des spectres d'absorption, lorsque de la lumière blanche passe à travers un gaz, une substance vaporisée ou une couche mince. Dans les spectromètres, les longueurs d'ondes absorbées apparaissent comme des lignes noires.

Spectroscopie de résonnance : mesure de l'absorption d'un rayonnement de fréquence donnée en fonction de grandeurs physiques (température, pression, champ magnétique).

26.2 Atome d'Hydrogène

Ensemble électriquement neutre, constitué d'un électron gravitant autour d'un proton auquel il est lié par l'interaction électromagnétique. L'énergie de liaison de son état fondamental est de 13,6 eV et son rayon d'environ 0,5 Å.

Électrons : particules élémentaires de charge électrique négative $-e$ (e : charge élémentaire) et de masse au repos m_e.

$$e = 1,602\,177\,33(49) \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$
$$m_e = 9,109\,389\,7(54) \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

Protons : particules de charge électrique positive e et de masse au repos $m_p \approx 1836\,m_e$.

$$m_p = 1,672\,623\,1(10) \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Les nombres entre parenthèses indiquent la précision sur les dernières décimales.

▷ Le proton n'est pas une particule élémentaire, il est composé de 3 quarks (2 quarks "up" et d'un quark "down" (voir le modèle standard).

Deutéron : noyau d'Hydrogène lourd, constitué d'un proton et d'un neutron. Le **neutron** est électriquement neutre et sa masse est légèrement supérieure à celle du proton (plus lourd d'environ 2,5 fois la masse de l'électron). Le neutron est constitué de deux quarks "down" et d'un quark "up".

Deutérium : atome d'Hydrogène lourd, constitué d'un deutéron autour duquel gravite un électron. Sa masse est ≈ 2 fois la masse de l'Hydrogène.

Systèmes hydrogénoïdes : systèmes d'atomes pour lesquels un seul électron périphérique détermine le comportement énergétique. Ce sont généralement des atomes dont le cortège électronique a été réduit à un seul électron par ionisation : $He^+, Li^{2+}, Be^{3+}, \ldots U^{91+}$.

■ La structure hyperfine de $^{209}Bi^{82+}$ a été mesurée pour la première fois auprès de l'anneau de stockage d'ions lourds (ESR) de la GSI de Darmstadt (Allemagne).

Atomes alcalins : les atomes Li, Na, K, Rb, Cs, Fr, présentent des analogies avec l'atome d'Hydrogène : ce sont des atomes qui contiennent un seul électron dans la couche la plus extrême de leur cortège électronique. Leur noyau, avec les électrons des couches profondes, constitue un centre positif autour duquel gravite un **électron de valence** faiblement lié.

Atome de Rydberg : atome d'Hydrogène ou hydrogénoïde fortement excité (nombre quantique principal $n > 100$). Ils ont des rayons jusqu'à $\approx 5 \cdot 10^{-7}$ m ; ce qui correspond la taille d'un virus.

26.2.1 Postulats de Bohr

1. Énoncé des postulats de Bohr

1er postulat de Bohr (Postulat des états stationnaires) :

Les atomes peuvent se trouver dans certains états stationnaires dans lesquels ils ne rayonnent pas d'énergie. Dans une représentation classique, ces états stationnaires correspondent à des "orbites" sur lesquelles se déplacent les électrons (modèle planétaire). Sur ces orbites, en dépit de leur accélération radiale, ils n'émettent aucun rayonnement électromagnétique.

2ème Postulat de Bohr (Postulat de la quantification des orbites) :

Le moment cinétique d'un électron sur une orbite stationnaire est un multiple entier de $\hbar$:

$$l_n = r_n \cdot m_e v_n = n \cdot \hbar \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

r_n est le rayon de l'orbite n.
Dans l'état stationnaire n, l'atome d'Hydrogène possède l'énergie :

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8h^2\varepsilon_0^2} \cdot \frac{1}{n^2} \qquad \varepsilon_0 : \text{permittivité du vide.}$$

3ème Postulat de Bohr (fréquences de Bohr) :

Lorsque qu'un électron passe d'une orbite stationnaire de nombre m vers une orbite stationnaire de plus petit nombre n, l'atome émet un quantum d'énergie sous forme d'onde électromagnétique (**photon**).

Énergie du photon : différence entre l'énergie de l'électron sur l'orbite m et son énergie lorsqu'il occupe l'orbite n :

$$E = \hbar\omega = hf = E_m - E_n$$

Les postulats de Bohr ne peuvent pas être déduits de la physique classique. Leur explication est donnée par la mécanique quantique. Le concept d'orbite électronique introduit par le modèle atomique de Bohr, à cause de la nature ondulatoire de l'électron et des relations d'incertitude de Heisenberg, n'a qu'une validité limitée.

▷ Les postulats de Bohr permettent d'expliquer les spectres de raies de l'atome d'Hydrogène.

2. Rayon de Bohr

Rayon de l'orbite de Bohr, r_n : se déduit de la condition d'équilibre entre la force centrifuge et la force d'attraction coulombienne de l'électron sur son orbite classique et en tenant compte de la quantification de son moment cinétique :

Rayon d'une orbite de Bohr			L
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = m_e \cdot \frac{v_n^2}{r_n}$$ $$r_n \cdot m_e v_n = n \cdot \hbar$$ $$r_n = 4\pi\varepsilon_0 \frac{n^2\hbar^2}{m_e Z e^2}$$	Z	1	numéro atomique
	e	C	charge élémentaire
	ε_0	$CV^{-1}m^{-1}$	permittivité du vide
	r_n	m	rayon de l'orbite
	m_e	kg	masse de l'électron
	v_n	m/s	vitesse de l'électron sur l'orbite

Rayon de Bohr, r_1 : parfois désigné par a_0 ou a_∞, rayon de l'orbite $n = 1$.

$$r_1 = 0,529\,177\,249(24) \cdot 10^{-10}\ \text{m} \approx 0,5\ \text{Å}$$

[M] L'**expérience de Franck et Hertz** de 1913 a confirmé les postulats de Bohr, par la mesure des énergies discrètes absorbées par des atomes de mercure dans une triode à gaz.

3. Fréquences du spectre de l'Hydrogène

Spectre de l'Hydrogène : spectre de raies qui comporte plusieurs séries de raies :

Spectre de l'Hydrogène (fréquences)			T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$f_{mn} = cR_H\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \quad n < m$$ $$R_H = 1,0967\,758\,10 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1}$$	f_{mn}	s^{-1}	fréquence
	c	$m \cdot s^{-1}$	vitesse de la lumière dans le vide
	R_H	m^{-1}	constante de Rydberg pour l'Hydrogène
	n, m	1	nombres quantiques principaux

Spectre de l'Hydrogène (longueurs d'onde)			L
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\lambda_{mn} = \frac{1}{R_H}\left(\frac{n^2 \cdot m^2}{m^2 - n^2}\right) \quad n < m$$ $$R_H = 1,0967\,758\,10 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1}$$	λ_{mn}	m	longueur d'onde
	c	$m \cdot s^{-1}$	vitesse de la lumière dans le vide
	R_H	m^{-1}	constante de Rydberg pour l'Hydrogène
	n, m	1	nombres quantiques principaux

Nombres quantiques principaux, n : valeurs discrètes de la suite $n = 1, 2, \ldots$, décrivent le spectre en énergie des atomes (ici l'Hydrogène).

4. Séries du spectre de l'atome d'Hydrogène

Le schéma des niveaux d'énergie de l'atome d'Hydrogène est représenté sur la Figure 26.5.

Pour les nombres quantiques principaux $m > n$, on distingue :

- **Série de Lyman** ($n = 1$) dans l'ultraviolet
- **Série de Balmer** ($n = 2$) dans le visible
- **Série de Paschen** ($n = 3$) dans l'infrarouge proche
- **Série de Brackett** ($n = 4$)
- **Série de Pfund** ($n = 5$) dans l'infrarouge lointain

Terme spectral, T_n : défini par :

$$T_n = \frac{cR_{\mathrm{H}}}{n^2}$$

● Les différentes raies de l'atome d'Hydrogène peuvent être exprimées par des différences de termes spectraux.

La valeur expérimentale de la **constante de Rydberg** pour l'atome d'Hydrogène R_{H}, diffère légèrement de la valeur calculée R_∞ :

Constante de Rydberg R_∞ (dans l'hypothèse d'un centre attractif de masse infinie) :

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 \cdot c} = 1,097\,373\,156\,83(4) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Dans le calcul de R_{H}, il faut tenir compte de la masse finie du proton m_{p} en comparaison de la masse de l'électron m_e (masse réduite $\mu = m_{\mathrm{p}} m_e/(m_{\mathrm{p}} + m_e)$) :

$$R_{\mathrm{H}} = \frac{R_\infty}{1 + m_e/m_{\mathrm{p}}}$$

Limite de la série : la valeur la plus grande de la fréquence correspondant à une raie spectrale d'une série donnée. Pour $m \to \infty$, on déduit l'**énergie de la fréquence limite** $f_{\mathrm{lim}} = f_\infty$ de l'atome d'Hydrogène :

$$E_n = hf_{\mathrm{Gr}} = \frac{hR_H c}{n^2}$$

● L'état fondamental de l'atome d'Hydrogène est à $E_1 = -13,595$ eV.

● Par des transitions entre des états du continuum et des états discrets liés, des fréquences supérieures à la fréquence limite sont possibles.

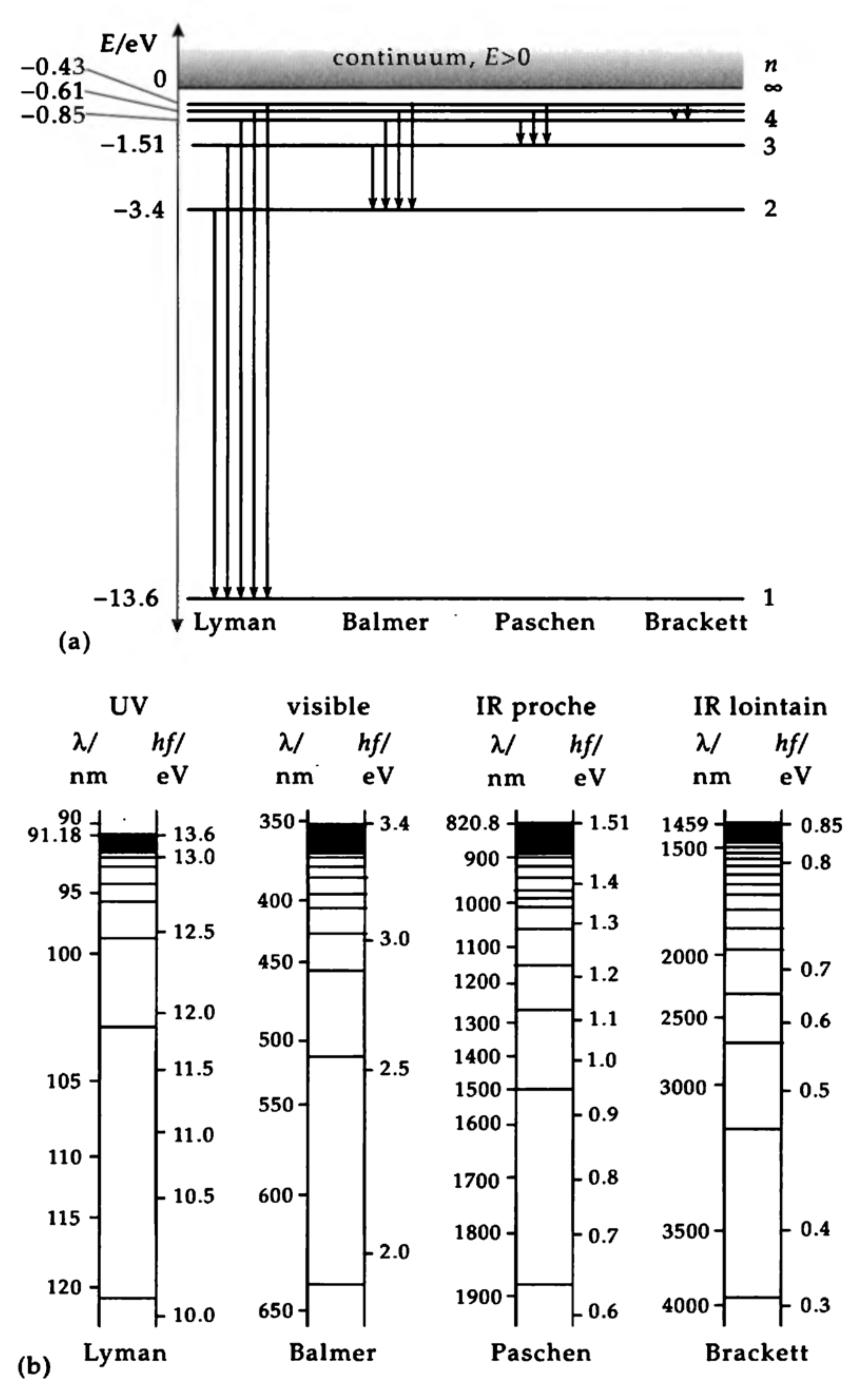


Fig. 26.5 : *Séries spectrales de l'atome d'Hydrogène.*
(a) : Schéma de niveaux et principales transitions, n : nombre quantique principal, (b) : longueurs d'onde λ et énergies hf

5. Dégénérescence du spectre de l'Hydrogène

Le moment angulaire total $\vec{j}$ de l'électron de l'atome d'Hydrogène résulte de l'addition vectorielle du moment cinétique orbital $\vec{l}$ et du spin $\vec{s}$, $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$. Pour $l > 0$, les valeurs possibles du nombre quantique azimuthal j, qui détermine le moment angulaire total, sont : $j = l \pm 1/2$.

Dégénérescence accidentelle de l'Hydrogène : dégénérescence spécifique indépendante du spin, due au potentiel coulombien ($\sim 1/r$).

- L'énergie des états stationnaires de l'atome d'Hydrogène ne dépend que du nombre quantique principal n. Au niveau d'énergie E_n correspondent des fonctions d'onde de nombre quantique de moment cinétique orbital $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Dégénérescence du spectre en énergie de l'atome d'Hydrogène :

E_1	$n = 1$	$l = 0$	état fondamental
E_2	$n = 2$	$l = 0, 1$	premier état excité
E_3	$n = 3$	$l = 0, 1, 2$	deuxième état excité
E_4	$n = 4$	$l = 0, 1, 2, 3$	troisième état excité
...	......	....	....

▷ Dans l'état fondamental, $n = 1$, le moment cinétique orbital est nul : $l_{n=1} \equiv 0$. Ceci est en contradiction avec le modèle semi-classique de Bohr.

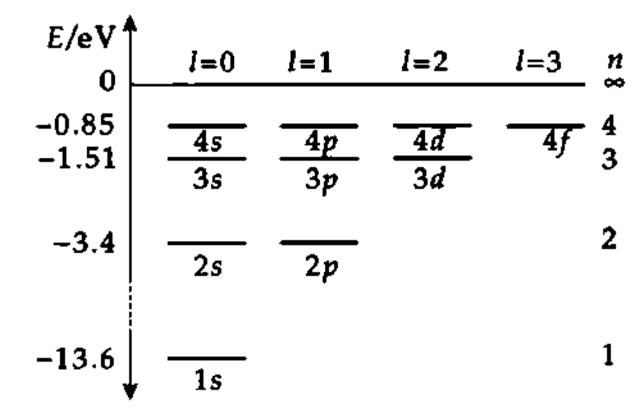


Fig. 26.6 : *Dégénérescence accidentelle des états de l'atome d'Hydrogène, d'après le nombre quantique orbital l*

▷ Si on néglige l'interaction magnétique entre le mouvement orbital et le spin de l'électron, la dépendance des valeurs propres de l'énergie en fonction du seul nombre quantique principal reste valable pour tous les atomes hydrogénoïdes.

6. Structure fine du spectre de l'Hydrogène

En tenant compte du **couplage spin-orbite** , des *multiplets* de niveaux apparaissent dans le spectre des atomes. L'énergie des états stationnaires de l'atome d'Hydrogène sont alors fonction du nombre quantique de moment angulaire total j. Les niveaux sont partiellement dégénérés par rapport au nombre quantique orbital l : les niveaux de $l = j - 1/2$ et $l = j + 1/2$ ont la même énergie.

$3d_{5/2}$, $3f_{5/2}$
$3p_{3/2}$, $3d_{3/2}$
$3p_{1/2}$, $3s_{1/2}$

$2p_{3/2}$
$2s_{1/2}$, $2p_{1/2}$

$1s_{1/2}$

Fig. 26.7 : *Structure fine du spectre de l'Hydrogène. Les états sont classés d'après nl_j, n : nombre quantique principal, l : nombre quantique orbital, j : moment angulaire total*

Structure fine (formule de Sommerfeld)			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$E_{nj} = -\frac{R_\infty h Z^2}{n^2}\left[1+\frac{Z^2\alpha^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}\right)\right]$	E_{nj}	J	valeur propre de l'énergie
	j	Js	moment cinétique total
$\alpha = 1/137,035\,989\,5(61)$	α	1	constante de structure fine
	R_∞	m^{-1}	constante de Rydberg
	Z	1	numéro atomique
	h	Js	constante de Planck
	n	1	nombre quantique principal

Constante de structure fine, α : le rapport de la vitesse orbitale de l'électron sur la première orbite de Bohr de rayon $r_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot h^2}{2\pi \cdot m_e \cdot e^2}$ à la vitesse de la lumière c. Elle intervient dans l'application de la mécanique quantique relativiste à l'atome d'Hydrogène et est caractéristique des interactions électromagnétiques.

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{h \cdot c} = 1/137,035\,989\,5(61)$$

▸ La séparation des niveaux $l = j \pm 1/2$, qui, pour les termes $2s_{1/2}$ et $2p_{1/2}$, ne correspond qu'à $4{,}375 \cdot 10^{-6}$ eV (**Lamb-Shift**), est expliquée par l'électrodynamique quantique.

26.3 États stationnaires et nombres quantiques

Énergie potentielle d'un électron dans le champ du noyau des atomes hydrogénoïdes : il faut tenir compte de la charge effective $Z^* < Z$ ressentie par l'électron périphérique due à l'effet d'écran exercé par les électrons des couches internes.

$$V_C(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z^* e^2}{r}$$

r est la distance de l'électron au centre du noyau, Z^* est la charge effective (numéro atomique effectif).

L'application de l'opérateur $\hat{\mathbf{l}}^2$ sur une fonction d'onde ψ_{nl}, caractérisée par le nombre quantique orbital l ($l = 0, 1, 2, \ldots$), donne :

$$\hat{\mathbf{l}}^2 \psi_{nl} = \hbar^2\, l(l+1)\, \psi_{nl}$$

Potentiel centrifuge : terme supplémentaire du potentiel des électrons d'un état $l \neq 0$:

$$V_Z^{(l)}(r) = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{l(l+1)}{r^2}$$

Le potentiel centrifuge, de même que dans le mouvement des planètes, force l'augmentation du rayon des orbites d'électrons de moment cinétique élevé.

1. Potentiel central effectif dans les atomes à grand nombre d'électrons

Potentiel effectif $V_{\text{eff}}^{(l)}(r)$: potentiel central composé du potentiel coulombien écranté du noyau et du potentiel centrifuge :

$$V_{\text{eff}}^{(l)}(r) = V_C(r) + V_Z^{(l)}(r)$$

Potentiel central effectif			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$V_{\text{eff}}^{(l)}(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z^* e^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2m_e} \cdot \frac{l(l+1)}{r^2}$	V_{eff}	J	énegie potentielle
	Z^*	1	numéro atomique effectif
	ε_0	$CV^{-1}m^{-1}$	permittivité du vide
	r	m	distance électron-centre atome
	l	Js	nombre quantique orbital
	m_e	kg	masse de l'électron
	$\hbar$	Js	constante de Planck

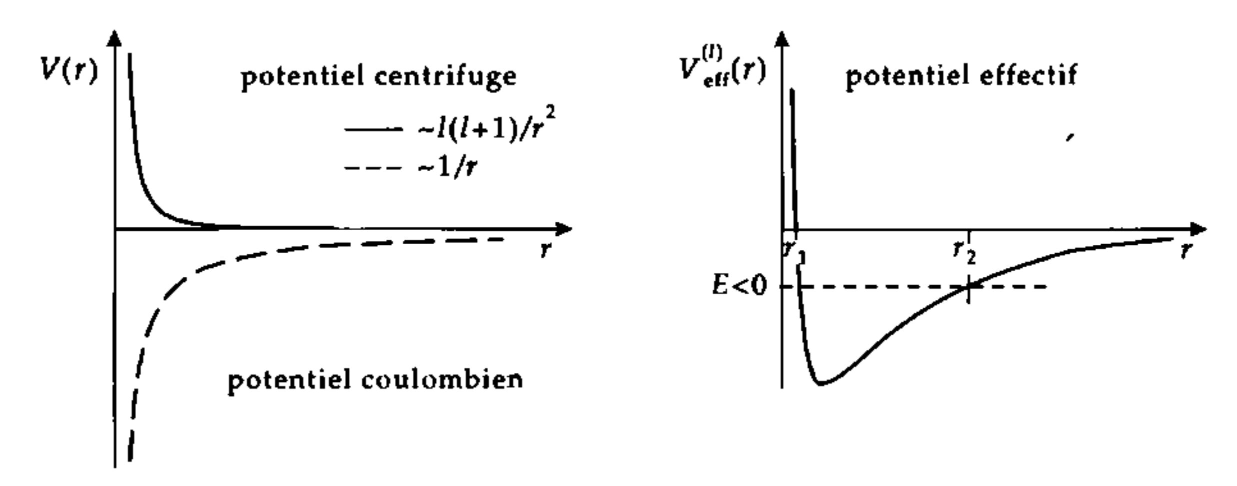


Fig. 26.8 : *Potentiel effectif* $V_{\text{eff}}^{(l)}(r)$. *(a) : potentiel coulombien et potentiel centrifuge, (b) : potentiel effectif.* r_1, r_2 *: points de rebroussement classiques du mouvement d'un électron d'énergie* $E < 0$

2. Fonction d'onde d'une particule et nombre quantique radial

Fonction d'onde d'une particule dans un potentiel central : en coordonnées sphériques (r, θ, φ) elle est séparable en une partie radiale et une partie angulaire :

$$\psi_{n_r lm} = \frac{u_{n_r l}(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi) \qquad \int_0^\infty |u_{n_r l}(r)|^2 \, dr = 1$$

La partie angulaire est formée des fonctions sphériques Y_l^m.

▷ Cette séparation de la fonction d'onde est valable non seulement pour le potentiel coulombien, mais pour tout potentiel central $V(r)$, indépendant du mouvement radial.

Nombre quantique radial, n_r : nombre des zéros de la fonction d'onde radiale $u_{n_r l}(r)$, à l'exception des solutions triviales en $r = 0$ et $r = \infty$. Valeurs possibles de n_r : $n_r = 0, 1, 2, \ldots$.

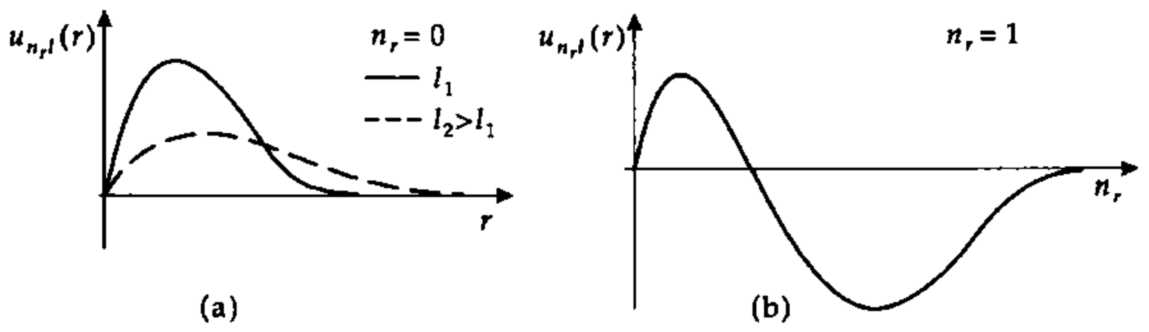


Fig. 26.9 : *Fonction d'onde radiale $u_{n_r l}(r)$. (a) : fonction d'onde sans nœuds, pour différentes valeurs du nombre quantique orbital l, (b) : fonction d'onde à un nœud. Les solutions triviales de $u(r)$ en $r = 0$ et $r \to \infty$ ne sont pas comptées*

3. Moment cinétique et nombre quantique magnétique

Nombre quantique orbital, l : nombre entier qui caractérise le moment cinétique orbital d'une particule. Les valeurs possibles de l sont : $l = 0, 1, 2, \ldots$.

Dans la classification spectroscopique, on utilise les dénominations suivantes pour les différentes valeurs du nombre quantique orbital :

l	0	1	2	3	4	...
Nom	s	p	d	f	g	...

Nombre quantique magnétique, m : nombre entier qui caractérise la projection du moment cinétique sur l'axe de quantification z. Pour des valeurs données de l, m peut prendre les valeurs :

$$m = -l, -l + 1, \ldots, 0, \ldots, l - 1, l$$

- Pour un moment cinétique l il y a $2l + 1$ orientations (projections) possibles par rapport à l'axe de quantification.

Parité, π, de la fonction d'onde $\psi_{n,lm}$: déterminée par le comportement de la fonction sphérique lors du changement de signe de la coordonnée (symétrie par rapport à l'origine) $\theta \longrightarrow \pi - \theta, \varphi \longrightarrow \varphi + \pi$.

$$Y_l^m(\theta, \varphi) \longrightarrow Y_l^m(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^l \cdot Y_l^m(\theta, \varphi), \quad \pi = (-1)^l$$

Moments cinétiques $l = 0, 2, 4, \ldots$: états de parité positive (paire), $\pi = +1$.
Moments cinétiques $l = 1, 3, 5, \ldots$: états de parité négative (impaire), $\pi = -1$.

- Les valeurs propres de l'énergie d'une particule dans un potentiel central ne dépendent que de la valeur du nombre quantique radial n_r et du nombre quantique orbital l, $E = E_{n_r l}$.

4. Dégénérescence de niveaux dans un potentiel central

Dégénérescence d'un niveau : le fait que plusieurs états quantiques de nombres quantiques différents, correspondent à une même valeur de l'énergie.

- L'état stationnaire d'une particule dans un potentiel central d'énergie $E_{n_r l}$, du fait de son nombre quantique magnétique m, est naturellement dégénéré d'ordre $(2l + 1)$.

- À l'état d'énergie E_n correspondent des fonctions d'onde ψ_{nl} de nombre quantique orbital $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

5. États d'énergie positive : états diffus

États diffus : solutions de l'équation de Schrödinger pour des valeurs positives de l'énergie $E = p^2/2m$. Spectre continu de valeurs propres. Aux grandes distances d'un potentiel de diffusion qui décroît plus rapidement avec la distance que $1/r$, la fonction d'onde se compose d'une onde plane incidente de vecteur d'onde $\vec{k}$ et d'une onde émergente sphérique d'amplitude de diffusion $f_{\vec{k}}(\theta)$:

$$\psi(\vec{r}) \longrightarrow e^{j\vec{k}\vec{r}} + f_{\vec{k}}(\theta) \cdot \frac{e^{jkr}}{r} \quad \text{pour} \quad r \to \infty$$

Le carré de la valeur absolue de l'amplitude de diffusion $|f_{\vec{k}}(\theta)|^2$ détermine la probabilité de diffusion de la particule sous l'angle θ par rapport à la direction incidente donnée par $\vec{k}$.

6. Densité de probabilité des électrons

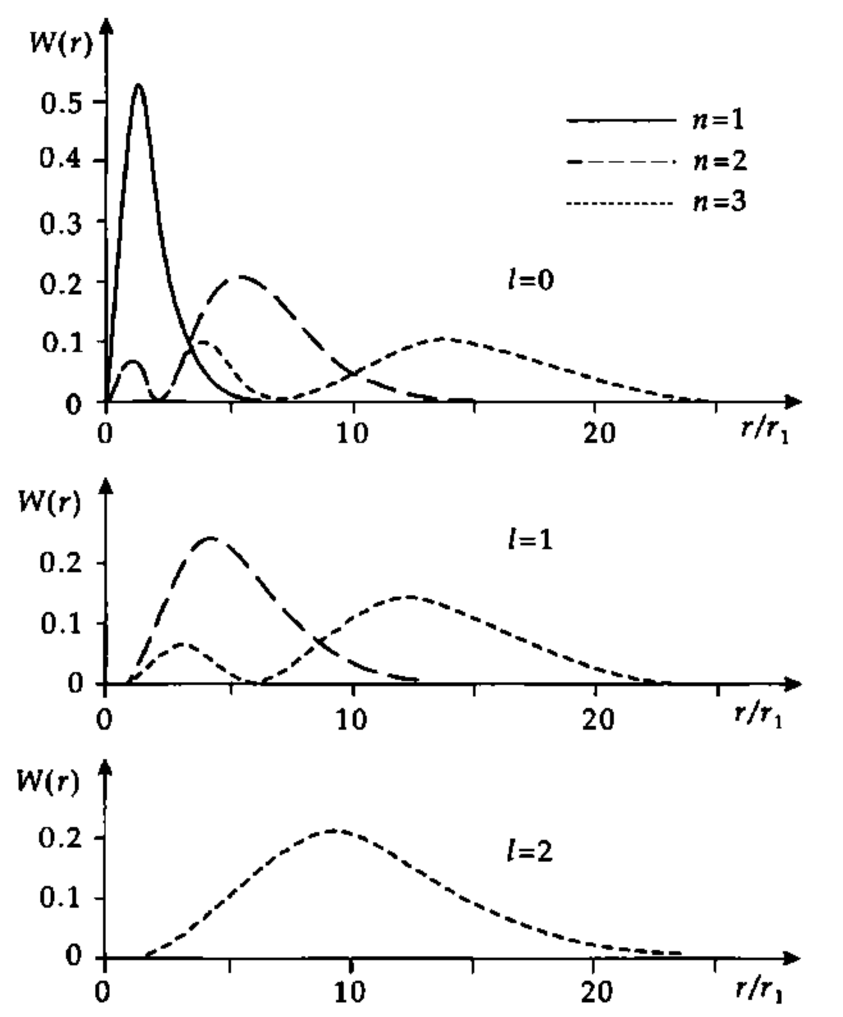


Fig. 26.10 : *Densité de probabilité radiale des électrons pour des états s, p et d de l'atome d'Hydrogène. r_1 est le rayon de Bohr*

Densité électronique $w(\vec{r})$ dans un atome : déterminée par la quantité :

$$w(\vec{r}) = |\psi(\vec{r})|^2$$

Densité de probabilité radiale $W(r)\,dr = 4\pi|\psi|^2\,r^2 dr$: probabilité de trouver l'électron dans une couche sphérique de rayon r et d'épaisseur dr autour du noyau (Fig. 26.10).

La position du maximum de la fonction $W(r)$ détermine la distance la plus probable de l'électron au centre du noyau (rayon de l'orbite dans l'image semi-classique).
Seuls les **électrons s** ($l = 0$) ont une probabilité de présence $w(\vec{r})$ différente de zéro au voisinage du noyau de l'atome ($r \to 0$).

Distribution spatiale de la densité électronique : déterminée par le nombre quantique orbital l et le nombre quantique magnétique m (projection du moment cinétique sur l'axe de quantification z).

Règles de sélection : conditions qui déterminent si, dans un atome, un électron peut effectuer une transition, par absorption ou émission d'un photon, d'un niveau donné vers un autre. Dans les atomes, les transitions dipolaires électriques sont les seules dont la probabilité n'est pas négligeable. :

$$\Delta l = \pm 1 \quad \text{et} \quad \Delta m = 0, \pm 1$$

Les nombres quantiques principaux des niveaux concernés par la transition, déterminent l'intensité du rayonnement.

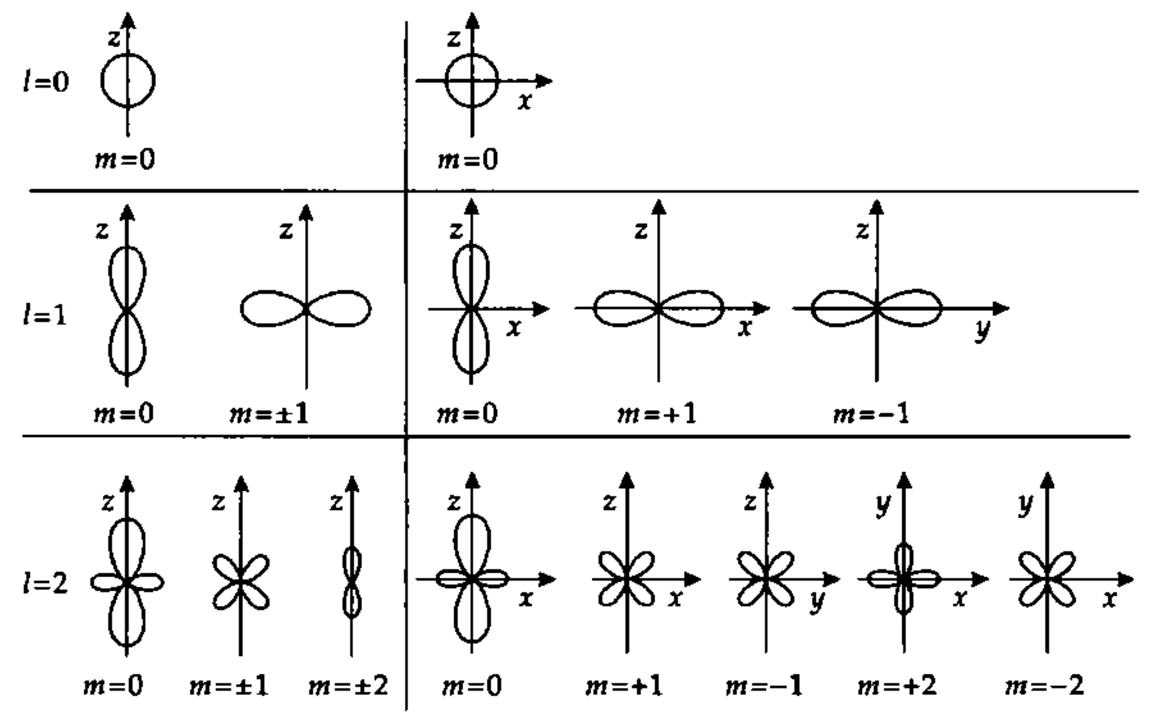


Fig. 26.11 : *Distribution spatiale de la densité électronique pour des états s, p et d. L'axe de quantification est l'axe z*

7. Structure en couches du cortège électronique

Couches électroniques : l'ensemble des électrons périphériques de même nombre quantique principal n forme une couche.

Classification spectroscopique d'après le nombre quantique principal :

n	1	2	3	4	...
Couche	K	L	M	N	...

26.4 Atomes à plusieurs électrons

1. Modèle vectoriel de l'atome

- **Principe d'exclusion de Pauli** : Chaque état de l'atome, caractérisé par les nombres quantiques n, l, m, ne peut être occupé que par deux électrons d'orientation de spins différents $m_s = \pm 1/2$. Autrement dit, un état ne peut être occupé que par des électrons dont tous les nombres quantiques (n, l, m et s) sont différents.

Modèle vectoriel de l'atome : le moment cinétique orbital de chaque électron est représenté par le vecteur $\vec{l}$, le spin par le vecteur $\vec{s}$. Ces vecteurs ne peuvent prendre que certaines orientations par rapport à l'axe de quantification z (quantification spatiale).

Le modèle vectoriel est utilisé pour l'analyse systématique de spectres complexes d'atomes à plusieurs électrons et l'étude de la structure fine de ces spectres.

Quantification spatiale : propriété des vecteurs moments cinétiques $\vec{l}$ et $\vec{s}$ d'un électron, dont les projections sur un axe donné (par exemple la direction z d'un champ magnétique externe) ne peuvent prendre que certaines valeurs discrètes. Cette direction privilégiée est appelée **axe de quantification**. Les composantes du vecteur $\vec{l}$ sur l'axe de quantification, ne peuvent prendre (en unités $\hbar$) que les $(2l + 1)$ valeurs entières $l, l - 1, \ldots, 0, \ldots, -l + 1, -l$. Le vecteur $\vec{s}$ ne possède (en unités $\hbar$) que les composantes $+1/2$ et $-1/2$ le long de l'axe quantique.

2. Moment cinétique total dans le modèle vectoriel

Moment angulaire total			ML^2T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$	$\vec{j}$	J s	moment angulaire total
$j_z = l_z + s_z$	$\vec{l}$	J s	moment cinétique orbital
	$\vec{s}$	J s	spin
	j_z	J s	composante z du moment angulaire total
	l_z	J s	composante z du moment cinétique orbital
	s_z	J s	composante z du spin

Le moment angulaire total d'un électron de moment cinétique orbital l, d'après les règles d'addition vectorielle en mécanique quantique, ne peut prendre que les valeurs $j = 1/2$ (pour $l = 0$), $j = l + 1/2, l - 1/2$ (pour $l > 0$). Le vecteur $\vec{j}$ a par conséquent $2j + 1$ orientations possibles par rapport

à l'axe z. Les projections des vecteurs orbitaux et de spin s'additionnent, $m_j = m_l + m_s$.

3. Couplage spin-orbite

Couplage spin-orbite : interaction magnétique entre le spin et le moment cinétique orbital :

Couplage spin-orbite	Symbole	Unité	Dénomination
$V_{ls} = -\frac{Ze^2}{2m_e^2c^2}\frac{1}{r^3}\hat{\vec{\mathbf{l}}}\cdot\hat{\vec{\mathbf{s}}}$	Z	1	numéro atomique
	e	C	charge de l'électron
	m_e	kg	masse de l'électron
	c	m/s	vitesse de la lumière
	$\hat{\vec{\mathbf{l}}}$	J s	opérateur de moment cinétique
	$\hat{\vec{\mathbf{s}}}$	J s	opérateur de spin

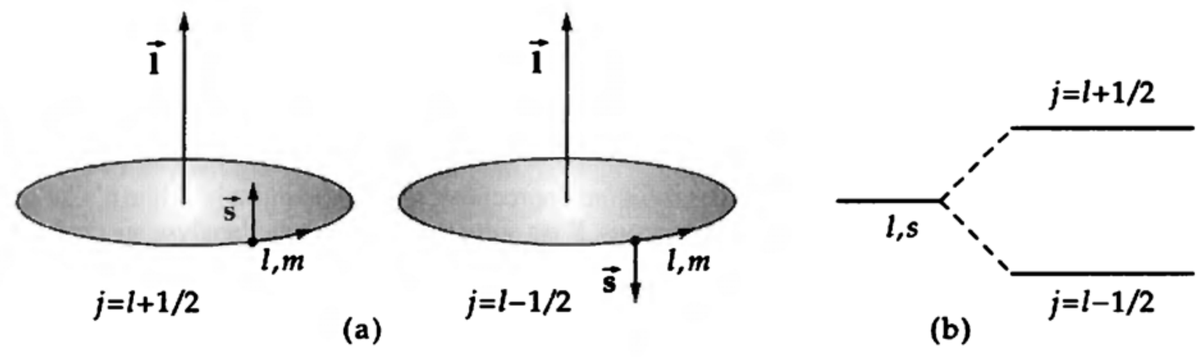


Fig. 26.12 : *Couplage spin-orbite. (a) : représentation de l'interaction magnétique entre spin et mouvement orbital, (b) : dédoublement d'un niveau de moment cinétique orbital l*

4. Couplage LS

Schéma de couplage pour une interaction spin-orbite faible. Les moments cinétiques orbitaux de tous les électrons d'un atome sont d'abord couplés entre eux pour former le moment cinétique orbital total, $\vec{\mathbf{L}}$:

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{l}}_i \quad \text{avec} \quad |\vec{\mathbf{L}}| = \hbar\sqrt{L(L+1)}$$

puis on couple les spins des électrons pour former le spin total, $\vec{\mathbf{S}}$:

$$\vec{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{s}}_i \quad \text{avec} \quad |\vec{\mathbf{S}}| = \hbar\sqrt{S(S+1)}$$

Le moment angulaire total $\vec{\mathbf{J}}$ de l'atome est alors la **somme vectorielle** du moment cinétique orbital total $\vec{\mathbf{L}}$ et du spin total $\vec{\mathbf{S}}$:

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{L}} + \vec{\mathbf{S}} \quad \text{avec} \quad |\vec{\mathbf{J}}| = \hbar\sqrt{J(J+1)}$$

Le nombre quantique J peut prendre les valeurs suivantes :

$$J = L+S,\ L+S-1, \ldots, \ |L-S|+1,\ |L-S|$$

J admet $2S+1$ valeurs, si $L \geq S$; ou $2L+1$ valeurs, si $L \leq S$.

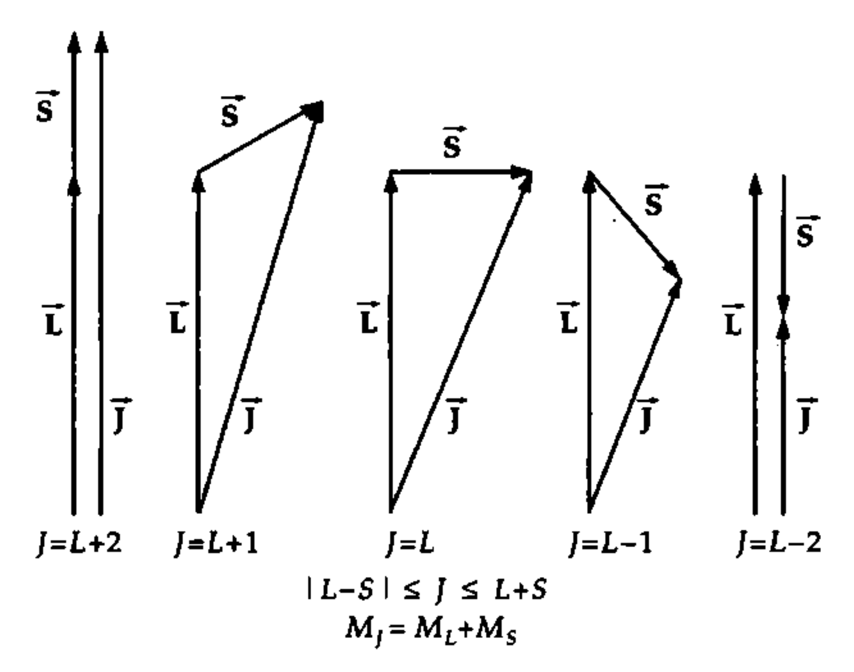


Fig. 26.13 : *Couplage LS pour $L > S$ et $S = 2$*

- Le couplage LS peut être utilisé pour des solutions approchées, si l'interaction spin-orbite n'a qu'une faible influence sur le mouvement des électrons. Il est surtout appliqué dans l'analyse spectrale des atomes légers.

5. Couplage jj

Schéma de couplage dans le cas d'une forte interaction spin-orbite. Le moment cinétique orbital $\vec{\mathbf{l}}_i$ et le spin $\vec{\mathbf{s}}_i$ de l'électron i de l'atome sont couplés pour former le moment angulaire total de chaque électron :

$$\vec{\mathbf{j}}_i = \vec{\mathbf{l}}_i + \vec{\mathbf{s}}_i$$

Le moment angulaire total $\vec{\mathbf{J}}$ de l'atome s'obtient par l'addition vectorielle des moments angulaires individuels :

$$\vec{\mathbf{J}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{j}}_i \quad \text{avec} \quad |\vec{\mathbf{J}}| = \hbar\sqrt{J(J+1)}$$

- Le couplage jj peut être utilisé pour des solutions approchées, si l'interaction spin-orbite est forte. Il est surtout utilisé pour l'analyse spectrale d'atomes lourds.

▷ Dans le cas du traitement analytique à l'aide de l'équation de Schrödinger, les vecteurs moments cinétiques de spin et d'orbite sont remplacés par leurs opérateurs correspondants.

6. Multiplets

Multiplet : groupe de niveaux d'énergie (ou de termes spectraux), de valeurs différentes du nombre quantique J du même moment cinétique total. Ces niveaux proviennent de la levée de la dégénérescence d'un niveau.

Multiplicité : nombre de niveaux (ou de termes spectraux) qui font partie du multiplet (L, S, J) d'un niveau d'énergie :

$$S \leq L : \quad \text{multiplicité } 2S+1 \qquad S > L : \quad \text{multiplicité } 2L+1$$

■ $S = 0$: multiplicité 1, singulet
$S = \frac{1}{2}$: multiplicité 2, doublet
$S = 1$: multiplicité 3, triplet

● Pour la caractérisation des termes spectraux d'atomes à plusieurs électrons, on utilise les dénominations spectroscopiques suivantes :

multiplicité **moment cinétique orbital total** moment angulaire total			
	Symbole	Unité	Dénomination
$^{2S+1}L_J$	S	1	nbre. quantique de spin total
	L	1	nbre. quantique de moment cinétique orbital
	J	1	nbre. quantique de moment angulaire total

7. **Règles de Hund**

Les configurations électroniques les plus stables, en vertu du **principe d'exclusion de Pauli**, sont celles qui correspondent à :

1. spin total S maximum
2. moment cinétique orbital L maximum
3. moment angulaire total $J = L - S$ pour les couches moins qu'à moitié pleines
moment angulaire total $J = L + S$ pour les couches plus qu'à moitié pleines

Le remplissage des couches et sous-couches d'un atome s'effectue selon ces règles.

Règles de sélection : relations entre les nombres quantiques de deux états stationnaires, pour qu'une transition dipolaire électrique puisse avoir lieu entre ces états :

$$\Delta S = 0\,, \quad \Delta L = \pm 1\,, \quad \Delta J = 0, \pm 1 \text{ (mais pas } 0 \longrightarrow 0)\,, \quad \Delta M_J = 0, \pm 1$$

8. **Exemple : atome d'Hélium**

Dans l'atome d'Hélium (numéro atomique $Z = 2$) les spins des deux électrons sont couplés à $S = 0$ (singulet) ou à $S = 1$ (triplet). Il y a deux systèmes indépendants : **parahélium** ($S = 0$) et **orthohélium** ($S = 1$). La fonction de spin de l'état singulet est **antisymétrique** par rapport à l'échange de particules, celle du triplet est **symétrique**. Les niveaux de basses énergies sont ceux pour lesquels les électrons occupent les états à particule unique de plus basse énergie dans le potentiel coulombien :

Électron 1	Électron 2	Configuration	Moment cin. orbital
$1s$	$1s$	$(1s)^2$	$L = 0$ (S)
$1s$	$2s$	$(1s, 2s)$	$L = 0$ (S)
$1s$	$3s$	$(1s, 3s)$	$L = 0$ (S)
$1s$	$2p$	$(1s, 2p)$	$L = 1$ (P)
$1s$	$3p$	$(1s, 3p)$	$L = 1$ (P)
$1s$	$3d$	$(1s, 3d)$	$L = 2$ (D)

Termes spectraux du parahélium : $^1S_{J=0}$, $^1P_{J=1}$, $^1D_{J=2}$.
Termes spectraux de l'orthohélium : $^3S_{J=1}$, $^3P_{J=0,1,2}$, $^3D_{J=1,2,3}$.
La séparation de la structure fine des termes ^{2S+1}L en fonction des valeurs possibles de J est extrêmement faible pour l'atome d'Hélium.

▷ D'après le principe de Pauli, la configuration électronique $(1s)^2$ n'est pas possible dans l'orthohélium, puisque la fonction de spin de même que la position seraient symétriques par rapport à l'échange de particules. Une fonction propre totale, d'après le principe d'exclusion ne peut être qu'une fonction antisymétrique par rapport à l'échange de toutes les variables (position, spin).
Les états comparables sont plus fortement liés dans l'orthohélium que dans le parahélium (énergie d'échange positive dans les états symétriques).

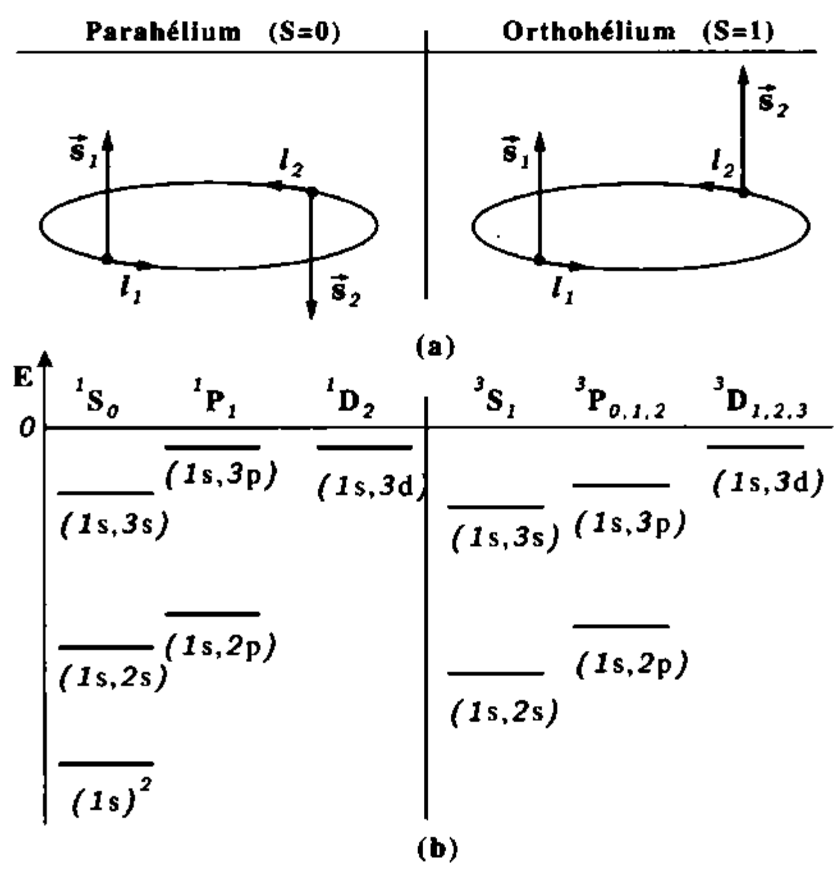


Fig. 26.14 : *Atome d'Hélium. (a) : Parahélium (singulet de spin, $S = 0$) et Orthohélium (triplet de spin, $S = 1$), (b) : structure. $(nl, n'l')$: configuration électronique (n nombre quantique principal, l moment cinétique orbital), ${}^{2S+1}L_J$: classification spectroscopique selon le spin total (S), moment cinétique orbital total (L) et moment angulaire total (J)*

9. Déplacement isotopique

Structure hyperfine des raies spectrales qui se produit lors de mélanges isotopiques. Elle est due à :

- des constantes de Rydberg différentes pour chaque isotope, en tenant compte du mouvement autour du centre de masse des électrons et du noyau (de masse différente d'un isotope à l'autre)
- des différences des potentiels coulombiens effectifs des noyaux à cause de différences de moment quadrupolaire des noyaux des isotopes).

26.5 Rayons X

1. Rayons X caractéristiques

Rayonnement électromagnétique émis lors de transitions d'électrons de couches externes vers des états vacants de couches internes. En bombardant, par exemple, une anode métallique avec des électrons d'énergie cinétique suffisante, des électrons de couches profondes sont arrachés par collision. Les lacunes d'électrons ainsi créées dans des couches de nombre quantique principal n sont remplies par des électrons venant de couches de nombre quantique m supérieur. L'énergie des photons émis est :

$$hf_{mn} = E_m - E_n$$

- L'énergie des rayons X se situe dans le domaine des keV. Les rayons X caractéristiques sont des raies spectrales étroites, caractéristiques d'un élément donné et des niveaux concernés par la transition.

Les principales lignes caractéristiques de spectres de rayons X de quelques éléments sont reportés dans le tableau 30.4/1.
Rayonnement primaire : rayons X caractéristiques produits par ionisation par des collisions d'électrons sur des atomes.
Rayonnement de fluorescence : rayons X produits par photo-ionisation, c'est à dire éjection d'un électron d'une couche profonde d'un atome par absorption d'un photon X, puis émission d'un rayon X caractéristique à la suite du réarrangement du cortège électronique.

Si un électron de la couche K ($n = 1$) est éjecté, la lacune électronique créée peut être remplie par des transitions d'électrons venant des couches L ($n = 2$), M ($n = 3$) etc. Un réarrangement électronique se produit et l'atome ne redevient électriquement neutre qu'après **capture d'électrons**.

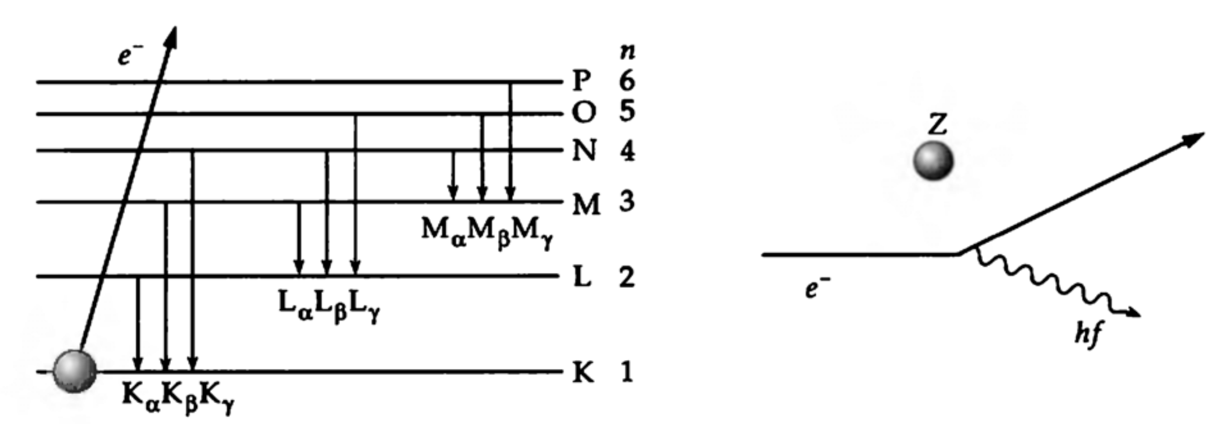


Fig. 26.15 : *Rayons X caractéristiques et rayonnement de freinage (Bremsstrahlung) d'électrons rapides ($v/c \leq 1$) lors de l'interaction avec un noyau*

Rayons X de la série K : lignes spectrales émises par un atome lors de transitions d'électrons de couches externes vers la couche K. De manière analogue, il y a des séries L, M, N etc.

Les lignes d'une série sont désignées par la dénomination de la couche vers laquelle la transition a lieu, indicée d'une lettre grecque qui dépend des sous-états concernés par la transition ($K_\alpha, K_\beta, K_\gamma, \ldots$).

- K_{α_1} correspond au rayonnement X émis par la transition de l'état 2s de la couche L vers l'état 1s de la couche K. K_β correspond aux transitions de la couche M vers la couche K. Des indices

supplémentaires $K_\beta 1$, $K_\beta 2$ ... précisent les sous états concernés. K_γ correspond aux transitions de la couche N vers la couche K.

2. **Loi de Moseley pour les fréquences caractéristiques**

Loi de Moseley			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\sqrt{\frac{f_{mn}}{cR}} = a(Z-\sigma)$	a	1	constante
	f_{mn}	s^{-1}	fréquence
	R	m^{-1}	constante de Rydberg
	c	ms^{-1}	vitesse de la lumière
	Z	1	numéro atomique
	σ	1	constante d'écran

La valeur de la constante a dépend du nombre quantique des couches entre lesquelles a lieu la transition.

Constante d'écran σ : différence entre le numéro atomique d'un atome et son numéro atomique effectif. Elle tient compte du fait que les électrons de valence ne ressentent pas toute la charge du noyau à cause de la présence des électrons des couches internes qui font écran à la charge du noyau. Pour les raies α d'un élément de numéro atomique Z, la loi de Moseley donne :

$$f_{K_\alpha} = \frac{3}{4}cR(Z-1)^2$$

$$f_{L_\alpha} \approx \frac{5}{36}cR(Z-7.4)^2$$

3. **Rayonnement de freinage** (*Bremsstrahlung*)

Spectre continu de rayons X produit par l'accélération d'une charge électrique, par exemple un électron dévié par le champ coulombien d'un noyau. Le spectre du rayonnement de freinage est limité par une longueur d'onde minimum λ_{min}.

- L'énergie hf d'un photon X ne peut pas être supérieure à l'énergie cinétique W_c des électrons qui le produisent :
  $W_c = eU_0 = hf_{max} = hc/\lambda_{min}$

Longueur d'onde limite du rayonnement de freinage			**L**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\lambda_{min} = \frac{ch}{eU_0}$	λ_{min}	m	longueur d'onde limite
≈ 1.24 Å pour $U_0 = 10^4$ V	c	m/s	vitesse de la lumière
	h	J · s	constante de Planck
	e	C	charge élémentaire
	U_0	V	tension accélératrice

M La mesure de la longueur d'onde limite du rayonnement de freinage permet une très bonne détermination de la constante de Planck h.

26.5.1 Applications des rayons X

M La grande profondeur de pénétration des rayons X dans la matière, due à leur énergie, est mise à profit pour la **mesure d'épaisseur**, la **mesure de niveau de remplissage**, le **contrôle de matériaux** et le **contrôle de qualité**.

1. Absorption des rayons X

Coefficient d'absorption linéaire μ : valeur réciproque de la profondeur de pénétration pour laquelle l'intensité d'un faisceau de rayons X est réduite du facteur e (e $\approx 2,718$). Le coefficient d'absorption des rayons X diminue lorsque l'énergie augmente (fréquence des photons X ou tension accélératrice U_0 des électrons).

Coefficient d'absorption massique, μ/ρ : coefficient rapporté à la masse volumique de l'absorbant (l'épaisseur du matériau est alors exprimée en masse par unité de surface voir **Tab. 30.6/1**.

Coins d'absorption : discontinuités dans la courbe représentative des coefficients d'absorption. Ces discontinuités se produisent pour les énergies correspondantes à l'énergie de liaison des électrons des couches K, L, M, ... À ces énergie, l'absorption augmente brusquement (Fig. 26.17).

2. Effet Auger

Processus d'ionisation **non radiatif** en deux étapes. Dans un atome auquel des rayons X ont arraché un électron d'une couche profonde (généralement K), l'énergie libérée par la transition d'un électron d'une couche supérieure vers la lacune n'est **pas émise** sous forme radiative, mais transférée à un électron d'une couche supérieure (L, M, ...) qui est alors éjecté (électron Auger).

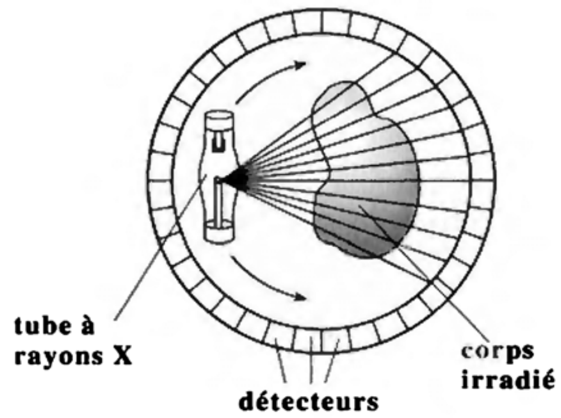


Fig. 26.16 : *Principe de la tomographie par rayons X*

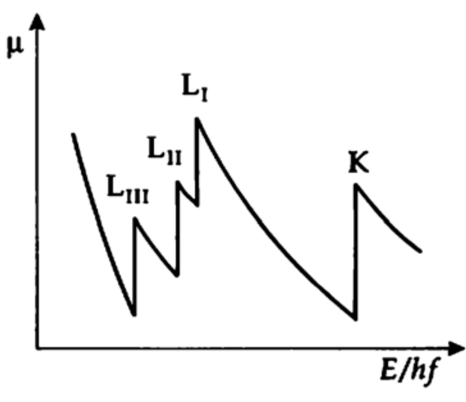


Fig. 26.17 : *Coefficient d'absorption des rayons X en fonction de l'énergie et coins d'absorption*

[M] La mesure des rayons X est basée sur leur aptitude à l'**ionisation** ou à la **dissociation** . Les rayons X peuvent ioniser les atomes ou les molécules d'un compteur gazeux (chambre d'ionisation, compteur Geiger-Müller) dont le courant sera proportionnel au flux reçu. L'intensité d'un faisceau de rayons X peut aussi être mesurée par les degré de noircissement d'un film photographique.

[M] **Tomographie par rayons X** : technique radiographique qui utilise une source de rayons X et un ensemble de films photographiques ou de détecteurs électroniques pour mesurer l'intensité des rayons X après traversée du corps à analyser. En utilisant des détecteurs électroniques distribués régulièrement dans l'espace et couplés à un ordinateur, la déconvolution des résultats de mesures d'intensité transmise dans les différentes directions, permet d'obtenir des images en 3 dimensions des inhomogénéités de densité du corps étudié (Fig. 26.16).

[M] **Tomographes à émission de positrons** : des émetteur de positrons peuvent mettre en évidence des processus dynamiques internes au corps. Le principe de la mesure est analogue à la tomographie par rayons X couplée à un système informatique.

26.6 Spectres moléculaires

Spectres moléculaires : constitués de séries de raies, de bandes et de systèmes de bandes spectrales. Ils sont produits par :

- transitions électroniques, qui produisent des rayonnements dans le domaine infrarouge, visible et ultraviolet
- vibrations, qui produisent des rayonnements dans l'infrarouge
- rotations, qui produisent des rayonnements dans l'infrarouge lointain

1. Spectres de vibrations

Excitation de vibrations : se produit par des oscillations des atomes d'une molécule parallèlement (parfois transversalement) à la direction de la liaison chimique. Le centre de gravité de la molécule reste immobile, la configuration électronique n'est pas affectée.
Potentiel de Lennard-Jones : potentiel théorique d'interaction entre deux molécules non polaires et quasi-sphériques en fonction de leur distance r (Fig. 26.18) :

$$V(r) = \left(-\frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}}\right)$$

Les constantes a et b sont spécifiques du matériau et dépendent fortement de la température. La force répulsive, à cause de l'exposant du deuxième terme, ne devient importante que pour des distances faibles entre atomes de la molécule.
Énergie de dissociation de molécules diatomiques : voir **Tab. 30.1/6**.

Pour des oscillations de faible amplitude, on peut utiliser l'approximation :

$$V(r) = \text{const} \cdot (r - r_0)^2$$

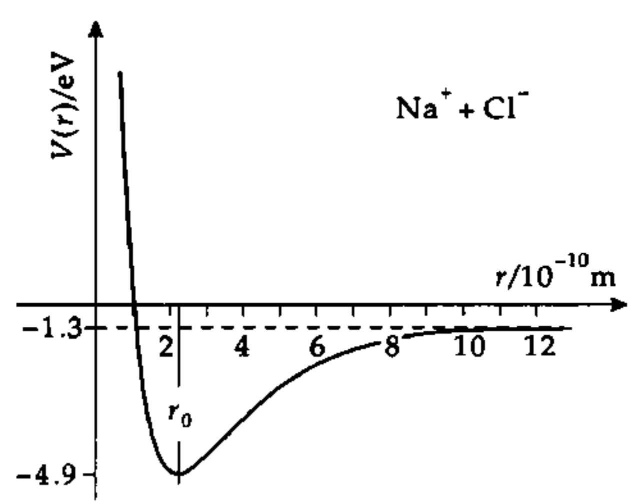


Fig. 26.18 : *liaison ionique dans la molécule de NaCl. Énergie potentielle V en fonction de la distance r des ions, distance au repos : $r_0 \approx 2.5 \cdot 10^{-10}$ m*

Spectre de vibrations d'une molécule diatomique : produit par les transitions entre les états de vibration de la molécule. Dans l'approximation des vibrations de petite amplitude, les oscillations des deux atomes autour de leur position d'équilibre r_0 sont celles d'un oscillateur harmonique dont les niveaux d'énergie

sont équidistants :

Vibrateur quantique				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$E_{Vib} = hf(v + \frac{1}{2})$	E_{Vib}	J	énergie	
	h	Js	constante de Planck	
$f = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{k}{\mu}\right)^{1/2}$	f	s^{-1}	fréquence	
	v	1	nombre quantique de vibration	
$v = 0, 1, 2, \ldots$	k	kg/s^2	constante de rappel	
	μ	kg	masse réduite	

- Les spectres de vibrations se distinguent par l'**équidistance** des niveaux d'énergie.

▷ Dans la molécule de NaCl, quelques 20 niveaux de vibration sont connus. Les niveaux sont équidistants de 0,04 eV.

2. Spectres de rotation

Les **spectres de rotation de molécules diatomiques** se produisent par des transitions entre des états de rotation de la molécule. La rotation a lieu autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de la molécule, sans modification de la distance entre les atomes de la molécule, et sans rotation interne (rotation relative des deux atomes).

Rotateur rigide : la distance entre les atomes d'une molécule diatomique n'est pas modifiée pendant la rotation (haltère). L'énergie du rotateur rigide est uniquement déterminé par son moment d'inertie I et son moment cinétique J :

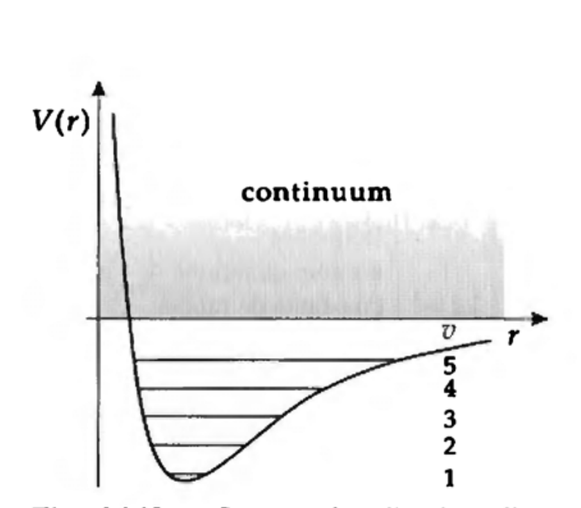
Rotateur quantique				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
	E_{Rot}	J	énergie	
$E_{Rot}(J) = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$	h	Js	constante de Planck	
	J	1	nombre quantique de rotation	
	I	$kg\,m^2$	moment d'inertie pour r_0	

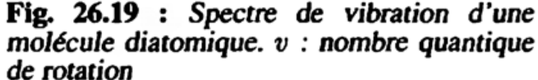
- La séparation en énergie d'états de rotation voisins augmente linéairement avec le nombre quantique de rotation :

$$\Delta E = E_{Rot}(J) - E_{Rot}(J-1) = \frac{\hbar^2}{I} J$$

▷ La quantité $\hbar^2/I$, pour des molécules typiques, prend une valeur comprise entre 10^{-4} eV et 10^{-2} eV. La séparation entre deux niveaux de rotation voisins est plus faible que la séparation entre niveaux de vibration. Pour la molécule de NaCl, il y a environ 40 états de rotation.

▷ Un état de vibration donné, englobe une série d'états de rotation.




Fig. 26.19 : *Spectre de vibration d'une molécule diatomique. v : nombre quantique de rotation*

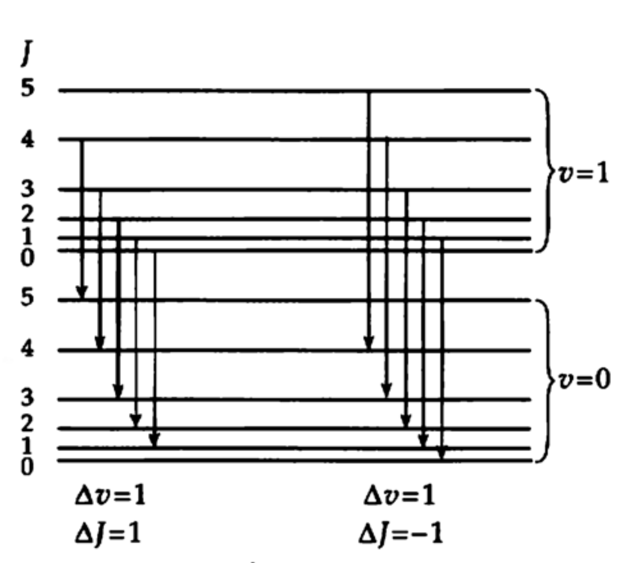


Fig. 26.20 : *États de vibration-rotation d'une molécule diatomique et les transitions permises v : nombre quantique de vibration, J : nombre quantique de rotation*

Règle de sélection pour les transitions entre états de vibration :

$$\Delta v = \pm 1$$

Règle de sélection pour les transitions entre états de rotation :

$$\Delta J = \pm 1$$

Bande de vibration-rotation : groupe de lignes spectrales qui correspondent à des transitions entre états de rotation fondés sur différents états de vibration. Les bandes de vibration-rotation se situent dans l'infrarouge proche et lointain.

Continuum de dissociation : spectre continu contigu à la limite inférieure de longueur d'onde d'une bande de vibration-rotation. Il correspond à la dissociation de la molécule dans des états libres de ses constituants.

▷ Les spectres de vibration-rotation de molécules diatomiques sont provoqués par le mouvement des noyaux des atomes. En outre, des transitions entre différentes configurations électroniques de la molécule, d'énergie comprise entre 1 eV et 10 eV, se produisent. La modification de la configuration électronique induit un changement du potentiel de liaison des ions ou atomes de la molécule, de sorte que la distance d'équilibre, le moment d'inertie et la fréquence propre d'oscillation et, par conséquent, les énergies d'excitation des états de vibration et de rotation sont également modifiés.

Spectres électroniques spectres complexes ayant une structure en bande, dus à un grand nombre de transitions provenant de la modification simultanée des états électroniques, de vibration et de rotation d'une molécule.

3. Spectres Raman

Produits par la diffusion inélastique de photons par des moléécules ou des cristaux. Le spectre du rayonnement diffusé contient, en plus des raies de la lumière incidente ν_0, des raies de fréquences décalées symétriquement $\nu_0 \pm \nu_i$ où ν_i désigne certaines fréquences de rotation ou de vibration de la molécule. (Fig. 26.21) :

$$\begin{array}{lcll} hf_0 + E_1 & \rightarrow & hf_r + E_1 & (a) \\ hf_0 + E_1 & \rightarrow & hf_s + E_2 & (b) \\ hf_0 + E_2 & \rightarrow & hf_a + E_1 & (c) \end{array}$$

E_1 et E_2 sont les énergies des niveaux de vibration et de rotation de la molécule qui diffuse le rayonnement incident hf_0.

Lignes de Rayleigh : raies spectrales dont la fréquence de diffusion f_r est égale à celle du rayonnement incident f_0 (processus a) :

$$f_r = f_0$$

Lignes de Stokes : raies dont la fréquence de diffusion f_s est plus petite que la fréquence f_0 de la lumière incidente (processus b) :

$$f_s = f_0 - \frac{E_2 - E_1}{h}$$

Le photon incident cède de l'énergie à la molécule.

Lignes antistokes : lignes dont la fréquence de diffusion f_a est plus grande que la fréquence incidente f_0 (processus c) :

$$f_a = f_0 + \frac{E_2 - E_1}{h}$$

Le photon reçoit de l'énergie de vibration ou de rotation d'une molécule dans un état excité.

M Les spectres de Raman permettent de déduire des informations sur les fréquences propres des vibrations, les moments d'inertie et la forme des molécules.

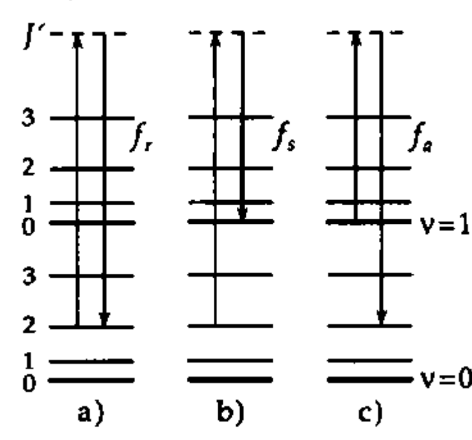


Fig. 26.21 : *Spectres de Raman. Excitation d'un niveau virtuel intermédiaire (ligne en tirets). (a) : lignes de Rayleigh, (b) : lignes de Stokes, (c) : lignes antistokes*

26.7 Atomes dans des champs externes

1. Électron dans le champ magnétique

Opérateur de Hamilton ou **hamiltonien** d'un électron dans un champ magnétique $B_z \perp$ au plan x, y :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + (p_y + m\omega_c x)^2) \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{eB_z}{m}$$

Passage de l'expression classique de la quantité de mouvement à l'**opérateur de quantité de mouvement** :

$$p_x \to -j \cdot \hbar \frac{\partial}{\partial x} \qquad p_y \to -j \cdot \hbar \frac{\partial}{\partial y}$$

Substitution : $q = (x - x_0) = x + \dfrac{\hbar k_y}{m\omega_c}$

Équation de Schrödinger à une dimension dans la direction x :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{2}m\omega_c^2q^2\right)\psi(x,y)=E\psi(x,y)$$

▷ Cette équation différentielle est similaire à celle d'un oscillateur harmonique (voir page 89).

Les niveaux d'énergie forment un spectre équidistant :

$$E_n=\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Fréquence de cyclotron : la pulsation (ou fréquence circulaire) ω_c :

$$\omega_c=\frac{eB_z}{m}$$

▷ Cette relation est aussi valable pour les électrons libres dans un solide ou les nucléons dans un noyau. À cause de la modification du mouvement d'une particule libre par le potentiel dans un milieu matériel, il faut remplacer la masse de la particule par sa "masse effective" m^*.

2. Effet Zeeman

Décomposition des raies spectrales émises ou absorbées par les atomes lorsqu'ils sont placés dans un champ magnétique. L'interaction du moment magnétique de l'atome avec le champ magnétique externe produit un déplacement des niveaux d'énergie proportionnel à l'induction B du champ.

Effet Zeeman transversal : observation de la lumière émise dans une direction perpendiculaire au champ magnétique.

Effet Zeeman longitudinal : observation de la lumière émise dans une direction parallèle aux lignes de champ magnétique.

Effet Zeeman normal : lors de l'observation transversale, décomposition d'une ligne de fréquence f en un triplet, composé de la ligne originale (composante π) et de deux lignes déplacées symétriquement de part et d'autre $f \pm \Delta f$ (composantes σ) (Fig. 26.22).

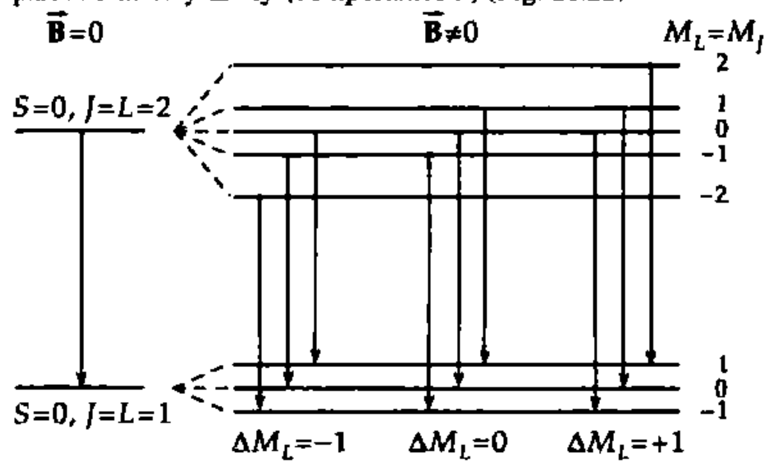


Fig. 26.22 : *Effet Zeeman normal*

Ceci ne se produit qu'entre niveaux **singulets** ($S = 0$, $J = L$). Le moment magnétique de l'atome est déterminé par le moment orbital. Le terme L se décompose en $2L + 1$ termes, qui sont séparés de $\Delta E = \mu_B \cdot B$, où μ est le magnéton de Bohr. Indépendante de L, la règle de sélection $\Delta M = 0, \pm 1$ conduit à une décomposition en triplet.

▷ Les trois raies sont polarisées rectilignement, la raie centrale parallèlement à $\vec{B}$, les raies déplacées perpendiculairement à $\vec{B}$.

En observation longitudinale (parallèlement à $\vec{B}$, la raie centrale n'est pas visible, les raies σ latérales sont polarisées circulairement, celle de plus haute fréquence tourne dans le sens du vecteur axial $\vec{b}$.

Effet Zeeman anormal : se produit lorsque les états concernés par les transitions ne sont pas des singulets de spin. Lorsque $g \neq 1$, on observe plus de trois composantes (Fig. 26.23).

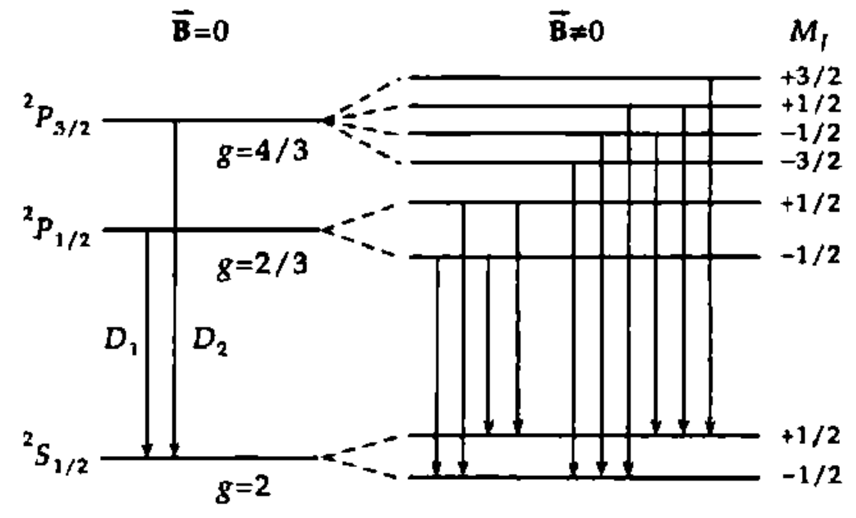


Fig. 26.23 : *Effet Zeeman anormal. Décomposition de l'état fondamental ($^2S_{1/2}$) et des deux premiers états excités ($^2P_{1/2}$,$^2P_{3/2}$) de l'atome de Na dans un champ magnétique $\vec{B}$. g : facteur de Landé. Les flèches indiquent les transitions permises (règle de sélection $\Delta M_J = 0, \pm 1$)*

3. Séparation en énergie dans le champ magnétique

Séparation en énergie dans un champ magnétique			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Delta E = g(L,S,J) \cdot m_J \cdot \mu_B \cdot B$	ΔE	J	écart d'énergie
	m_j	1	nombre quantique magnétique
	$g(L,S,J)$	1	facteur de Landé
	μ_B	J/T	magnéton de Bohr
	B	T	induction magnétique

Facteur de Landé, $g(L,S,J)$: relation entre le rapport gyromagnétique et les nombres quantiques :

$$g(L,S,J) = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}$$

- Effet Zeeman anormal dans le spectre du Sodium : la ligne D_1 (transition $^2P_{1/2} \longrightarrow {}^2S_{1/2}$) et la ligne D_2 (transition $^2P_{3/2} \longrightarrow {}^2S_{1/2}$) se séparent respectivement en 4 et 6 lignes.

Résonance paramagnétique : absorption sélective d'un rayonnement électromagnétique par les atomes d'une substance, liée aux transitions entre niveaux de Zeeman dans un champ magnétique externe.

[M] **Résonance de spin** : la substance à analyser est placée dans un champ magnétique pour lever la dégénérescence de spin. L'atténuation d'un faible champ haute fréquence par la substance est mesurée en fonction de la fréquence. Lorsque la fréquence de l'oscillateur haute fréquence coïncide avec la fréquence correspondant à une transition entre des niveaux de Zeeman, l'atténuation est maximale.

4. Effet Stark

Décomposition des raies spectrales émises ou absorbées par des atomes lorsqu'ils sont placés dans un champ électrique $\vec{E}$. La séparation, même pour des champs de 10^3 à 10^6 V/cm, reste faible et sa mesure nécessite des spectrographes de très grand pouvoir séparateur.

Effet Stark quadratique : la décomposition des niveaux est proportionnelle au carré du champ électrique E^2. L'effet Stark quadratique se produit pour des atomes qui sont dépourvus de moment dipolaire électrique permanent dans leur état fondamental. Dans le champ électrique externe $\vec{E}$, les atomes se polarisent. Le moment dipolaire induit $\vec{d}$, proportionnel à $\vec{E}$, possède alors dans le champ $\vec{E}$ l'énergie potentielle $-\vec{d}\cdot\vec{E} \sim \vec{E}^2$. L'effet Stark quadratique est par conséquent lié à la **polarisabilité électrique** des atomes.

Effet Stark linéaire : se produit pour l'atome d'Hydrogène et les atomes hydrogénoïdes qui possèdent un moment dipolaire permanent, la décomposition est alors proportionnelle à E.
A lieu pour des atomes dont certains états de même nombre quantique principal sont dégénérés par rapport au moment cinétique, de sorte que des états de parités différentes (par ex. : $l = 0$ et $l = 1$) se mélangent.

- L'Hydrogène, dans son niveau fondamental ($n = 1$, $l = 0$) ne présente **pas** d'effet Stark linéaire.

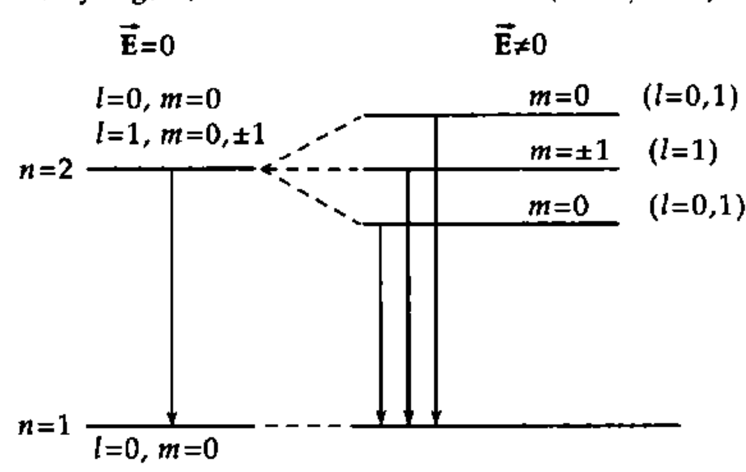


Fig. 26.24 : *Effet Stark linéaire dans l'atome d'Hydrogène*

26.8 Système périodique des éléments

1. Hypothèses fondamentales pour le système périodique

a) Modèle à particules indépendantes : chaque électron d'un atome se meut dans un potentiel effectif, indépendemment des autres électrons. La répulsion mutuelle des électrons n'occasionne qu'une faible interaction résiduelle. Ce modèle, conjointement avec le principe d'exclusion de Pauli, explique le système périodique des éléments.

- **Principe de Pauli** : dans un système formé de fermions identiques (particules indiscernables de spin demi-entier), il ne peut y avoir plus d'une particule dans le même état ($n\, l\, m_l\, m_s$).

Appliqué à un atome, cela signifie : deux électrons ne peuvent occuper le même état que si l'un au moins de leurs nombres quantiques n, l, m_l et m_s diffère. Dans un atome, chaque électron possède son propre jeu de nombres quantiques.

b) Couche électronique : l'ensemble des électrons dont les états sont caractérisés par le même nombre quantique principal n.

Sous-couche : ensemble des orbitales électroniques d'un atome qui possèdent le même nombre quantique principal n **et** orbital l. Les couches et sous-couches correspondent au groupement des niveaux d'énergie ; la séparation en énergie des sous-couches est plus faible que celle des couches.

- Principe de Pauli : dans un atome à plusieurs électrons, une couche de nombre quantique principal n comporte au maximum $2n^2$ électrons.

Le remplissage des couches et sous-couches des dix premiers éléments est représenté sur le tableau suivant (les flèches indiquent l'orientation du spin) :

Numéro atomique	Élément	Couche État	K 1s	M 2s	2p	Énergie d'ionisation (eV)
1	H		↑			13,6
2	He		↑↓			24,6
3	Li		↑↓	↑		5,4
4	Be		↑↓	↑↓		9,32
5	B		↑↓	↑↓	↑	8,296
6	C		↑↓	↑↓	↑↑	11,256
7	N		↑↓	↑↓	↑↑↑	14,545
8	O		↑↓	↑↓	↑↑↑↓	13,614
9	F		↑↓	↑↓	↑↑↑↓↓	17,418
10	Ne		↑↓	↑↓	↑↑↑↓↓↓	21,559

2. Remplissage des couches électroniques

L'ordre de remplissage des états électroniques des couches et sous-couches correspond à l'ordre des énergies croissantes en fonction de n et l :

Dans une couche n, l'état $l = 0$ est occupé en premier, puis les états l jusqu'à $l = n - 1$.

Dans une sous-couche, les états sont occupés de façon à obtenir le moment angulaire total le plus élevé possible.

Orbitale : état d'un atome défini par les nombres quantiques n et l.

Électrons de valence : déterminent les propriétés chimiques et optiques des atomes. Ce sont les électrons les plus périphériques de l'atome. Ils correspondent généralement aux électrons s et p de la couche n la plus externe.

a) **Atomes de gaz rares** : atomes dont les couches sont entièrement remplies (saturées), en particulier, tous les états de la couche périphérique sont occupés. Pour cette raison, ils sont chimiquement inertes, leur énergie d'ionisation est très grande.

b) **Éléments de transition** : éléments métalliques dont une couche électronique interne n'est que partiellement remplie. Pour ces éléments, il est énergétiquement plus avantageux de remplir d'abord la couche $n + 1$, mais de nombre quantique l plus faible, avant que de compléter les sous-couches l de la couche n. Ceci concerne en général les états $(n + 1)$s et $(n + 1)$p par comparaison aux états nd et nf.

c) **Éléments transuraniens** : éléments de numéro atomique supérieur à $Z = 92$. Les noyaux de ces éléments ne sont pas stables, ils se désintègrent par radioactivité. Leur vie moyenne est d'autant plus faible que Z est élevé. Ils sont tous produits artificiellement par réactions nucléaires.

La dénomination des transuraniens de Z 104 à 109 a été longtemps débattue. Les propositions actuelles sont : Rutherfordium (104), Dubnium (105), Seaborgium (106), Bohrium (107), Hassium (108), Meitnerium (109).

Les **éléments artificiels** les plus lourds produits jusqu'ici l'ont été par des réactions entre ions lourds (auprès du synchrotron à ions lourds de la GSI à Darmstadt, Allemagne) et ont été détectés à l'aide du filtre de vitesses "Ship" :

Bohrium, ${}_{107}$Ns (nommé d'après Niels Bohr) : par la réaction ^{209}Bi+^{54}Cr. Il fait partie des éléments de transitions 6d. Les couches 5f, 6s, 6p et 7s sont complètes, la couche 6d contient 5 électrons. Il devrait avoir les propriétés chimiques du Manganèse et du Rhénium.

Hassium, ${}_{108}$Hs (nommé d'après le Land de Hesse où se trouve le laboratoire qui l'a produit) : par la réaction ^{208}Pb+^{58}Fe. Il a les propriétés chimiques du Fer, de l'Osmium et du Ruthénium. Les couches 5f, 6s, 6p et 7s sont complètes, la couche 6d est occupée par 6 électrons.

Meitnerium, ${}_{109}$Mt (nommé d'après Lise Meitner) : par la réaction ^{209}Bi+^{58}Fe. Il a les propriétés chimiques du Cobalt, du Rhodium et de l'Iridium. Les couches 5f, 6s, 6p et 7s sont complètes, la couche 6d contient 7 électrons.

d) Éléments super lourds : éléments de $Z \geq 110$. En 1996, on a pour la première fois observé l'élément $Z = 112$. Il n'a pas de nom pour le moment.

3. Moment magnétique d'un atome

Déterminé par la contribution du spin et la contribution des sous-couches partiellement remplies.

- Dans un état s complètement occupé, les moments magnétiques de spin des électrons se compensent.
- Dans des sous-états p, d, f complètement occupés, en plus des moments magnétiques de spin, les moments magnétiques orbitaux sont aussi compensés. Le moment magnétique de ces atomes est nul.

Diamagnétisme : tous les éléments dont les sous-couches sont complètes sont diamagnétiques. Le diamagnétisme est masqué par le paramagnétisme si celui-ci existe.

Paramagnétisme : tous les éléments dont les sous-couches ne sont pas complètes, possédent un moment magnétique différent de zéro, ils sont paramagnétiques.

4. Potentiel d'ionisation et rayon atomique

Potentiel d'ionisation : **Tab. 30.1/1**, rayon atomique et ionique : **Tab. 30.2**.

26.9 Interaction des photons avec des atomes et des molécules

26.9.1 Émission spontanée et émission induite

Absorption : lorsqu'un atome absorbe un photon, il passe dans un état de plus grande énergie (état excité) (Fig. 26.25).

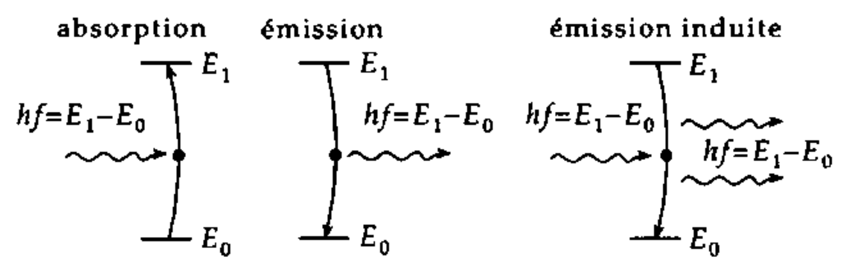


Fig. 26.25 : *Représentation schématique de l'absorption et de l'émission d'un photon par un atome*

1. Émission spontanée et émission induite

Émission spontanée : des atomes (ou molécules) d dans un état excité se désexcitent spontanément en émettant des photons. L'énergie des photons est égale à la différence d'énergie des états concernés. Les photons, émis par des atomes de même excitation, n'ont pas de relation de phase définie entre eux.

Émission induite ou **émission stimulée** : l'émission de photons d'énergie hf par des atomes ou des molécules excités dans un état de grande durée de vie, déclenché par un rayonnement électromagnétique de même fréquence. Dans ce cas, le photon incident et le photon émis ont la même phase. Pendant le processus, le nombre de photons de fréquence f est doublé.

▹ La propriété de cohérence des photons dus à l'émission stimulée est mise à profit dans les **générateurs de quanta**, les **lasers** et les **masers** (*light ou microwave amplification by stimulated emission of radiation*).

Occupation ou **population** : nombre N_1 des atomes dans un certain état excité d'énergie E_1. La population d'un état dépend de la température, et varie par émission ou absorption d'énergie.

Rapport de population : déterminé par la **distribution de Boltzmann** à une température d'équilibre donnée (voir Page 581) :

Distribution de Boltzmann			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{N_1}{N_2} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}$$	N_1, N_2	1	nombres d'occupation
	E_1, E_2	J	énergie des états
	k	J/K	constante de Boltzmann
	T	K	température

À l'équilibre thermique la population du niveau le plus bas est prédominante.

2. Inversion de population

Inversion ou **inversion de population** : modification de la population de niveaux produite par un apport d'énergie spécifique dans un ensemble d'atomes à l'équilibre thermique, de façon que le nombre d'atomes N_m dans un état E_m, de vie moyenne relativement élevée, soit supérieur au nombre N_n d'atomes dans un état de plus basse énergie.

■ **Laser à trois niveaux** : basé sur l'existence d'un niveau métastable de durée de vie élevée ($\tau \approx 10^{-3}$ s) (Fig. 26.26). La durée de vie normale d'un état électronique dans un atome est de l'ordre de $\tau \approx 10^{-8}$ s. Au dessus du niveau métastable existe un autre niveau qui est, par exemple, excité par l'absorption d'un rayonnement intense ($E_1 \to E_3$) (pompage optique). Le matériau du laser est choisi de sorte que les transitions $E_3 \to E_2$ soient favorisées par rapport aux transitions $E_3 \to E_1$. Les différences de durée de vie et de probabilités de transition, font que le niveau 2 se trouve beaucoup plus fortement peuplé que le niveau 1 ($N_2 > N_1$).

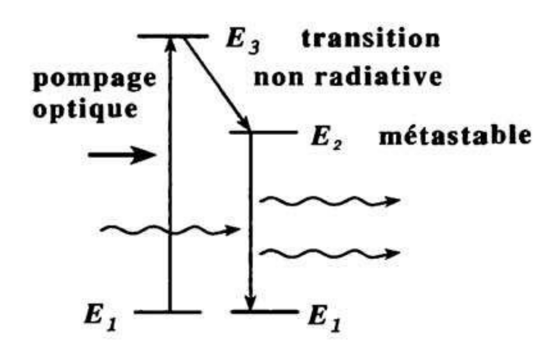


Fig. 26.26 : *Laser à 3 niveaux*

Résonateurs optiques : forcent le rayonnement émis par stimulation, par un système de miroirs, à rester confiné dans un espace limité. De cette façon, on augmente le nombre de photons cohérents.

M **Laser Hélium-Néon,** fait partie des lasers à gaz (Fig. 26.27).

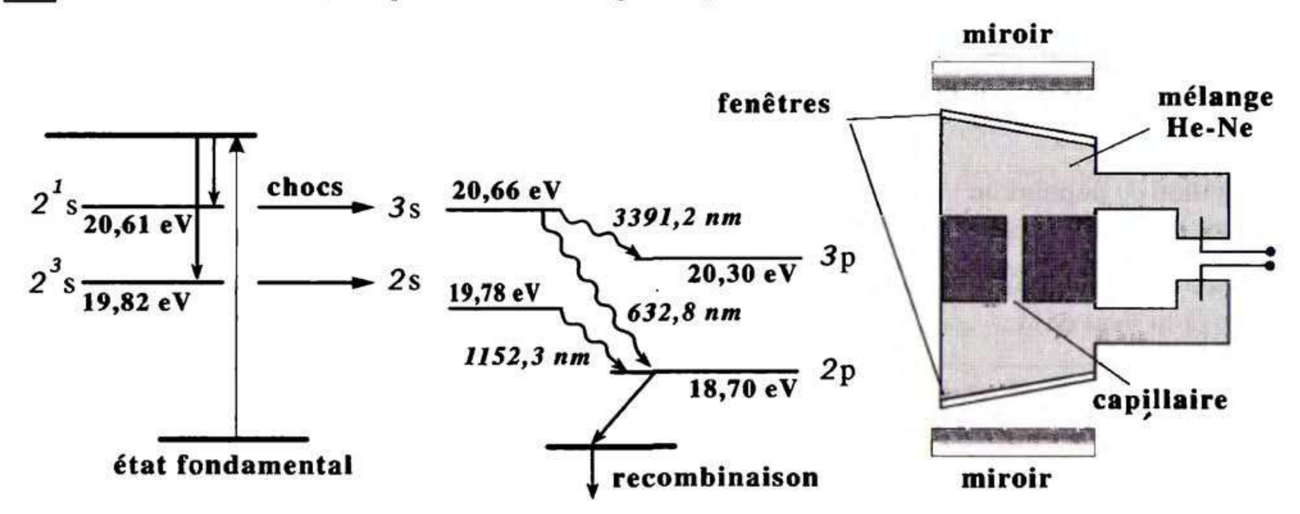


Fig. 26.27 : *Laser Hélium-Néon. (a) : principe de fonctionnement, (b) : schéma de montage*

- L'excitation des atomes est produite par des collisions d'électrons dans un tube à décharge. La partie active du laser est formée d'un tube capillaire.
  Dans le mélange gazeux (He-Ne ; He/Ne $= (5\dots 10)\ /1$), les atomes d'Hélium sont excités, par un niveau intermédiaire à 25 eV, vers les niveaux métastables 2^3s et 2^1s. Les niveaux excités des atomes d'Hélium transfèrent complètement leur énergie sur les états métastables 2s et 3s du Néon. De cette manière, une inversion de population est produite. Plusieurs rayonnements laser sont possibles par émission stimulée des transitions vers les niveaux 2p et 3p. Par un choix approprié du résonateur optique, on atténue généralement les lignes spectrales situées dans l'infrarouge au bénéfice de la ligne de longueur d'onde $\lambda = 632,8$ nm.

▷ Des puissances de 10 GW sont possibles, cependant avec des impulsions de très courte durée 10^{-9} s.

27 Physique des particules – le modèle standard

27.1 Unification des interactions

27.1.1 Le modèle standard

Modèle standard : formalisme de description des particules élémentaires et de leurs interactions fondé sur la **théorie électrofaible** et la **chromodynamique quantique** (théorie de la force de couleur).

1. Constituants de base

Ils comprennent 12 fermions (particules de spin 1/2) :

- six **quarks**
- six **leptons**

Les constituants élémentaires peuvent être classées en trois **générations** (ou familles) hiérarchisées selon leurs masses croissantes :

	quarks	Q /e	leptons	Q /e
1ère génération	d (*down*)	$-1/3$	ν_e (neutrino électronique)	0
	u (*up*)	$+2/3$	e^- (électron)	-1
2ème génération	s (*strange*, étrange)	$-1/3$	ν_μ (neutrino muonique)	0
	c (*charm*, charme)	$+2/3$	μ (muon)	-1
3ème génération	b (*bottom*) porteur de beauté	$-1/3$	ν_τ (neutrino tauique)	0
	t (*top*)	$+2/3$	τ (lepton tau)	-1

Toute la matière est construite à partir de ces particules et de leurs anti-particules associées.

2. Interactions fondamentales

Universalité : fait que les trois générations soient différenciées selon la masse des constituants sans préjuger de leurs actions réciproques (ou *interactions*).

Quatre interactions fondamentales décrivent le monde connu :

- la gravitation
- l'électromagnétisme
- la force nucléaire forte
- la force nucléaire faible

Types d'interaction	intensité relative	portée (m)	interaction entre	quantum de champ (bosons de jauge)
forte	1	$\approx 10^{-15}$	charges de couleur et quarks	gluons g
électromagnétique	10^{-2}	∞	charges électriques	photons γ
faible	10^{-14}	$\approx 2 \cdot 10^{-18}$	leptons et hadrons	bosons $W^\pm$, Z^0
gravitation	10^{-38}	∞	toutes les particules	gravitons

Les quatre interactions sont décrites chacune par un échange de particules médiatrices virtuelles appelées **quanta de champ** et qui sont des bosons associés :

- le graviton
- le photon γ
- les gluons g
- les bosons intermédiaires $W^{\pm}$, Z^0

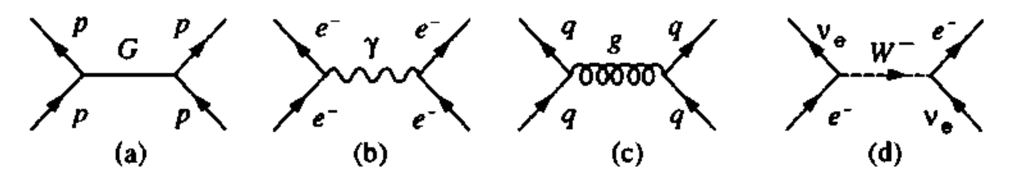


Fig. 27.1 : *Graphes élémentaires des interactions : gravitationnelle* (a), *électromagnétique* (b), *forte* (c) *et faible* (d).

27.1.1.1 Interaction gravitationnelle

Interaction gravitationnelle : interaction attractive qui se manifeste entre les masses. Elle procède par l'échange d'une particule hypothétique de masse nulle, de spin 2, appelée **graviton**.

Force gravitationnelle = constante $\cdot \dfrac{\text{masse}_1 \cdot \text{masse}_2}{\text{distance}^2}$			**MLT^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{F}_G = G \cdot \dfrac{M_1 \cdot M_2}{r^2} \cdot \dfrac{\vec{r}}{r}$ $G = 6,672\,59(85) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$	$\vec{F}_G$	N	force gravitationnelle
	G	$\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$	constante gravitationnelle
	M_1, M_2	kg	masses
	$\vec{r}$	m	distance entre les masses

▷ L'interaction gravitationnelle a une portée infinie ; aucun écran ne peut la stopper.

▷ L'hypothèse d'une cinquième force n'a pas été confirmée jusqu'à présent. On l'introduit formellement par un terme additionnel de Yukawa, paramétrisé en intensité α et en portée λ, pour former le potentiel gravitationnel :

$$\Phi(r) = -G\frac{M}{r}(1 + \alpha\,\mathrm{e}^{-r/\lambda})$$

Elle conduirait à une constante gravitationnelle dépendant de la distance r du corps d'épreuve à la masse M attractive.

27.1.1.2 Interaction électromagnétique

Interaction électromagnétique : interaction qui se manifeste entre les charges électriques. Elle procède par échange de **photons**, particules sans masse et de spin 1.

Force de Coulomb = constante $\cdot \frac{\text{charge}_1 \cdot \text{charge}_2}{\text{distance}^2}$			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$	$\vec{F}_{el}$	N	force de Coulomb
$\varepsilon_0 = 8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12}$ CV^{-1}m^{-1}	Q_1, Q_2	A · s	charges
	ε_0	AsV^{-1}m^{-1}	permittivité du vide
	$\vec{r}$	m	distance entre les charges

▷ Le rapport des forces gravitationnelle et coulombienne entre deux protons est :

$$\frac{F_G}{F_{el}} = G \cdot 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{m_p^2}{e^2} \approx 0,83 \cdot 10^{-36}$$

L'interaction électromagnétique est environ 10^{36} fois plus forte que l'interaction gravitationnelle.

27.1.1.3 L'interaction faible

1. Interaction faible

Interaction conduisant à la **désintégration** des leptons et des quarks les plus lourds en plus légers. Ce processus est provoqué par l'échange **de bosons vectoriels intermédiaires** $W^\pm$ (pour le mode chargé) et Z^0 (mode neutre) ; ces bosons associés, de spin 1 (qui est traduit par le qualificatif de *vectoriel*), ont une masse importante, ce qui implique une faible portée de l'interaction.

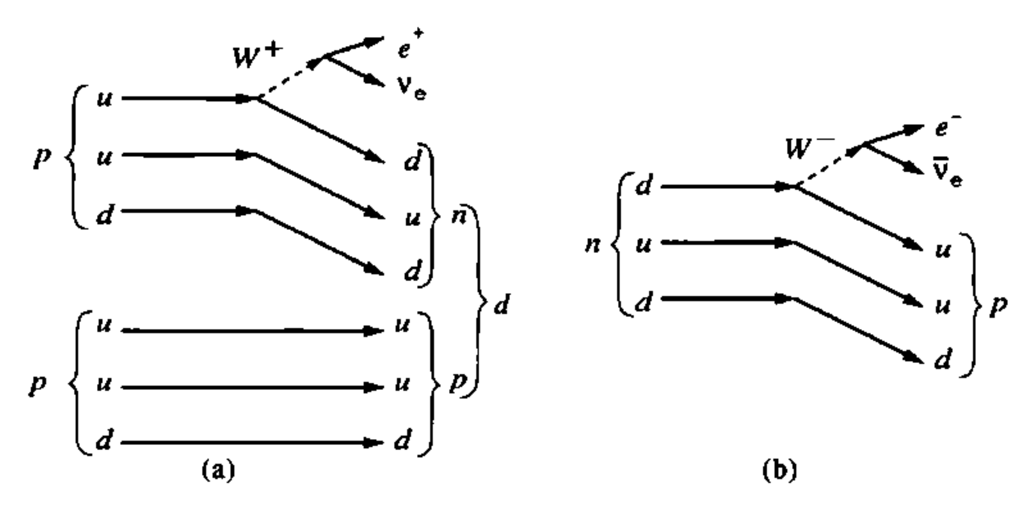


Fig. 27.2 : *Diagramme de lignes de quarks représentant :* (a) *la fusion nucléaire de deux protons ;* (b) *la désintégration du neutron.*

■ Le **neutron libre** se désintègre par interaction faible en trois particules (un proton, un électron et un antineutrino électronique) suivant :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

avec une vie moyenne $\tau = (889,1 \pm 2,1)$ s ; la durée de vie de ce processus est significativement plus élevée que le temps de 10^{-23} s caractéristique de l'interaction forte.

2. Propriétés de l'interaction faible

- La force faible est plus faible que celle de l'interaction forte ainsi que celle, à basse énergie, de l'interaction électromagnétique ; mais elle est plus intense que celle de l'interaction gravitationnelle.
- Sa portée est extrêment réduite, plus petite que 10^{-17} m.
- Elle n'a **aucun état lié**.

La **portée très petite de l'interaction faible** est due à la masse importante des bosons intermédiaires $W^{\pm}$ et Z^0. Selon le principe d'incertitude de Heisenberg, l'échange de particules doit satisfaire à la condition : $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$; ici, $\Delta E = m_W c^2$ désigne la masse au repos d'un boson faible. Celui-ci devrait donc se trouver à la distance :

$$R_0 \approx \frac{\hbar}{m_W c^2} \approx \frac{200\,\text{MeV} \cdot \text{fm}}{100 \cdot 10^3\,\text{MeV}} = 2 \cdot 10^{-18}\,\text{m}$$

en lui supposant même une vitesse égale à celle de la lumière dans le vide. Cette distance correspond à la portée de l'interaction faible.

▷ Pour des photons, $m_\gamma = 0$ et donc $R_0 = \infty$: le champ électromagnétique a une portée infinie.

Particule virtuelle : particule dont l'énergie et le moment ne satisfont pas, comme les particules libres, à la relation relativiste :

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2$$

● Les particules virtuelles n'existent que pendant un court instant, celui de la manifestation de l'interaction.

27.1.1.4 L'interaction forte

Interaction forte dite aussi **nucléaire** : interaction responsable de la liaison des nucléons (protons et neutrons) dans le noyau atomique et de la cohésion de ce noyau. Elle n'est que la manifestation résiduelle d'une force plus fondamentale agissant entre les constituants élémentaires (**quarks**) présents à l'intérieur du nucléon. L'interaction forte procéde à travers l'échange de **gluons**, quanta de champ sans masse et de spin 1.

▷ L'interaction nucléaire est similaire à l'interaction électrique résiduelle qui lie les atomes électriquement neutres en molécules.

Propriétés de l'interaction forte :

- L'interaction forte est **attractive** sur des distances $r \approx 2 \cdot 10^{-15}$ m et est **répulsive** pour $r < 10^{-15}$ m.
- Elle est caractérisée par une courte portée ($\approx 10^{-15}$ m).
- À ces courtes distances, elle est 100 à 1000 fois **plus forte** que l'**interaction électromagnétique**.
- À mesure que le nombre de particules augmente, l'interaction forte **sature** ; d'attractive, elle devient répulsive.
- L'interaction forte **dépend de l'état nucléaire** : elle est fonction de l'orientation relative du spin des nucléons, de l'isospin T des paires de nucléons et du moment angulaire du mouvement relatif.
- L'interaction forte est **indépendante de la charge** électrique. Dans un système nucléon-nucléon d'isospin $T = 1$, les forces entre deux nucléons $n - p$, $p - p$ et $n - n$ sont les mêmes (quand on soustrait la part des effets électromagnétiques). Pour un état $T = 0$, l'interaction diffère de celle où $T = 1$.

Mécanisme de l'interaction forte : l'interaction forte agit via la *force de couleur*, c'est à dire par l'échange de **gluons**, quanta de champ sans masse et de spin 1.
L'interaction forte peut aussi être décrite comme l'échange de mésons entre les nucléons. Ce mécanisme rend compte de la stabilité des noyaux atomiques.

Potentiel de Yukawa : approximation représentative de la partie attractive du potentiel nucléaire :

Potentiel de Yukawa			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$V_K = \frac{V_0}{r} \cdot e^{-\frac{r}{r_0}}$	V_K	J/m	potentiel de Yukawa
	V_0	J	constante d'interaction
	r_0	m	portée
	r	m	distance inter-nucléon

27.1.2 Quanta de champ et bosons de jauge

1. Boson de jauge

Ou **quantum de champ** : porteur (ou médiateur) de toute interaction.

Graviton : boson de jauge de l'interaction gravitationnelle.
C'est une particule, sans masse et sans charge, de spin 2. Le graviton n'a pas encore été détecté.

Photon : boson de jauge, de spin 1, de l'interaction électromagnétique en électrodynamique quantique (EDQ). Ce formalisme introduit la théorie quantique dans le traitement du champ électromagnétique et rend précisément compte des déviations expérimentales observées dans une description en termes de potentiels (force de Coulomb, équations de Maxwell).

● Le photon a une masse au repos $m_\gamma = 0$, une charge $q_\gamma = 0$.

Photon libre : quantum d'énergie de la lumière.
Photon virtuel : médiateur de l'interaction électromagnétique.

Bosons intermédiaires (ou bosons vecteurs intermédiaires, *weakons* en anglais), de spin 1, quantum de champ de l'interaction faible :

- $W^\pm$ de masse $m = 80,22 \pm 0,26$ GeV, pour le mode chargé.
- Z^0 de masse $m = 91,173 \pm 0,020$ GeV, pour le mode neutre.

Les bosons Z^0 sont responsables de la répulsion des neutrinos envers les électrons et les quarks.

2. Interaction électrofaible

Théorie due à *Salam* et *Weinberg*, unifiant l'électromagnétisme et l'interaction faible. C'est dans le cadre de cette théorie qu'a été supputée l'existence de la particule Z^0 ; sa découverte (1983) s'est faite ensuite.

▷ Une autre prévision concerne la particule de Higgs de masse $m_H \approx 300$ GeV, encore à découvrir.

3. Quanta de champ de l'interaction forte

Gluon : quantum de champ, de spin 1, de l'interaction forte dite "de couleur" (**chromodynamique quantique**). Les gluons lient les quarks les uns aux autres. Huit gluons distincts existent, individualisés par leur couleur.
Comme les photons, les gluons sont des quanta sans masse au repos. Mais contrairement aux photons, qui peuvent se déplacer sur des distances infinies, les gluons restent confinés sur quelque 10^{-15} m du fait de leur forte interaction. Des quarks ou des gluons ne pourront jamais être observés *libres*, car l'interaction de

couleur qui les lie augmente avec la distance r les séparant (hypothèse d'un potentiel quark-quark linéaire : $V(r) = Br, B > 0$).

Boule de glu : particule composée uniquement de gluons. Ces boules résulteraient d'états liés de gluons formant des "atomes de couleur".

■ Quarks et gluons ne peuvent être observés que par l'intermédiaire de **jets hadroniques**.

▷ Des gluons, par exemple, sont créés dans l'annihilation de paires électron-positron de grande énergie. Par ce moyen, un quark et un antiquark sont produits. Si l'énergie apportée est assez élevée, un ou plusieurs gluons peuvent être générés lors de la séparation de la paire quark-antiquark. Quark, antiquark et gluon ne pouvant se déplacer au delà de 10^{-15} m, génèrent immédiatement d'autres particules : c'est ainsi que sont observés des jets hadroniques caractéristiques.

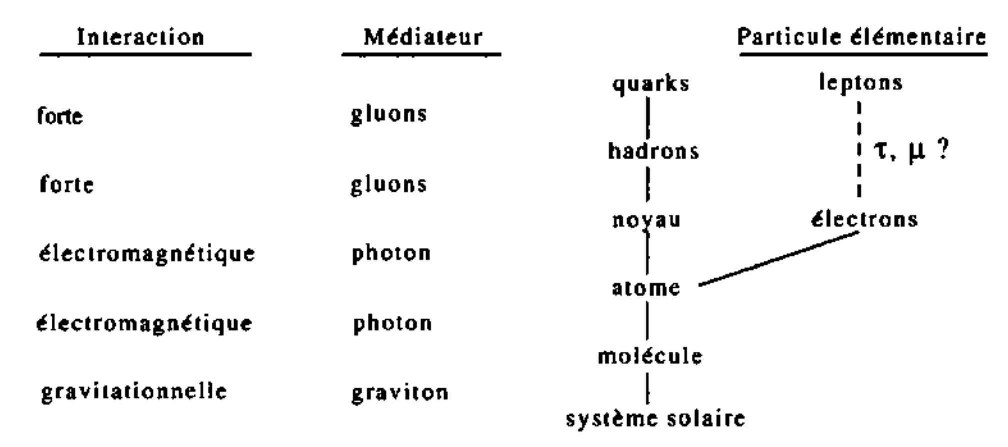


Fig. 27.3 : *Les différents niveaux de structure de la matière et les forces agissantes,*

4. Esquisse d'une théorie des particules élémentaires

Théorie de jauge : formulation mathématique des interactions dérivée d'un principe de symétrie : les équations fondamentales de la physique sont invariantes dans une certaine transformation de la fonction d'onde.

■ La théorie électrofaible et la chromodynamique quantique sont des théories de jauge. On espère formuler l'unification des interactions, peut être aussi en y incluant la gravitation, sur la base d'une théorie de jauge.

Constantes de couplage g_1, g_2, g_3 : paramètres des interactions électromagnétique, faible et forte. Elles déterminent l'intensité relative des forces agissant entre les particules. Les constantes de couplage sont fonction du moment transféré et de l'énergie mis en œuvre dans le processus d'interaction (voir Fig. 27.15).

Liberté asymptotique : la constante de couplage g_3 de l'interaction forte devient petite pour de grands moments ou sur de courtes distances. Il s'ensuit que le quark se comporte *asymptotiquement* comme une particule libre ; la théorie des perturbations est applicable.

Confinement des quarks : propriété des quarks (et des gluons) de ne jamais apparaître isolés. Elle est une conséquence indirecte de la chromodynamique quantique et résulte de l'interaction entre quarks qui procède par échange de gluons.

■ Ainsi par exemple (Fig. 27.4), éloigner un quark q de l'antiquark $\bar{q}$ d'un méson, revient à augmenter l'énergie de la paire $q\bar{q}$ proportionnellement à cette distance jusqu'à ce que cette énergie se

convertisse en paires quark-antiquark additionnelles ; des combinaisons non colorées de hadrons (mésons et baryons) émergent alors.

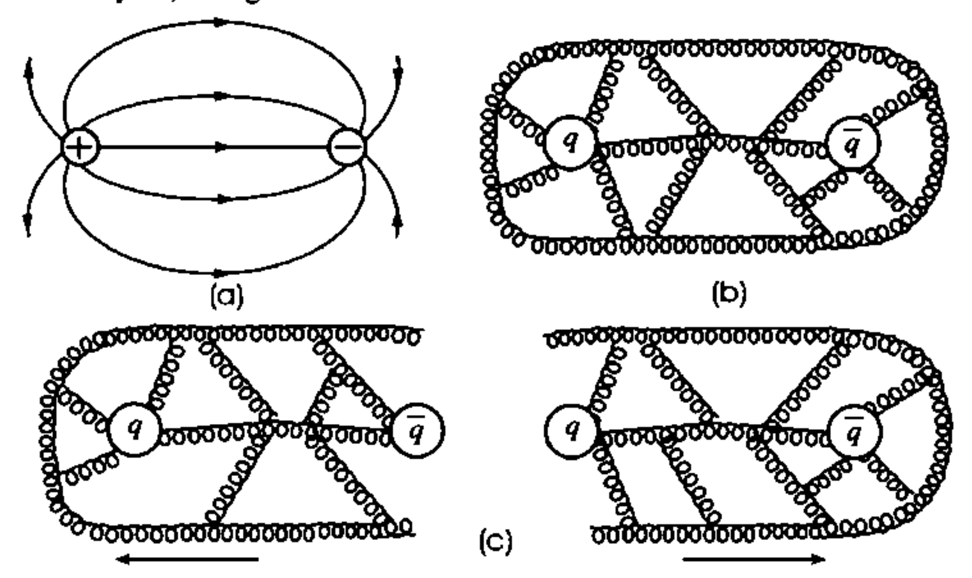


Fig. 27.4 : *Confinement des quarks. En* (a), *ligne de champ d'un dipole électrique ;* (b), *configuration du champ de gluons entre un quark q et un antiquark $\bar{q}$;* (c), *formation d'une paire $q\bar{q}$ (méson) par coupure du tube de flux.*

- Les quarks et antiquarks restent confinés dans la matière hadronique.

27.1.3 Fermions et bosons

- Selon la valeur de leur spin, les particules élémentaires se subdivisent en deux grandes classes : les fermions et les bosons.

1. Fermions

Les **fermions** regroupent toutes les particules élémentaires de spin demi-entier (1/2, 3/2, 5/2, ...). Ils obéissent à la statistique de Fermi–Dirac et au principe de Pauli.

Statistique de Fermi-Dirac : statistique quantique s'appliquant à un système de fermions à l'équilibre.

Distribution de Fermi : distribution donnant la valeur moyenne n_i du nombre de fermions non-interagissant, dans l'état i d'énergie E_i :

Distribution de Fermi			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$$n_i = \frac{g}{e^{\left(\frac{E_i-\mu}{kT}\right)}+1}$$ $$g = 2s+1$$	n_i	1	nombre de particules
	g	1	facteur pondéral
	E_i	J	énergie de l'état i
	μ	J	potentiel chimique
	k	J/K	constante de Boltzmann
	T	K	température
	s	1	spin de la particule

Potentiel chimique μ, déterminé par la condition :

$$\sum_i n_i = N \quad \text{(nombre total de fermions)}$$

n(E)
1
T=0
T>0
E

Fig. 27.5 : *Distribution de Fermi.*

2. Bosons

Les **bosons** regroupent toutes les particules élémentaires de spin entier. Ils obéissent à la statistique de Bose–Einstein, mais non au principe de Pauli.

Statistique de Bose-Einstein : statistique quantique des particules indiscernables de spin entier (0, 1, 2,...).

▹ Il n'y a aucune restriction imposée sur le nombre de particules pouvant occuper un état i.

Distribution de Bose-Einstein : distribution donnant la valeur moyenne n_i du nombre de bosons non-interagissant, dans l'état i d'énergie E_i :

Distribution de Bose – Einstein — 1

$$n_i = \frac{g}{e^{\left(\frac{E_i - \mu}{kT}\right)} - 1}$$

$$g = 2s + 1$$

Symbole	Unité	Dénomination
n_i	1	nombre de particules
g	1	facteur pondéral
E_i	J	énergie de l'état i
μ	J	potentiel chimique
k	J/K	constante de Boltzmann
T	K	température
s	1	spin de la particule

▹ Le facteur pondéral g pour des bosons de spin 0 est égal à 1 ; pour des bosons de spin $s = 1$, $g = 3$. Pour des fermions de spin $s = 1/2$, $g = 2$. En général : $g = (2s + 1)$.

● Aucune particule élémentaire n'a de spin nul.

● Bosons de jauge : quanta de champ des interactions fondamentales signifiant que les particules échangées sont exclusivement des bosons : de spin 1 pour les photons, les bosons intermédiaires et les gluons ; de spin 2 pour l'hypothétique graviton.

▹ La propriété qu'ont les photons d'être des bosons a toute son importance dans le principe du laser : en un endroit donné, peut coexister un nombre arbitrairement élevé de photons de même énergie et de phase identique.

3. Condensation de Bose-Einstein

Passage d'un système de particules sans interaction, obéissant à la statistique de Bose-Einstein, à un système où toutes les particules occupent les états énergétiques les plus bas. La condensation de Bose-Einstein se produira, pour un grand nombre n de particules et/ou pour des températures T basses, quand la distance entre les particules devient comparable à la longueur d'onde de de Broglie qui caractérise l'agitation thermique, c'est à dire quand :

$$n\lambda^3 \geq 2,612 \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \sqrt{\hbar^2/(2\pi mkT)}$$

où k est la constante de Boltzman. La condensation de Bose-Einstein sera perturbée par les interactions interatomiques : des forces trop intenses entre les molécules empêchent la formation de condensats, comme dans un liquide ordinaire.
La condensation de Bose-Einstein d'un système de bosons peu interactifs a été réalisée en 1995. Des méthodes conjointes de refroidissement par laser et évaporatif ont été utilisées sur un gaz d'atomes de rubidium piégé dans une enceinte magnétique. Par cette technique, une température de 170 nK et une densité de particules de $3 \cdot 10^{12}\,\mathrm{cm}^{-3}$ ont été atteintes, conduisant à la formation d'un condensat de Bose-Einstein d'environ 2 000 atomes au centre de l'enceinte.

Refroidissement évaporatif : retrait sélectif de particules énergétiques d'un système. Après thermalisation, le système restant se retrouve à une énergie moyenne plus faible.

▷ La condensation de Bose-Einstein a aussi été réalisée avec des atomes de lithium faiblement liés par les forces de Van der Waals.

27.2 Leptons, quarks et bosons vecteurs

27.2.1 Leptons

Leptons : classe de particules élémentaires affectées par l'interaction électrofaible et insensible à l'interaction forte.

- Les leptons de spin demi-entier sont des fermions.
- Il existe 6 leptons et les 6 anti-particules correspondantes.
- Tous les leptons sont sans structure ; ce sont des particules ponctuelles.

Propriétés des leptons :

nom	masse m(MeV)	charge Q/e
électron e	$0,510\,999\,06 \pm 0,000\,000\,15$	-1
neutrino électronique ν_e	$< 7,3 \cdot 10^{-6}$	0
muon μ	$105,658\,389 \pm 0,000\,034$	-1
neutrino muonique ν_μ	$< 0,27$	0
lepton-tau τ	$1\,776,3 \pm 2,4$	-1
neutrino tauique ν_τ	< 31	0

nom	moment dipolaire magnétique μ/μ_B	moment dipolaire électrique $d\,(e \cdot \mathrm{cm})$	durée de vie
électron e	$1,001\,159\,652\,193$ $\pm 0,000\,000\,000\,010$	$(-0,3$ $\pm 0,8) \cdot 10^{-26}$	$\tau > 3,8 \cdot 10^{23}$ a
neutrino électronique ν_e	$< 1,08 \cdot 10^{-9}$		$\tau/m_{\nu_e} > 300$ s/eV
muon μ	$(1{,}001\,165\,923$ $\pm 0,000\,000\,008)\frac{m_e}{m_\mu}$	$(+3,7$ $\pm 3,4) \cdot 10^{-19}$	$\tau = (2,197\,03$ $\pm 0,000\,05) \cdot 10^{-6}$ s
neutrino muonique ν_μ	$< 7,4 \cdot 10^{-6}$		$\tau/m_{\nu_\mu} > 15,4$ s/eV
lepton-tau τ			$\tau = (0,305$ $\pm 0,006) \cdot 10^{-12}$ s
neutrino tauique ν_τ	$< 4 \cdot 10^{-6}$		

Nombre leptonique ou **charge leptonique** L : nombre quantique semblable à une charge, attribué aux particules élémentaires. (→ *nombre baryonique* B)

- Pour un système de particules élémentaires, les nombres baryoniques et leptoniques sont à comptabiliser séparément.
- Le **nombre leptonique** se conserve dans toute réaction nucléaire.
- Tous les leptons ont un nombre leptonique $L = \pm 1$ et un nombre baryonique $B = 0$.
- Les nombres leptoniques de l'électron et du positron sont respectivement +1 et −1.
- Le **photon** γ a le nombre baryonique $B = 0$ et le nombre leptonique $L = 0$.

Positron : anti-particule de l'électron.

27.2.2 Quarks

Hadron : toute particule sujette à l'interaction forte et qui possède une structure interne. Il existe plus de 300 hadrons.
Les baryons et les mésons sont des hadrons. Chaque hadron est formé de trois quarks. Chaque méson contient une paire de quark-antiquark.

- Tous les hadrons ont un nombre leptonique $L = 0$.

Quark : particule – hypothétique à l'origine – proposée pour expliquer la forte similarité des multiplets baryoniques et mésoniques.

- Les quarks sont des particules ponctuelles, sans structure. Il existe 6 quarks et 6 antiquarks, comme il existe aussi 6 leptons et 6 antileptons. Les quarks (q) et antiquarks ($\bar{q}$) ont pour nombres baryoniques respectifs $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

Propriétés des quarks :

nom		masse (MeV/c^2)	Q/e	I	I_z	s	π	S	charme	beauté	top
down	d	5...15	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	+	–	–	–	–
up	u	2...8	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	+	–	–	–	–
strange	s	100...300	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{2}$	+	−1	–	–	–
charm	c	1300...1700	$+\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{2}$	+	–	+1	–	–
bottom	b	4700...5300	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{2}$	+	–	–	−1	–
top	t	> 9100	$+\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{2}$	+	–	–	–	+1

Q : charge ; I : isospin ; I_z : I projeté ; s : spin ; π : parité ; S : étrangeté.

- Du fait des durées de vie relativement longues des mésons et des hadrons construits avec les quarks $c/\bar{c}$, $b/\bar{b}$ et $t/\bar{t}$, de nouveaux nombres quantiques ont été attribués : au quark c, le **charme** ; au quark b, la **beauté** ; au quark t, le **top**.

Quark top t : dernier des six quarks découvert en 1994 dans des collisions proton-antiproton à 1,8 TeV. Au cours du choc $p\bar{p}$, un quark léger du proton et un antiquark léger de l'antiproton réagissent pour former une paire $t\bar{t}$. Le quark *top* t se désintègre rapidement en un quark b et un méson W^+ ; ce dernier se désintègre (à 67 %) en deux quarks légers u (ou c) et $\bar{d}$ (ou $\bar{s}$) ou (à 33 %), en leptons $e^+ + \nu_e$ ou $\mu^+ + \nu_\mu$. D'une façon analogue, $\bar{t}$ se désintègre en $\bar{b}$ et W^- (W^- a alors, comme W^+, une désintégration hadronique ou

leptonique). Les neutrinos se manifestent comme déficit dans le bilan d'énergie de l'évènement reconstruit. Les quarks et antiquarks s'hadronisent en formant des jets. Le quark b est identifié par reconstruction de son vertex de désintégration par rapport au point d'interaction $p\bar{p}$. La paire $t\bar{t}$ peut aussi être mise en évidence à travers les deux leptons créés et au moins deux jets caractéristiques.
La masse du quark t, $(174 \pm 17)\,\mathrm{GeV}/c^2$, est environ 35 fois celle du quark b. C'est le plus lourd des constituants élémentaires.

Nombre baryonique ou **charge baryonique** B : nombre quantique, semblable à une charge, attribué aux particules élémentaires.

▷ Semblable à une charge signifie qui est "une quantité scalaire comme l'est la charge électrique".

● Tous les quarks ont le nombre baryonique $B = \pm\frac{1}{3}$ et le nombre leptonique $L = 0$.

● Tous les baryons ont le nombre leptonique $L = 0$.

● Dans toute réaction nucléaire, le nombre baryonique est conservé.

▷ Cette loi de conservation garantit que dans toutes les transformations nucléaires, le nombre de particules et d'anti-particules d'une famille ne varie pas. Les protons et les neutrons ont le nombre baryonique $+1$, les électrons et les positrons ont le nombre baryonique 0.

● Les hadrons sont formés d'un assemblage de quarks.
Chaque méson consiste en un quark et un antiquark. Leur nombre baryonique est donc 0.
Chaque baryon consiste en trois quarks, et par conséquent leur nombre baryonique est 1.

Tous les baryons des décuplet et octuplet baryoniques peuvent être construits avec les quarks u, d et s. Les trois coins du décuplet baryonique violent le principe de Pauli si aucun nombre quantique additionnel (la couleur) ne caractérise les quarks.

1. Saveurs

● **Saveur de quark** : propriété distinguant les quarks entre eux. Il y a six sortes (ou *saveurs*) de quarks.

▷ Les quarks u, d et s sont de saveur légère ; les quarks c, b et t sont de saveur lourde.

● Aux quarks s, c, b, t sont attribuées les saveurs respectives : étrangeté, charme, beauté et top.

● L'interaction forte n'agit pas sur la saveur, c'est à dire qu'elle ne distingue pas entre les différentes sortes de quarks. La saveur peut être modifiée par l'interaction faible.

2. Couleurs

● **Couleur** : nouveau nombre quantique attribué aux quarks et aux gluons. Il a le caractère d'une charge (*de couleur*) responsable de l'interaction de couleur.

● Chaque quark existe en une ou autre de ces trois couleurs : **rouge** r, **bleu** b, **vert** v.

● Les antiquarks existent avec les couleurs complémentaires (dites "anti-couleurs") aux quarks : anti-rouge $\bar{r}$, anti-bleu $\bar{b}$, anti-vert $\bar{v}$.

● Tous les hadrons sont de couleur neutre (blanc).
Les baryons ont leurs trois quarks de couleur différente, de sorte que la couleur résultante soit neutre (blanc).
Les mésons sont formés de paires $q\bar{q}$ de couleur opposée $r\bar{r}$, $b\bar{b}$, $v\bar{v}$.

- Les gluons, porteurs de l'interaction forte colorée, sont eux-mêmes colorés.
  Contrairement au photon, qui est électriquement neutre, les gluons ont une "charge de couleur". Il y a huit combinaisons distinctes de couleur et d'anti-couleur, ce qui fait huit gluons : $r\bar{b}$, $r\bar{v}$, $b\bar{v}$, $v\bar{v}$, $b\bar{r}$, $v\bar{r}$, $(r\bar{r} + v\bar{v} - 2b\bar{b})/\sqrt{6}$, $(r\bar{r} - v\bar{v})/\sqrt{2}$

27.2.3 Hadrons

Hadron : particule élémentaire subissant l'interaction forte et possédant une extension spatiale. Selon le spin, on distingue le groupe des **mésons** (spin entier, bosons) et celui des **baryons** (spin demi-entier, fermions).

Méson : particule élémentaire composée d'une paire quark-antiquark, sujette à l'interaction forte et possédant un spin entier. Tous les mésons sont des bosons.

- Les mésons ont un nombre baryonique $B = 0$.

Baryon : particule élémentaire composée de trois quarks, sujette à l'interaction forte et possédant un spin demi-entier. Tous les baryons sont des fermions.

- Les baryons ont un nombre baryonique $B = \pm 1$.

1. Étrangeté et baryons lourds

Étrangeté : propriété qu'ont certaines particules élémentaires d'être produites par interaction forte et de se désintégrer par interaction faible. Ces particules élémentaires sont caractérisées par un nouveau nombre quantique – l'**étrangeté** S – qui décrit cette propriété, et sont porteuses du quark s.

- Le nombre quantique d'étrangeté se conserve dans les interactions forte et électromagnétique, mais pas dans les interactions faibles.
- Si une particule élémentaire ne peut se désintégrer sans violer une loi de conservation, cette interdiction se traduit par une durée de vie longue de la particule.

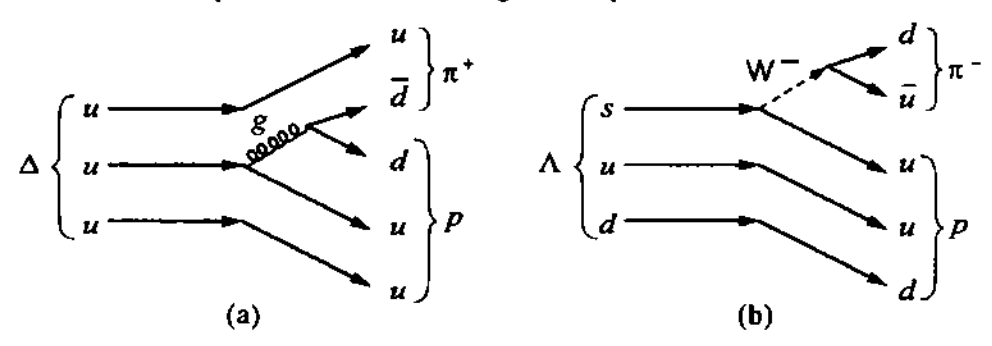


Fig. 27.6 : *Diagramme de lignes de quark montrant : la désintégration du delta en* (a), *celle du lambda en* (b).

2. Hypérons et kaons

Hypéron : particule de masse plus grande que celle des nucléons et de spin demi-entier. Les hypérons appartiennent à la famille des baryons et sont porteurs d'étrangeté ($S \neq 0$).

Méson K ou kaon : particule élémentaire instable de la même famille que le méson. Il a une étrangeté $S = \pm 1$ et se désintégre avec une vie moyenne τ d'environ 10^{-10} s. C'est une vie très longue comparée au temps caractéristique de l'interaction forte, mais typique de processus d'interaction faible. Quatre mésons K existent : $K^+, K^0, \overline{K}^0, K^-$.

- Les hypérons et les mésons K sont généralement produits en paires.

[M] La figure 27.7 reproduit schématiquement la réaction :

$$\pi^+ + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0 + \pi^+ + \pi^+$$
$$\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$$
$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

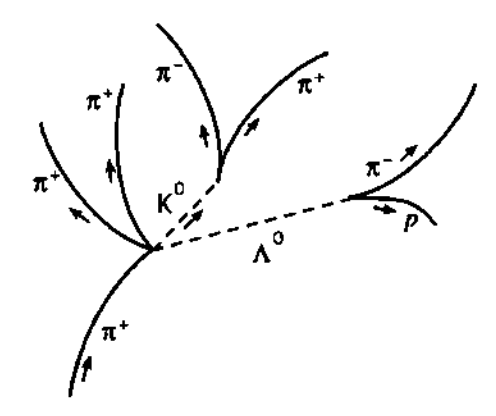


Fig. 27.7 : Schéma d'un cliché de chambre à bulles : un méson π^+ entre en collision avec un proton (non visible) au repos.

Hypéron Λ^0 : particule élémentaire neutre ne laissant aucune trace d'ionisation primaire dans les détecteurs (comme toute particule neutre). Il se désintègre en un proton et un méson π^- avec une vie moyenne de $2,6 \cdot 10^{-10}$ s.

Méson K^0 : méson neutre qui se désintègre en deux mésons π^+ et π^- avec une vie moyenne de 10^{-10} s.

3. Table des mésons de spin 0 (mésons pseudoscalaires)

Nom	symbole	m (MeV)	Q/e	S	τ (s)	contenu en quarks
pion chargé	$\pi^\pm$	139,5679	±1	0	(2,6030	$u\bar{d}$
		±0,0007			$\pm 0,0024) \cdot 10^{-8}$	$d\bar{u}$
pion neutre	π^0	134,9743	0	0	(8,4	$(u\bar{u} - d\bar{d})$
		±0,0008			$\pm 0,6) \cdot 10^{-17}$	$/\sqrt{2}$
méson η	η	547,45 ± 0,19	0	0	$\approx 0,55 \cdot 10^{-18}$	$(u\bar{u} + d\bar{d}$
						$-2s\bar{s})/\sqrt{6}$
	η'	957,75 ± 0,14	0	0	$\approx 0,33 \cdot 10^{-20}$	$(u\bar{u} + d\bar{d}$
						$+s\bar{s})/\sqrt{3}$
kaon	$K^\pm$	493,646	±1	±1	(1,2371	$u\bar{s}$
		±0,009			$\pm 0,0029) \cdot 10^{-8}$	$\bar{u}s$
kaon neutre	K^0	497,671	0	1	$50\%K^0_S$,	$d\bar{s}$
		±0,031			$50\%K^0_L$	
	$\overline{K}^0$	497,671	0	−1	$50\%K^0_S$,	$\bar{d}s$
		±0,031			$50\%K^0_L$	
K *short*	K^0_S	497,671	0	–	(0,8922	–
		±0,031			$\pm 0,0020) \cdot 10^{-10}$	
K long	K^0_L	497,671	0	–	(5,17	–
		±0,031			$\pm 0,04) \cdot 10^{-8}$	

Notation utilisée : m : masse ; Q : charge électrique ; S : étrangeté ; τ : vie moyenne.

4. Table des mésons de spin 1 (mésons vectoriels)

Nom	symbole	m (MeV)	Q/e	S	Γ (MeV)	contenu en quarks
méson rho	ρ^+	$768,1 \pm 0,5$	1	0	$151,5 \pm 1,2$	$u\bar{d}$
	ρ^0	$768,1 \pm 0,5$	0	0	$151,5 \pm 1,2$	$(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$
	ρ^-	$768,1 \pm 0,5$	-1	0	$151,5 \pm 1,2$	$d\bar{u}$
méson oméga	ω	$781,95 \pm 0,14$	0	0	$8,43 \pm 0,10$	$(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2}$
méson phi	ϕ	$1019,413 \pm 0,008$	0	0	$4,43 \pm 0,06$	$s\bar{s}$
kaon	K^{*+}	$891,59 \pm 0,24$	1	1	$49,8 \pm 0,8$	$u\bar{s}$
	K^{*0}	$896,10 \pm 0,28$	0	1	$50,5 \pm 0,6$	$d\bar{s}$
	K^{*-}	$891,59 \pm 0,24$	-1	-1	$49,8 \pm 0,8$	$\bar{u}s$
	$\bar{K}^{*0}$	$896,10 \pm 0,28$	0	-1	$50,5 \pm 0,6$	$\bar{d}s$

- La donnée de la largeur de décroissance Γ équivaut à donner la vie moyenne τ, puisque :
$\Gamma = \hbar/\tau$

5. Schéma d'ordre de la famille des mésons :

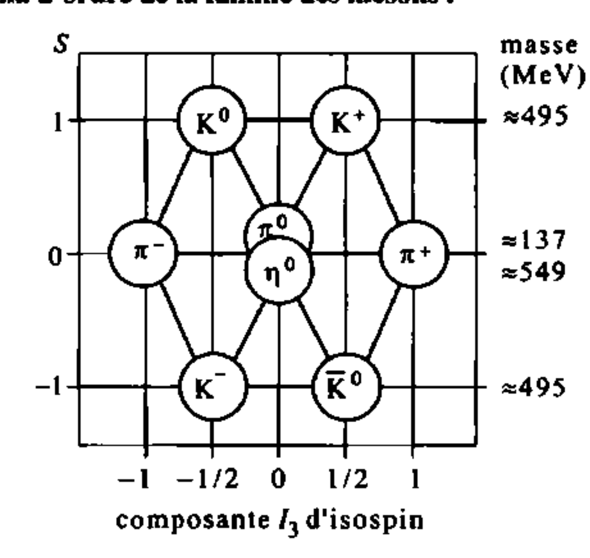


Fig. 27.8 : *Schéma d'ordre de la famille des mésons*

Il y a beaucoup d'autres mésons composés de quarks c ($\bar{c}$) ou b ($\bar{b}$) :

- les mésons D et D^* charmés $C = \pm 1$
- les mésons D_S et D_S^* porteurs de charme et d'étrangeté $C = S = \pm 1$
- les mésons B et B^* porteurs de beauté $B = \pm 1$

6. Quarkonium

Quarkonium : état quark-antiquark (=méson) lourds.

- Charmonium ($c\bar{c}$) : par exemple J/ψ de masse $m = 3\,096,93 \pm 0,09$ MeV
- Bottonium ($b\bar{b}$) : par exemple Υ de masse $m = 9\,460,32 \pm 0,22$ MeV

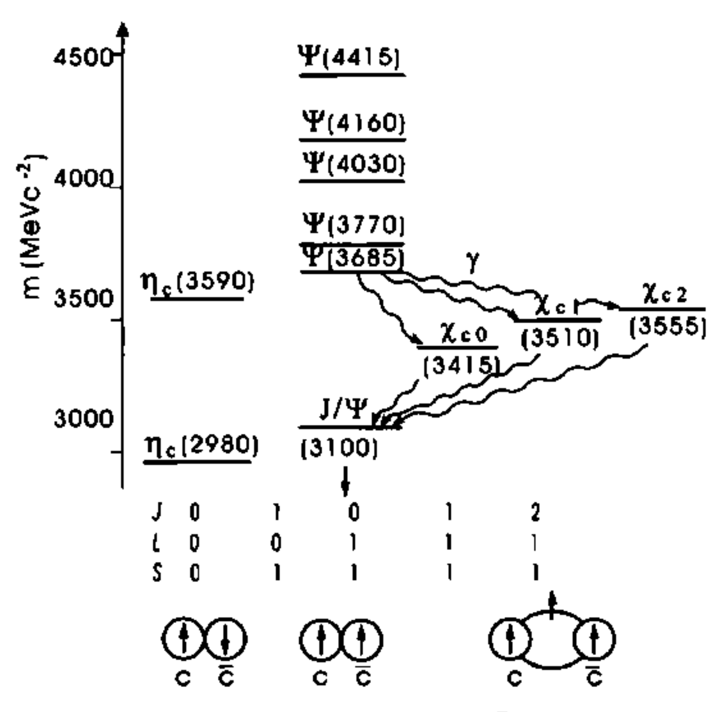


Fig. 27.9 : *Spectre de masse des états du charmonium de spin S, moment orbital L et moment angulaire total J.*

▷ Les mésons formés de quarks lourds $c\bar{c}$, $b\bar{b}$ ont des spectres d'émission de photons très semblables à ceux du positronium, état lié $e^+ - e^-$. Les noms sont donnés par analogie avec la physique atomique.

7. Baryons de spin 1/2

Octuplet de spin 1/2 : schéma d'ordre des baryons de spin $\frac{1}{2}$ (voir Fig. 27.10). Les deux tableaux suivants donnent la masse m, la charge Q, la vie moyenne τ, les moments dipolaires magnétique μ et électrique d, l'étrangeté S, ainsi que les quarks constitutifs, des baryons pseudoscalaires de spin $\frac{1}{2}$:

nom	symbole	m (MeV)	Q/e	τ (s)
proton	p	$938,27231 \pm 0,00028$	1	$> 10^{31}$ a
neutron	n	$939,56563 \pm 0,00028$	0	$889,1 \pm 2,1$
lambda	Λ	$1115,63 \pm 0,05$	0	$(2,632 \pm 0,020) \cdot 10^{-10}$
sigma	Σ^+	$1189,37 \pm 0,07$	1	$(0,799 \pm 0,004) \cdot 10^{-10}$
	Σ^0	$1192,55 \pm 1,10$	0	$(7,4 \pm 0,7) \cdot 10^{-20}$
	Σ^-	$1197,43 \pm 0,06$	-1	$(1,479 \pm 0,011) \cdot 10^{-10}$
xi	Ξ^0	$1314,90 \pm 0,6$	0	$(2,90 \pm 0,09) \cdot 10^{-10}$
	Ξ^-	$1321,32 \pm 0,13$	-1	$(1,639 \pm 0,015) \cdot 10^{-10}$

nom	symbole	μ $(rm\mu_N)$	d $(e \cdot \mathrm{cm})$	S	contenu en quarks
proton	p	$2,79284739 \pm 6 \cdot 10^{-8}$	$(-4 \pm 6) \cdot 10^{-23}$	0	uud
neutron	n	$-1,9130427 \pm 5 \cdot 10^{-7}$	$< 12 \cdot 10^{-26}$	0	udd
lambda	Λ	$-0,613 \pm 0,004$	$< 1,5 \cdot 10^{-16}$	-1	sdu
sigma	Σ^+	$2,42 \pm 0,05$		-1	suu
	Σ^0			-1	sdu
	Σ^-	$-1,160 \pm 0,025$		-1	sdd
xi	Ξ^0	$-1,250 \pm 0,014$		-2	ssu
	Ξ^-	$-0,6507 \pm 0,015$		-2	ssd

8. Baryons de spin 3/2

Décuplet de spin 3/2 : schéma d'ordre des baryons de spin $\frac{3}{2}$ (voir Fig. 27.11).
Les anti-baryons forment des multiplets similaires.

▹ À la composante d'isospin $I_3 = 0$ et à l'étrangeté $S = -1$ correspondent deux états se distinguant par le nombre quantique d'isospin I :

$I = 0\ :\ \Lambda^0$ et $I = 1\ :\ \Sigma^0$

Composition des multiplets baryoniques à trois quarks :

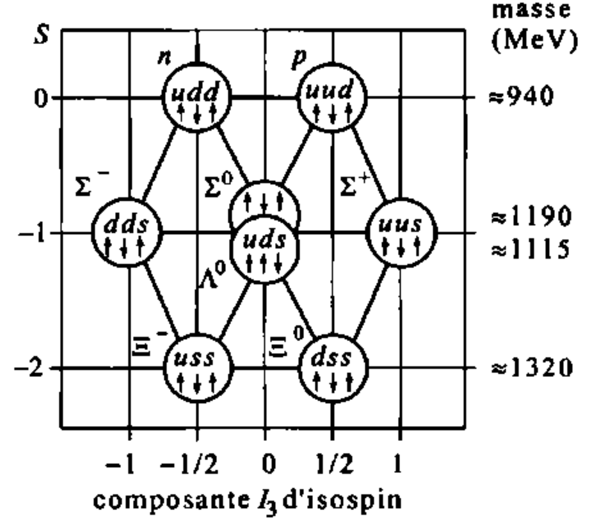


Fig. 27.10 : *Octuplet des baryons de spin 1/2 avec leurs 3 quarks.*

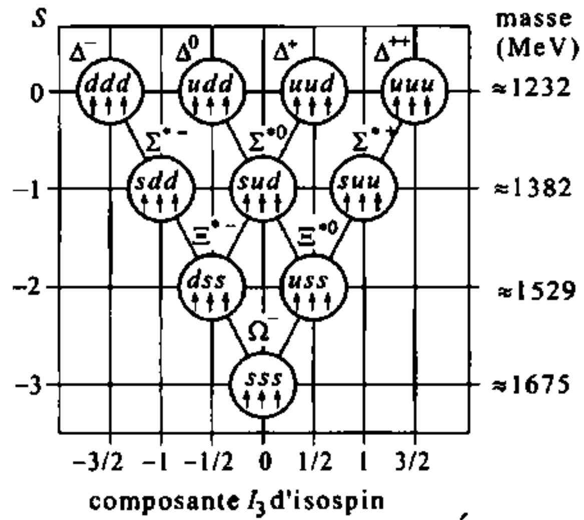


Fig. 27.11 : *Décuplet des baryons de spin 3/2 avec leurs 3 quarks.*

Famille des baryons de spin 3/2 :

Nom	symbole	m (MeV)	Q/e	τ (s)	S	cont. en quarks
omega	Ω^-	$1\,672,43 \pm 0,32$	-1	$(0,822 \pm 0,012) \cdot 10^{-10}$	-3	sss
xi	Ξ^{*0}	$1\,531,80 \pm 0,32$	0	$\Gamma = 9,1 \pm 0,5$ MeV	-2	ssu
	Ξ^{*-}	$1535,0 \pm 0,6$	-1	$\Gamma = 9,9 \pm 1,8$ MeV	-2	ssd
sigma	Σ^{*+}	$1\,382,8 \pm 0,4$	1	$\Gamma = 35,8 \pm 0,8$ MeV	-1	suu
	Σ^{*-}	$1\,387,2 \pm 0,5$	-1	$\Gamma = 39,4 \pm 2,1$ MeV	-1	sdd
	Σ^{*0}	$1\,383,7 \pm 1,0$	0	$\Gamma = 36 \pm 5$ MeV	-1	sdu
delta	Δ^{++}	$1\,232$	2	$\Gamma = 115 - 125$ MeV	0	uuu
	Δ^+	$1\,232$	1	$\Gamma = 115 - 125$ MeV	0	uud
	Δ^0	$1\,232$	0	$\Gamma = 115 - 125$ MeV	0	udd
	Δ^-	$1\,232$	-1	$\Gamma = 115 - 125$ MeV	0	ddd

27.2.4 Accélérateurs et détecteurs

Les **structures subatomiques** peuvent être résolues par des projectiles de grande énergie. La longueur d'onde associée λ des particules lancées à grande vitesse devenant de plus en plus courte à mesure que

l'impulsion p augmente, la matière peut être sondée sur des dimensions comparables à λ :

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad \text{(relation de de Broglie)}$$

Pour produire des paires de particules de masse m, un seuil spécifique en énergie doit être dépassé, donné par :

$$E_{\text{seuil}} = 2mc^2$$

Tout gain en énergie, obtenu par la mise en œuvre d'accélérateurs de particules plus puissants, se traduit généralement par de nouvelles découvertes.

1. Accélérateurs

Accélérateur linéaire : accélérateur de particules dans lequel les cavités haute-fréquence accélératrices sont disposées les unes après les autres, de sorte que le faisceau de projectiles ne passe qu'une fois à travers elles avant d'atteindre la cible.

Synchrotron : accélérateur circulaire dans lequel le faisceau de particules est maintenu sur une orbite par un champ magnétique croissant avec la vitesse, avec une traversée multiple des parties accélératrices.

Collisionneur : accélérateur fonctionnant suivant le principe du synchrotron et ayant deux faisceaux de particules qui se déplacent dans des directions opposées et qui se croisent. Dans le système du centre de masse, l'énergie des deux particules de la collision est beaucoup plus grande que celle que l'on obtient avec des accélérateurs conventionnels.

■ Comme exemples, on peut citer l'anneau de stockage électron-proton HERA (Laboratoire DESY à Hambourg) avec une circonférence de 6,3 km (électrons de 30 GeV et protons de 820 GeV), ainsi que le collisionneur électron-positron LEP (Laboratoir CERN à Genève) avec une circonférence de 26,7 km et une énergie de faisceau de 60 + 60 GeV. En 1983, au LEP, les bosons $W^{\pm}$ et Z^0, porteurs de l'interaction faible, ont été identifiés sans ambiguïté (prix Nobel décerné en 1984 à C. Rubbia et S. van der Meer).
Aujourd'hui, les collisionneurs RHIC (R*elativistic* H*eavy* I*on* C*ollider*, USA) de 200 GeV par paire de nucléons, et LHC (L*arge* H*adron* C*ollider*, CERN) de 5,4 TeV par paire de nucléons sont en construction.

Luminosité $L^* = N_R/\sigma$ en $\text{s}^{-1}\,\text{cm}^{-2}$: caractéristique importante des collisionneurs ; en multipliant L^* par la section efficace σ de réaction, on obtient son taux de production N_R/s.

Collisionneur linéaire : arrangement de deux accélérateurs linéaires directement opposés. Les particules passent à travers les cavités accélératrices une seule fois avant la collision. Mais, comme les particules ne sont pas défléchies, la grande perte d'énergie par rayonnement synchrotron dans les anneaux de stockage est évitée. Aujourd'hui, différents projets e^+e^- à 0,5 TeV sont à l'étude. Citons : TESLA (20 km de long, 1,3 GHz de fréquence) et S-band (25 km, 3 GHz), les deux à DESY, ainsi que CLIC (6,25 km, 30 GHz) au CERN.

2. Détecteurs

- **Émulsion photographique** : plaque photographique qui révèle, par un noircissement, la trace des particules détectées.
- **Chambre à bulles** : dispositif anciennement très utilisé pour la détection des particules. Son principe utilise l'instabilité des liquides (généralement de l'hydrogène liquide, du propane ou du fréon) surchauffés. Les particules chargées de grande énergie génèrent, dans ce milieu métastable, une trace ionisante le long de laquelle le liquide se met à bouillir. La trace, visible, peut alors être photographiée. Grâce à l'application d'un champ magnétique, les particules chargées sont défléchies

(→ *Force de Lorentz*) ; leurs rayons de courbure sont révélateurs de la charge et de la quantité de mouvement transportées.

- **Chambre à streamer** : détecteur dans lequel l'application d'une très haute tension impulsionnelle génère une décharge lumineuse le long de la trajectoire d'une particule ionisante le traversant. Ces décharges sont enregistrées.
- **Chambre d'ionisation** : détecteur dans lequel l'ionisation primaire produite par une particule est mesurée. L'appareil se compose de deux conducteurs isolés délimitant une enceinte remplie d'un gaz et dans laquelle est appliqué un champ électrique.
- **Compteur Čerenkov** : détecteur constitué d'un matériau transparent d'indice de réfraction élevé : une particule chargée qui s'y déplace plus vite que la vitesse de la lumière dans ce milieu, génère une onde électromagnétique ; l'angle d'ouverture du cône d'émission est caractéristique de la vitesse de la particule. Le détecteur RICH (R*ing* I*maging* C*herenkov* C*ounter*) fonctionne sur ce principe.
- **Détecteur semi-conducteur** : chambre d'ionisation solide (silicium) mesurant l'ionisation primaire laissée par la traversée d'une particule chargée. Ce détecteur fournit une information sur l'énergie déposée par la particule et éventuellement, s'il est suffisamment mince par rapport à son parcours, sur son pouvoir d'arrêt (*stopping power*) $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x$.
- **Détecteur à pistes** : pistes de bore sur un monocristal de silicium.

  ■ Une jonction p-n est polarisée en inverse ; lors du passage d'une particule chargée, les électrons créés sont collectés sur les pistes anodes de type p. Sur ce principe sont construits des détecteurs à micropistes (100 μm entre deux pistes consécutives) offrant une résolution spatiale inférieure à 25 μm sur la position de la particule incidente.
- **Scintillateur** : compteur délivrant très rapidement un signal luminescent lors du passage d'une particule chargée. La lumière est convertie en signal électrique par un système photomultiplicateur.
- **Compteur proportionnel**, compteur gazeux dans lequel le champ électrique appliqué dépasse un seuil critique entraînant la multiplication des électrons créés par le passage d'une particule chargée.

  ■ On doit à G. Charpak (prix Nobel 1992) la mise au point des chambres multifils, opérant en régime proportionnel, destinées à la localisation des particules et à la reconstruction de leurs trajectoires. Associées à des circuits électroniques et à une gestion informatique, des chambres de Charpak de très grande surface (plusieurs m^2) ont accompagné, à partir de 1960, toute expérience de physique auprès des collisionneurs.
- **Chambre à projection temporelle** : détecteur de traces qui permet la reconstruction de la trajectoire d'une particule chargée en utilisant le temps de dérive des électrons produits par l'ionisation du milieu (gaz). Des fils métalliques recueillent les charges et permettent de déterminer les coordonnées d'espace et de temps de la particule.
- **Calorimètre** : dispositif généralement utilisé pour la détection et la mesure de l'énergie des particules neutres ; celles-ci, en interagissant avec le matière dense du détecteur, génèrent des particules chargées secondaires qui y sont absorbées.

27.3 Symétries et lois de conservation

Homogénéité du temps : propriété des lois de la nature d'être invariante dans le temps. Les quantités physiques d'un système temporellement homogène ne dépendent pas du temps t mais de la durée Δt. Ceci est la raison profonde de la conservation de l'énergie.

Homogénéité de l'espace : propriété des lois de la nature d'être invariante dans l'espace. Les quantités physiques d'un système spacialement homogène ne changent pas dans un déplacement (translation) $\vec{r} \to \vec{r} + \Delta\vec{r}$. Ceci est la raison profonde de la conversation de la quantité de mouvement.

Isotropie de l'espace : équivalence de toutes les directions de l'espace. Les propriétés d'un système ne changent pas dans des rotations. Une conséquence de l'isotropie spatiale est la conservation du moment angulaire.

Théorème de Noether : correspondance entre symétries fondamentales et quantités conservées. L'invariance de l'intégrale d'action en théorie des champs, concernant le groupe des transformations constantes à n paramètres, a pour conséquence l'existence de n lois de conservation.

27.3.1 Conservation de la parité et interaction faible

Parité : symétrie correspondant à une réflexion dans l'espace ; la coordonnée de temps n'est pas affectée. L'opération de parité est équivalente à une "symétrie par rapport à un miroir plan".

Conversation de la parité : énoncé de mécanique quantique stipulant qu'un phénomène physique et son image miroir doivent être les mêmes. La parité est toujours conservée lors de réactions mettant en jeu des interactions forte et électromagnétique.

- Les atomes excités rayonnent, isotropiquement dans l'espace libre, des ondes électromagnétiques. Dans un champ magnétique, chaque atome se conduit comme une boucle de courant ; ses niveaux sont décomposés en plusieurs sous-niveaux caractérisés par des valeurs distinctes de projections, sur l'axe du champ, du moment cinétique total atomique (→ *Effet Zeeman*). Le rayonnement électromagnétique caractéristique émis est de symétrie miroir par rapport au plan de la boucle ; cette propriété demeure quand le courant dans la boucle est inversé (Fig. 27.12).

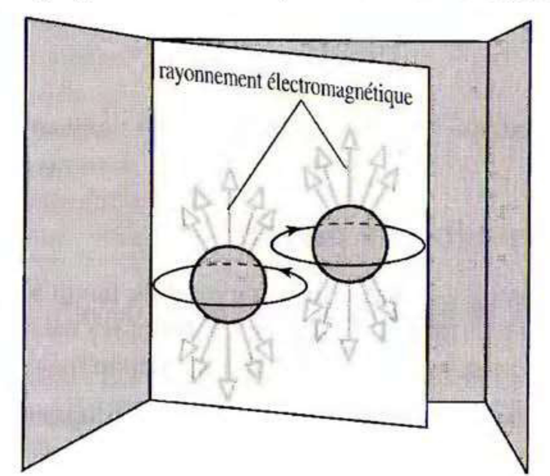


Fig. 27.12 : *Conservation de la parité de l'émission électromagnétique dans l'effet dans Zeeman.*

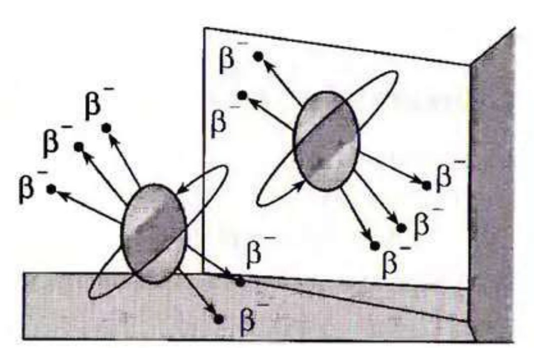


Fig. 27.13 : *Représentation schématique de la violation de la parité dans l'émission β.*

Opérateur parité $\hat{P}$: opérateur générant une réflexion des coordonnées d'espace qui entrent dans la fonction d'onde ψ, suivant : $\hat{P}\psi(\vec{\mathbf{r}}, t) = \psi(-\vec{\mathbf{r}}, t)$

Violation de la parité : non-conservation de la parité dans une réaction nucléaire. La décroissance β est un processus qui conduit à la violation de la parité (Fig. 27.13).

- Une source radioactive β de ^{60}Co, portée à une très basse température, est placée dans un champ magnétique uniforme. Par ce procédé, les noyaux de ^{60}Co sont orientés (leurs moments magnétiques sont totalement alignés). Les électrons β sont alors comptés en même temps que les rayons γ émis par la source, en fonction du temps de réchauffement de l'échantillon-source. Si la parité est conservée, les taux de comptage doivent suivre la même évolution *indépendamment* de l'orientation du champ magnétique (jusqu'à saturer quand le mouvement thermique détruit l'alignement des

noyaux). Les résultats des mesures, avant et après retournement du champ magnétique, sont reportés sur la Fig. 27.14.

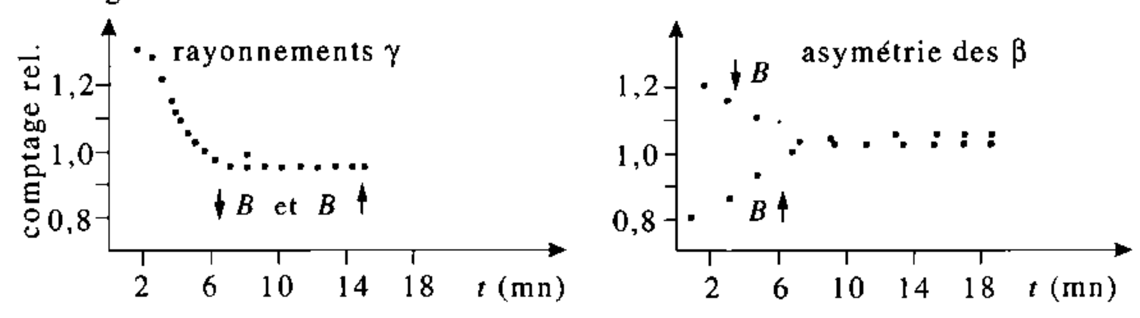


Fig. 27.14 : *Résultats des mesures avec une source β de ^{60}Co placée dans un champ magnétique B. Le phénomène est à rechercher avant le temps de réchauffement qui est d'environ* 6 mn.

Le taux de comptage β *dépend* de l'orientation du champ magnétique et *donc* n'est pas de symétrie miroir ; ce n'est pas le cas pour l'émission γ qui est indépendante de l'orientation du champ.

- La parité **n'est pas conservée** dans les interactions faibles.

Des conséquences de la violation de parité sont :

- Les spins de l'**électron** et du **neutrino** sont toujours d'orientation opposée à la direction du mouvement (hélicité négative). Ceux du **positron** et de l'**antineutrino** sont, au contraire, toujours orientés dans la direction de propagation (hélicité positive).
- Le proton et le neutron ont pour parité intrinsèque $\pi_n = \pi_p = +1$. L'électron a pour parité $\pi_e = +1$. Un système de deux particules aura la parité :
  $\pi = (-1)^l \, \pi_A \cdot \pi_B$
  où l désigne le nombre quantique de moment angulaire (relatif). La parité est un nombre quantique multiplicatif.

27.3.2 Conservation de la charge et création de paires

- Les réactions nucléaires et entre particules élémentaires s'effectuent toujours de façon à ce que la charge soit conservée, qu'il s'agisse de la charge électrique, de la charge (ou nombre) baryonique ou de la charge (ou nombre) leptonique ; chacun de ces nombres est comptabilisé séparément.

■ Un exemple de la conservation de la charge électrique est donnée par la réaction nucléaire suivante :

$$\underbrace{{}^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}}_{9} \rightarrow \underbrace{{}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{17}_{8}\mathrm{O}}_{9}$$

Création de paires : processus au cours duquel un rayonnement électromagnétique est totalement converti en une particule et une anti-particule. Exemple :

$$\gamma \rightarrow e^+ + e^-$$

Pour des raisons de conservation de l'énergie et du moment, la réaction ne peut s'opérer que dans le voisinage d'une troisième particule (un atome, par exemple) et au-dessus d'un certain seuil en énergie. Comme la masse au repos de l'électron et du positron est $m_e \cdot c^2 \approx 511$ keV, le seuil du processus cité nécessite un rayonnement γ d'énergie supérieure à 1,022 MeV.

Annihilation de paires : processus au cours duquel une particule et son antiparticule s'annihilent en un rayonnement électromagnétique. En accord avec la loi de conservation de la quantité de mouvement, deux rayonnements γ sont produits :

$$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$$

Antiparticule : particule élémentaire dont les nombres quantiques de charge (électrique, baryonique, leptonique) – et aussi, pour les fermions, de parité – sont égaux mais opposés en signe à ceux de la particule associée.

▷ La loi de conservation de la charge permettrait la conversion d'un rayonnement γ en un électron et un proton. Cette réaction **ne se produit pas**, car les nombres baryonique et leptonique n'y sont pas conservés.

Antiproton : antiparticule du proton. L'antiproton $\bar{p}$ a une charge électrique $q_{\bar{\mathrm{p}}} = -1e$, un nombre baryonique $B_{\bar{\mathrm{p}}} = -1$ et une parité $\pi_{\bar{\mathrm{p}}} = -1$.

▷ En accord avec les lois de conservation, la conversion d'un rayonnement γ en un proton et un antiproton est possible :

$$\gamma \to p + \bar{p}$$

Cette réaction nécessite une énergie seuil :

$$Q_{\text{seuil}} \geq 2 \cdot m_{\mathrm{p}} \cdot c^2 \simeq 2 \cdot 938{,}3\ \mathrm{MeV}$$

Le tableau suivant regroupe les "charges" de quelques particules élémentaires :

particule élémentaire	charge électrique	nombre baryonique	nombre leptonique
proton	+1	+1	0
neutron	0	+1	0
électron	−1	0	+1
positron	+1	0	−1
mésons π^+, π^0, π^-	$+1, 0, -1$	0	0
photon	0	0	0
neutrino	0	0	+1
antiproton	−1	−1	0
antineutron	0	−1	0
antineutrino	0	0	−1

27.3.3 Conjugaison de charge et antiparticule

Conjugaison de charge C : opération de symétrie reliant particule et antiparticule. C'est une transformation discontinue qui change toute particule en son antiparticule (mais qui ne modifie pas les autres propriétés du système).

● À chaque particule, il correspond une antiparticule. Elles ont même masse, mais des nombres quantiques de "charge" opposés.

▷ Si la conjugaison de charge était appliquée au monde, celui-ci resterait neutre et serait constitué en autant d'antiparticules qu'il a de particules et *vice-versa*. Cependant, toutes les observations menées jusqu'à présent montrent que le monde est asymétrique : on n'y a pas encore détecté dans l'espace d'atomes d'antimatière.

Opérateur $\hat{C}$: opérateur qui réalise la transformation d'une particule en antiparticule. Si cet opérateur est appliqué deux fois, on revient à l'état initial.

27.3.4 Invariance par inversion du temps et réaction inverse

Invariance par inversion du temps : symétrie des phénomènes physiques après inversion de la direction du temps.

Opérateur $\hat{T}$: opérateur qui cause l'inversion du temps, c'est à dire que t est remplacé par $-t$.

- Une collision inélastique de deux particules A et B conduit à deux particules C et D dans l'état final. La probabilité de transition du système, de l'état initial i à l'état final f, s'écrit w_{fi}. Celle du processus inverse (état initial f^* allant à l'état final i^*) est $w_{i^*f^*}$. L'invariance par inversion du temps requiert :
$w_{fi} = w_{i^*f^*}$

Le tableau suivant donne le comportement de quelques quantités physiques sous inversion du temps $\hat{T}$, conjugaison de charge $\hat{C}$ et opération de parité $\hat{P}$.

Grandeur physique	$\hat{T}$	$\hat{C}$	$\hat{P}$
impulsion $\vec{\mathbf{p}}$	$-\vec{\mathbf{p}}$	$\vec{\mathbf{p}}$	$-\vec{\mathbf{p}}$
spin $\vec{\mathbf{J}}$	$-\vec{\mathbf{J}}$	$\vec{\mathbf{J}}$	$\vec{\mathbf{J}}$
champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$	$\vec{\mathbf{E}}$	$\vec{\mathbf{E}}$	$-\vec{\mathbf{E}}$
champ magnétique $\vec{\mathbf{H}}$	$-\vec{\mathbf{H}}$	$\vec{\mathbf{H}}$	$\vec{\mathbf{H}}$
moment dipolaire électrique $\vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$	$-\vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$	$\vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$	$-\vec{\mathbf{J}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$

- L'**invariance par inversion du temps** est réalisée dans des réactions procédant par des interactions fortes ou électromagnétiques.

- La symétrie d'une interaction dans une transformation individuelle $\hat{C}$, $\hat{P}$ ou $\hat{T}$ n'est pas une loi universelle de la nature.

- Les interactions électromagnétique, faible et forte sont invariantes dans une application des trois opérations à la fois menées dans n'importe quel ordre.

▷ Une conséquence de l'invariance $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$, qui peut être vérifiée expérimentalement, est l'égalité des masses, des durées de vie et des moments magnétiques d'une particule et de son antiparticule. Jusqu'à présent (1998), aucune expérience n'a révélé une violation de l'invariance $\hat{C}\hat{P}\hat{T}$.

■ L'électron et son antiparticule, le positron, ont des masses mesurées égales à 10^{-8} près. On a pu vérifier encore plus précisement, à 10^{-16} près, l'égalité des masses de K^0 et $\bar{K}^0$.

27.3.5 Lois de conservation

Lois de conservation et symétries d'une interaction sont étroitement reliées :

- Si une symétrie est brisée, une loi de conservation est violée.

Les lois universelles de conservation et leur validité pour les diverses interactions sont répertoriées ci-dessous :

lois de conservation et nombres quantiques	interaction			
	forte	électromagnétique	faible	gravitationnelle
énergie E	+	+	+	+
impulsion $\vec{p}$	+	+	+	+
moment angulaire $\vec{J}$	+	+	+	+
charge				
charge électrique Q	+	+	+	+
nombre baryonique B	+	+	+	+
nombre leptonique L	+	+	+	+
spin				
spin $\hat{s}$	+	+	+	+
isospin $\hat{I}$	+	–	–	–
composante d'isospin I_z	+	+	–	–
étrangeté S	+	+	–	–

lois de conservation	raison physique	type de loi
énergie	homogénéité du temps	géométrique
impulsion	homogénéité de l'espace	géométrique
moment angulaire	isotropie de l'espace	géométrique
invariance $\hat{C}\hat{P}$	symétrie gauche-droite de l'espace	géométrique
invariance $\hat{T}$	symétrie du temps	géométrique
charge électrique	inconnue	charge
nombre baryonique	inconnue	charge
nombre leptonique	inconnue	charge
étrangeté	inconnue	

27.3.6 Au-delà du modèle standard

M **Désintégration du proton** : prévision de la **Théorie de Grande Unification** de Georgi et Glashow ; la vie moyenne du proton serait $\tau = 4,5 \cdot 10^{29\pm1.7}$ ans (soit plusieurs ordres de grandeur plus élevés que l'âge de l'univers). Diverses expériences ont déjà permis de conclure à des limites de 10^{31} à $5 \cdot 10^{32}$ ans. Elles ont été menées dans des mines de sel ou dans des tunnels pour s'affranchir le mieux possible du rayonnement cosmique.

Modèle de supersymétrie (SUSY) : modèle d'unification postulant toute une série de nouvelles particules associées à celles connues :

- Neutralino, chargino, sneutrino, sélectron, smuon, squark et gluino.

La particule supersymétrique la plus légère a une masse $m > 15$ GeV. Aucune n'a encore été détectée. Le spectre de masse pourrait, dans un avenir proche, être mesuré auprès du collisionneur hadronique LHC (→ *Collisionneur*) ou de futurs accélérateurs linéaires électron-positron.

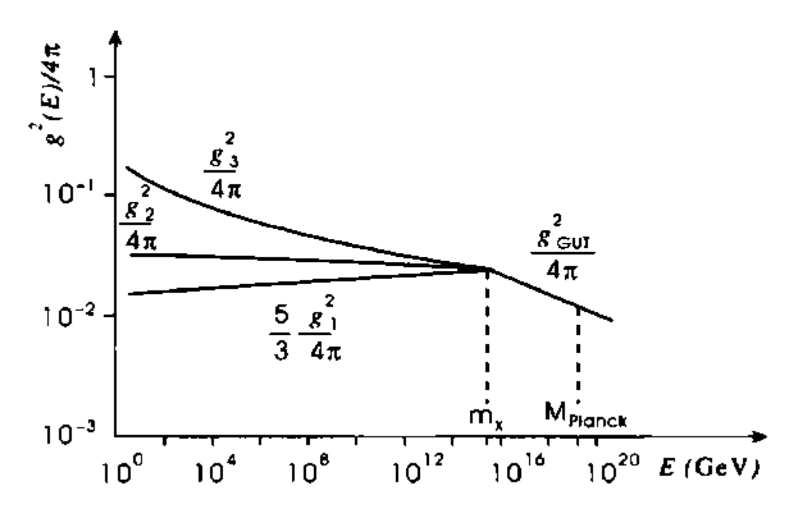


Fig. 27.15 : *Dépendence en énergie des paramètres de couplage g_1 (interaction électromagnétique), g_2 (interaction faible), g_3 (interaction forte) et $g_{\rm GUT}$ (théorie de grande unification GUT).*

Monopole magnétique : manifestation isolée d'une charge magnétique élémentaire ; le monopole magnétique est prévu par les théories unifiées. Cette particule violerait l'invariance par inversion du temps, mais cette propriété ne peut être utilisée comme une contre-preuve de son existence puisque la violation d'invariance par inversion temporelle a déjà été observée pour les kaons neutres.

[M] Objet d'intensives recherches, les monopoles magnétiques n'ont cependant pas encore été détectés, que se soit dans le rayonnement cosmique ou à l'intérieur de roches lunaires. En 1975, la découverte d'un monopole a été annoncée, puis infirmée sur la base d'une confusion possible avec un noyau très lourd. Les monopoles magnétiques pourraient être 10^{16} fois plus lourds qu'un proton.

Neutrinos massifs ou **neutrinos de Majorana** : neutrinos de masses non nulles, $m_\nu \neq 0$. Selon le Modèle Standard commun, $m_\nu = 0$. Une masse au repos, même infime, des neutrinos aurait des conséquences extrêmement profondes sur la théorie, comme par exemple la **non-conversation du nombre leptonique**.

[M] La limite supérieure expérimentalent déterminée de la masse du neutrino électronique ν_e est 7 eV (voir cependant ci-dessous). En fait, dans les expériences, seule la quantité m_ν^2 est mesurée, parfois précédée d'un signe négatif. Une autre limite a aussi été donnée à partir de l'observation, en 1987, de l'explosion de la supernova SN1987A survenue 165 000 ans auparavant : la différence des temps d'arrivée des neutrinos et de la lumière conduit à $m_\nu < 7$ eV.

Oscillation des neutrinos : une masse non nulle de neutrino pourrait être inférée, comme le prévoit la mécanique quantique, s'il est démontré que les neutrinos **oscillent**, c'est à dire se transforment périodiquement en un neutrino d'un autre type : $\nu_e \rightleftharpoons \nu_\mu \rightleftharpoons \nu_\tau$. Des résultats probants ont été récemment (1998) obtenus avec le détecteur Super-Kamiokande (Japon). Cet appareil, constitué d'une cuve souterraine de 50 000 tonnes d'eau pure aux parois tapissées de 13 000 détecteurs scintillateurs, a permis de mettre en évidence un déficit en neutrinos ν_μ atmosphériques (→ *Rayons cosmiques*) – et donc le phénomène d'oscillations – quand la durée du trajet des neutrinos est augmentée d'une manière significative. Sur la base des mesures, une limite inférieure de $0,07 \pm 0,04$ eV a été proposée pour la masse d'un des neutrinos. Si les diverses autres expériences en cours dans le monde confirmaient ce résultat, de profonds bouleversements dans les théories physiques (modèle standard) et astrophysiques (masse de l'univers) devraient suivre.

Masse de Planck, $M_{\rm Planck} = \sqrt{\hbar c/G} \approx 1,2 \cdot 10^{19}$ GeV/c^2 (où G est la constante de gravitation) : masse apparaissant d'une façon naturelle dans toute tentative cherchant à combiner la théorie quantique et la gravitation (**théorie de la relativité générale**).

28 Physique nucléaire

28.1 Composition du noyau atomique

Noyau atomique : système composé de A **nucléons**.

Nucléon : nom désignant à la fois le proton et le neutron.

Proton : particule élémentaire de charge positive et de spin $\hbar/2$. La charge électrique du proton est d'une charge élémentaire.

Neutron : particule élémentaire électriquement neutre, de spin $\hbar/2$.

1. Définitions de base

Numéro atomique Z : nombre de protons dans le noyau et, aussi, nombre d'électrons de l'atome neutre correspondant.
Nombre de masse A ou nombre baryonique B : nombre de nucléons dans le noyau :

$$A = Z + N$$

Nombre de neutrons N :

$$N = A - Z$$

Notation : le nombre de masse A figure en indice supérieur gauche du noyau de symbole X ; on peut y adjoindre le numéro atomique Z et le nombre de neutrons N sous forme d'indices inférieurs respectivement à gauche et à droite du symbole :

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X}_N$$

2. Isotope, isobare et isotone

Isotope : se dit de noyaux de même numéro atomique Z, mais de nombre de neutrons N différent.

■ ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}_N$ et ${}^{A+1}_{Z}\mathrm{X}_{N+1}$ sont deux isotopes. Par exemple, les noyaux de carbone suivants sont des isotopes : ${}^{12}\mathrm{C}$, ${}^{13}\mathrm{C}$ et ${}^{14}\mathrm{C}$.

▷ Les isotopes ont des propriétés chimiques identiques. Seuls des processus, dépendant de la masse, mettent en évidence de légères variations entre les isotopes (des différences sont observées dans les équilibres physico-chimiques, les vitesses de diffusion, les spectres atomiques, les fréquences de résonance moléculaire, les températures critiques de supraconducteurs). Ces comportements sont regroupés sous le vocable d'**effets isotopiques**.

Isobare : se dit de noyaux de même nombre de masse A, mais de numéro atomique Z différent.

■ ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}_N$ et ${}_{Z+1}^{\;\;A}\mathrm{X}_{N-1}$ sont des isobares. Par exemple : ${}^{14}\mathrm{C}$ et ${}^{14}\mathrm{N}$.

Isotone : se dit de noyaux de même nombre de neutrons N, mais de numéro atomique Z différent.

■ ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}_N$ et ${}^{A+1}_{Z+1}\mathrm{X}_N$ sont des isotones.

3. Isospin et principe d'exclusion de Pauli

Isospin I : vecteur dans un espace abstrait. Son orientation donne l'état de charge d'un système.
Proton et neutron peuvent être considérés comme deux états d'une même particule (le nucléon) dont l'isospin diffère par les valeurs de sa troisième composante m_I :

$$m_I = +1/2 \qquad \text{pour le proton,} \qquad m_I = -1/2 \qquad \text{pour le neutron.}$$

Opérateur d'isospin $\hat{I}$: opérateur possèdant toutes les propriétés des opérateurs de spin $\hat{s} = \hat{\sigma}/2$ (en unité $\hbar$) (→ *Spin*) :

$$\hat{I} = (\hat{I}_x, \hat{I}_y, \hat{I}_z) \qquad \hat{I} = \hat{\tau}/2 \qquad I = 1/2 \qquad m_I = \pm 1/2$$

Opérateur de charge $\hat{q}$ du nucléon : prend les valeurs propres 0 (neutron) et e (proton) :

$$\hat{q} = \frac{e}{2}(1 + \hat{\tau}_z) \qquad e : \text{charge élémentaire}$$

Le couplage vectoriel des isospins $\vec{t}_1$ et $\vec{t}_2$ de deux nucléons conduit à l'isospin total $\vec{\mathbf{T}}$ dont les nombres quantiques T, $M_T = m_{t_1} + m_{t_2}$ sont pour :

- l'état singulet d'isospin : $T = 0$, $M_T = 0$ système neutron-proton
- l'état triplet d'isospin : $T = 1$, $M_T = +1$ système proton-proton
  $M_T = 0$ système neutron-proton
  $M_T = -1$ système neutron-neutron

Symétrie de la fonction d'isospin pour un système de deux nucléons par rapport à l'échange des coordonnées d'isospin des deux nucléons :

- si $T = 0$: fonction d'isospin antisymétrique
- si $T = 1$: fonction d'isospin symétrique

Indépendance de charge des forces nucléaires : la force à deux corps des paires (pp), (pn) et (nn) du triplet d'isospin est identique, une fois soustraits les effets de l'interaction électromagnétique. Par contre, la force à deux corps de l'état singulet d'isospin se distingue de celle des états triplets d'isospin.

Principe de Pauli (ou **principe d'exclusion)** : la fonction d'onde totale d'un système de nucléons doit être antisymétrique par rapport à l'échange simultané des coordonnées de spin, d'isospin et d'espace de deux nucléons quelconques.

■ L'état fondamental du deutéron est un état singulet d'isospin ($T = 0, M_T = 0$, fonction d'isospin antisymétrique) et un état triplet de spin ($S = 1$, fonction de spin symétrique) du système neutron-proton. D'après le principe de Pauli, la fonction d'espace doit être symétrique par échange des coordonnées des particules : le nombre quantique L (moment orbital du mouvement relatif) est ainsi limité aux valeurs $L = 0, 2, 4, \ldots$.

4. Tableau des propriétés fondamentales des nucléons

Propriétés	Proton	Neutron
masse	$1,672\,623\,1(10) \cdot 10^{-27}$kg	$1,674\,928\,6(10) \cdot 10^{-27}$kg
charge	$+1,602\,177\,33 \pm 0,000\,004\,65 \cdot 10^{-19}$C	0
vie moyenne	$\geq 10^{31}$ ans	(898 ± 16) s
spin	$1/2\hbar$	$1/2\hbar$
moment magnétique	$(+2,792\,847\,39$ $\pm 0,000\,000\,06) \cdot \mu_M$	$(-1,913\,042\,7$ $\pm 0,000\,000\,5) \cdot \mu_M$
rapport gyromagnétique	5,585 692	-3,826 3
isospin	$+1/2$	$-1/2$

5. Résonance de spin nucléaire

Magnéton nucléaire μ_M : unité de mesure des moments magnétiques nucléaires :

$$\mu_M = e\hbar/2m_{\text{proton}} = 3,152\,451\,66(28) \cdot 10^{-14}\ \text{MeV} \cdot \text{T}^{-1}$$

M Le spin du proton se mesure par la méthode paramagnétique de résonance magnétique nucléaire (RMN) : le moment magnétique $\vec{\mu}_p$ du proton ne peut que prendre des orientations bien définies dans un champ magnétique $\vec{B}$. Ces directions quantifiées correspondent à des énergies distinctes. Si un échantillon formé de protons (par exemple, de l'eau) est placé dans un champ magnétique, les protons des atomes d'hydrogène se polarisent. Par l'intermédiaire d'une bobine, on soumet alors l'échantillon à un champ de haute fréquence continuement variable. Quand la fréquence atteint une valeur correspondant à une transition d'énergie d'un état de spin à un autre état, le circuit oscillant de la bobine délivre un signal affaibli d'absorption (Fig. 28.1 (a)).

▹ La RMN est utilisée pour l'analyse de la structure des molécules organiques ainsi qu'en médecine (tomographie par résonance de spin).

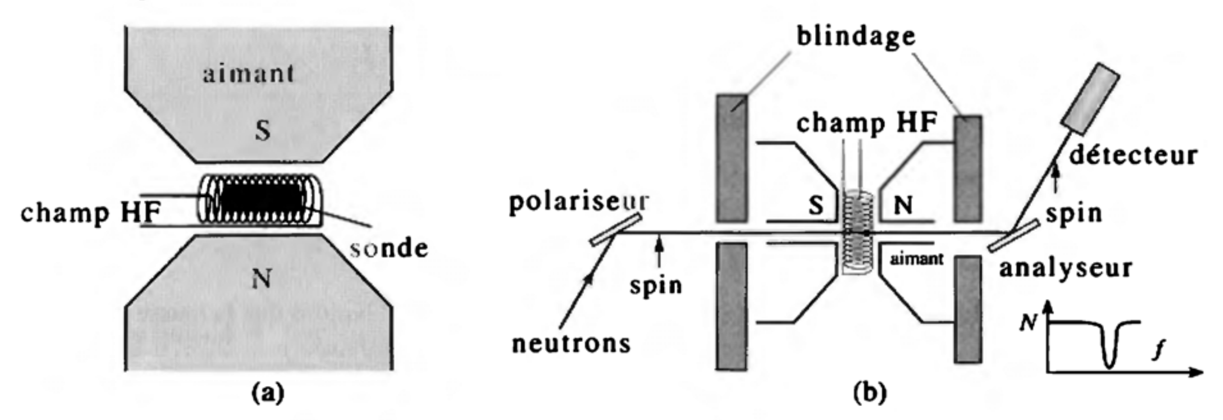


Fig. 28.1 : *En* (a) *: schéma de principe de la résonance magnétique nucléaire (RMN) ; en* (b) *: mesure RMN sur des neutrons détectés avec le taux N en fonction de la fréquence f délivrée par la bobine HF.*

6. Moment magnétique des nucléons

Proton et neutron ont un moment magnétique.

Moment magnétique du neutron :

$$\mu_n = -(1,913\,042\,7 \pm 0,000\,000\,5) \cdot \mu_M$$

M La mesure la plus précise du moment magnétique du neutron a été effectuée par la technique de résonance magnétique nucléaire (RMN) : un faisceau de neutrons thermiques ($E_n \approx 25$ meV) est polarisé à travers un polariseur métallique avant d'entrer dans un champ magnétique uniforme où est installée une bobine HF (voir Fig. 28.1(b)). À la sortie du champ, l'état de polarisation des neutrons est déterminé par un analyseur. On utilise ici la diffusion magnétique par interaction dipôle-dipôle magnétique : le moment magnétique du neutron interagit avec la surface magnétiquement saturée d'un ferromagnétique. Quand la polarisation coïncide avec la direction de magnétisation de l'analyseur, la diffusion atteint un maximum. Avec l'aide de cet analyseur, on mesure la fréquence du champ HF provoquant un renversement du moment magnétique du neutron.

Moment magnétique du proton :

$$\mu_p = +(2,792\,847\,39 \pm 0,000\,000\,06) \cdot \mu_M$$

Les moments magnétiques du neutron et du proton semblent anormaux : le neutron, ne portant pas de charge électrique, devrait avoir un moment magnétique nul ; quant au proton, son moment magnétique devrait être de un magnéton nucléaire. Les valeurs mesurées, très différentes, prouvent que les nucléons ne sont pas des particules ponctuelles, mais qu'ils possèdent une distribution spatiale de charge.

- Les nucléons sont des objets étendus possédant une structure interne. Proton et neutron sont constitués de quarks, de gluons et de paires virtuelles quark-antiquark.

▷ Jusqu'à présent, les tentatives de mesure du moment électrique dipolaire du neutron n'ont pas abouti. De récentes expériences de résonance magnétique conduisent à lui donner une limite supérieure de $4 \cdot 10^{-25}\ e \cdot \mathrm{cm}$.

28.2 Grandeurs fondamentales du noyau

Forme des noyaux : généralement de symétrie axiale et souvent même sphérique.

Rayon nucléaire R : donné approximativement par l'expression :

$$R = r_0 \cdot A^{1/3} \qquad r_0 \approx 1,2\ \mathrm{fm} = 1,2 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

1. Distribution en nombre et en masse des nucléons

Densité nucléaire ρ_0 : nombre de nucléons par unité de volume ; c'est une quantité presque constante pour tous les noyaux :

$$\rho_0 = 0,17 \cdot 10^{45}\ \mathrm{nucléons/m^3} = 0,17\ \mathrm{nucléons/fm^3}$$

Cette quantité représente une masse volumique d'environ $2,7 \cdot 10^{17}\ \mathrm{kg/m^3}$. Notons que la masse volumique la plus élevée, pour un corps macroscopique, est celle de l'osnium (métal) avec $\rho = 22\,570\ \mathrm{kg/m^3}$. Les noyaux atomiques sont donc **de 13 ordres de grandeur** plus denses que les solides ordinaires.

Distribution de masse $\rho(r)$: densité nucléaire exprimée en fonction de la distance r au centre du noyau (Fig. 28.2), empiriquement donnée par :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\frac{(r-R)}{a}}$$

La surface du noyau est diffuse ; la grandeur a permet de paramétriser l'**épaisseur de peau** b qui est la longueur sur laquelle la densité passe de 90% à 10% de sa valeur centrale : $b = 4,4a$; $a \approx 0,6$ fm (Fig. 28.2).

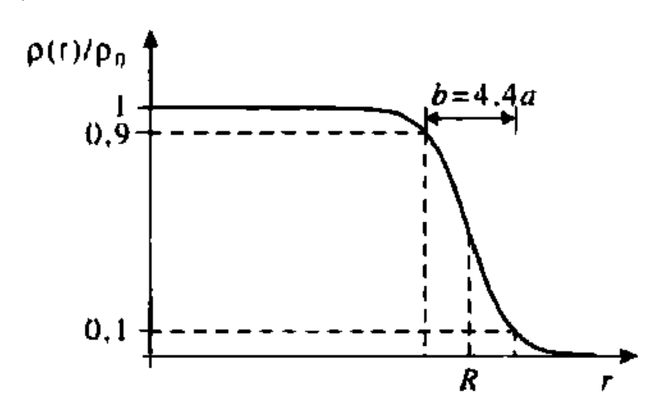


Fig. 28.2 : *Distribution de densité de masse nucléaire. R : rayon du noyau ; a : paramètre de surface ; b : épaisseur de peau ; ρ_0 : densité centrale*

M La distribution de charge du noyau se mesure par diffusion élastique (dite **diffusion Rutherford**) d'électrons, de protons ou de particules α (voir Fig.28.3 (a)). Pour des noyaux lourds, les distributions massique et de charge diffèrent sensiblement par suite de l'excédent de neutrons. En utilisant un facteur de forme approprié pour la distribution de charge, on peut déduire le rayon nucléaire R et le paramètre r_0 des expériences de diffusion.

2. Énergie de liaison et défaut de masse

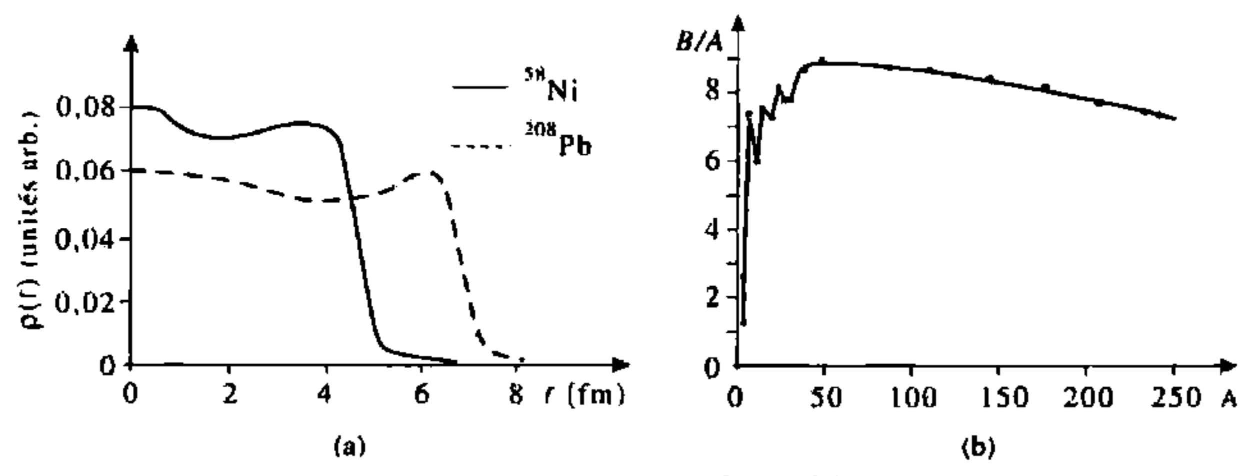


Fig. 28.3 : *En* (a) *: distribution de charge dans les noyaux* ^{58}Ni *et* ^{208}Pb. *r est la distance au centre du noyau : en* (b) *: énergie de liaison B/A par nucléon en fonction du nombre de masse A.*

Énergie de liaison B : énergie nécessaire pour dissocier un noyau en protons et en neutrons. L'unité SI est le joule (J), mais on exprime plus habituellement cette énergie en MeV :

$$1\ \mathrm{MeV} = 1,6022 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}$$

- La masse d'un noyau stable est plus petite que la somme des masses des nucléons libres le constituant.

Défaut de masse $\Delta(A, Z)$: différence entre la somme des masses de tous les nucléons et la masse du noyau $m(A, Z)$:

$$\Delta W(A, Z) = Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n - m(A, Z)$$

Le défaut de masse ΔW est relié à l'énergie de liaison B par l'équivalence masse-énergie :

$$B = \Delta W(A, Z) \cdot c^2 \qquad 1\ \mathrm{MeV}/c^2 = 1,7827 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg}$$

M Les défauts de masse sont mesurés par spectrométrie de masse en accélérant et déviant les ions par des champs électrique et magnétique. La différence d'énergie de liaison des noyaux peut aussi s'obtenir à partir de l'énergie de désexcitation β ou à partir du bilan Q d'une réaction nucléaire.

3. Unité de masse atomique

u : vaut 1/12ème de la masse de l'atome de l'isotope de carbone ^{12}C :

$$u = \frac{1}{12} m_{^{12}\mathrm{C}} = \frac{1\ g}{N_A} = 1,6605402(10) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \quad (N_A \text{ est le nombre d'Avogadro})$$

Cette unité est très commode en physique nucléaire puisque les masses de tous les noyaux sont pratiquement des multiples entiers de u.

Grandeur	Symbole	Valeur	Erreur (ppm)
unité de masse atomique	u	$931,494\,32$ MeV	0,30
masse de l'électron	m_e	$0,510\,999\,06$ MeV	0,30
masse du muon	m_μ	$105,658\,389$ MeV	0,32
masse du proton	m_p	$938,272\,31$ MeV	0,30
masse du neutron	m_n	$939,565\,63$ MeV	0,30
constante de Planck	$\hbar$	$6,582\,122\,0 \cdot 10^{-22}$ MeV · s	0,30

4. Énergie moyenne par nucléon

Énergie moyenne par nucléon B/A : énergie de liaison moyenne par nucléon des noyaux stables. La valeur expérimentale est : $B/A \approx 8$ MeV.

● Les noyaux sont liés par environ 1% de leur masse.

L'énergie de liaison par nucléon croît avec la masse des noyaux légers. Le fer (^{56}Fe) est le noyau le plus stable connu avec une valeur de $B/A \approx 8,8$ MeV/nucléon. Pour $A > 56$, l'énergie de liaison décroît à mesure qu'augmente le nombre de nucléons (Fig. 28.3 (b)). Ainsi, la fission de noyaux lourds ou la fusion de noyaux légers est un moyen de récupérer de l'énergie.

▷ Les maxima observés localement de l'énergie de liaison (par exemple, pour $^4_2$He) s'expliquent par la saturation en protons et en neutrons de couches nucléaires (→ *Modèle des couches*).

Saturation des forces nucléaires : l'énergie de liaison est proportionnelle au nombre de nucléons avec un facteur de proportionnalité de ∼ 8 MeV/A.

● La valeur de l'énergie de liaison d'un noyau détermine sa stabilité envers une désintégration.

28.3 Interaction nucléon-nucléon

28.3.1 Potentiel nucléon-nucléon phénoménologique

Le potentiel V_{12} de l'interaction de deux nucléons peut être déterminé, jusqu'à des énergies d'environ 300 MeV, à partir de la diffusion élastique nucléon-nucléon par une **analyse en déphasages**. Les mesures concernent les sections efficaces différentielles déduites d'expériences de **simple diffusion** et de **double diffusion** (système polariseur-analyseur) ou d'expériences faisant intervenir des faisceaux de **particules polarisées** et/ou des **cibles polarisées**.

V_{12} se met sous la forme générale :

$$\begin{aligned} V_{12} &= V_{\mathrm{W}}(r) + V_{\mathrm{B}}(r)\,(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + V_{\mathrm{H}}(r)\,(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + V_{\mathrm{M}}(r)\,(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + \\ &\quad V_{\mathrm{T}}\,S_{12} + V_{\mathrm{LS}}\,(\vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}}) \end{aligned}$$

Potentiel de Wigner V_W : dépend seulement de la distance r de séparation des nucléons.

1. Forces d'échange

Force d'échange : force centrale faisant état, par l'intensité et le signe (attraction ou répulsion), des propriétés de symétrie de la fonction de spin (spin total $S = 0$ ou $S = 1$), de la fonction d'isospin (isospin total $T = 0$ ou $T = 1$) ou des coordonnées d'espace (nombre quantique orbital $L = 0, 2, 4, \ldots$ ou $L = 1, 3, 5, \ldots$).

Force de Bartlett $\sim \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$: force d'échange discernant entre les états de spin $S = 0$ et $S = 1$.

Force de Heisenberg $\sim \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2$: force d'échange discernant entre les états d'isospin $T = 0$ et $T = 1$.

Force de Majorana $\sim (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)$: force d'échange discernant entre les états de moment orbital pair et impair.

■ Le potentiel s'écrit, dans le cas de forces de Wigner et de Bartlett :

$$V_{12} = V_\mathrm{W} - 3 \cdot V_\mathrm{B} \quad \text{pour } S = 0$$
$$V_{12} = V_\mathrm{W} + 1 \cdot V_\mathrm{B} \quad \text{pour } S = 1$$

2. Forces tensorielles et couplage spin-orbite

Force tensorielle S_{12} : force statique non centrale dépendant de l'orientation des spins $\vec{\mathbf{s}}_1, \vec{\mathbf{s}}_2$ des nucléons par rapport au vecteur $\vec{\mathbf{r}}$ joignant les deux nucléons (voir Fig. 28.4, $\vec{\mathbf{s}} = \hbar\vec{\sigma}/2$) :

$$S_{12} = 3\frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\mathbf{r}})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\mathbf{r}})}{r^2} - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

La force tensorielle rend compte du moment quadrupolaire du deutéron.

Couplage spin-orbite $\sim \vec{\mathbf{L}} \cdot \vec{\mathbf{S}}$: force non centrale fonction de la vitesse, dépendant de l'orientation relative du spin total $\vec{\mathbf{S}}$ et du moment orbital $\vec{\mathbf{L}}$ du mouvement relatif.

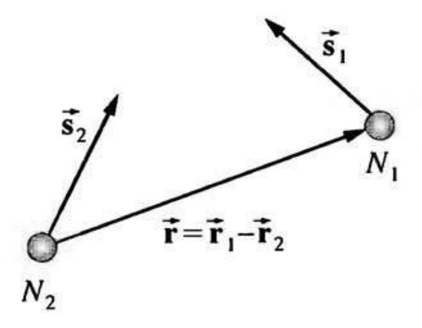


Fig. 28.4 : *Force tensorielle S_{12} entre deux nucléons N_1, N_2, de spins respectifs $\vec{s_1}, \vec{s_2}$, séparés de la distance $\vec{\mathbf{r}}$.*

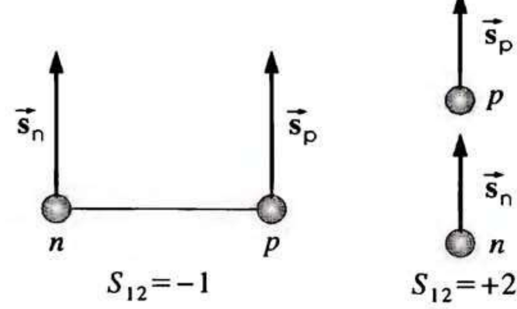


Fig. 28.5 : *Force tensorielle S_{12} dans une configuration spéciale du système proton-neutron.*

3. Cœur dur

Potentiel cœur dur : potentiel répulsif, de hauteur infinie, dont le facteur de forme du potentiel nucléon-nucléon dépend de la distance. Deux nucléons ne peuvent s'approcher en-dessous d'une certaine distance dite de cœur dur $r_c \approx 0,6$ fm (Fig. 28.6). Le potentiel cœur dur rend compte de la saturation des liaisons nucléaires.

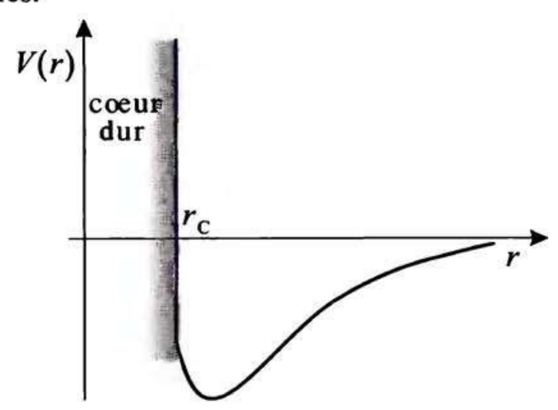


Fig. 28.6 : *Potentiel cœur dur de rayon r_c ; r : distance entre les nucléons*

28.3.2 Potentiel d'échange mésonique

Échange de mésons : émission d'un méson virtuel de masse finie par un nucléon et absorption de ce méson par un autre nucléon ; il s'ensuit une modification de l'impulsion des nucléons, interprétée comme un effet de force. La portée R de cette force est inversement proportionnelle à la masse du méson échangé :

$$R \approx \hbar/(mc)$$

1. Potentiel de Yukawa

Potentiel nucléon-nucléon réalisant l'échange (Fig. 28.7 (a)) d'un pion de masse finie ($m_\pi c^2 \approx 140$ MeV). Le potentiel de Yukawa contient la force centrale, son caractère d'échange ainsi que l'aspect tensoriel de la force nucléaire. Analytiquement, le potentiel s'écrit :

$$V_Y = \frac{\exp -\mu r}{\mu r} \qquad \mu = \frac{m_\pi c}{\hbar}$$

Le potentiel d'échange à un pion fournit une description satisfaisante de l'interaction nucléon-nucléon à longue portée $r \geq 2$ fm.

▷ L'échange non corrélé de deux pions peut être simulé, d'une manière satisfaisante, par des mésons scalaires fictifs σ de masse $\approx$ 400 MeV. La partie attractive de la force nucléon-nucléon s'y trouve bien décrite à moyenne distance (Fig. 28.7 (b)).

2. Potentiel d'échange de bosons

Le potentiel nucléon-nucléon est réalisé par l'échange de pions multiples corrélés, sous la forme de mésons lourds de spin entier (Fig. 28.7 (c)).

Cas de 2 pions : méson ρ isovectoriel (spin $I = 1$, isospin $T = 1$)
Cas de 3 pions : méson ω isoscalaire (spin $I = 1$, isospin $T = 0$)
L'échange de bosons π, ρ, puis ω décrit l'interaction nucléon-nucléon sur des distances de plus en plus petites (mais $r > r_c$).

▷ La partie couplage spin-orbite du potentiel nucléon-nucléon est conditionnée par l'échange de mésons vectoriels. C'est une force à courte portée.

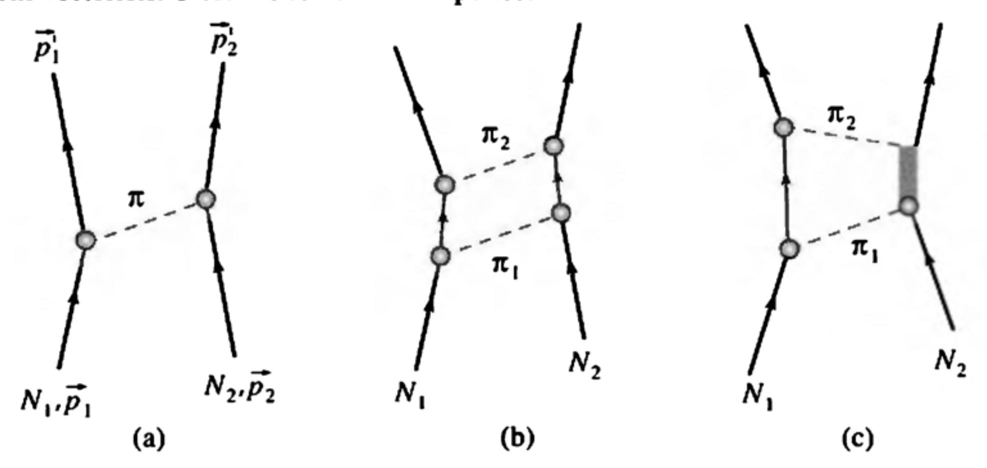


Fig. 28.7 : *Échange de mésons virtuels entre 2 nucléons N_1, N_2 ; en (a) : échange d'un pion, en (b) : de 2 pions, en (c) : de 2 pions par l'intermédiaire de l'excitation résonante $\Delta(1232)$ du nucléon.*

28.4 Modèles du noyau

28.4.1 Modèle du gaz de Fermi

Modèle du gaz de Fermi : représentation du noyau atomique comme un ensemble de A nucléons libres enfermés dans le volume nucléaire ; les nucléons (fermions) obéissent au principe d'exclusion. Dans l'état fondamental, ils occupent des états impulsionnels discrets d'énergie croissante jusqu'à une valeur dite **impulsion de Fermi** p_F, qui s'exprime en fonction de la densité nucléaire ρ :

$$p_\mathrm{F} = \hbar\, k_\mathrm{F} \qquad k_\mathrm{F} = \left(\frac{3}{2}\pi^2\rho\right)^{1/3} \approx 1.36\ \mathrm{fm}^{-1}$$

Énergie de Fermi : énergie cinétique maximale des nucléons dans un gaz de Fermi :

$$\varepsilon_\mathrm{F} = \frac{\hbar^2}{2m}\, k_\mathrm{F}^2 \approx 37\ \mathrm{MeV}$$

28.4.2 Matière nucléaire

Matière nucléaire : modèle d'un noyau hypothétique formé d'un système infini de nucléons (nombre de masse $A \to \infty$, volume $V \to \infty$), de masse volumique ρ constante à la température $T = 0$:

$$\lim_{A,V\to\infty} \frac{A}{V} = \rho = \mathrm{cste}$$

La différence de masse entre le proton et le neutron ainsi que l'interaction coulombienne entre deux protons sont négligées. Les nucléons interagissent par une force à deux corps qui est introduite sous forme d'un potentiel réaliste dérivé de la diffusion nucléon-nucléon libres. L'énergie de liaison B/A par nucléon est calculée en fonction de la densité ρ de particules dans l'approximation de paires indépendantes. Pour une densité faible, l'énergie cinétique des nucléons prédomine. À mesure que la densité augmente, les influences attractive et répulsive de l'interaction nucléon-nucléon s'opposent de plus en plus jusqu'à donner un minimum de l'énergie de liaison pour une valeur de saturation de la densité nucléaire (Fig. 28.8). Ce minimum peut être comparé au terme de volume de la **formule de masse** (voir ci-après).

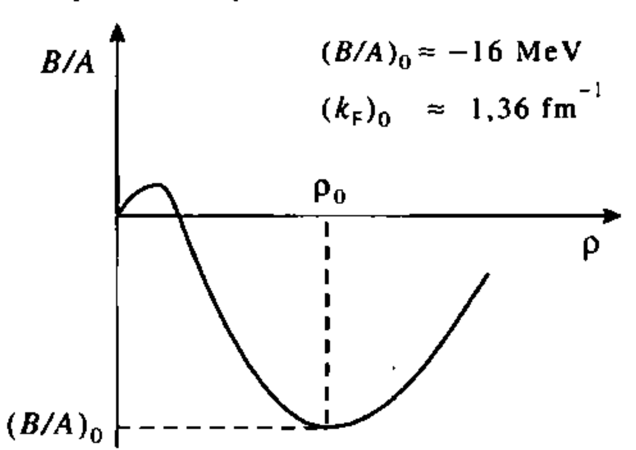


Fig. 28.8 : *Matière nucléaire. Énergie de liaison B/A par nucléon en fonction de la densité de particules ρ.*
ρ_0 et $(B/A)_0$: densité et énergie de saturation ; $(k_F)_0$: nombre d'onde correspondant à une impulsion de Fermi pour $\rho = \rho_0$

28.4.3 Modèle de la goutte liquide

Modèle de la goutte liquide : représentation du noyau considérant les nucléons comme les molécules

d'une goutte liquide chargée et incompressible.

État fondamental : état de plus basse énergie du noyau.

1. Formule de masse

Expression semi-empirique dérivée du modèle de la goutte liquide, donnant une valeur correcte de l'énergie de liaison des noyaux dans leur état fondamental ; elle est aussi appelée formule de Bethe-Weizsäcker.

Énergie de liaison = énergies de volume + de surface + de Coulomb +de symétrie + de paires				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$E_B = a_V \cdot A - a_S \cdot A^{2/3} - a_C \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sy} \cdot \frac{(A-2Z)^2}{A} + \varepsilon_P$$	a_V	MeV	énergie de volume par nucléon	
	a_S	MeV	coefficient d'énergie de surface	
	a_C	MeV	coefficient d'énergie de Coulomb	
	a_{sy}	MeV	coefficient de symétrie	
	ε_P	MeV	énergie d'appariement	
	A	1	nombre de masse	
	Z	1	numéro atomique	

Valeurs des constantes :

Constante	a_V	a_S	a_C	a_{sy}	ε_P
E (MeV)	15,85	18,34	0,71	23,22	0 ou $\pm 11,46/\sqrt{A}$

2. Termes de contribution à l'énergie de liaison

Énergie de volume ($E_V \sim r^3 \sim A$) : conséquence de la courte portée de la force nucléaire faisant qu'un nucléon n'interagit qu'avec ses plus proches voisins. L'augmentation linéaire de l'énergie de volume avec A traduit la saturation de la force nucléaire.

Énergie de surface ($E_S \sim r^2 \sim A^{\frac{2}{3}}$) : conséquence de la plus faible liaison des nucléons en surface du noyau, comparée à ceux du cœur. L'énergie de surface est un terme correctif réduisant l'énergie de volume.

Énergie coulombienne ($E_C \sim r^{-1} \sim A^{-\frac{1}{3}}$) : conséquence de la répulsion électrique des protons. L'énergie de Coulomb provoque une diminution de la liaison des noyaux.

Énergie de symétrie ($E_{sy} \sim (A-2Z)^2/A$) : prise en compte de la tendance des noyaux légers à être stable quand $N = Z$ et d'évoluer vers l'instabilité avec un excés de neutrons.

Énergie d'appariement ou énergie de *pairing* : gain d'énergie δ observé quand deux neutrons ou deux protons se couplent pour former un spin résultant $S = 0$. Ce terme est introduit comme une correction empirique au modèle simple de la goutte liquide qui n'attribue pas de spin aux nucléons.

$$\varepsilon = \begin{cases} +\delta & : N \text{ pair, } Z \text{ pair} \\ 0 & : N \text{ impair, } Z \text{ pair, ou } \textit{vice versa} \\ -\delta & : N \text{ impair, } Z \text{ impair} \end{cases} \qquad \delta = 11.46/\sqrt{A}\ \text{MeV}$$

3. Ligne de stabilité β

Étroite bande du plan (N, Z) contenant les noyaux stables (Fig. 28.9).

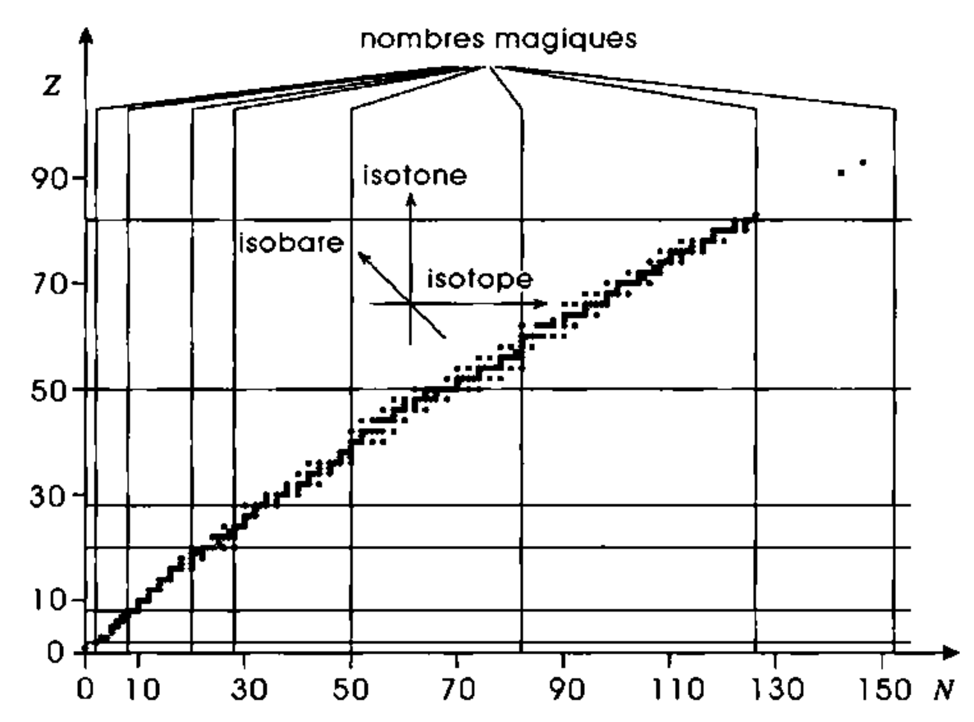


Fig. 28.9 : *Ligne de stabilité β en diagramme Z-N. Les nombres magiques sont indiqués par des lignes horizontales (protons) et verticales (neutrons).*

▷ Les noyaux les plus légers se retrouvent sur la ligne $N = Z$. L'isotope d'étain doublement magique ^{100}Sn est le noyau stable le plus lourd avec $N = Z = 50$. Les autres noyaux $N = Z$ plus lourds se désintègrent spontanément par protons.

28.4.4 Modèle des couches

Modèle des couches : description du mouvement des nucléons considérés comme des particules sans interaction mutuelle mais subissant individuellement le **potentiel moyen commun** généré par tous les autres nucléons.

Cette description est calquée sur celle des électrons du nuage atomique. Cependant, si le mouvement des électrons est bien décrit par le potentiel coulombien extérieur du noyau, aucun centre de force n'existe pour les nucléons. Le modèle des couches du noyau suppose que les interactions entre les nucléons sont équivalentes à un puits de potentiel effectif moyen généré par les nucléons eux-mêmes.

- Le modèle des couches reproduit bien le spectre d'énergie des noyaux légers et des noyaux au voisinage de couches fermées (c'est à dire avec un nombre magique de nucléons) quand on tient compte d'interactions résiduelles à deux corps entre les nucléons.

Le potentiel central est traité mathématiquement en utilisant un **oscillateur harmonique** ou une dépendance radiale de la densité de masse du noyau. Pour des noyaux s'écartant de la forme sphérique, un **potentiel moyen déformé** est employé. L'introduction complémentaire d'un fort couplage spin-orbite $V_{ls}(r)(\vec{l} \cdot \vec{s})$ permet de discerner en énergie les états individuels de spin $\vec{s}$ (orientation parallèle ou antiparallèle) et de moment orbital $\vec{l}$.

1. États individuels dans le modèle des couches

La résolution de l'équation de Schrödinger avec ce potentiel central permet de calculer les états individuels (niveaux d'énergie) des nucléons dans le noyau. Les nombres quantiques caractérisant un état particulier

du nucléon, sont :

- $n = 0, 1, 2, \ldots$
  nombre quantique radial, nombre de nœuds de la fonction d'onde radiale
- $l = 0, 1, 2, \ldots$
  nombre quantique orbital
- $j = l \pm 1/2$
  nombre quantique de moment angulaire total $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$
- $m_j = -j, \ldots, j, \quad m_j = m_l + m_s$
  nombre quantique magnétique total, composante du moment angulaire total sur une direction arbitraire z : $m_j = j_z$; m_l et m_s sont les nombres quantiques magnétiques respectivement orbital et de spin (du nucléon)

Nomenclature spectroscopique usuelle des états à une particule : $(n+1)lj$.

▷ Pour un nucléon tel que $n = 1, l = 2, j = l - s$ (où $s = 1/2$), la notation est : $2d_{\frac{3}{2}}$.

Les **énergies individuelles** ε sont répertoriées par les nombres quantiques n, l, j selon : ε_{nlj}.

2. Structure en couches des états d'énergie

Les états à une particule dans le potentiel moyen sont groupés en couches d'énergie : la séparation énergétique des niveaux à l'intérieur d'une même couche est nettement plus faible que l'espacement entre deux couches (Fig. 28.10).

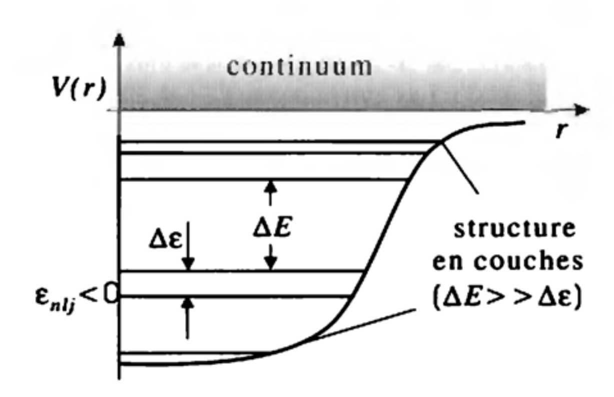


Fig. 28.10 : *Structure en couches des états à une particule dans le potentiel moyen $V(r)$. Énergie individuelle ε_{nlj} ; nombres quantiques radial n, orbital l et de moment angulaire total j*

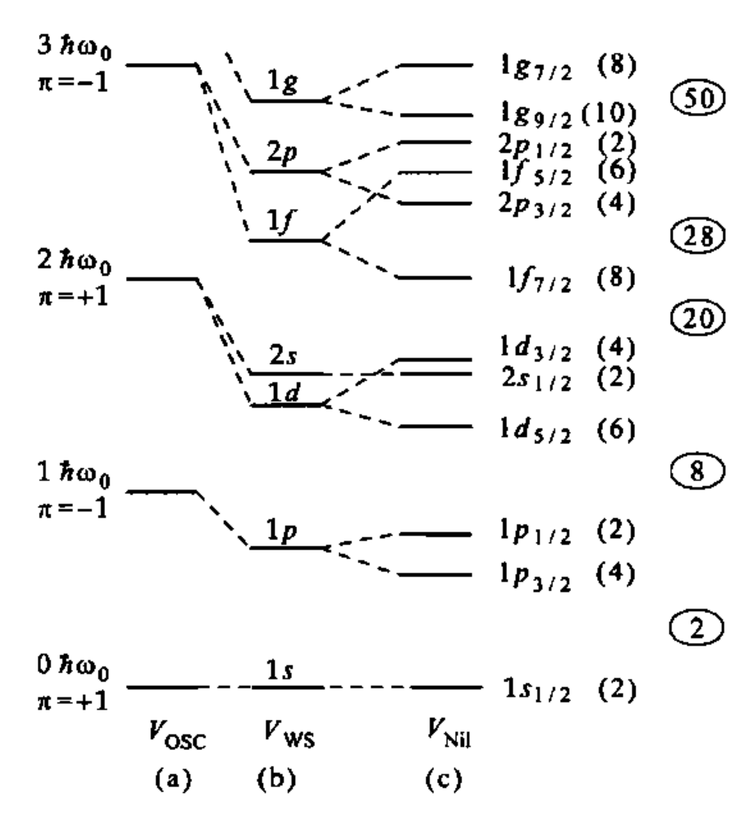


Fig. 28.11 : *États individuels du modèle des couches. Nomenclature : $(n+1)lj$; nombres quantiques radial n, orbital l et angulaire total j. En (a), potentiel d'oscillateur ; en (b), potentiel central de profondeur infinie et de forme radiale (Woods-Saxon) ; en (c), potentiel central de profondeur infinie avec couplage spin-orbite (Nilsson). Le nombre maximum de nucléons d'une sorte est indiqué entre parenthèses ; les nombres magiques sont cerclés.*

3. Configuration des nucléons

Spécification d'occupation des états individuels $(n_1l_1j_1), (n_2l_2j_2), \ldots, (n_fl_fj_f)$ des A nucléons du noyau :

$$(n_1l_1j_1)^{N_1}\,(n_2l_2j_2)^{N_2}\,\cdots\,(n_fl_fj_f)^{N_f}\,,\quad N_1+N_2+\cdots+N_f=A$$

$n_2l_2j_2$

$n_1l_1j_1$

$(n_1l_1j_1)^2$ $\qquad (n_1l_1j_1)^1\,(n_2l_2j_2)^1$ $\qquad (n_2l_2j_2)^2$

Fig. 28.12 : *Configurations de deux particules réparties dans deux états individuels $(n_1l_1j_1), (n_2l_2j_2)$.*

Chaque état (nlj) peut contenir un maximum de $2j+1$ neutrons et $2j+1$ protons. Sa configuration est alors : $(nlj)^{2j+1}$ en neutrons et en protons.

4. Noyaux magiques

Nombre magique : nombre de protons ou de neutrons pour lequel le noyau est particulièrement stable comparé à ses voisins, de valeur :

$$N, Z\ : 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 \quad \text{ou} \quad 152$$

- Pour ces noyaux, les nucléons remplissent totalement les couches.
- Pour un même nombre magique de neutrons, il existe plusieurs noyaux stables.

Noyaux doublement magiques : noyaux caractérisés par des nombres de neutrons *et* de protons égaux à un nombre magique.

■ ${}^{4}_{2}He_2$, ${}^{16}_{8}O_8$, ${}^{40}_{20}Ca_{20}$, ${}^{208}_{82}Pb_{126}$

▷ De tels noyaux sont particulièrement stables ; leur abondance dans la nature est plus grande que pour les noyaux voisins (Fig. 28.13).

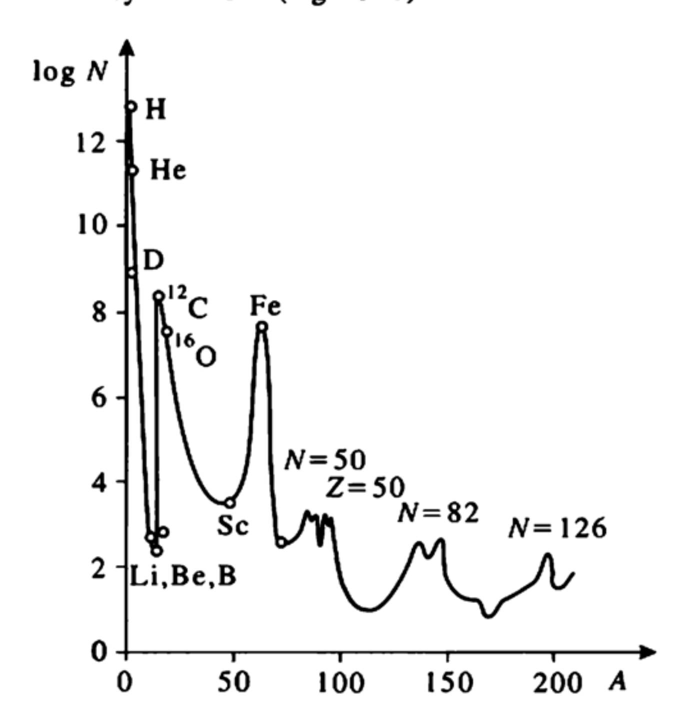


Fig. 28.13 : *Abondance relative des éléments ; N, Z : nombres magiques.*

5. Rôle de l'interaction résiduelle

Mélange de configurations : superposition cohérente, dans la fonction d'onde décrivant un état, de différentes configurations dues à l'interaction résiduelle entre les nucléons.

▷ Lorsque l'interaction résiduelle est celle d'une force à deux corps, il ne peut exister que des configurations différant au plus de deux particules dans les états à une particule.

6. États excités dans le modèle des couches

Excitation à une particule : transition d'un nucléon isolé d'un état individuel (nlj) vers un état d'énergie plus élevé $(n'l'j')$.

Excitation particule-trou : transition d'un nucléon isolé d'une couche pleine laissant une vacance (trou) ; d'un état de configuration $(n_h l_h j_h)^{2j+1}$, on passe à un état $(n_h l_h j_h)^{-1}(n_p l_p j_p)^1$.

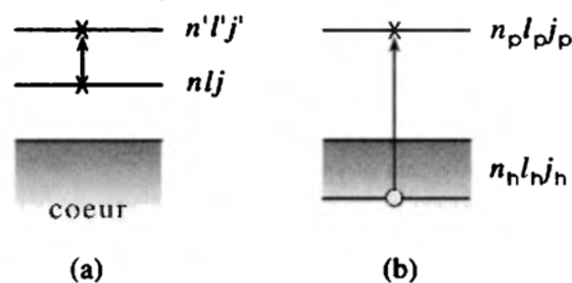


Fig. 28.14 : *Excitation élémentaire dans le modèles des couches. En* (a), *excitation à une particule* $(nlj) \to (n'l'j')$ *; en* (b), *excitation particule-trou* $(n_h l_h j_h)^{-1}(n_p l_p j_p)^1$

28.4.5 Modèle collectif

Modèle collectif du noyau : description des nucléons, non pas comme des particules individuelles indépendantes, mais comme un ensemble en interaction forte évoluant d'une manière cohérente dans des mouvements de vibration et de rotation.
Le noyau peut subir des **excitations de rotation** et **de vibration** comme s'il s'agissait d'une molécule.

1. Vibrations de surface du noyau

Excitation vibrationnelle : oscillations harmoniques de la surface du noyau autour de sa forme moyenne d'équilibre. L'oscillation, de pulsation ω_I, est caractérisée par le moment cinétique I (ordre multipolaire) et par le nombre quantique d'excitation n_I (phonons). À chaque valeur du moment cinétique I correspond un spectre de niveaux d'énergie équidistants $E_{In_I+1} - E_{In_I} = \hbar\omega_I$, dans l'approximation d'harmonicité :

Excitation de vibration			ML^2T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$E_{In_I} = \left(n_I + \frac{1}{2}\right) \cdot \hbar\omega_I$	E_{In_I}	J	énergie de vibration
	$\hbar$	Js	constante de Planck/2π
	ω_I	rads^{-1}	fréquence
	I	1	nbre quant. moment cinétique
	n_I	1	nombre de phonons

Pour les noyaux $N = Z$, les états de vibration les plus bas sont créés par des oscillations quadrupolaires ($I = 2$, état à un phonon). Le couplage de deux phonons quadrupolaires ($n_2 = 2$) engendre un multiplet dégénéré ; dans la réalité, cette dégénérescence est levée dans l'interaction : on observe un triplet de niveaux de moment angulaire total $J = 0, 2, 4$ étroitement groupés autour de l'énergie $2\hbar\omega_2$ (état à deux phonons) ; voir Fig. 28.15.

E (keV) — J^π
798 — 0^+
671 — 4^+ — $2\hbar\omega_2$
606 — 2^+
266 — 2^+ — $1\hbar\omega_2$
0 — 0^+ — $0\hbar\omega_2$
^{188}Pt

Fig. 28.15 : *Excitation quadrupolaire ($I = 2$) dans le noyau ^{188}Pt.*
E : énergie d'excitation ; $\hbar\omega_2$: énergie d'excitation d'un phonon quadrupolaire ; J^π : spin et parité des niveaux.

2. Moment quadrupolaire électrique

Q_0 : noyaux dont l'état fondamental est caractérisé par une distribution de charge non sphérique :

$$Q_0 = \frac{2}{5} Ze(b^2 - a^2)$$ où b et a sont les demi-axes de l'ellipsoïde, Ze est la charge du noyau.

3. Énergie de rotation

Excitation rotationnelle : rotation du noyau avec une déformation permanente de l'état fondamental dont le moment cinétique $\vec{\mathbf{J}}$ est perpendiculaire à l'axe de symétrie du noyau (Fig. 28.16(a)). L'énergie d'excitation de l'état rotationnel est déterminée par le moment d'inertie Θ du noyau par rapport à l'axe de rotation ; l'intervalle en énergie entre deux états adjacents croît en proportion du moment cinétique (Fig. 28.16(b)).

Excitation de rotation			**ML^2T^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$E_J = \frac{\hbar^2}{2\Theta} J(J+1)$$	E_{lnt}	J	énergie d'excitation
	$\hbar$	Js	cste de Planck/2π
	J	1	nbre quant. moment cinétique
	Θ	kg m^2	moment d'inertie

Pour des noyaux à symétrie axiale de forme invariable dans une rotation de π autour de l'axe perpendiculaire à l'axe de symétrie, le nombre quantique de rotation J est limité aux valeurs $J = 0, 2, 4, \ldots$ (Fig. 28.16).

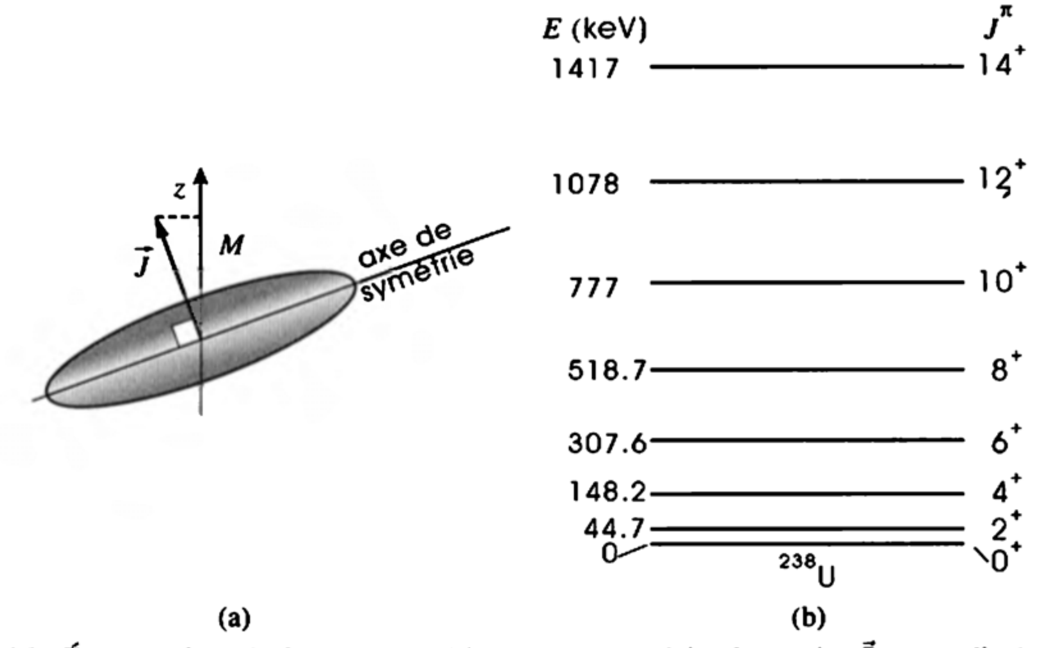


Fig. 28.16 : *États rotationnels du noyau ; en* (a) *: moment angulaire de rotation* $\vec{\mathbf{J}}$ *perpendiculaire à l'axe de symétrie,* M *est la projection sur l'axe* z *de quantification ; en* (b) *: bande rotationnelle dans* ^{238}U.

▷ Le moment d'inertie d'un noyau est environ trois fois plus faible que celui d'un corps rigide de même forme.

28.5 Réactions nucléaires

28.5.1 Voies de réaction et sections efficaces

Réaction nucléaire : transformation d'un noyau atomique provoquée par l'interaction avec un autre noyau, un hadron, un lepton ou un rayonnement γ. Elle s'écrit :

$$a + A \to b + B \qquad A(a, b)B$$

a : particule entrante (projectile) A : noyau cible
b : particule sortante (éjectile) B : noyau résiduel

Type de réactions :

diffusion élastique :	$a + A \longrightarrow a + A$
diffusion inélastique :	$a + A \longrightarrow a' + A^*$
photoémission :	$a + A \longrightarrow B + \gamma$
réaction (de transmutation) :	$a + A \longrightarrow b + B, \quad a \neq b$
réaction à plusieurs corps :	$a + A \longrightarrow B + b_1 + b_2 + \cdots$
fusion nucléaire :	$a + A \longrightarrow C^*$
fission induite :	$a + A \longrightarrow B_1 + B_2$

1. Caractéristiques des voies de réaction

Voie de réaction α : répartition λ d'un nombre N de nucléons en deux groupes N_1, N_2 ($N_1 + N_2 = N$) distincts, dans des états internes déterminés par des valeurs d'énergie d'excitation, de spin I_1, I_2, de parité π_1, π_2 et d'autres nombres quantiques κ_1, κ_2 éventuellement :

signature de la voie : $\alpha = \{\lambda, I_1, I_2, \pi_1, \pi_2, \kappa_1, \kappa_2\} \qquad \lambda = (N_1, N_2) \qquad N = N_1 + N_2$

Rayon de voie R_α : distance minimale des groupes N_1, N_2 de nucléons pour qu'une interaction forte se fasse sentir entre les deux noyaux.

Rayon d'interaction : domaine de l'espace des configurations restreint à des distances de séparation $R < R_\alpha$ des centres des deux noyaux, pour toute partition λ.

Voie d'entrée : voie de réaction du système à l'état initial $t \to -\infty$ (avant réaction).

Voie de sortie : voie de réaction du système à l'état final $t \to +\infty$ (après réaction).

Voie ouverte : voie de réaction énergétiquement permise ; **voie interdite** : voie de réaction énergétiquement non permise.

2. Spin de la voie et moment orbital

Spin de la voie d'entrée $\vec{S}_i$: somme vectorielle des spins $\vec{I}_a$ et $\vec{I}_A$ des noyaux incident a et cible A.

Spin voie d'entrée = spin$_a$ + spin$_A$			ML^2T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{S}_i = \vec{I}_a + \vec{I}_A$	$\vec{S}_i$	Js	spin, voie d'entrée
$\lvert I_a - I_A \rvert \leq S_i \leq I_a + I_A$	$\vec{I}_a$	Js	spin du projectile a
	$\vec{I}_A$	Js	spin de la cible A

D'une façon analogue, le spin de la voie de sortie est :

$$\vec{\mathbf{S}}_f = \vec{\mathbf{I}}_b + \vec{\mathbf{I}}_B \qquad | I_b - I_B | \le S_f \le I_b + I_B$$

La somme du spin de voie $\vec{\mathbf{S}}$ et du moment orbital $\vec{\mathbf{L}}$ du mouvement relatif conduit au moment angulaire total (ou moment cinétique) $\vec{\mathbf{J}}$:

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{S}} + \vec{\mathbf{L}} \qquad | L - S | \le J \le L + S$$

Moment cinétique = spin de voie + moment orbital			**ML^2T^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{S}} + \vec{\mathbf{L}}$	$\vec{\mathbf{J}}$	Js	spin, voie d'entrée
$\lvert L - S \rvert \le J \le L + S$	$\vec{\mathbf{S}}$	Js	spin de voie
	$\vec{\mathbf{L}}$	Js	moment orbital

3. Exemple : réactions nucléaires sur du lithium

Réactions induites par des protons de quelques MeV sur des noyaux de ${}^7_3\mathrm{Li}$:

voie d'entrée : $\mathrm{p} + {}^7_3\mathrm{Li}$

voie de sortie : $\mathrm{p} + {}^7_3\mathrm{Li}$
$\mathrm{p}' + {}^7_3\mathrm{Li}^*$
$\mathrm{n} + {}^7_4\mathrm{Be}$
$\alpha + \alpha$
$\alpha + \alpha + \gamma$
$\alpha + \mathrm{t} + \mathrm{p}$

4. Systèmes de référence

Système du laboratoire : système de repérage inertiel lié au noyau cible.

Système du centre de masse : système de repérage inertiel lié au centre de gravité du projectile et de la cible.

- Pour un noyau cible beaucoup plus massif que le noyau projectile, les deux référentiels sont identiques.

5. Bilan d'énergie de réaction

Bilan d'énergie Q (ou **Q de réaction**) : différence des énergies cinétiques E entre la voie de sortie f (après réaction) et la voie d'entrée i (avant réaction), dans le système du centre de masse :

$$Q = E_f - E_i$$

Pour une réaction nucléaire entre une particule légère a (de masse m_a et d'énergie cinétique E_a) et un noyau cible A (masse M_A) au repos, produisant deux éjectiles B lourd (masse M_B, énergie cinétique E_B) et b léger (masse m_b, énergie cinétique E_b, angle d'observation θ), le bilan Q est :

$$\begin{aligned} Q &= E_B + E_b - E_a \\ &= (m_a + M_A - M_B - m_b) \cdot c^2 \\ &= E_b \left(1 + \frac{m_b}{M_B}\right) - E_a \left(1 - \frac{m_a}{M_B}\right) - \frac{2}{M_B} \sqrt{E_a E_b m_a m_b} \cos\theta \end{aligned}$$

Réaction exoergique (ou exothermique) : réaction de bilan Q positif ($Q > 0$) : de l'énergie se dégage.

Réaction endoergique (ou endothermique) : réaction de bilan Q négatif ($Q < 0$) : elle nécessite de l'énergie. La réaction ne se produit qu'au-dessus d'une certaine énergie seuil.

■ ${}^3_2\text{He} + n \longrightarrow {}^4_2\text{He} + Q$

$$\begin{array}{rcl} m_{^3\text{He}} & = & 3,039\,247\,1\ \text{u} \\ +m_\text{n} & = & 1,008\,664\,97\ \text{u} \\ \hline \sum & = & 4,047\,912\ \text{u} \end{array} \qquad m_{^4\text{He}} = 4,002\,603\,256\ \text{u}$$

La masse du noyau ^{4}He étant plus petite que la somme $\sum$, le bilan Q de la réaction est positif.

■ ${}^{10}\text{B} + n \longrightarrow {}^7\text{Li} + {}^4\,\text{He} + Q$

$$\begin{array}{rcl} m_{^{10}\text{B}} & = & 10,012\,938\,00\ \text{u} \\ +m_\text{n} & = & 1,008\,664\,97\ \text{u} \\ \hline \sum & = & 11,021\,602\,97\ \text{u} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} m_{^7\text{Li}} & = & 7,016\,004\,50\ \text{u} \\ m_{^4\text{He}} & = & 4,002\,603\,256\ \text{u} \\ \hline \sum & = & 11,018\,607\,75\ \text{u} \end{array}$$

La deuxième somme étant inférieure à la première, le bilan Q de la réaction est positif. Ces deux réactions libèrent de l'énergie.

6. Section efficace de réaction

Section efficace σ : mesure l'intensité d'interaction d'un système passant de la voie d'entrée à une voie de sortie déterminée :

$$\sigma = \frac{\text{nombre de réactions/unité de temps}}{\text{nombre de particules incidentes/(unité de temps} \cdot \text{unité de surface)}}$$

La section efficace a les dimensions d'une surface. En physique atomique ou nucléaire, elle s'exprime en **barn** b : 1 b $= 10^{-28}$ m^2.
La section efficace dépend du système projectile-cible et de l'énergie incidente.

Section efficace différentielle $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$: section efficace de réaction par élément d'angle solide en voie de sortie $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$.

Section efficace doublement différentielle $\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}E$: section efficace de réaction par élément d'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ et intervalle d'énergie $\mathrm{d}E$.

Section efficace totale σ_t : intégrale de la section efficace différentielle sur tout l'angle solide :

$$\sigma_\text{tot}(E) = \int \left(\frac{\mathrm{d}\sigma(E,\theta,\phi)}{\mathrm{d}\Omega}\right) \cdot \mathrm{d}\Omega$$

Section efficace de réaction σ_R : somme de la section efficace totale $\sigma_{\alpha\alpha'}$ sur toutes les voies de sortie α' de la réaction :

$$\sigma_\text{R} = \sum_{\alpha'} \sigma_{\alpha\alpha'}$$

Classement des sections efficaces suivant le type de réactions :

- **Section efficace de diffusion élastique** σ_el : section efficace concernant la diffusion nucléaire élastique du système projectile-cible.
- **Section efficace de diffusion inélastique** σ_in : section efficace concernant la diffusion nucléaire inélastique du système projectile-cible.
- **Section efficace de voie** $\sigma_{\alpha\alpha'}$: section efficace d'une réaction particulière qui, depuis la voie d'entrée α, conduit à la voie de sortie α'.
- **Section efficace d'absorption** σ_ab : section efficace d'absorption de la particule incidente par la cible, fréquemment appelée **section efficace de capture** quand il s'agit de neutrons.

28.5.1.1 Lois de conservation dans les réactions nucléaires

- Sont conservés, dans toute réaction nucléaire, l'énergie, l'impulsion, le moment angulaire, le nombre baryonique (nombre de nucléons) et la charge électrique.
- Le processus faisant intervenir l'interaction forte, sont en outre conservés la parité π et (dans l'hypothèse de forces nucléaires vraiment indépendantes de la charge) l'isospin $\vec{T}$:

$$\begin{aligned} \pi_a \cdot \pi_A \cdot (-1)_i^L &= \pi_b \cdot \pi_B \cdot (-1)_f^L \\ \vec{T}_a + \vec{T}_A &= \vec{T}_b + \vec{T}_B \end{aligned}$$

28.5.1.2 Conservation de l'énergie et de l'impulsion

La **cinématique** des réactions est déterminée par les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement (voir Fig. 28.17).
Ces lois s'appliquent à toutes les interactions et sont le point de départ obligé de tout calcul de cinématique.

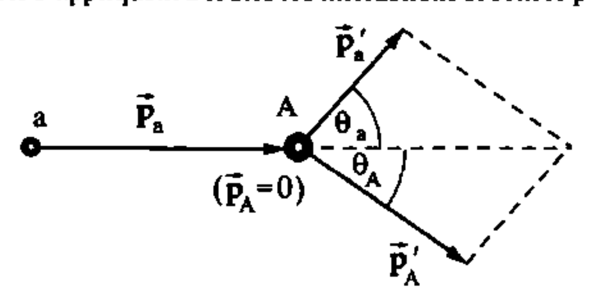


Fig. 28.17 : *Conservation du moment dans une collision élastique (système du laboratoire) ; $\vec{p}$ et $\vec{p}'$: impulsions avant et après collision.*

Pour une réaction A(a,b)B, de bilan Q, produite dans la collision d'une particule incidente a, d'énergie cinétique $E_{cin}(a)$, avec un noyau cible A supposé au repos ($E_{cin}(A) = 0$), les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion s'écrivent :

$$\begin{aligned} E_{cin}(a) &= E_{cin}(b) + E_{cin}(B) - Q \\ \frac{p_a^2}{2m_a} &= \frac{p_b^2}{2m_b} + \frac{p_B^2}{2m_B} - Q \\ \vec{p}_a &= \vec{p}_b + \vec{p}_B \end{aligned}$$

où θ_b et θ_B désignent les angles d'émission des éjectiles b et B.
Ces équations peuvent être résolues pour la particule b :

$$E_{cin}(b) = E_{cin}(a) - E_{cin}(B) + Q\,, \quad p_b = \sqrt{2m_b \cdot E_{cin}(b)}\,, \quad \sin\theta_b = \frac{p_B}{p_b} \cdot \sin\theta_B$$

$$p_b = \frac{\sqrt{2m_a \cdot E_{cin}(a)} \cdot \cos\theta_B}{(1 + \frac{m_b}{m_B})} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2m_a \cdot E_{cin}(a)} \cdot \cos\theta_B}{(1 + \frac{m_b}{m_B})}\right)^2 + \frac{2E_{cin}(a)(m_b - m_a) + 2Q \cdot m_b}{(1 + \frac{m_b}{m_B})}}$$

Énergie seuil : énergie minimum nécessaire pour produire une **réaction endoergique** ($Q < 0$) :

$$E_{cin}(a, \text{seuil}) = -\frac{m_a + m_A}{m_A} Q \quad \text{avec} \quad Q < 0$$

■ $p + p \to p + p + \pi$
Dans cette réaction, un méson π est créé ; le bilan Q de la réaction est égal à l'équivalent énergétique de la masse du méson π :
$Q = -m_\pi \cdot c^2 \approx -140$ MeV.
Énergie seuil : $\frac{m_p + m_p}{m_p} \cdot m_\pi \cdot c^2 \approx 2 \cdot 140$ MeV

28.5.1.3 Conservation du moment angulaire

Paramètre d'impact b : distance du noyau cible à la direction initiale de la particule incidente (Fig. 28.18). À une énergie incidente $E_{cin}(a)$, le paramètre d'impact b détermine le moment angulaire orbital L du mouvement relatif des deux partenaires :

$$L = p_a \cdot b \qquad \text{avec} \qquad p_a = \sqrt{2\, m_a\, E_{cin}(a)}$$

● Due à la portée R finie des forces nucléaires, l'énergie de la particule incidente limite le domaine de moments orbitaux contribuant à la réaction (Fig. 28.19) :

$$L_{max} = p_a \cdot R$$

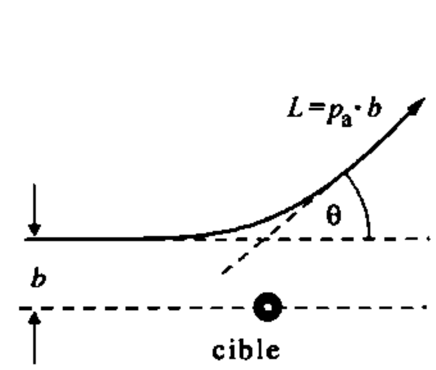


Fig. 28.18 : *Paramètre d'impact b et angle θ de diffusion de la la particule a de moment orbital* $L = p_a \cdot b$; p_a *est l'impulsion initiale.*

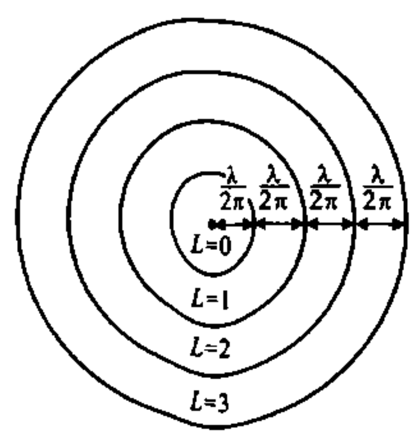


Fig. 28.19 : *Visualisation des particules incidentes en zone cylindrique correspondant à des moments orbitaux L successifs d'ondes partielles ; λ est la longueur d'onde de de Broglie.*

Onde s de diffusion : onde partielle associée à une particule diffusée de moment orbital $L = 0$ (collision centrale).

▷ Dans une diffusion nucléon-nucléon à faible énergie, les ondes partielles $L \geq 1$ peuvent être négligées. L'onde s est aussi dominante dans les interactions avec des neutrons lents ($E \approx 1$ eV).

Onde p de diffusion : diffusion avec $L = 1$; elle contribue à la section efficace de diffusion neutron-noyau, déjà à une énergie neutron de 1 MeV.

▷ Dans une diffusion nucléaire de neutrons de 14 MeV, le calcul de la section efficace fait intervenir toutes les ondes partielles jusqu'à $L \approx 14$.

● Conservation du moment angulaire : les moments cinétiques des voies d'entrée et de sortie sont égaux :

$$\vec{\mathbf{J}}_i = \vec{\mathbf{S}}_i + \vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{S}}_f + \vec{\mathbf{L}}_f = \vec{\mathbf{J}}_f$$

- La conservation du moment cinétique permet de relier les moments orbitaux des voies d'entrée et de sortie.

▷ De grands moments orbitaux ($L \approx 100\hbar$) sont générés dans les réactions nucléaires d'ions lourds, à des énergies typiques de 10 MeV/nucléon. Avec ces réactions, des **états excités de haut spin** peuvent être produits.

28.5.2 Diffusion élastique

1. Diffusion Rutherford

Diffusion de particules chargées dans le champ coulombien du noyau.

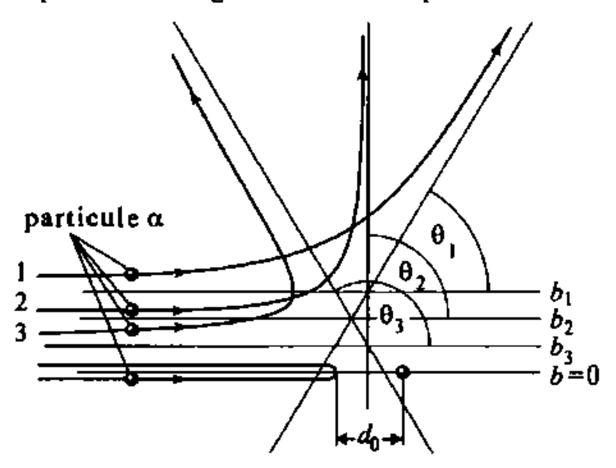


Fig. 28.20 : Diffusion Rutherford de particules α par un noyau A ; d_0 est la distance d'approche minimum dans une collision frontale.

2. Section efficace différentielle de Rutherford

Elle a pour expression, dans le système du centre de masse :

Section efficace différentielle de Rutherford			L²
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left(\frac{Z\,Z'\,e^2}{4\,E_0}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$	$\frac{d\sigma_R}{d\Omega}$	b/sr	sect. eff. différentielle
	Z	1	charge du projectile
	Z'	1	charge de la cible
	E_0	J	énergie cin. du projectile
	θ	rad	angle de diffusion
	e	C	charge élémentaire
	ε_0	$CV^{-1}m^{-1}$	permittivité du vide

- La distance d'approche passe par un minimum d_0 pour une collision centrale ; ce minimum d_0 est aussi appelé **diamètre de collision**.

■ Pour une particule α diffusée par un noyau lourd à une énergie $E_0 = 15,8$ MeV, d_0 vaut environ $1,2 \cdot 10^{-15}$ m.

3. Diffusion de Mott

Diffusion de particules très énergétiques (vitesse v voisine de celle de la lumière). L'expression théorique intègre l'influence du spin des particules interagissantes et comporte une correction relativiste à la section

efficace de Rutherford $\frac{d\sigma_R}{d\Omega}$:

$$\frac{d\sigma_M}{d\Omega} = \frac{d\sigma_R}{d\Omega} \frac{\cos^2(\theta/2)}{1 + 2 \cdot v^2 \cdot \sin^2(\theta/2)}$$

28.5.3 Formation d'un noyau composé

Réaction nucléaire par noyau composé : modèle de réaction dans lequel le noyau atomique est traité comme une goutte de matière nucléaire (→ *Modèle de la goutte liquide*). L'énergie disponible dans la voie d'entrée est statistiquement distribuée (comme la chaleur dans un liquide) entre tous les nucléons présents dans la réaction. Il se constitue un **noyau composé** C chaud dont l'énergie d'excitation $E^*(C)$ est la somme de l'énergie cinétique $E_{cin}(a)$ de la particule incidente et de l'énergie de liaison $E_B(a)$ des particules a et B :

$$a + A \longrightarrow C^* \quad E^*(C) = E_{cin}(a) + E_B(a)$$

1. Formation et désintégration du noyau composé

La probabilité de formation d'un noyau composé est d'autant plus grande que l'énergie introduite concorde avec celle d'un niveau du composé (résonance). D'autre part, la durée de vie très longue du noyau composé permet, au cours des chocs entre les nucléons, une accumulation d'énergie suffisante sur un nucléon ou sur un groupe de nucléons pour provoquer leur libération :

$$C^* \longrightarrow b + B$$

■ Dans la capture de neutrons lents ($\sim$ 1 eV d'énergie incidente) par des noyaux de masse moyenne, un neutron de 8 MeV environ est produit correspondant à son énergie de liaison.

● Formation et désintégration d'un noyau composé sont des processus indépendants. La section efficace de réaction n'est souvent pas une fonction monotone de l'énergie incidente, mais atteint des valeurs très grandes pour des valeurs bien précises de l'énergie correspondant à des **résonances** de formation du noyau composé (Fig. 28.21).

▷ La vie moyenne d'un noyau composé est d'environ de 10^{-18} s, ce qui est de plusieurs ordres de grandeur supérieur au temps nécessaire à la particule incidente pour parcourir le diamètre du noyau cible.
Pour des noyaux lourds, la largeur des résonances neutrons est d'environ 10^{-2} eV, pour un intervalle de résonance de $\sim$ 50 keV.

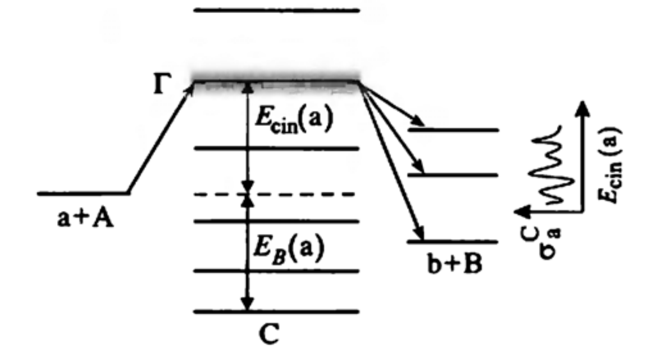


Fig. 28.21 : *Schéma de formation et de désexcitation d'un noyau composé :* $a + A \longrightarrow C^* \longrightarrow b + B$; Γ : *largeur totale de résonance,* σ_a^C : *section efficace de formation du noyau composé en fonction de l'énergie cinétique* $E_{cin}(a)$ *de la particule incidente avec des résonances sur des états quasi-stationnaires du noyau composé C.*

2. Section efficace de la réaction A(a,b)B par noyau composé

$$\sigma_{ab} = \sigma_a^C \cdot P_b \quad P_b = \frac{\Gamma_b}{\Gamma} \quad \Gamma = \sum_i \Gamma_i \quad i = a, b, c, \ldots$$

σ_a^C : section efficace de formation du noyau composé C
P_b : probabilité d'émission de la particule b par le noyau composé
Γ_b : largeur partielle de la voie de sortie $C^* \longrightarrow b+B$
Γ : largeur totale de niveau du noyau composé

- À mesure qu'augmente l'énergie d'excitation du noyau composé, diminue l'intervalle entre résonances voisines : les résonances commencent à se chevaucher.

Loi en $1/v$ de la section efficace de capture de neutrons lents d'énergie E :

$$\sigma_c \sim \frac{1}{\sqrt{E}} \sim \frac{1}{v}$$ v : vitesse du neutron

■ Un exemple de formation et de désintégration d'un noyau composé est donné Fig. 28.22.

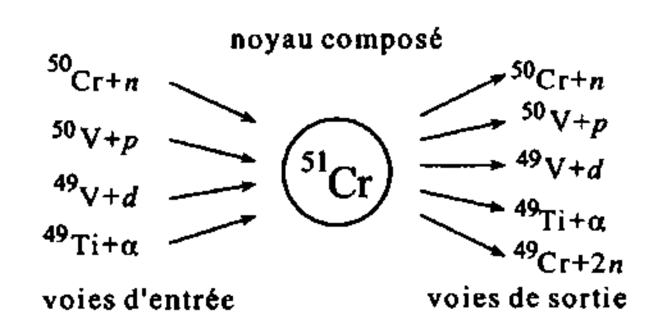


Fig. 28.22 : Formation du noyau composé ^{51}Cr par diverses voies d'entrée, et désintégration dans plusieurs voies de sortie.

3. Formule de Breit-Wigner

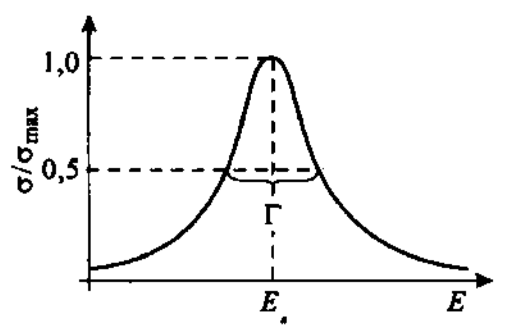
Description du comportement en énergie de la section efficace de réaction A(a,b)B par noyau composé au voisinage d'une résonance (Fig. 28.23) :

Formule de Breit – Wigner			L²
	Symbole	Unité	Dénomination
$\sigma(a,b,E) = \sigma(a,E_r)\cdot\dfrac{\Gamma\cdot\Gamma_b}{(E-E_r)^2+(\frac{1}{2}\Gamma)^2}$	$\sigma(a,b,E)$	m^2	section efficace de réaction a→b
	E_r	MeV	énergie de la résonance
	E	MeV	énergie de la particule a
	$\sigma(a,E_r)$	m^2	sect. eff. de formation du noyau composé
	Γ	MeV	largeur totale de résonance
	Γ_b	MeV	largeur partielle de sortie b

Spectre d'évaporation : distribution en énergie de particules émises par le noyau composé excité. Dans l'ensemble, la distribution est **maxwellienne** (Fig. 28.24). Le nombre de particules comprises dans un intervalle d'énergie E et $E + dE$ est donné par :

$$N(E)\,dE \sim E\,e^{-E/(kT)}\,dE$$ T : température du noyau

M En pratique, les réactions résonantes de neutrons ont une grande importance pour la marche des réacteurs nucléaires. Elles conditionnent le transport des neutrons et règlent leurs pertes.



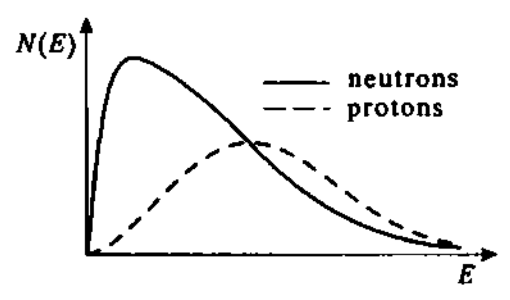


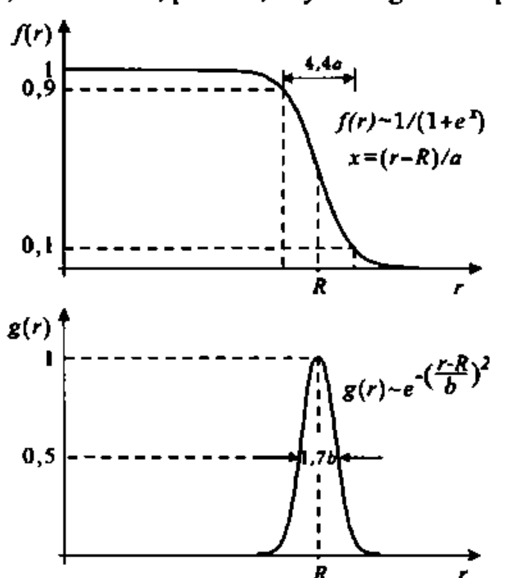


Fig. 28.23 : *Courbe de Breit-Wigner, de largeur Γ à mi-hauteur ; E_R : énergie de la résonance*

Fig. 28.24 : *Allure des spectres d'évaporation de neutrons et de protons.*

28.5.4 Modèle optique

Modèle optique : description du noyau atomique comme un milieu réfractant et absorbant. Ce modèle donne les sections efficaces de diffusion élastique et de réaction ; il est applicable aux interactions avec les noyaux, de neutrons, protons, noyaux légers complexes (deutérons, particules α), ions lourds et mésons.



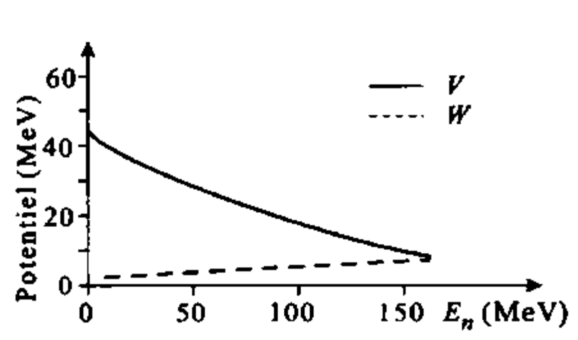


Fig. 28.25 : *Facteurs de forme du potentiel optique : partie réelle $f(r)$ (potentiel de Woods-Saxon) et partie imaginaire $g(r)$ (potentiel de Gauss).*

Fig. 28.26 : *Dépendance des paramètres d'intensité du modèle optique avec l'énergie incidente E, ici pour des neutrons.*

Potentiel optique $U(r)$: potentiel central complexe, fonction de la distance r séparant les noyaux projectile et cible, comprenant un terme de couplage spin-orbite :

$$U(r) = -V\,f(r) - \mathrm{j}W\,g(r) + W_{ls}(r)\,(\vec{\sigma}\cdot\vec{l})$$

avec des facteurs de forme habituellement du type :

$$f(r) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{(r-R)/a}} \qquad g(r) = \mathrm{e}^{-(r-R)^2/b^2}$$

où R désigne le rayon nucléaire ; a, b sont les paramètres de surface.

Pour la partie réelle $f(r)$, le facteur de forme est une fonction radiale de la densité de masse du noyau (**potentiel de Woods-Saxon**, Fig. 28.25) ; la partie imaginaire $g(r)$ simule l'absorption du milieu. Les paramètres d'intensité V et W dépendent de l'énergie de la voie d'entrée (Fig. 28.26).

- Des calculs par modèle optique montrent de faibles variations de la section efficace avec l'énergie de la voie d'entrée, de quelques MeV de large appelées **résonances géantes**.

28.5.5 Réaction directe

Réaction directe : type de réaction se distinguant des réactions par noyau composé par :

- une durée de réaction ($\approx 10^{-22}$ s) de l'ordre du temps de traversée de la cible par le projectile
- une transition directe entre voies d'entrée et de sortie, sans formation d'un état stationnaire intermédiaire
- le fait que peu de nucléons participent
- un processus cantonné en surface des noyaux
- une section efficace évoluant en énergie sur une large résonance géante

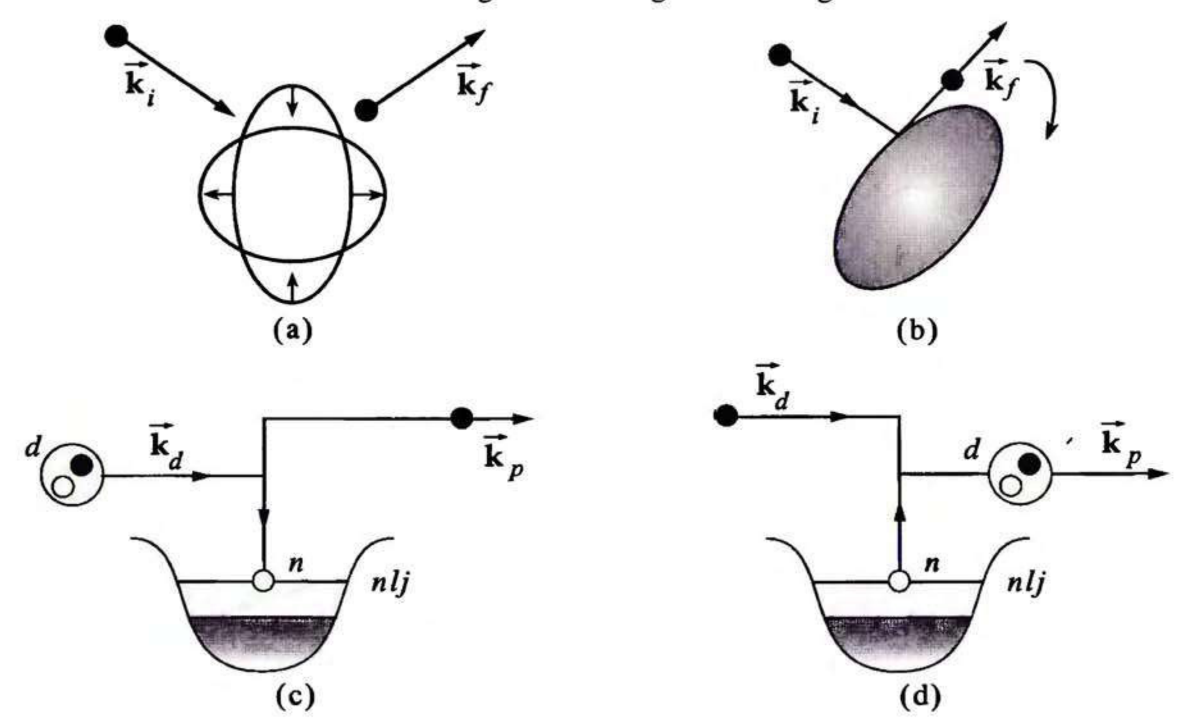


Fig. 28.27 : *Réactions directes (images schématiques). $\vec{k}$: vecteur d'onde. En* (a) *: excitation de vibration ;* (b) *: excitation de rotation ;* (c) *: réaction de stripping* $A(d,p)B$, *le neutron est capturé dans l'état individuel* (nlj) *du noyau cible ;* (d) *: réaction de capture* $A(p,d)B$.

Réaction de stripping : réaction directe au cours de laquelle le projectile perd des nucléons qui sont absorbés par le noyau cible.

Réaction de capture ou de *pick-up* : réaction directe au cours de laquelle des nucléons périphériques du noyau cible sont capturés par le projectile.

▷ Les réactions de ce type permettent de signer des états individuels dans les noyaux.

Diffusion inélastique directe : processus collisionnel stimulant les états de vibration et de rotation du noyau cible.

Réaction intermédiaire : réaction au cours de laquelle il y a formation d'un état intermédiaire se désintégrant avant d'atteindre l'équilibre. Les spectres et les distributions angulaires des produits de

réaction sont caractéristiques aussi bien de réactions directes que de formation d'un noyau composé.

28.5.6 Réactions par ions lourds

Réaction par ions lourds : réaction faisant intervenir un projectile de numéro atomique et de nombre de masse élevés ($Z > 2, A > 4$).

1. Barrière coulombienne et énergie par nucléon

Barrière coulombienne T_C : énergie cinétique minimum de la particule incidente pour atteindre la région où règnent les forces nucléaires.

Barrière coulombienne			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$T_C = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{(R_1 + R_2)} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$	T_C	J	barrière coulombienne
	Z_1, Z_2	1	nombres atomiques
	R_1, R_2	m	rayons nucléaires
	e	C	charge élémentaire
	ε_0	$CV^{-1}m^{-1}$	permittivité du vide

■ Pour la réaction ${}^{40}_{20}Ca_{20}$ sur ${}^{208}_{82}Pb_{126}$ (deux noyaux doublement magiques), la barrière coulombienne est 211 MeV, soit 5,3 MeV par nucléon.

2. Énergie spécifique

ε : énergie cinétique par nucléon :

$$\varepsilon = \frac{E_{cin}}{A}$$

Classification des réactions à ions lourds (R.I.L.) suivant l'énergie spécifique ε :

$\varepsilon < 10$ MeV/A :	R.I.L. de basse énergie
10 MeV/A $< \varepsilon <$ 100 MeV/A :	R.I.L. d'énergie intermédiaire
100 MeV/A $< \varepsilon <$ 10 GeV/A :	R.I.L. relativistes
$\varepsilon > 10$ GeV/A :	R.I.L. ultra-relativistes

3. Caractéristiques des réactions à ions lourds

- Du fait de la masse élevée des deux partenaires de la collision, une part considérable de l'énergie cinétique est déposée dans le centre de masse.
- Les deux partenaire étant de nombre atomique élevé, les effets coulombiens sont importants, aussi beaucoup de phénomènes physiques résultent-ils du jeu mutuel des forces coulombienne et nucléaire.
- Au cours de l'interaction se forment des états intermédiaires de 300 - 400 nucléons, ce qui fait qu'une description macroscopique du système doit être plus fortement prise en compte.
- Les chocs périphériques noyau-noyau font intervenir des ondes partielles correspondant à de très grands moments orbitaux ($L \geq 100\,\hbar$) du mouvement relatif.
- La longueur d'onde de de Broglie du mouvement relatif est petite ; aussi peut-on adopter une description classique du mouvement en termes de paramètre d'impact et de trajectoire.

● Les réactions à ions lourds produisent des états de très haut spin.

■ Dans la réaction ${}^{40}_{20}Ca_{20}$ sur ${}^{208}_{82}Pb_{126}$, un moment orbital d'environ $140\,\hbar$ est produit à la barrière coulombienne. Avec de tels moments orbitaux, des **noyaux superdéformés** se forment prenant l'apparence très allongée d'un cigare.

- Avec des ions $^{40}_{20}Ca_{20}$ de 10 MeV par nucléon d'énergie, la longueur d'onde de de Broglie est $\lambda = 0,5$ fm.

4. Types de réaction par ions lourds

La valeur du paramètre d'impact distingue les réactions à ions lourds (Fig. 28.28).

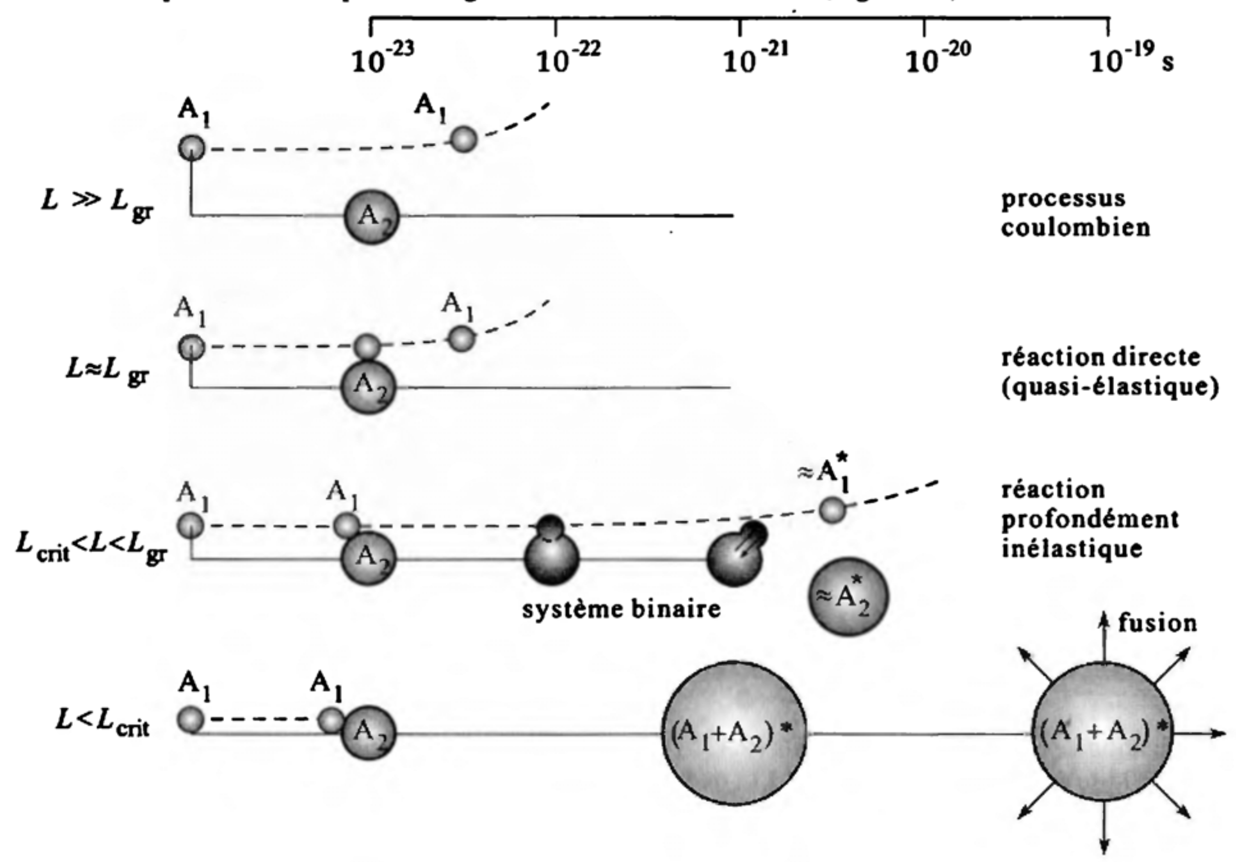


Fig. 28.28 : *Classification des réactions à ions lourds de basse énergie* $A_1 + A_2$ *selon le paramètre d'impact (moment orbital* L*).* L_{gr} *: moment orbital d'effleurement ;* L_{crit} *: moment angulaire entraînant la fusion.*

- **Processus coulombien** : diffusion Rutherford élastique et excitation coulombienne d'états collectifs du noyau cible et/ou du projectile mettant en jeu de grands paramètres d'impact, sans interaction forte ($L \gg L_{gr}$, où L_{gr} est le moment orbital d'effleurement, dit de *grazing*).

- **Réaction quasi-élastique**, réaction avec un paramètre d'impact correspondant à un moment angulaire d'incidence rasante ($L \approx L_{gr}$). La durée petite ($\approx 10^{-22}$ s) de la réaction ne permet d'exciter qu'un nombre restreint de degrés de liberté. L'échange d'énergie et de nucléons entre projectile et cible est faible.

- **Réaction profondément inélastique** ou *deep inelastic* : réaction caractérisée par des paramètres d'impact moyens ($L_{crit} < L < L_{gr}$), avec formation d'un état intermédiaire de durée de vie relativement longue ($\approx 10^{-21}$ s) et l'excitation de nombreux degrès de liberté mais sans conduire à un noyau composé ; l'échange d'énergie et de nucléons entre les deux partenaires peut être grand.

- **Réaction de fusion** : formation d'un noyau composé excité de durée de vie longue ($\approx 10^{-18}$ s) avec de faibles paramètres d'impact ($L < L_{crit}$). Le noyau composé se désintégre par particules et émission γ ou fissionne.

■ Dans la section efficace de la réaction ^{40}Ar(379 MeV) +^{232}Th, on observe en plus de la bosse quasi-élastique proche de l'énergie incidente, un second maximum relatif centré sur une énergie perdue de ≈ 160 MeV qui correspond à un processus profondément inélastique.

■ Dans la voie profondément inélastique de la réaction $^{86}_{36}Kr$(515 MeV) + ^{166}Er, on détecte des produits de réaction de numéros atomiques compris entre $Z = 28$ et $Z = 45$.

▷ Les réactions à ions lourds peuvent servir à produire des noyaux loin de la ligne de stabilité.

Îlot de stabilité : région du plan Z, N que stabilisent des nombres magiques en protons Z et en neutrons N. Ces noyaux atomiques ont des vies moyennes longues comparées à leurs voisins du plan Z, N. Des modèles théoriques prévoient un autre îlot de stabilité pour $Z = 114$ et $N = 184$.

Éléments superlourds : éléments de numéro atomique $Z \geq 110$. Ont déjà été identifié (1994-96), les éléments $Z = 110, 111$ et 112 ; ils n'ont reçu, pour l'instant, aucune appelation.

▷ Les **transuraniens** très lourds : **bohrium** ($_{107}Bh$), **hassium** ($_{108}Hs$) et **meitnérium** ($_{109}Mt$) (→ *Système périodique des éléments*), ont tous été produits, comme les superlourds maintenant connus, dans des réactions d'ions lourds de fusion *froide* (c'est à dire à énergie d'excitation faible). Ces noyaux ont une vie moyenne étonnamment longue ($\tau \approx$ ms) indicative de l'existence avoisinante d'une fermeture de couches.

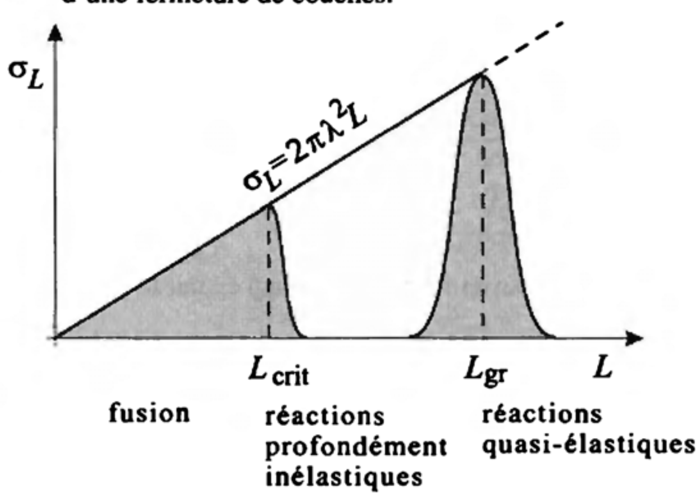


Fig. 28.29 : *Section efficace de réaction à ions lourds en fonction du moment angulaire L ; L_{gr} et L_{crit} désignent les moments angulaires respectifs d'effleurement et de fusion.*

5. **Réactions à ions lourds de grande énergie**

Multifragmentation : désintégration après compression violente de noyaux lourds à énergie moyenne ; les fragments émis se situent dans un large éventail de charge et de masse ; une transition de phase (nucléaire) liquide-gaz devrait jouer un rôle.

Collisions relativistes d'ions lourds : collisions mettant en jeu de très grandes énergies avec les accélérateurs du CERN (Genève), de l'AGS (Brookhaven, USA) et du GSI (Darmstadt) ; des états nouveaux de la matière sont produits :

- **Matière résonante** : enrichissement de la matière nucléaire ordinaire en états excités instables de nucléons (résonances Δ et N^*).
- **Antimatière** : formation d'anti-particules du nucléon : $\bar{p}$, $\bar{n}$, ainsi que $\bar{d}$ (anti-deutéron), $\bar{\alpha}$, etc.
- **Hypernoyaux et état multi-hypérons** : formés de nucléons et d'hypérons (particules Λ, Σ^- et Ξ^-) (→ *Baryons lourds*).
- **Plasma quark-gluon** : phase de la matière nucléaire dans laquelle quarks et gluons se déplacent presque librement au lieu d'être liés pour former les baryons et les mésons. Ce **déconfinement** devrait

se produire à de très hautes densités baryonique et énergétique ($1-3$ GeV/fm^3).

28.5.7 Fission nucléaire

Fission nucléaire : processus de cassure d'un noyau lourd en deux fragments de masses voisines (**produits de fission**), accompagné d'une émission de quelques neutrons (**neutrons de fission**). La fission peut être induite par la capture de neutrons ou de photons γ par le noyau.

■ ^{235}U + n $\rightarrow$ X + Y + νn + 200 MeV ν : nombre de neutrons de fission
Ici, une moyenne de $\nu = 2,43 \pm 0,07$ neutrons sont émis par fission, avec une énergie moyenne de $\sim$ 2 MeV.

1. Causes de la fission

Le phénomène de la fission peut être expliqué dans le cadre du **modèle de la goutte liquide** et dans celui du **modèle des couches**. Une faible énergie déposée excite les modes d'oscillation de surface, avec de petites amplitudes autour de la forme d'équilibre de l'état fondamental. La tension surperficielle génère une barrière de potentiel responsable de la stabilité du noyau envers les grandes déformations. Si l'énergie d'excitation augmente, cette **barriére de fission** peut être surmontée : une insabilité se développe jusqu'à ce que la goutte se scinde en deux fragments qui s'éloignent l'un de l'autre par répulsion coulombienne.

Barrière de fission : barrière de potentiel empêchant la cassure du noyau (Fig. 28.31).

Noyau	Énergie de liaison du neutron	Barrière de fission
^{235}U	6,5 MeV	^{236}U : 6 MeV
^{238}U	6 MeV	^{239}U : 7 MeV

▷ L'énergie de liaison d'un neutron dans ^{235}U excède la barrière de fission, ce qui en fait le combustible principal des réacteurs nucléaires thermiques.

2. Fission spontanée et isomère de fission

Fission spontanée : fission des noyaux avec $Z^2/A > 17$ dans leur état fondamental, s'opérant par effet tunnel. La durée de vie de la fission spontanée est plus grande que celle de la radioactivité α.

■ ^{235}U : radioactivité α : $T_{\frac{1}{2}} = 7.1 \cdot 10^8$ ans,   fission spontanée : $T_{\frac{1}{2}} = 1.8 \cdot 10^{17}$ ans.

Isomère de fission : apparition d'un deuxième minimum dans la fonction potentielle du noyau due à des effets de couches. Dans la fission induite par des neutrons, le noyau est porté dans un état excité d'abord dans le premier minimum, puis dans un état couplé du deuxième. La fission se fait alors par effet tunnel à partir de ce deuxième puits de potentiel.

■ Un exemple est donné par la réaction :
^{16}O + ^{238}U $\rightarrow$ ^{251}Fm* + 3 n
La fission du noyau excité de fermium se fait avec une vie moyenne $T_{\frac{1}{2}} \approx 0,014$ s.

3. Neutrons de fission et distribution de masse

Neutron prompt : neutron émis simultanément avec la fission.

Neutron retardé : neutron d'évaporation des produits de fission. L'émission se produit typiquement entre 0,2 et 60 s après la fission.

▷ Les neutrons retardés jouent un rôle important dans le contrôle d'une réaction en chaîne.

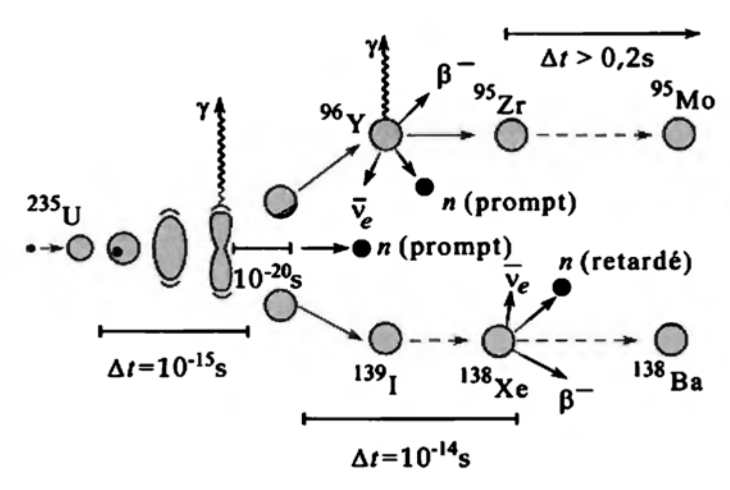


Fig. 28.30 : Déroulement temporel de la fission d'un noyau d'uranium.

Distribution de masse : distribution des masses des produits de fission.

- En règle générale, la distribution de masse est asymétrique (rapport de masse $\approx 3 : 2$).
- Pour ^{235}U, la fission symétrique est 600 fois plus rare que la fission asymétrique.

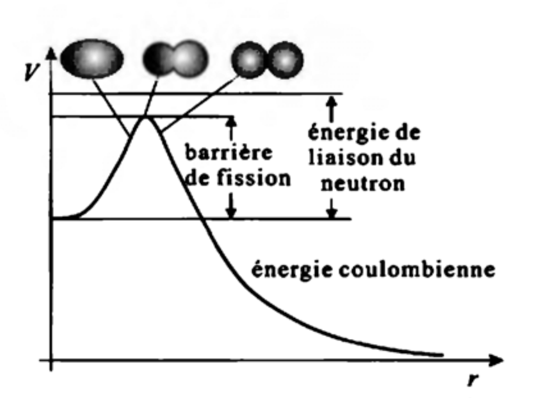


Fig. 28.31 : *Barrière de fission. Énergie potentielle $V(r)$ et formes du noyau en fonction de la distance r des produits de fission.*

Fig. 28.32 : *Distribution de masse des produits de fission de l'uranium.*

28.6 Décroissance radioactive

Décroissance radioactive : désintégration spontanée de noyaux instables par émission de particules, de rayonnement γ ou par filiation radioactive vers des noyaux stables.

Radioélément ou **radionucléide** : noyau montrant une décroissance radioactive.

Radio-isotope : radioéléments de même nombre atomique.

Radioactivité : état de noyaux ou d'une matière macroscopique (atmosphère, eaux, roches, matériaux de construction) produisant un rayonnement d'origine radioactive.

Radioactivité naturelle : radioactivité observée de radioéléments qui existent dans la nature.

Radioactivité artificielle : radioactivité produite au cours de réactions nucléaires.

Types de radioactivité :

Types de décroissance	Variation des nombres de protons ΔZ	de neutrons ΔN	de masse ΔA
radioactivité α (émission de noyaux He)	-2	-2	-4
radioactivité $\beta^{\pm}$ (émission e^+ ou e^-)	± 1	∓ 1	0
désexcitation γ (émission de photons)	0	0	0
capture électronique	-1	$+1$	0
émission de protons	-1	0	-1
émission de neutrons	0	-1	-1
émission de clusters	$-Z_{cluster}$	$-N_{cluster}$	$-(Z_{cluster} + N_{cluster})$
fission spontanée	$\approx \frac{1}{2}Z$	$\approx \frac{1}{2}N$	$\approx \frac{1}{2}A$

- La **décroissance radioactive** est un processus statistique.

28.6.1 Loi de décroissance

1. Constante de désintégration

Constante de désintégration λ : probabilité par unité de temps de décroissance d'un radioélément. Elle est indépendante de l'espace et du temps ; c'est une caractéristique du noyau.

- Chaque isotope radioactif a sa propre constante de désintégration.

La constante de désintégration donne la fraction de noyaux se désintégrant par seconde.

Nbre de désintégrations = cste de désintégration × nbre de noyaux × durée			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\mathrm{d}N = -\lambda \cdot N \cdot \mathrm{d}t$$	$\mathrm{d}N$	1	nbre de désintégrations
	λ	s^{-1}	cste de désintégration
	N	1	nbre de noyaux radioactifs
	$\mathrm{d}t$	1	durée

La **décroissance radioactive** suit une loi exponentielle (Fig. 28.33) :

Loi de décroissance			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda \cdot t}$$	$N(t)$	1	nbre de noyaux radioactifs au temps t
	N_0	1	nbre de noyaux radioactifs à $t = 0$
	λ	s^{-1}	constante de désintégration
	t	s	variable temps

Vie moyenne τ de noyaux radioactifs : valeur inverse de la constante de désintégration, s'exprime en seconde (s) en unité SI :

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

2. Période

$T_{\frac{1}{2}}$, en seconde (s) en unité SI : durée nécessaire pour que le nombre de noyaux radioactifs diminue de moitié :

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \cdot \ln 2$$

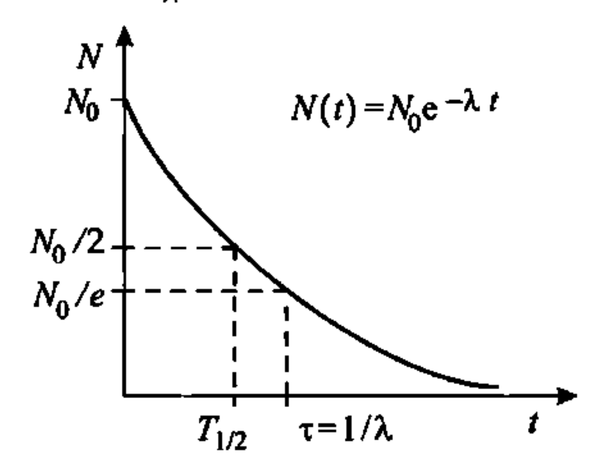


Fig. 28.33 : *Loi de décroissance exponentielle. λ : constante de désintégration ; τ : vie moyenne ; $T_{1/2}$: période.*

Constante de désintégation partielle λ_k : probabilité de désintégration dans une voie particulière k.
Pour des radioéléments pouvant se désintégrer selon plusieurs voies :

$$\lambda = \sum_k \lambda_k$$

3. Activité

A : nombre de noyaux qui se désintègrent par unité de temps ; encore appelée vitesse de désintégration :

$$A = -\frac{dN}{dt}$$

Activité			T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$A = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 e^{-\lambda \cdot t}$	M	kg/mol	masse molaire de la substance
$= \lambda \cdot \frac{m \cdot N_A}{M}$	m	kg	masse de la substance
	N	1	nombre de noyaux radioactifs
	N_A	mol^{-1}	nombre d'Avogadro
	λ	s^{-1}	constante de désintégration
	t	s	variable temps

Becquerel Bq : unité SI d'activité :

$$1 \text{ Bq} = \frac{1 \text{ désintégration}}{1 \text{ s}}$$

Curie Ci : ancienne unité d'activité, à présent non légale :

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

1 Ci est l'activité produite par 1 g de ^{226}Ra.

Activité massique (ou activité spécifique) A_s : rapport de l'activité à la masse de la substance :

$$A_m = \frac{A}{m} \qquad m:\ \text{masse}$$

4. Radioéléments dans l'environnement

Concentrations typiques de quelques radioéléments dans l'eau :

Cas de l'eau	Radioélément	Période $T_{\frac{1}{2}}$ (ans)	Concentration (10^{-3}Bq/l)
nappe phréatique	^{3}H	12,232	20 – 100
	^{40}K	$1,26 \cdot 10^9$	4 – 400
	^{238}U	$4,51 \cdot 10^9$	1 – 200
eau de ruissellement	^{3}H	12,232	40 – 400
	^{40}K	$1,26 \cdot 10^9$	40 – 2000
	^{238}U	$4,51 \cdot 10^9$	– 40
eau potable	^{3}H	12,232	20 – 70
	^{40}K	$1,26 \cdot 10^9$	200
	^{238}U	$4,51 \cdot 10^9$	– 40

Filiation radioactive : désintégration en série où un radioélément se désintégre pour former un autre radioélément.

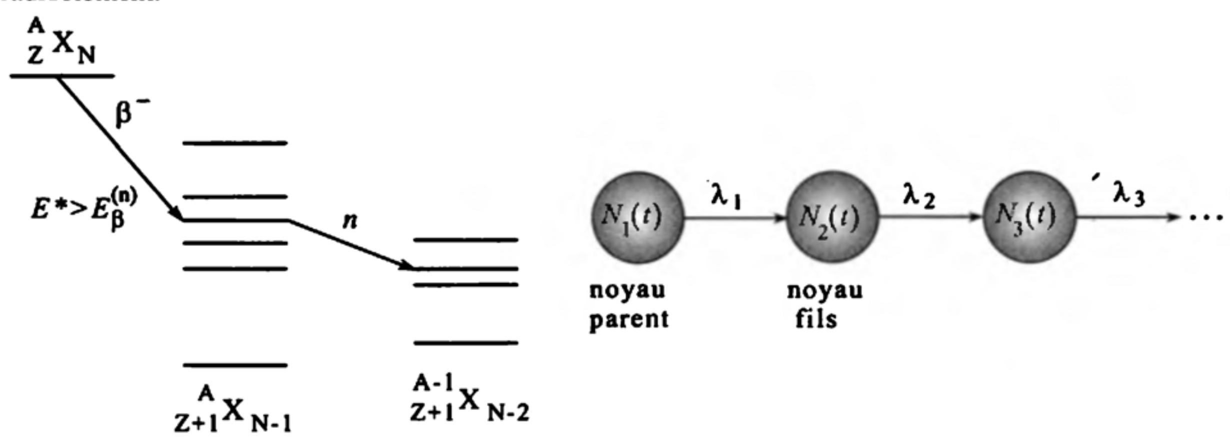


Fig. 28.34 : *Schéma d'une filiation radioactive.*

- Entre les radioéléments **parents** et **fils** présents à une date donnée, les lois de décroissance suivantes s'appliquent :

Activité (noyaux fils) = production – désintégration				T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$A_f = \frac{dN_f}{dt} = \lambda_p \cdot N_p - \lambda_f \cdot N_f$$	N_f	1	nbre de noyaux fils	
	N_p	1	nbre de noyaux parents	
	λ_f	s^{-1}	cste de désintégration, fils	
	λ_p	s^{-1}	cste de désintégration, parent	
	t	s	variable temps	

Loi de décroissance des noyaux fils			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$N_f(t) = N_p(0)\dfrac{\lambda_p}{\lambda_f - \lambda_p} \times \left(e^{-\lambda_p \cdot t} - e^{-\lambda_f \cdot t}\right)$	N_f	1	nbre de noyaux fils
	$N_p(0)$	1	nbre de noyaux parents, à $t = 0$
	λ_f	s^{-1}	cste de désintégration, fils
	λ_p	s^{-1}	cste de désintégration, parent
	t	s	variable temps

Équilibre radioactif : état stationnaire de noyaux fils avec un nombre égal de production et de destruction :

$$\frac{dN_f}{dt} = 0$$

L'équilibre se traduit par :

$$N_p \cdot \lambda_p = N_f \cdot \lambda_f \qquad \frac{N_p}{N_f} = \frac{T_{\frac{1}{2}p}}{T_{\frac{1}{2}f}}$$

N_p : nombre de noyaux parents — N_f : nombre de noyaux fils
$T_{\frac{1}{2}p}$: période des noyaux parents — $T_{\frac{1}{2}f}$: période des noyaux fils

5. Exemple de la famille radioactive uranium-radium

C'est une des quatre familles de noyaux lourds émetteurs α, dite de type $4n + 2$: chaque radioélément de la filiation a un nombre de masse $A = 4n + 2$, où n est un entier (Fig. 28.35).
Le rapport des nombres de noyaux radium et uranium y est de :

$$\frac{N_{Ra}}{N_U} = 0,36 \cdot 10^{-6}$$

Ainsi, des tonnes d'uranium doivent être traitées pour extraire un gramme de radium. Notons que cette opération a été manuellement réalisée, en 1898, par Pierre et Marie Curie (prix Nobel 1903, avec Henri Becquerel, découvreur de la radioactivité) qui ont ainsi rajouté deux nouveaux éléments au tableau périodique : le polonium et le radium.

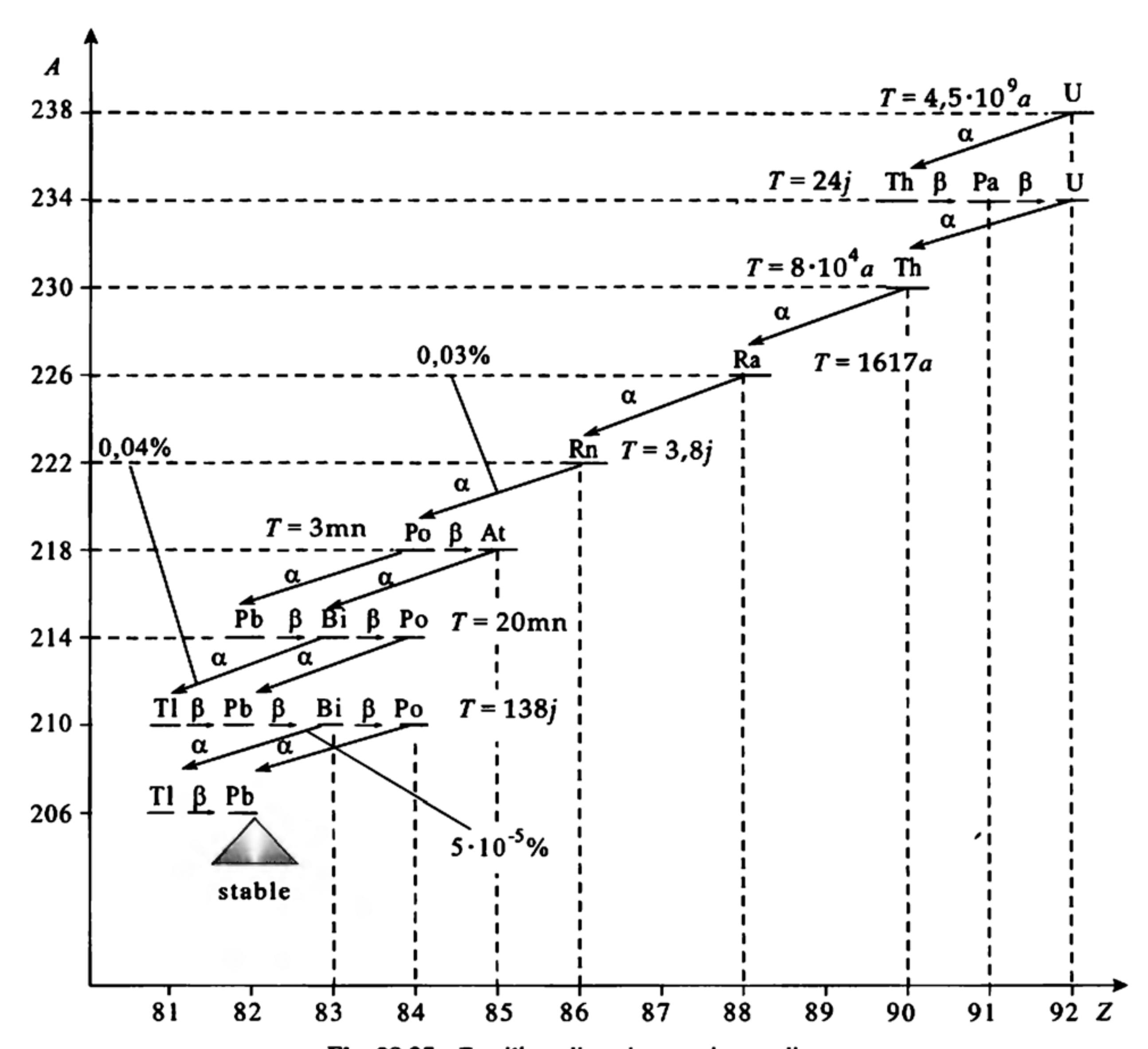


Fig. 28.35 : *Famille radioactive uranium-radium*

28.6.2 Décroissance alpha

Décroissance α : émission de noyaux d'hélium ($^4_2He_2$) dits "particules α" (Fig. 28.36) :

$$^A_ZX_N \rightarrow ^{A-4}_{Z-2} X_{N-2} + ^4_2 He_2$$

■ $$^{212}_{84}Po_{128} \longrightarrow ^{208}_{82} Pb_{126} + \alpha$$

- Les particules α sont émises avec des énergies bien déterminées, allant typiquement de 4 à 9 MeV.

■ ^{212}Po : $E_\alpha = 8,9$ MeV ^{232}Th : $E_\alpha = 4,1$ MeV

- La vie moyenne de la plupart des noyaux radioactifs α est relativement longue, car l'émission se fait par **effet tunnel** ($\rightarrow$ *Effet tunnel*). La barrière de potentiel, combinaison des potentiels attractif nucléaire et répulsif coulombien, est, au voisinage de la surface du noyau, plus élevée que l'énergie

cinétique des particules α émises : elles ne peuvent franchir cette barrière que par effet tunnel (Fig. 28.37).

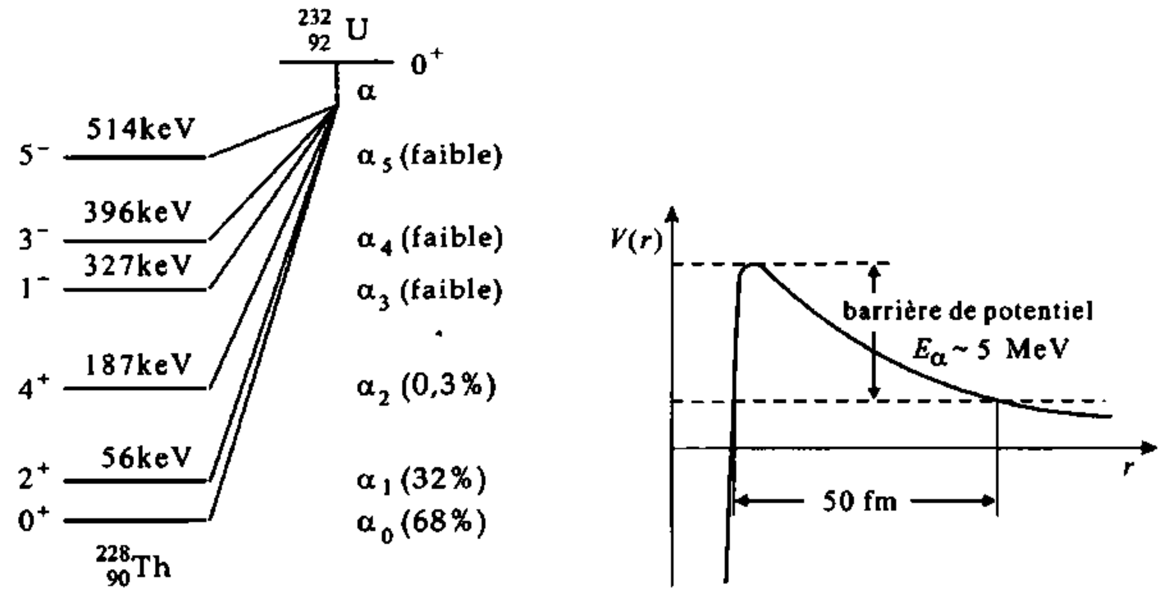


Fig. 28.36 : *Désintégration α de $^{232}_{92}U_{140}$ en $^{228}_{90}Th_{138}$; sept groupes de particules α, d'énergies cinétiques et d'intensités différentes, alimentent les états finals répertoriés par leurs énergies d'excitation.*

Fig. 28.37 : *Désintégration α par effet tunnel à travers la barrière de potentiel.*

Loi de Geiger-Nutall : relation empirique entre la constante de désintégration λ et l'énergie cinétique E_α des particules :

$$\ln \lambda = k_1 + k_2 \cdot \ln E_\alpha$$

Les constantes k_1 and k_2 sont caractéristiques de la famille radioactive.

Pénétrabilité D de la barrière de potentiel :

Pénétrabilité d'une barrière — 1

$$D = e^{-\frac{4\pi \cdot R}{\lambda_B} \cdot \gamma}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{B}{E}} \arccos \sqrt{\frac{T}{E}} - \sqrt{1 - \frac{T}{E}}$$

$$B = \frac{Z \cdot z \cdot e^2}{R}$$

$$\lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2mB}}$$

Symbole	Unité	Dénomination
D	1	pénétrabilité
R	m	rayon nucléaire
λ_B	m	longueur d'onde de de Broglie
B	J	hauteur de la barrière
e	C	charge élémentaire
ε_0	C/(Vm)	permittivité du vide
E	J	énergie cinétique de la particule
Z	1	num. atomique du noyau
z	1	num. atomique, particule émise

Ces formules s'appliquent aussi à d'autres particules.

28.6.3 Désintégration béta

Désintégration β : transformation nucléaire due à l'interaction faible et qui revêt trois formes :

- la **désintégration** β^- : émission d'un électron par le noyau instable

- la **désintégration** β^+ : émission d'un positron par le noyau instable
- la **capture électronique** : capture d'un électron atomique par le noyau

La désintégration $\beta^\pm$ se fait suivant trois particules :

$$\mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_e \qquad \mathrm{p} \longrightarrow \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ + \nu_e$$

Neutrino ν : particule à l'origine hypothétique introduite par Pauli (1931) pour satisfaire aux lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement dans la désintégration β. Le neutrino ne possède ni masse, ni charge ; c'est un fermion (son spin est $s = 1/2$) de nombre leptonique ± 1.
Électrons, positrons et neutrinos ne sont pas des constituants du noyau. Ils sont le résultat des interactions faibles entre les nucléons.
Équation d'une désintégration radioactive :

$${}^A_Z\mathrm{X}_N \rightarrow {}_{Z\pm 1}{}^A\,\mathrm{X}_{N\mp 1} + e^\mp + \begin{pmatrix}\bar{\nu}_e \\ \nu_e\end{pmatrix}$$

Capture électronique : capture d'un électron orbital de l'atome par le noyau et la transformation d'un proton en un neutron.

Équation de la capture :

$$\mathrm{e}^- + {}^A_Z\,\mathrm{X}_N \longrightarrow {}_{Z-1}{}^A\,\mathrm{X}_{N+1} + \nu_e$$

Capture K : capture d'un électron de la couche K atomique, conséquence de la probabilité élevée de présence d'un électron K dans le noyau.

▷ La capture K laisse un trou (vacance) dans la couche qui sera comblé par un électron du cortège, avec une émission caractéristique d'un rayon X ou d'un électron Auger.

1. Stabilité β

Stabilité β : caractéristique d'un isotope d'être stable envers l'émission β.

● Tous les noyaux rencontrés dans la nature sont situés dans la "vallée de stabilité" du diagramme (Z, N). Les noyaux émetteurs β^- se trouvent sur la "pente de gauche" du diagramme énergie-Z des isobares, tandis que les émetteurs β^+ sont sur la "pente de droite".

■ Désintégration β des isobares $A = 41$ (Fig. 28.38 (a)).

● Le **spectre d'énergie** des électrons, dans la désintégration β, est continu jusqu'à une énergie limite extrême E_0 (Fig. 28.38 (b)).

▷ Une désintégration à deux corps signifierait l'observation d'un spectre d'énergies discrètes des particules. L'influence d'une masse substantielle du neutrino (→ *Neutrino massif*) affecterait la partie haute énergie du spectre, la modifiant selon la ligne pointillée.

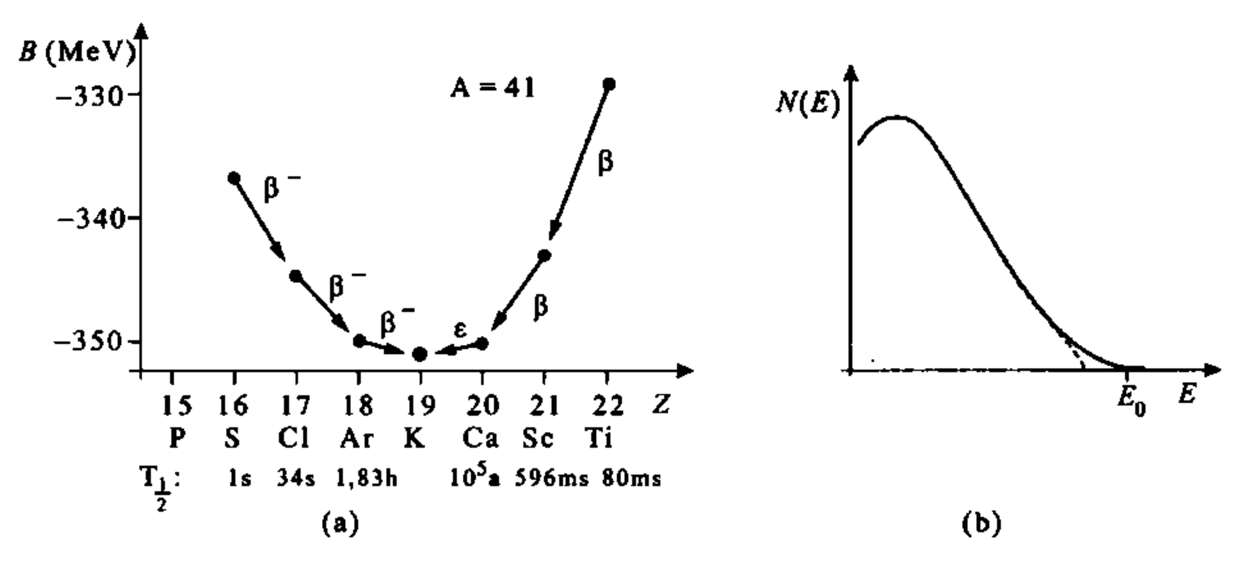


Fig. 28.38 : *Désintégration β. En (a) : pour des isobares $A = 41$; sont indiqués l'énergie de liaison B, le type de désintégration (β^+, β^- ou capture ε) et la période $T_{\frac{1}{2}}$. En (b) : spectre d'énergie β ; E_0 : énergie extrême ; en pointillé, allure pour une masse finie de neutrino.*

2. Représentation de Fermi

Ou **droite de Kurie** : représentation par une droite des spectres d'énergie β expérimentaux par un choix judicieux des coordonnées :

Droite de Kurie d'un spectre β			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$K(\varepsilon) = \sqrt{\dfrac{N(\eta)}{F(Z,\eta)\eta^2}}$	$K(\varepsilon)$	1	fonction de Kurie
	$N(\eta)$	1	nombre d'électrons
	$F(Z,\eta)$	1	fonction de Fermi
$\eta = \dfrac{p}{m_0 c}$	p	kg.m.s^{-1}	impulsion
	η	1	impulsion/m_0c^2
$\varepsilon = \dfrac{E}{m_0 c^2}$	E	J	énergie
	ε	1	énergie/m_0c^2
	m_0	kg	masse de l'électron
	c	ms^{-1}	vitesse de la lumière

3. Fonction de Fermi

$F(Z,\eta)$: facteur prenant en compte la distorsion, due au champ coulombien du noyau, de la fonction d'onde ψ de l'électron et du positron :

$$F(Z,\eta) = \frac{|\psi(0)_{\text{Coulomb}}|^2}{|\psi(0)_{\text{libre}}|^2}$$

La fonction de Fermi dépend fortement du radioélément.

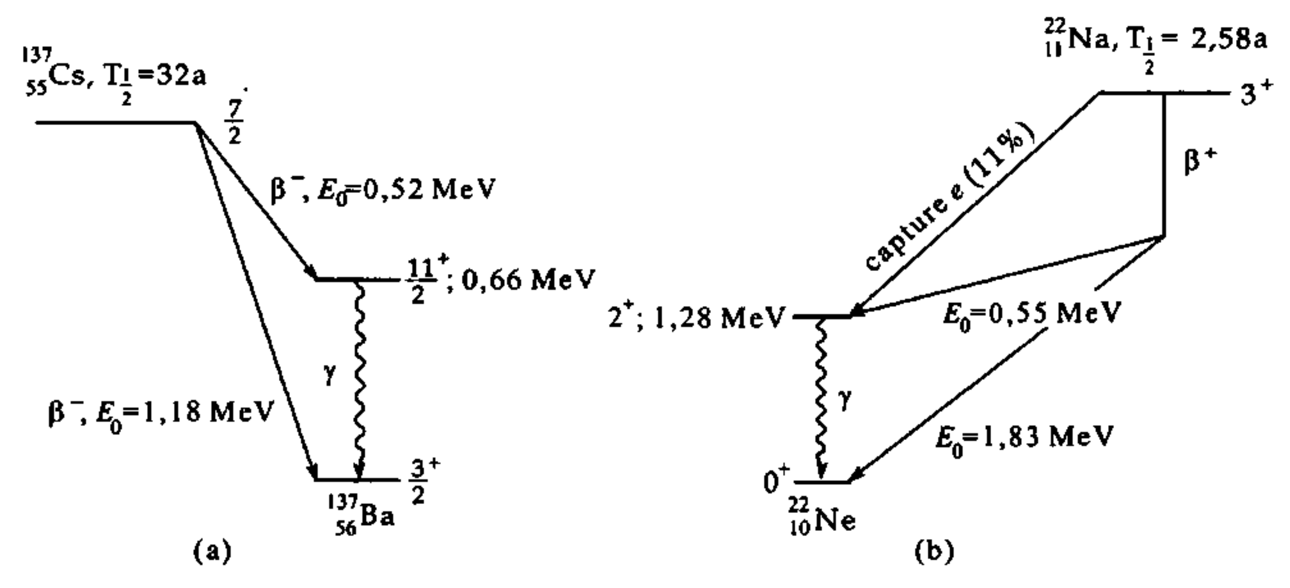


Fig. 28.39 : *Décroissance β et capture électronique. E_0 : énergie extrême du spectre β. Schémas de décroissance β^- de $^{137}_{55}Cs$ en* (a), *et β^+ de $^{22}_{11}Na$ en* (b).

4. Règles de sélection des transitions β

Elles opèrent entre les spins et parités des états nucléaires concernés dans la transition β.

Transition β permise : la représentation de Fermi est une droite.

Transition β interdite : la représentation de Fermi dévie d'une droite.

Valeur ft : moyen de classifier les transitions β en relation avec les valeurs expérimentales des périodes $T_{\frac{1}{2}}$:

Valeur ft ∼ période			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$$ft = T_{\frac{1}{2}} \int_1^{\varepsilon_0} F(Z,\varepsilon)\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2-1}(\varepsilon_0-\varepsilon)^2\,\mathrm{d}\varepsilon$$	$F(Z,\varepsilon)$	1	fonction de Fermi
	ε	1	énergie/m_0c^2
	ε_0	1	énergie extrême/m_0c^2
	$T_{\frac{1}{2}}$	s	période

Transition superpermise : $\log ft \approx 3.5$.
Transition permise : $\log ft \approx 5$.
Transiion interdite : $\log ft = 9 \ldots 18$.

28.6.4 Décroissance gamma

Désexcitation γ : émission de rayonnements électromagnétiques (photons γ) par un noyau excité. L'excitation du noyau peut résulter d'une décroissance α ou β, d'une réaction nucléaire ou d'une collision inélastique entre deux noyaux. D'une façon similaire aux électrons atomiques, les noyaux ont des niveaux discrets d'énergie et émettent des lignes spectrales caractéristiques.
Équation de la désexcitation :

$$^A_Z X^*_N \longrightarrow {}^A_Z X_N + \gamma$$

- Source radioactive de $^{60}_{27}Co$:
  La décroissance β de $^{60}_{27}Co$ ($T_{\frac{1}{2}} = 5,2$ ans) alimente deux états excités du noyau $^{60}_{28}Ni$ à $E^* = 2,505$ MeV, $J^\pi = 4^+$ (99,9 %) et à $E^* = 1,332$ MeV, $J^\pi = 2^+$ (0,1 %). Les énergies extrêmes des spectres β respectifs sont 314 et 1480 keV. Les transitions $4^+ \longrightarrow 2^+$ et $2^+ \longrightarrow 0^+$ (état fondamental du noyau Ni) se font par l'émission de deux rayonnements γ de 1,173 et 1,332 MeV (Fig. 28.40).

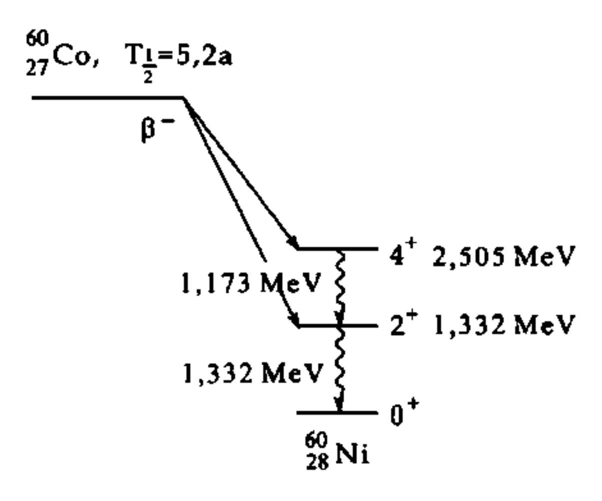


Fig. 28.40 : *Schéma de désexcitation de* $^{60}_{27}Co$.

État isomérique : état excité de vie longue d'un noyau, souvent associé à une grande différence de spin avec le ou les autres états participant à la transition.

Fluorescence résonante nucléaire : absorption par un noyau d'un quantum γ émis par un noyau de même espèce. L'absorption résonante est supprimée par la perte d'énergie due au recul et par l'effet Doppler. Le mouvement thermique des atomes conduit à un élargissement de la ligne du spectre d'émission et d'absorption.

[M] **Effet Mösbauer** : amplification de la résonance d'absorption dans des cristaux, à basse température, par transfert du moment de recul à tout le cristal. La largeur de résonance est alors si petite que le spectre d'énergie peut être mesuré avec une résolution atteignant 10^{-9} eV.

28.6.5 Émission de nucléons et de clusters

Émission retardée de nucléons : émission de nucléons au cours d'une décroissance radioactive (β, par exemple) ; l'état fils peuplé a une énergie d'excitation E^* supérieure à l'énergie de liaison $E_B^{(N)}$ du nucléon (voir Fig. 28.41).

▷ L'émission retardée de particules α a également été observée.

Émission spontanée de nucléons : désexcitation de noyaux produits par des réactions nucléaires au-delà de la ligne de stabilité ; ces noyaux se désexcitent spontanément par émission, soit de protons s'ils sont très déficitaires en neutrons, soit de neutrons s'ils ont un excédent de neutrons.

Émission de clusters : désexcitation de noyaux atomiques par des **clusters** (^{12}C, ^{14}C et d'autres noyaux). Ce processus est indicatif de l'importance jouée par les fermetures de couches dans la stabilité des noyaux.

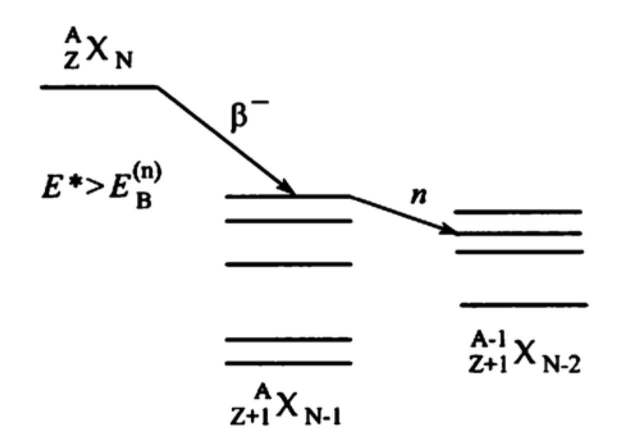


Fig. 28.41 : *Schéma de désexcitation de nucléons retardés (ici, un neutron). E^{*} : énergie d'excitation ; $E_{B}^{(n)}$: énergie de liaison du neutron*

28.7 Réacteurs nucléaires

Réaction en chaîne : réaction de fission nucléaire auto-entretenue (grâce aux neutrons libérés à chaque événement de fission) à un taux, soit contrôlé et constant (réacteur), soit divergent pouvant conduire à l'explosion (bombe atomique) (Fig. 28.42).

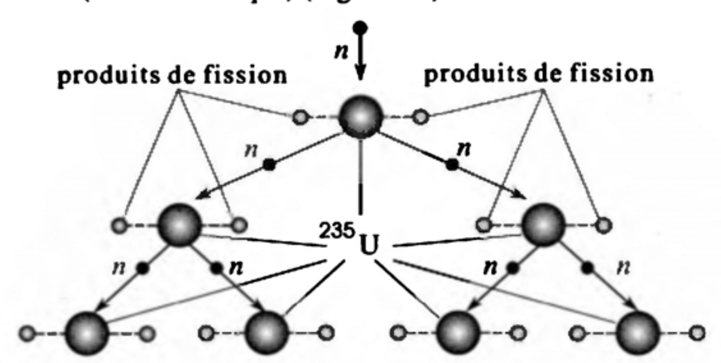


Fig. 28.42 : *Schéma d'une désintégration en chaîne.*

1. Caractéristiques d'une réaction en chaîne

Facteur de multiplication k : nombre de neutrons libérés dans une réaction en chaîne et disponibles pour générer d'autres fissions.

- Une réaction en chaîne auto-entretenue nécessite $k \geq 1$.

Fonctionnement sous-critique : réaction en chaîne décroissante avec un facteur de multiplication inférieur à un. Pour maintenir la fission nucléaire, une source externe de neutrons est nécessaire.

Fonctionnement critique : réaction en chaîne stationnaire avec un facteur de multiplication ajusté à un.

Fonctionnement sur-critique : réaction en chaîne divergente avec un facteur de multiplication supérieur à un. Non contrôlé, ce fonctionnement évoluerait vers l'explosion.

Multiplicité de neutrons de fission ν : nombre moyen de neutrons rapides produits par événement de fission. En fonctionnement réel, ce nombre diminue : des neutrons sont soit absorbés par les noyaux du combustible et d'autres noyaux présents, soit s'échappent de la zone active.

Facteur de fission rapide ε : facteur multiplificatif dû au nombre supplémentaire de neutrons apporté dans la fission de ^{238}U et ^{235}U par des neutrons rapides.

Facteur de résonance ψ : mesure de la perte en neutrons provoquée par une valeur élevée de la section efficace d'absorption résonante de l'uranium dans le domaine d'énergie concerné.

Probabilité de non-résonance p : probabilité d'échapper à la résonance d'absorption :

$$p = 1 - \psi$$

Probabilité de fission f : rapport des sections efficaces de fission et d'absorption totale.

Taux de fuite L : probabilité d'échappement de neutrons de la surface du réacteur.

2. Bilan en neutrons et réactivité

Bilan en neutrons dans un réacteur			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$k = \nu \cdot \varepsilon \cdot p \cdot f \cdot L$	k	1	facteur de multiplication
	ν	1	multiplicité de neutrons dans la fission de ^{235}U
	ϵ	1	facteur de fission rapide dans la fission de ^{238}U
	p	1	probabilité de non-résonance
	f	1	probabilité de fission
	L	1	taux de fuite

● **Réactivité** :

$$\delta = k - 1 > 0$$

La condition doit toujours être satisfaite pour compenser la consommation de combustible et "l'empoisonnement" de celui-ci par les produits de fission capturant les neutrons.

Barre de contrôle : barre composée de matériaux fortement absorbants en neutons pour ajuster l'excés de réactivité.

Neutron retardé : neutron émis par les produits de fission, différant la marge de contrôle de quelques secondes ; les neutrons retardés empêchent des variations trop rapides de densité de neutrons au voisinage du fonctionnement critique du réacteur.

3. Modérateurs et spectres neutroniques

Modérateurs : matériaux légers (H, D, B, C, O) faiblement absorbants en neutrons destinés à thermaliser les neutrons rapides de la fission.

■ Les modérateurs usuels sont l'eau et le graphite pour les réacteurs à neutrons thermiques.

Spectre neutronique : spectre d'énergie des neutrons (Fig. 28.43).

Neutron thermique : neutron en équilibre thermique avec le modérateur. La distribution en vitesse de ces neutrons est bien reproduite par une distribution de Maxwell (vitesse et énergie moyennes : $v = 2\,200\ \mathrm{ms}^{-1}$, $E = 0{,}025\,3$ eV).

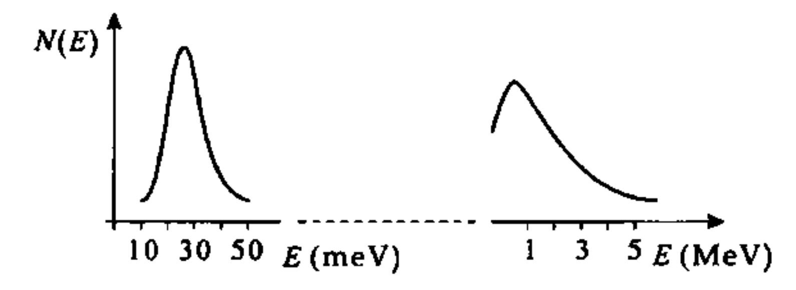


Fig. 28.43 : *Spectres neutrons d'un réacteur à neutrons thermiques. La distribution à faible énergie est due à la présence du modérateur.*

28.7.1 Types de réacteurs nucléaires

Les divers types de réacteurs se distinguent selon :

- l'énergie des neutrons provoquant la fission et la nature du combustible
- la nature du fluide de refroidissement
- la nature du modérateur

Réacteur à neutrons thermiques : réacteur dans lequel la fission nucléaire est induite par des neutrons thermiques ($E_n \approx 0,025$ eV).

Réacteur à neutrons rapides : réacteur à fission nucléaire induite par des neutrons rapides ($E_n > 0,1$ MeV).

La **matière fissile** consiste en U^{235} (en général faiblement enrichi), U^{233} (par *breeding*, voir plus loin, de Th^{232}) et Pu^{239} (par *breeding* de U^{238}), ainsi que des mélanges.

Les **modérateurs** usuels sont l'eau ordinaire, l'eau lourde ou le graphite ; le **fluide de refroidissement** consiste en eau, en gaz (CO_2, He), sodium liquide (en particulier dans les surgénérateurs à neutrons rapides).

1. Réacteur à eau sous pression

Ou REP, filière de réacteurs à neutrons thermiques (Fig. 28.44) utilisant de l'uranium enrichi à environ 5% en ^{235}U. De l'eau est utilisée à la fois comme modérateur et liquide de refroidissement. La pression élevée (15,8 MPa) permet de maintenir l'eau liquide.

▷ L'abondance de ^{235}U dans l'uranium naturel est de 0,72%.

■ La France a choisi principalement la filière REP dans son programme électronucléaire.

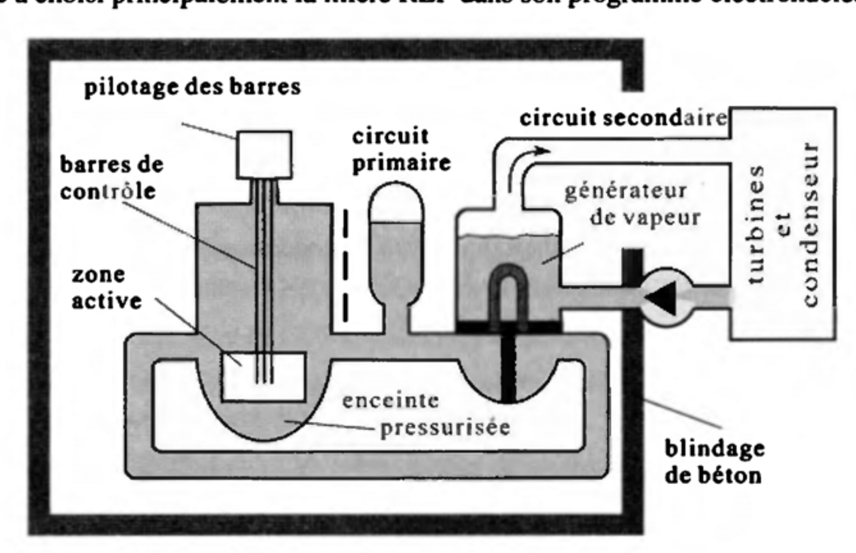


Fig. 28.44 : *Schéma d'un réacteur à eau sous pression.*

a) Circuit primaire : circuit de refroidissement directement situé dans la zone active du réacteur. Ce cycle de réfrigération est fermé.

Zone active : région du réacteur dans laquelle se trouve le combustible et où se produit la fission.

b) **Circuit secondaire** : circuit ayant pour rôle de récupérer la chaleur du circuit primaire et de refroidir le fluide ; le fluide secondaire est alors vaporisé pour entraîner des turbines. Des échangeurs de chaleur servent d'intermédiaires.

Combustible usé : élément combustible dans lequel la fraction de ^{235}U est devenue insuffisante pour maintenir la réaction en chaîne ($< 0,8\%$ ^{235}U).

2. Réacteur à eau bouillante

Ou REB, filière de réacteurs à neutrons thermiques utilisant de l'uranium enrichi avec, comme liquide de refroidissement, un mélange eau-vapeur à basse pression (7 MPa) et à température peu élevée (286°C). Un cycle direct unique est utilisé pour refroidir le cœur et pour entraîner les turbines.

■ La filière REB a été particulièrement développée par l'ex-URSS.

3. Réacteurs surgénérateurs

Conversion de combustible ou *breeding* : augmentation des noyaux fissiles $^{233}_{92}U$ et $^{239}_{94}Pu$ dans un réacteur par le bombardement neutronique respectif de $^{232}_{90}Th$ et de $^{238}_{92}U$.

■ $n + ^{232}_{90}\mathrm{Th} \longrightarrow ^{233}_{90}\mathrm{Th} \longrightarrow ^{233}_{91}\mathrm{Pa} \longrightarrow ^{233}_{92}\mathrm{U}$

Facteur de surgénération : rapport du nombre de noyaux fissiles produits par capture de neutrons, au nombre de noyaux ayant fissionnés.

● Un rapport de surgénération supérieur à un signifie que le réacteur fournit plus de combustible qu'il n'en consomme.

Réacteur surgénérateur ou **surrégénérateur** : réacteur fonctionnant avec un rapport de surgénération supérieur à un.

Surgénérateur à neutrons rapides : réacteur (Fig. 28.45) utilisant l'uranium naturel et le plutonium ($\sim 80\%$ UO_2 ; $\sim 20\%$ PuO_2) comme combustibles. En couverture du cœur est disposée la **matière fertile** (^{235}U sous forme UO_2). La surgénération procède comme suit :

$$^{238}_{92}U + n \rightarrow {}^{239}_{92}U \overset{\nearrow \gamma}{\underset{\beta^-;\ 23,5\ \mathrm{mn}}{\longrightarrow}} {}^{239}_{93}Np \underset{\beta^-;\ 2,36\ \mathrm{j}}{\longrightarrow} {}^{239}_{94}Pu$$

Un modérateur n'est pas, ici, approprié. Du sodium liquide est utilisé comme réfrigérant. L'isotope radioactif $^{24}_{11}Na$ produit reste confiné dans la zone active du réacteur (circuit primaire).

■ La France, en collaboration avec l'Italie et l'Allemagne, a développé un tel type de surgénérateur, Super-Phénix, à Creys-Malville (Drôme), d'une puissance industrielle de 1 200 MW (1986).

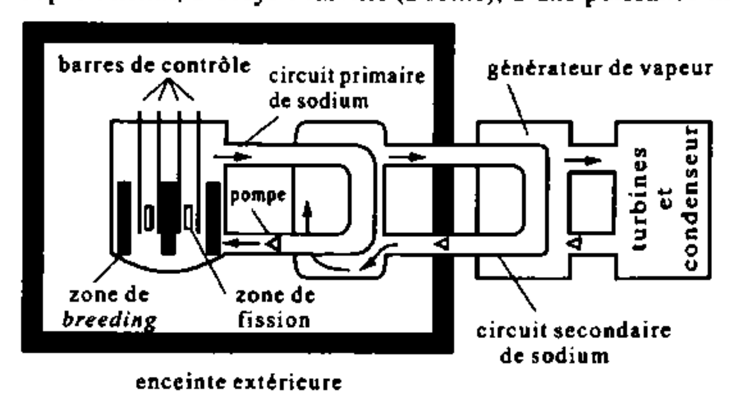


Fig. 28.45 : *Schéma d'un surgénérateur à neutrons rapides.*

28.8 Fusion nucléaire

Fusion nucléaire : union de deux noyaux légers en un seul. Dans ce processus, de l'énergie est libérée (→ *Énergie de liaison*).

■ Quelques réactions de fusion de noyaux légers :

$$\mathrm{D} + \mathrm{D} \longrightarrow \mathrm{T} + \mathrm{p} + 4,04\ \mathrm{MeV}$$
$$\mathrm{D} + \mathrm{T} \longrightarrow {}^{4}\mathrm{He} + \mathrm{n} + 17,6\ \mathrm{MeV}$$
$$\mathrm{T} + \mathrm{T} \longrightarrow {}^{4}\mathrm{He} + 2\mathrm{n} + 11,3\ \mathrm{MeV}$$

Pour une liste plus complète, consulter la Table 30.5/2.

■ Le soleil et les étoiles détiennent leur énergie de telles réactions de fusion.

■ L'abondance de la plupart des éléments légers, jusqu'à ^{56}Fe, s'explique par des réactions de fusion au sein des étoiles.

Cycle de combustion de l'hydrogène : chaîne de réactions dont le bilan est la fusion de quatre protons et qui conduit à un noyau stable $^{4}_{2}$He. L'énergie libèrée est de 24,69 MeV.

■ Avec 1 g d'hydrogène, on obtiendrait dans ce cas, environ $6 \cdot 10^{11}$ J.

Cycle de combustion de l'hélium : fusion de trois particules α en un noyau de ^{12}C.

1. Processus proton-proton

Cycle de l'hydrogène : fusion de protons conduisant à la création, par des réactions nucléaires successives, de noyaux Li, Be et B qui agissent comme des catalyseurs dans la formation de noyaux ^{4}He. Les séries I, II, III de réactions produisent de l'énergie dont une part est prise par les neutrinos (Fig 28.46). La série I est appelée cycle du deutérium.

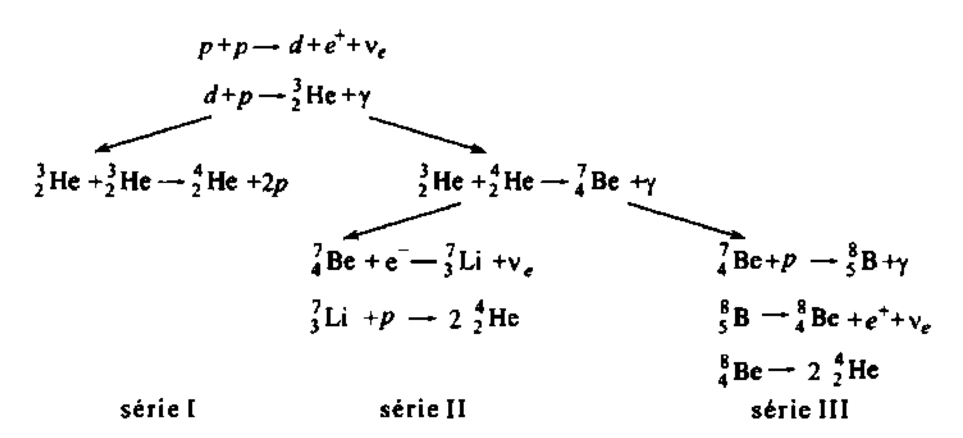


Fig. 28.46 : *Séries de réactions dans le processus proton-proton*

2. Cycle CNO

Cycle se déroulant dans le Soleil à partir de la fusion de protons et qui conduit à la production des noyaux légers catalyseurs C, N et O (Fig. 28.47).

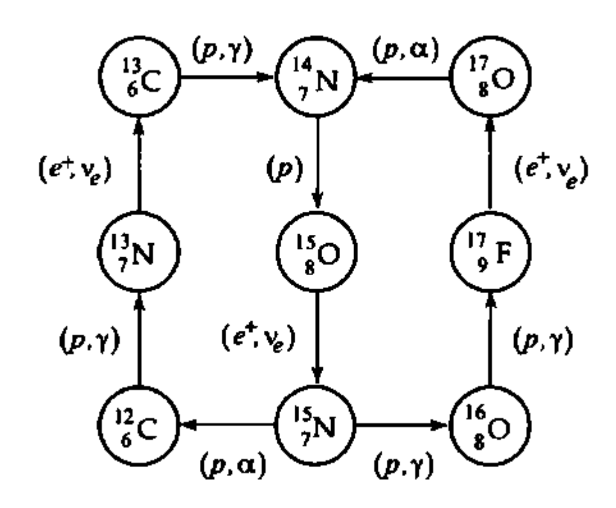


Fig. 28.47 : *Cycle CNO. Le double cycle provient de la compétition entre les réactions* $^{15}N(p,\alpha)^{12}C$ *et* $^{15}N(p,\gamma)^{16}O$.

3. Cycle carbone-azote

Cycle CN proposé par Bethe pour expliquer l'énergie du Soleil (Fig. 28.48).

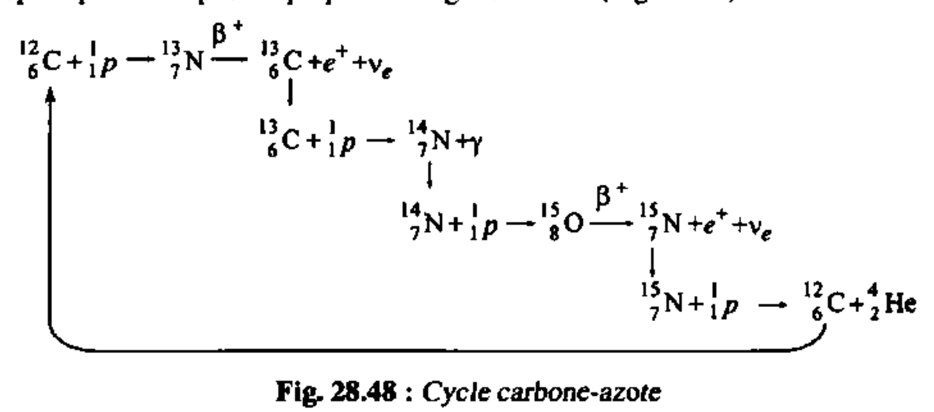


Fig. 28.48 : *Cycle carbone-azote*

Synthèse du carbone : fusion de trois particules α en un noyau ^{12}C par un processus en deux étapes :

$$^{4}\mathrm{He} + ^{4}\mathrm{He} + 95\ \mathrm{keV} \longrightarrow ^{8}\mathrm{Be} + \gamma \qquad ^{8}\mathrm{Be} + ^{4}\mathrm{He} \longrightarrow ^{12}\mathrm{C} + \gamma + 7,4\ \mathrm{MeV}$$

Pour fusionner deux noyaux, il faut vaincre la barrière coulombienne. Dans le cycle proton-proton, l'énergie nécessaire est de 0,5 MeV, ce qui correspond à une température de $\sim 5,8 \cdot 10^9$ K. Le cycle CN demande une température beaucoup plus élevée encore.

4. Réacteur de fusion

Réacteur dans lequel une réaction nucléaire de fusion se déroule. Le combustible est sous forme de plasma à une température de $\sim 10^8$ K, afin d'obtenir l'énergie cinétique nécessaire au rapprochement des deux partenaires.

Plasma : état gazeux d'électrons, d'ions et de particules électriquement neutres.

Confinement : localisation du plasma dans une région fermée de l'espace. L'enceinte n'est pas réalisable avec des matériaux conventionnels à cause des hautes températures dont la durée doit être suffisante pour amorcer la réaction.

Paroi magnétique : forme spéciale des lignes d'un champ magnétique permettant de réaliser une enceinte de confinement du plasma.

■ La configuration retenue est celle du **tokamak** : le plasma est confiné dans une enceinte torique enserrée dans des champs magnétiques dont la résultante est hélicoïdale autour du tore.

Confinement inertiel : contrôle de la fusion par compression et échauffement du combustible par des faisceaux laser, ou d'électrons, ou d'ions lourds ; un plasma très dense confiné sur une courte durée serait assuré par l'inertie dans l'expansion de la matière.

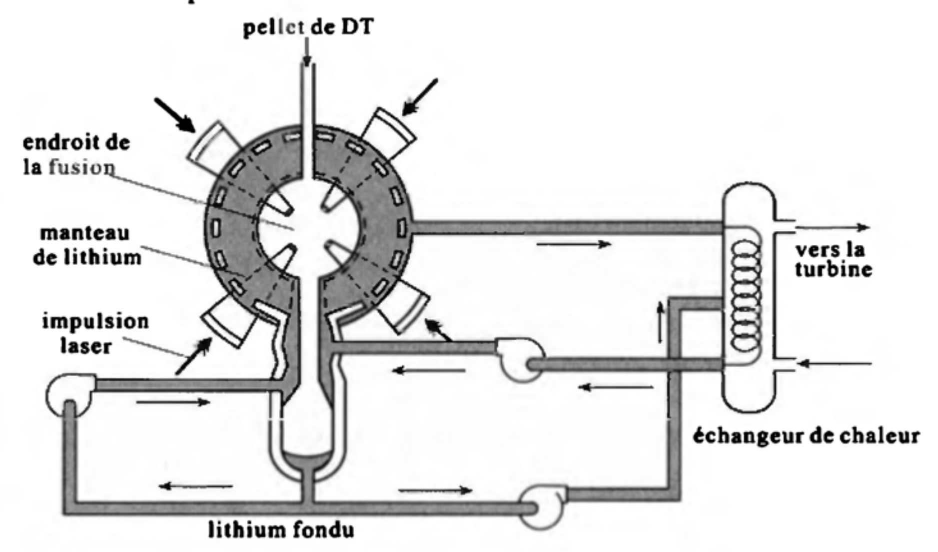


Fig. 28.49 : *Schéma d'un réacteur de fusion à confinement inertiel ; de petits pellets de* DT *(mélange de deutérium et de tritium) sont bombardés par un faisceau laser*

5. Critère de Lawson

Condition énergétique nécessaire pour assurer l'autocombustion (ou **ignition**) du processus de fusion dans un plasma (→ *Plasma*) :

Critère de Lawson				ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$(E_F + E_P + E_\gamma) \cdot (\eta + \varepsilon) = E_P + E_\gamma$	E_F	J	énergie de fusion	
	E_P	J	énergie thermique du plasma	
	E_γ	J	énergie du rayonnement de freinage	
	η	1	rendement énergétique de transformation	
	ε	1	rendement énergie de fusion	

- Le critère de Lawson, pour l'ignition d'un mélange DT, revêt la forme numérique suivante, où T est la température (keV), ρ est la densité de noyaux (m^{-3}) et τ la durée (s) de confinement :
  $T\rho\tau \geq 6 \cdot 10^{21}$

En 1993, le JET (*Joint European Torus*), implanté en Angleterre, a permis de s'approcher d'un ordre de grandeur de ce critère.

28.9 Interaction rayonnement - matière

28.9.1 Particules ionisantes

Particule ionisante : toute particule électriquement chargée ; dans son interaction électromagnétique avec le milieu qu'elle pénètre, elle produit des ions positifs et des électrons.

Ionisation : production d'électrons libres et d'ions positifs par la particule chargée incidente aux dépens de son énergie.

1. Perte par ionisation

Diminution de l'énergie cinétique de la particule incidente par le processus d'ionisation.

Rayonnement de freinage ou *bremsstrahlung* : rayonnement électromagnétique produit par une particule chargée lors de sa décélération (freinage) dans un champ coulombien.

Perte par rayonnement : perte d'énergie subie par une particule chargée par rayonnement de freinage dans le champ coulombien des noyaux atomiques.

- La perte d'énergie par rayonnement subie par des particules chargées lourdes est négligeable devant la perte par ionisation, sauf pour des énergies supérieures à leur masse m_0c^2 ($> 10^3$ MeV pour des protons).

- La perte d'énergie par rayonnement subit une brusque remontée pour des électrons d'énergie > 1 MeV (remontée relativiste).

- Les particules chargées lourdes ont un parcours R rectiligne bien défini dans un milieu.

2. Parcours et pic de Bragg

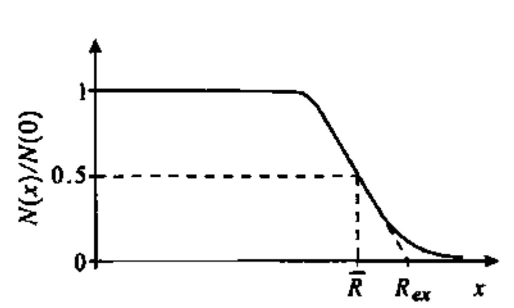


Fig. 28.50 : *Parcours de particules chargées lourdes dans un milieu ; x est la profondeur, $\bar{R}$: parcours moyen, R_{ex} : parcours extrapolé*

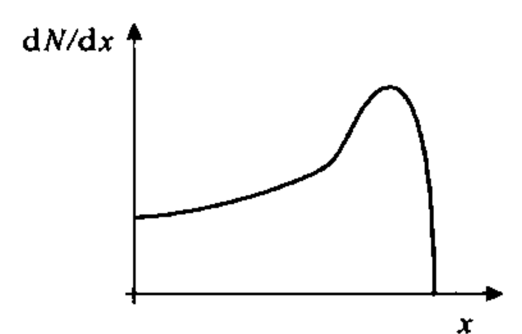


Fig. 28.51 : *Ionisation spécifique dE/dx de particules chargées lourdes dans un milieu, en fonction de la profondeur x atteinte ; la bosse correspond au pic de Bragg.*

Parcours moyen $\bar{R}$: profondeur de pénétration dans le milieu correspondant à une réduction de moitié du flux de particules incidentes (Fig. 28.50). .

Parcours extrapolé R_{ex} : profondeur de pénétration définie par l'intersection avec l'axe x, de la tangente menée au point d'inflexion de la courbe du flux de particules (Fig. 28.50).

Effet de traîne ou *straggling* : dispersion de parcours effectifs autour du parcours moyen $\bar{R}$.

Pic de Bragg : région de fin de pénétration montrant, pour des particules chargées lourdes, une ionisation importante du milieu (Fig. 28.51).

M Application des faisceaux de protons et d'ions lourds en technologie et en médecine : un maximum d'ions (pic de Bragg) peut être créé à une profondeur déterminée (±1 mm), dans un solide (implatation d'ions, dopage) ou dans un tissu organique (thérapie de tumeur), en agissant sur l'énergie de bombardement.

3. Relation énergie - parcours

Relation entre l'énergie cinétique E_{cin} d'une particule de charge Z et son parcours R dans un milieu :

$$R \sim E_{\text{cin}}^2/Z^2 \qquad v \ll c$$

$$R \sim E_{\text{cin}}/Z^2 \qquad v \approx c$$

■ Les particules α d'énergie $E_{\text{cin}} = 5$ MeV ont un parcours dans l'air de 3,5 cm ; il est de 23 μm dans l'aluminium.

Pour d'autres valeurs de parcours de ces particules α, voir la Table 30.6/3.

● Contrairement aux particules chargées lourdes, les électrons incidents dans un milieu n'ont pas de trajectoire rectiligne et, de ce fait, pas de parcours défini (Fig. 28.52).

▹ De même, les photons n'ont pas de parcours défini dans la matière.

4. Pouvoir d'arrêt

S (*stopping power*, en anglais) : rapport de la perte d'énergie dE subie par une particule chargée à la longueur infinitésimale dx de parcours effectué dans le milieu :

$$S = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$$

● Le pouvoir d'arrêt varie quadratiquement avec la charge de la particule incidente.

▹ En **dosimétrie**, S est aussi appelé **transfert linéique d'énergie** ou TLE.

Le pouvoir d'arrêt pour des particules lourdes d'énergie $E \ll m_0c^2$ est bien décrit par la **relation de Bethe-Bloch** :

Relation de Bethe – Bloch			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$S = \dfrac{Z \cdot z^2 \cdot e^4 \cdot N_A \cdot m_i}{8\pi\varepsilon_0^2 \cdot m_e \cdot E_{\text{cin}} \cdot M_A} \cdot \rho \times \ln\left(\dfrac{4m_e \cdot E_{\text{cin}}}{\bar{I} \cdot m_i}\right)$	S	J/m	pouvoir d'arrêt
	Z	1	numéro atomique du milieu
	z	1	numéro atomique du projectile
	e	C	charge élémentaire
	N_A	mol^{-1}	nombre d'Avogadro
	m_i	kg	masse du projectile
	ε_0	CV^{-1}m^{-1}	permittivité du vide
	m_e	kg	masse au repos de l'électron
	E_{cin}	J	énergie cinétique du projectile
	M_A	kg/mol	masse molaire du milieu
	$\bar{I}$	J	énergie d'ionisation moyenne
	ρ	kg/m^3	masse volumique du milieu

La relation de Bethe-Bloch est ici en unités SI. Les pouvoirs d'arrêt s'expriment plus habituellement en Mev/cm :

$$S\left[\frac{\text{MeV}}{\text{cm}}\right] \simeq 6,24 \cdot 10^{10} \cdot S\left[\frac{\text{J}}{\text{m}}\right]$$

5. Pouvoir d'arrêt des électrons

Pouvoir d'arrêt des électrons			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$S = \frac{Z \cdot e^4 \cdot N_A}{8\pi\varepsilon_0^2 \cdot m_e \cdot v^2 \cdot M_A} \cdot \rho \times \ln\left(\frac{m_e \cdot v^2 \cdot E_{cin}}{2\bar{I}^2(1-\beta^2)}\right) + f(\beta)$$	S	J/m	pouvoir d'arrêt
	Z	1	numéro atomique du milieu
	e	C	charge élémentaire
	N_A	mol^{-1}	nombre d'Avogadro
	m_i	kg	masse du projectile
	ε_0	CV^{-1}m^{-1}	permittivité du vide
	m_e	kg	masse au repos de l'électron
	E_{cin}	J	énergie cinétique du projectile
	M_A	kg/mol	masse molaire du milieu
	v	m/s	vitesse de l'électron
	β	1	rapport v/c
	$f(\beta)$	J/m	correction relativiste
	ρ	kg/m^3	masse volumique du milieu

■ Le pouvoir ionisant des électrons est environ 1000 fois plus faible que celui des particules α de même énergie.

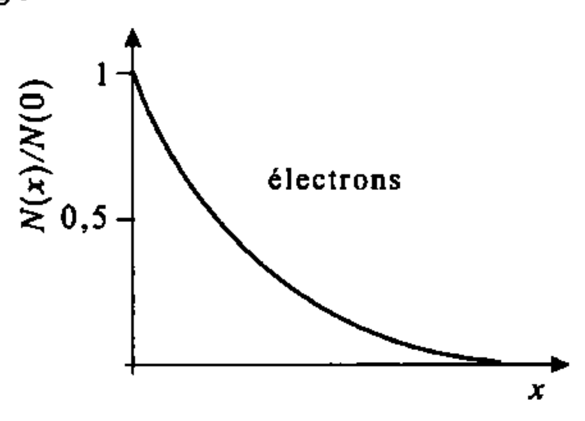


Fig. 28.52 : *Profil de pénétration d'électrons dans un matériau ; $N(x)$: nombre d'électrons à la profondeur x.*

6. Pouvoir d'arrêt massique et ionisation spécifique

Pouvoir d'arrêt massique S_m : rapport du pouvoir d'arrêt S à la masse volumique ρ du milieu :

$$S_m = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$$

[M] S_m permet de définir le pouvoir d'arrêt dans tout milieu, même hétérogène. On l'exprime habituellement en MeV cm^2 g^{-1}.

Ionisation spécifique j : rapport du pouvoir d'arrêt massique S_m à l'énergie d'ionisation moyenne $\bar{I}$:

$$j = S_m/\bar{I}$$

Sur un élément de parcours dx, il est créé le nombre dN de paires d'ions :

$$\mathrm{d}N = j \cdot \mathrm{d}x$$

▷ Des particules de même charge et de même énergie, mais de masse différente, produisent une ionisation spécifique différente.

■ Un électron d'énergie $E_{cin} = 10^5$ eV produit sur 1 cm d'air environ 200 paires d'ions. Un proton de même énergie en produirait $\sim 10^4$ sur le même parcours.

28.9.2 Rayonnement gamma

L'**atténuation** d'un faisceau de rayons γ, après la traversée d'un milieu de masse volumique ρ et d'épaisseur d, suit une loi exponentielle :

Loi de décroissance d'un faisceau de rayons γ			**1**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\varphi = \varphi_0\, e^{-\mu d}$	φ	$m^{-2}s^{-1}$	flux en sortie
	φ_0	$m^{-2}s^{-1}$	flux à l'entrée
	μ	m^{-1}	coef. d'atténuation linéaire
	d	m	épaisseur traversée

Coefficient d'atténuation massique $\mu_M = \mu/\rho$ (m^2/kg en unité SI) : rapport du coefficient d'atténuation linéaire à la masse volumique du milieu.

1. Effet photoélectrique

Effet photoélectrique : absorption de toute l'énergie du rayon γ par un atome du milieu et émission d'un électron des couches atomiques profondes.

● Le processus se produit pour des énergies γ supérieures à l'énergie de liaison de l'électron à éjecter ; il domine pour $E_\gamma < 0.5$ MeV. Voir Table 30.3/5.

Le coefficient d'**atténuation massique par effet photoélectrique** τ/ρ (m^2/kg en unité SI) croît rapidement avec le numéro atomique Z du milieu et diminue avec l'énergie $E_\gamma = h\nu$ du photon :

$$\frac{\tau}{\rho} \sim \frac{Z^4}{(h\nu)^3}$$

2. Effet Compton

Collision élastique de photons avec des électrons libres (ou quasi-libres).
Le coefficient d'**atténuation massique de diffusion Compton** σ/ρ (m^2/kg en unité SI) est presque indépendant du numéro atomique Z du milieu et décroît avec l'énergie du photon :

$$\frac{\sigma}{\rho} \sim \frac{1}{h\nu}$$

● L'effet Compton est dominant pour des photons de moyenne énergie.
(H_2O : 30 keV $< h\nu <$ 25 MeV; Pb : 500 keV $< h\nu <$ 5 MeV)

3. Création de paires

Processus de matérialisation d'un rayon γ en une paire électron-positron au voisinage d'un noyau ou d'un électron ; l'énergie seuil requise pour le rayon γ est $E_{seuil} = 2m_ec^2 = 1,022$ MeV (→ *Anti-particules*).

Le coefficient d'**atténuation massique par effet de paires** κ/ρ (m^2/kg en unité SI) est proportionnel à Z et croît avec le logarithme de l'énergie du photon :

$$\frac{\kappa}{\rho} \sim Z \ln(h\nu)$$

4. Coefficient d'atténuation totale

μ (m^2/kg en unité SI) : somme des coefficients d'absorption photoélectrique τ, d'effet Compton σ et de production de paires κ :

$$\mu = \tau + \sigma + \kappa$$

Consulter la Table 30.6/1, pour les coefficients d'atténuation massique de rayons X.

Coefficient d'atténuation linéaire μ' (m^{-1} en unité SI) : produit du coefficient d'atténuation massique μ par la masse volumique ρ du milieu :

$$\mu' = \mu \cdot \rho$$

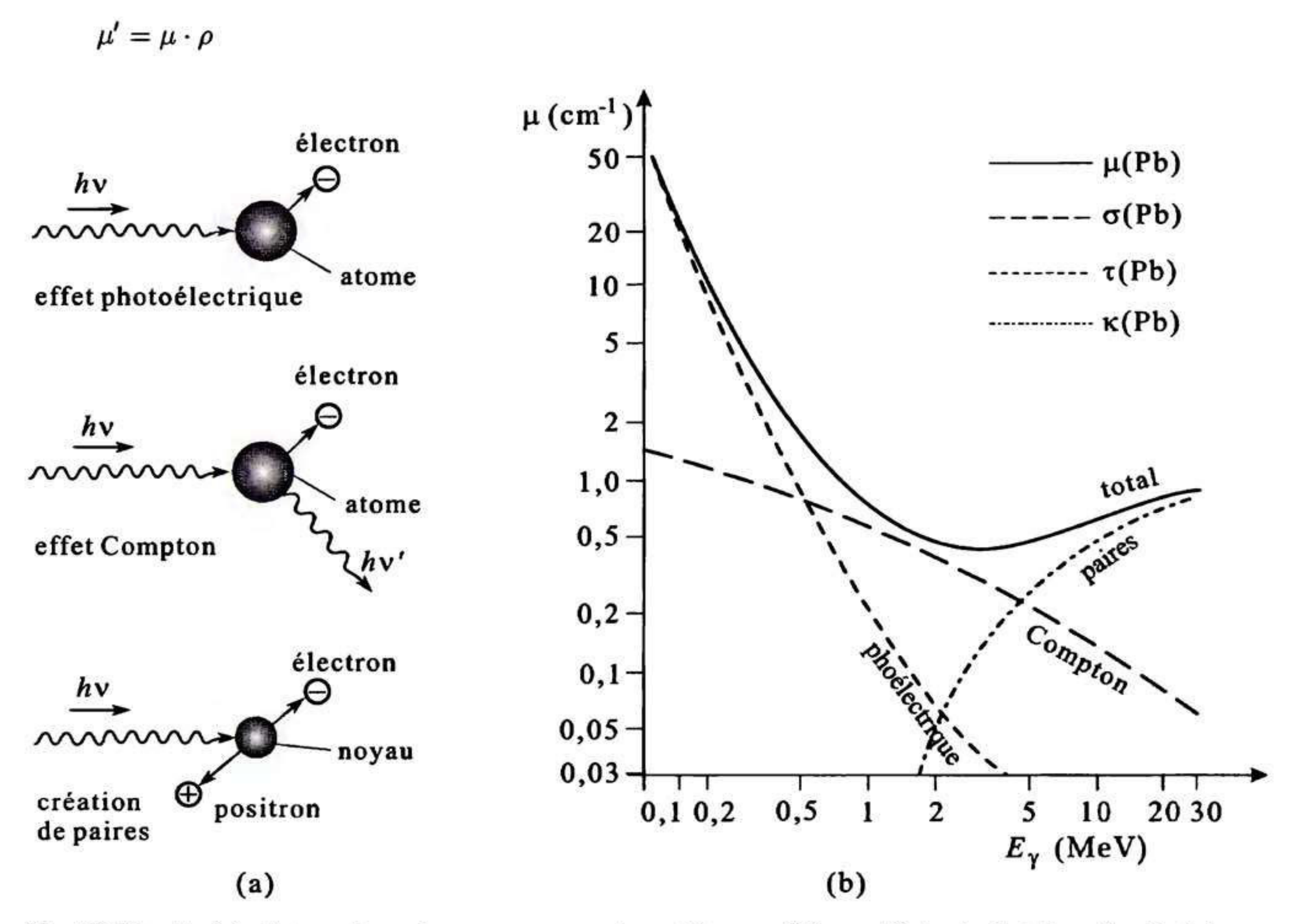


Fig. 28.53 : *En* (a) *: interactions de rayons γ avec la matière ; en* (b) *: coefficients d'atténuation linéaire en fonction de l'énergie des rayons γ, pour le plomb.*

28.10 Dosimétrie

Dosimétrie : technique de mesure des rayonnements ionisants, rayons X, rayons γ et neutrons.

1. Définition de l'activité

Activité A : taux de désintégrations d'un radioélément, sans tenir compte des effets biologiques des rayonnements émis.

$$\text{Activité} = \frac{\text{nombre de désintégration}}{\text{temps}}$$				T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$A = \frac{dN}{dt}$$	A	Bq	activité	
	N	1	nombre de désintégrations	
	t	s	temps	

Becquerel Bq : unité SI d'activité :

$$1\ \text{Bq} = \frac{1\ \text{désintégration}}{1\ \text{s}}$$

L'ancienne unité de curie (Ci) est, à présent, non légale. (→ *Curie*).

2. Dose absorbée

Ou simplement "dose" D : mesure physique de l'énergie de rayonnement absorbée par un milieu :

$$\text{Dose absorbée} = \frac{\text{énergie de rayonnement absorbé}}{\text{masse}}$$				L^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$D = \frac{\Delta W}{\Delta m}$$	D	Gy	dose absorbée	
	ΔW	J	énergie absorbée	
	Δm	kg	masse irradiée	

Gray Gy : unité SI de dose absorbée :

$$1\ \text{Gy} = \frac{1\ \text{J}}{1\ \text{kg}}$$

▷ Jusqu'en 1985, le "rad" a été utilisé comme unité de dose :
$1\ \text{rad} = 10^{-2}\ \text{Gy}$

▷ Dans les tissus organiques (et l'eau), une dose absorbée de 1 Gy ne provoque qu'une augmentation de température de 0,0024°C. Cependant, beaucoup de cellules vitales sont détruites, la densité d'énergie déposée étant très grande.

● En jouant sur le débit de dose, on peut tirer parti de l'efficacité biologique des divers rayonnements.

3. Équivalent de dose

ED : quantité dosimétrique exprimant le fait qu'à dose absorbée égale, les différents rayonnements produisent des effets biologiques différents :

Équivalent de dose = facteur d'effet biologique × dose			**L^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$ED = q \cdot D$	ED	Sv	équivalent de dose
	D	Gy	dose absorbée
	q	1	facteur d'effet biologique

Sievert Sv : unité SI d'équivalent de dose :

$$1\ \text{Sv} = \frac{1\ \text{J}}{1\ \text{kg}}$$

▷ Jusqu'en 1979, le "rem" (rad *equivalent for man*) a été utilisé comme unité de dose équivalente : $1\ \text{rem} = 10^{-2}\ \text{Sv}$

4. Facteur d'effet biologique

q : facteur dosimétrique introduit pour prendre en compte les effets biologiques de l'énergie absorbée selon le type de rayonnement ; il est le produit du **facteur de qualité** FQ, qui dépend du type de rayonnement et de ses effets, et du **facteur de distribution** FD, qui tient compte de la distribution dans l'espace et le temps de ce rayonnement :

$$q = FQ \cdot FD$$

Pour un corps irradié de l'extérieur, $FD = 1$.

Facteur de qualité FQ : facteur de risque biologique dépendant du transfert linéique d'énergie (TLE) (→ *Pouvoir d'arrêt*) du rayonnement évalué pour un milieu illimité ; il est fixé par convention par la CIPR (Commission Internationale de Protection Radiologique).

Facteurs de qualité moyen $\overline{FQ}$ pour divers rayonnements :

Types de rayonnement	$\overline{FQ}$
rayons X, γ	1
électrons, positrons	1
neutrons thermiques	2,3
neutrons rapides	10
particules α	20
ions lourds	20

Débit d'équivalent de dose : rapport de l'équivalent de dose à la durée d'irradiation :

■ $\frac{\text{Sv}}{\text{h}}, \frac{\text{Sv}}{\text{min}}, \frac{\text{Sv}}{\text{s}}$

5. Spectre de densité de particules et d'énergie

Radiance spectrale de particules p_E : flux de densité de particules dans un angle solide et à une énergie donnés :

$$p_E(\vec{r}) = \phi_E(\vec{r}, t, E, \Omega) \quad (\text{en } s^{-1}J^{-1}sr^{-1}m^{-2})$$

Densité spectrale de particules ϕ_E : intégrale de la radiance spectrale de particules sur tout l'espace :

$$\phi_E(\vec{r}, t, E) = \int p_E(\vec{r}) d\Omega$$

Fluence de particules Φ : intégrale de la radiance spectrale de particules sur l'énergie cinétique et le temps :

Fluence de particules			L^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\Phi(\vec{r}) = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\infty}\int_0^{4\pi} p_E(\vec{r}) d\Omega dE dt = \frac{dN}{dA_\perp}$$	$\Phi(\vec{r})$	m^{-2}	fluence
	$p_E(\vec{r})$	$1/(s\,J\,sr\,m^2)$	radiance spectrale
	Ω	sr	angle solide
	E	J	énergie
	t	s	temps
	N	1	nombre de particules
	$A_\perp$	m^2	surface

- La fluence est le nombre de particules qui entrent, pendant un certain temps, dans une sphère par la surface de sa section droite.

Débit de fluence ou densité de flux ϕ : fluence par unité de temps.

Débit de fluence = densité de particules · vitesse			$L^{-2}T^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{\Phi(\vec{r})}{t} = n \cdot v$$	$\phi(\vec{r}, t))$	$m^{-2}s^{-1}$	débit de fluence
	$\Phi(\vec{r})$	m^{-2}	fluence
	t	s	temps
	n	m^{-3}	densité de particules
	v	ms^{-1}	vitesse des particules

Densité spectrale d'énergie ψ : produit de la densité spectrale de particules par l'énergie :

$$\psi = E \cdot \phi_E(\vec{r}, t, E)$$

Densité de flux d'énergie I_E : intégrale du produit de la densité spectrale d'énergie sur l'énergie :

$$I_E = \int E \cdot \phi_E(\vec{r}, t, E) dE$$

Flux d'énergie : intégrale de la densité de flux d'énergie sur le temps.

6. Loi d'atténuation

Loi gouvernant l'atténuation d'un faisceau dans un matériau en fonction de l'épaisseur traversée :

Atténuation			$L^{-2}T^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$d\psi = -\psi \cdot \mu \cdot dz$	$d\psi$	$m^{-2}s^{-1}$	atténuation infinitésimale
	ψ	$m^{-2}s^{-1}$	flux de densité d'énergie
	μ	m^{-1}	coef. linéaire d'atténuation
	dz	m	épaisseur infinitésimale

L'intégation de cette expression conduit à la loi d'atténuation :

$$\psi = \psi_0 e^{-\mu \cdot z}$$

Cette loi s'applique à un étroit faisceau monoénergétique, car le coefficient d'atténuation est fortement dépendant de l'énergie.

Épaisseur moitié s : épaisseur de matériau provoquant une atténuation de moitié du flux de rayonnement présent à l'entrée :

$$s = \frac{\ln 2}{\mu}$$

Coefficient de transfert d'énergie μ_{tr} : mesure de l'énergie directement transférée du faisceau de rayonnement au milieu absorbant.

Coefficient de transfert d'énergie			L^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\mu_{tr} = \frac{1}{W} \cdot \frac{dW_{cin}}{dz}$	μ_{tr}	m^{-1}	coef. linéaire de transfert
	W	J	énergie totale du faisceau
	dW_{cin}	J	énergie transférée
	dz	m	épaisseur infinitésimale

7. Kerma

(*Kinetic energy released per unit mass*) K : quotient de la somme des énergies cinétiques initiales de toutes les particules chargées que libèrent **les particules indirectement ionisantes** dans l'élément de volume d'un milieu donné, par la masse de matière contenue dans cet élément.

- Le kerma est utilisé principalement en dosimétrie de neutrons.

Coefficient d'ionisation indirecte			L^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$K = \frac{1}{\rho}\frac{dE_{tr}}{dV}$	K	Gy	kerma
	ρ	kg/m^3	masse volumique
	E_{tr}	J	énergie cinétique transférée en particules ionisantes
	V	m^3	volume

8. Efficacité biologique relative

(EBR) : détermination de l'influence d'un rayonnement x sur un matériau biologique infime a (par exemple, obtention d'une valeur de la probabilité de survie d'une cellule) par comparaison avec des doses de référence :

$$EBR_a = \left(\frac{D_{ref}}{D_x}\right)_a$$

La dose de référence produit les mêmes effets biologiques qu'une dose D_x.

▷ Généralement, les rayonnements γ du ^{60}Co ou des rayons X de 250 keV constituent des références.

28.10.1 Méthodes de mesures dosimétriques

Dosimétrie individuelle : mesure de dose représentative de l'irradiation reçue par le corps humain.

M **Chambre d'ionisation** : compteur collectant sans l'amplifier l'ionisation produite dans son enceinte gazeuse ; la charge électrique recueillie est une mesure de la dose (Fig. 28.54(b)). Son utilisation est adaptée à un domaine de doses allant du μGy au kGy.
Ces instruments, développés sous forme de dosimètres intégrateurs, donnent une information immédiate et précise en dosimétrie du personnel.

Amplification secondaire : augmentation des porteurs chargés libres par ionisation secondaire du gaz sous l'effet des électrons primaires accélérés par un champ électrique.

M **Compteur proportionnel** : compteur de gaz avec une amplification atteignant 10^4. La hauteur d'impulsion délivrée est proportionnelle à l'énergie déposée par le rayonnement incident. Le nombre d'impulsions est une mesure du nombre de rayonnements incidents (Fig. 28.54(a)).

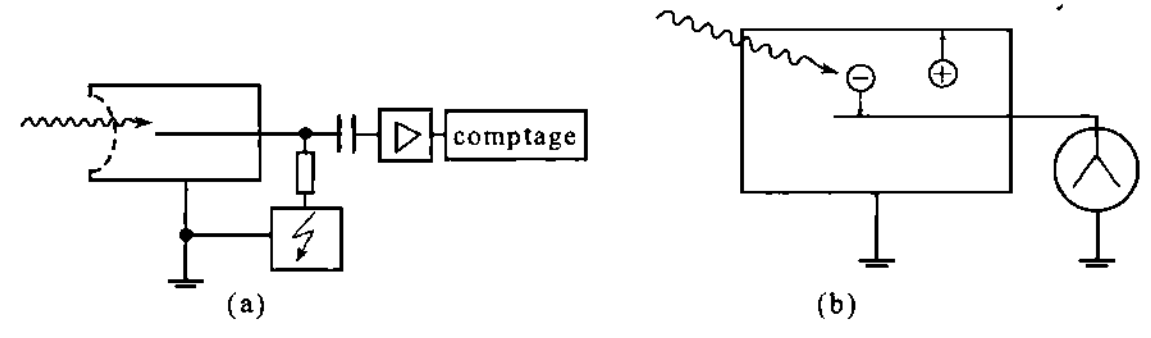


Fig. 28.54 : *Schémas de principe, en* (a) *: d'un compteur proportionnel, en* (b) *: d'une chambre d'ionisation.*

M **Compteur Geiger-Müller** : compteur fonctionnant dans la région de décharge d'un compteur à gaz, avec un facteur d'amplification de $\sim 10^8$. La hauteur d'impulsion ne peut être reliée à l'énergie déposée. Ces dosimètres sont utilisés pour des mesures de doses d'exposition et de débits de dose.

Dose d'exposition ou **exposition** : dose équivalente pour des tissus mous localisés, établie sur une durée déterminée.

M **Film dosimètre** : plaque ou film photographique dont le noircissement révèle le passage d'un rayonnement ionisant. Ces dosimètres sont utilisés pour des équivalents de doses allant de 0,1 mSv à 1 Sv ; ils sont sensibles aux photons de 20 keV à 3 MeV d'énergie. Grâce à des convertisseurs de rayonnements (neutrons/γ avec du cadmium en plaque), les films dosimètres (dosifilms) sont d'un usage universel pour les personnels travaillant dans des zones à risque.

M **Dosimètre thermoluminescent** : dosimètre fondé sur une propriété de l'état solide de stocker l'énergie des rayonnements interagissants et de la restituer en lumière sous l'influence de chaleur (→ *État solide, luminescence*).

Radiotoxicité : empoisonnement du corps humain par des radioéléments.

Période biologique : durée nécessaire pour que l'activité présente dans le corps diminue de moitié, par décroissance radioactive *et* excrétion.

Radioélément	Période radioactive	Période biologique	Organe critique
Radiotoxicité de classe 1 : jusqu'à 3,7 kBq			
^{90}Sr	28,1 a	11 a	os
^{210}Pb	22 a	730 d	os
^{210}Po	138 d	40 d	rate
^{233}U	$1,63 \cdot 10^5$ a	300 d	os
Radiotoxicité de classe 2 : jusqu'à 37 kBq			
^{22}Na	2,58 a	19 d	corps entier
^{137}Cs	26,6 a	100 d	muscle
^{144}Ce	285 d	330 d	os
^{131}I	8,0 d	180 d	glande thyroïde
Radiotoxicité de classe 3 : jusqu'à 370 kBq			
^{14}C	5570 a	35 a	tissu mou
^{24}Na	15 h	19 d	corps entier
^{105}Rh	1,54 d	28 d	rein
^{109}Cd	1,3 a	100 d	foie
Radiotoxicité de classe 4 : jusqu'à 3,7 MBq			
^{3}H	12,6 a	19 d	corps entier
^{238}U	$4,5 \cdot 10^9$ a	300 d	rein

28.10.2 Radioactivité ambiante

Rayonnement cosmique : rayonnement incident sur la Terre provenant de l'Univers. Le rayonnement cosmique primaire est principalement constitué de protons et de particules α qui, en interagissant avec les molécules de l'air et leurs noyaux ($^{14}_{7}$N, $^{16}_{8}$O), produisent un rayonnement secondaire de particules diverses (p, n, π, μ, K, e, ν) et de rayons γ.

▷ Le débit d'équivalent de dose du rayonnement cosmique, ramené au niveau de la mer, est d'environ $3 \cdot 10^{-4}$ Sv/a pour l'Europe. Le flux de neutrinos est sans influence du fait de sa très faible section efficace d'interaction.

▷ Des particules de grande énergie $> 10^{20}$ eV sont parfois véhiculées dans le rayonnement cosmique. La nature (particules exotiques nouvelles, photons très énergétiques ou noyaux atomiques) et l'origine (sources extragalactiques, étoiles à neutrons, chocs dans le halo de notre galaxie) de ces particules restent encore mystérieuses.

Rayonnement terrestre : rayonnement dû aux radioéléments naturels de très longues périodes et aux produits de filiation.
Le rayonnement cosmique produit aussi les radioéléments $^{3}_{1}$H (tritium) et $^{14}_{6}$C. Les éléments produits dans la haute atmosphère se retrouvent à la surface de la Terre par sédimentation, chute de pluie ou par convection.

	avant 1963	1963/1964	1979
	en $Bq/kg(H_2O)$		
Eau de pluie en Europe centrale	740	222 000	9 250
Eau de pluie sur les côtes ouest de l'Europe	296	92 500	2 960
Eau de la nappe phréatique en Europe centrale	444	166 500	7 400
Eau en surface de l'Atlantique nord	22,2	1 850	555

■ En plus de l'hydrogène radioactif (tritium) et du carbone radioactif ($^{14}_{6}C$), l'air contient aussi du radon et ses produits de filiation. Les émanations de radon proviennent des fentes de l'écorce terrestre ou des eaux de source profonde.

Retombée atomique : retombée des **explosions atomiques** effectuées dans l'atmosphère au cours des années 60 ; la radioactivité ambiante a augmenté d'une manière significative, en particulier à cause du tritium.

Rayonnement corporel : rayonnement propre du corps humain produit par des radioéléments absorbés par la respiration et l'alimentation.

● Le rayonnement propre du corps humain est d'environ $3 \cdot 10^{-4}$ Sv/a.

Exposition naturelle : somme de trois composantes : cosmique, terrestre et rayonnement propre.

● L'exposition naturelle correspond à un équivalent de dose de $1,1 \cdot 10^{-3}$ Sv/a.

Certains organes du corps humain sont plus exposés que d'autres aux rayonnements ionisants.

■ Par exemple pour les poumons, l'équivalent de dose est de $1,2 \cdot 10^{-2}$ Sv/a.

Rayonnement généré par l'activité humaine ayant pour principales causes :

- les rejets des centrales nucléaires
- les diagnostics médicaux
- les matériaux de construction

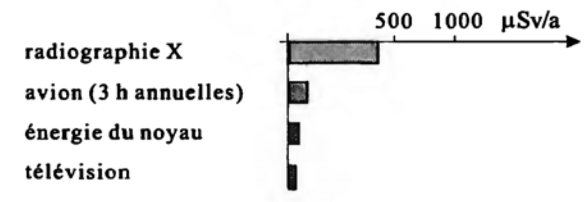
Débit de dose de différentes sources de rayons X :

Appareil	Débit d'équivalent de dose (en Sv/h à 10 cm)
tube à rayons X	$< 0,01$
télévision couleur	$0,6 \cdot 10^{-6}$
écran moniteur	$5 \cdot 10^{-6}$
oscillographe	$1 \cdot 10^{-6}$
écran de radar	$4 \cdot 10^{-6}$

● Les radiographies par rayons X et les radiothérapies constituent les principaux facteurs d'exposition.

Activité radioactive de matériaux de construction :

Matériaux	^{226}Ra (émetteur α)	^{232}Th (émetteur α)	^{40}K (émetteur β)
	(en Bq/kg)		
brique	52,5	49,2	652
pierre de chaux	11,5	4,1	273
béton	26,3	21,8	437
béton léger	16,7	25,5	343



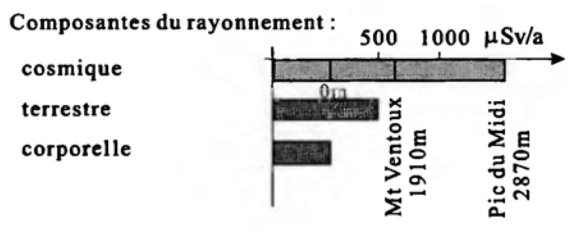


Fig. 28.55 : *Débits annuels d'équivalents de dose liés à l'activité humaine et à la radioactivité naturelle.*

29 Physique du solide

29.1 Structure des solides

29.1.1 Quelques bases de la physique du solide .

Solide : matière à l'état solide. Les solides peuvent être classés selon l'état de leurs constituants (atomes, ions, molécules) :

- **Solide cristallin** (**Cristal**) : solide de composition chimique définie, dont les constituants sont répartis de façon régulière et périodique dans les trois directions de l'espace.
- **Solide amorphe** : solide dont les constituants ne sont pas répartis régulièrement dans l'espace. Il n'y a pas d'ordre à longue distance, ni périodicité.

■ Les métaux alcalins ont une structure cristalline. Le diamant est constitué de Carbone cristallin. Le sel de cuisine (chlorure de Sodium, NaCl) présente une structure cristalline.

■ Les alliages et les gels sont des solides amorphes.

Beaucoup de matériaux solides (par ex. : les **verres** ou les **polymères**) ne rentrent pas dans cette classification. Les polymères possèdent une structure partiellement périodique à plus ou moins grande distance. Il existe des solides de structure microcristalline (cristallites ou grains).

Selon les propriétés physiques d'un solide, on distingue :

- **Solide isotrope** : aucune direction de l'espace n'est privilégiée. Les propriétés physiques sont indépendantes de la direction dans le solide. Les solides amorphes sont généralement isotropes.
- **Solide anisotrope** : certaines directions de l'espace sont privilégiées, les propriétés physiques du solide sont fonction de la direction selon laquelle elles sont mesurées. Les directions privilégiées sont définies par la structure périodique du cristal.

Monocristal : cristal parfait (idéal), dont la structure périodique régulière se répète sans interruption, sur tout le volume du solide. Dans tous les éléments de volume du cristal, tous les axes privilégiés de propriétés physiques, conservent la même direction par rapport à un repère fixe du solide.

■ Les cristaux formés par cristallisation d'une solution de sels, sont souvent des monocristaux.

M **Croissance de monocristaux** par fusion (méthode à un composant), à partir de solutions (méthode à plusieurs composants), ou à partir de corps en phase gazeuse.
Méthode de Czochralski : le cristal est directement tiré à partir d'un matériau en fusion (Fig. 29.1).
Méthode de Bridgeman : le cristal croît dans un creuset qui se déplace avec une vitesse constante d'une zone chaude vers une zone froide (Fig. 29.2).
Ces méthodes ont l'inconvénient que le cristal peut être contaminé par des impuretés ou de l'oxygène provenant des parois du creuset .
Méthode de la fusion de zone : procédé de purification d'un cristal, consistant en fusion localisée, par un dispositif chauffant qui progresse lentement vers une extrémité, suivie de recristallisation. Les impuretés, concentrées dans la zone en fusion, sont progressivement repoussées vers l'extrémité.

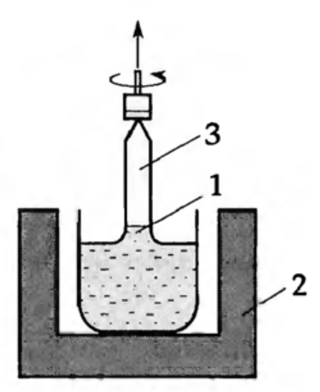


Fig. 29.1 : *Méthode de Czochralski. 1 : matière fondue, 2 : chauffage, 3 : cristal en croissance*

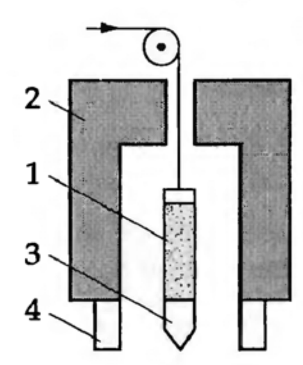


Fig. 29.2 : *Méthode de Bridgeman. 1 : matière fondue, 2 : chauffage, 3 : cristal en croissance, 4 : refroidissement*

Défaut cristallin : région d'un cristal où la structure idéale est perturbée, de sorte que les atomes n'ont plus la répartition spatiale régulière (dislocation, lacunes, macles . . .).

- Le type de défauts du réseau cristallin et leur nombre, déterminent les propriétés physiques d'un solide.

Solide polycristallin : solide dans lequel les domaines à structure monocristalline (cristallites) s'étendent seulement sur quelques micromètres. Les différents cristallites sont orientés aléatoirement.

■ Les métaux produits par cristallisation à partir du métal fondu, sont généralement polycristallins.

Grain : domaine monocristallin de petites dimensions d'un solide.

Limite de grain : sépare les différentes zones monocristallines d'un solide polycristallin.

Texture : distribution spatiale de l'orientation des grains dans un solide polycristallin.

29.1.2 Structure des cristaux

Réseau cristallin : répartition spatiale tri-dimensionnelle, périodique, d'atomes, de molécules ou d'ions, dont le type et la structure géométrique déterminent l'aspect extérieur et les propriétés physiques du solide.

Réseau spatial, **réseau de points** : abstraction mathématique, assemblage périodique dans le plan ou l'espace, de points géométriques ou matériels disposés régulièrement et qui correspondent aux emplacements des centres des atomes d'un cristal réel. On fait abstraction de la nature physique et chimique des atomes ou des molécules.

Base : groupe d'atomes ou de molécules qui appartiennent à chaque point du réseau de points ou à chaque maille élémentaire.

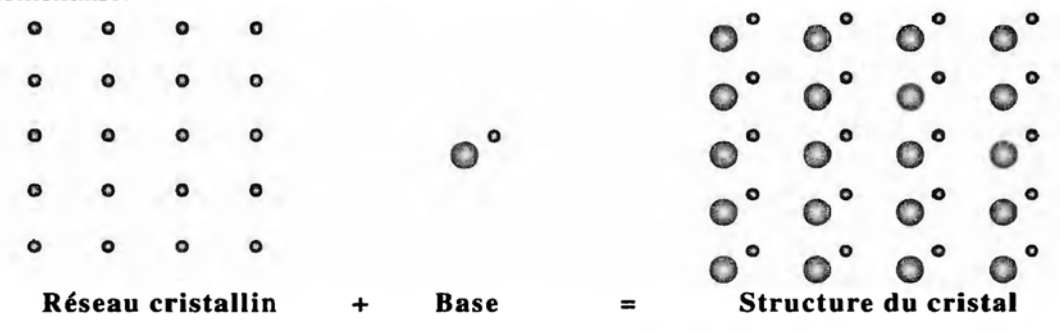


Fig. 29.3 : *Structure d'un cristal*

1. Structure cristalline :

Déterminée par la symétrie imposée par les liaisons entre atomes, les paramètres du réseau (dimensions et angles) et l'indication de la position des centres de gravité (nœuds) et leur contenu.

Maille élémentaire : élément du réseau cristallin à partir duquel, par de simples translations, on peut reproduire le réseau cristallin complet.

Maille primitive : le plus petit ensemble d'atomes ou de molécules à partir duquel, par des opérations de symétrie, on peut construire la maille élémentaire.

Translation : déplacement d'une maille élémentaire dans l'espace par le vecteur de translation $\vec{\mathbf{T}}$.

2. Vecteurs de réseau et axes du cristal

Vecteurs fondamentaux de translation : vecteurs de base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Les translations $\vec{\mathbf{T}} = \vec{a}n_1 + \vec{b}n_2 + \vec{c}n_3$ suivant trois directions non coplanaires, reproduisent le cristal identique à lui-même.

■ Soit $\vec{\mathbf{r}}$ un point quelconque de l'espace. Le réseau cristallin au point
$\vec{\mathbf{r}}' = \vec{\mathbf{r}} + n_1\vec{\mathbf{a}} + n_2\vec{\mathbf{b}} + n_3\vec{\mathbf{c}} \qquad (n_1, n_2, n_3 \quad \text{entiers})$
est identique à celui au point $\vec{\mathbf{r}}$. Les vecteurs de base $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ définissent un parallélépipède.

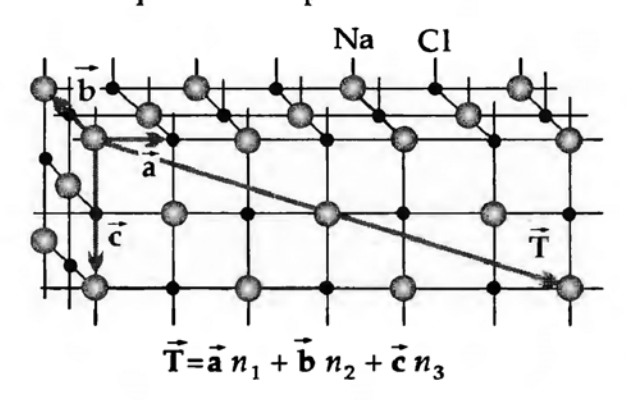


Fig. 29.4 : *Vecteur de translation*

● Les vecteurs fondamentaux de translation (vecteurs de base) $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{c}$ définissent un réseau de points de façon univoque.

Axes du cristal : directions définies par les vecteurs de base $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ et $\vec{c}$.

Constantes de réseau : grandeurs des vecteurs de base du réseau $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, donnent les distances entre les nœuds du réseau le long des axes du cristal.

3. Maille primitive, maille simple :

Maille élémentaire qui, pour une structure cristalline donnée, a le plus petit volume possible. La maille primitive ne contient qu'un seul point (nœud) du réseau de points.

▷ La maille primitive possède néanmoins un nœud à chacun de ses sommets, mais ceux-ci font partie des 8 cellules élémentaires adjacentes.

Les vecteurs de base représentés sur la Figure 29.5 englobent une maille primitive.

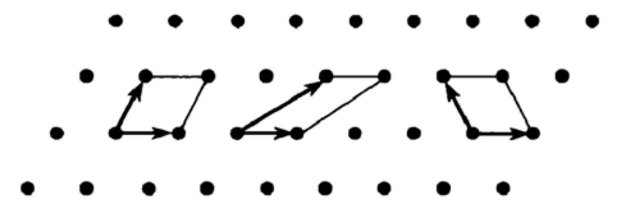


Fig. 29.5 : *Maille primitive*

▷ Il n'est pas toujours approprié ni usuel de choisir une cellule élémentaire aussi petite que possible (maille primitive). Les mailles élémentaires du Tungstène et du Cuivre représentées sur la figure suivante, révèlent mieux la symétrie cubique et les propriétés de symétrie de ces métaux.

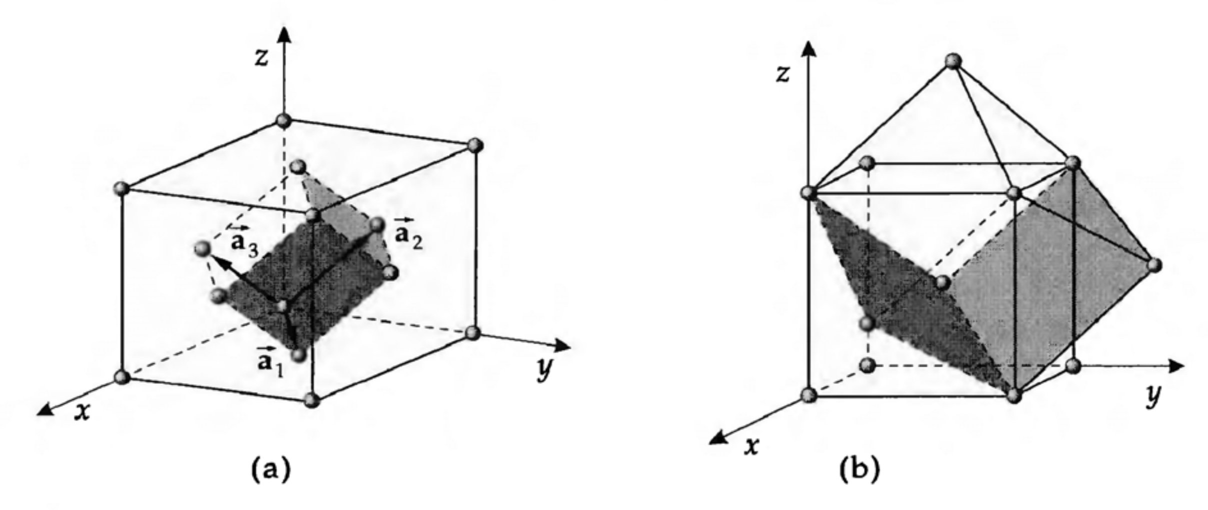


Fig. 29.6 : *Maille élémentaire. (a) : Cuivre (réseau cubique à faces centrées), (b) : Tungstène (réseau cubique centré)*

4. Système cristallin et types de réseaux

Système cristallin : répartition des cristaux en 7 systèmes cristallins, d'après leurs caractéristiques particulières :

- égalité ou inégalité des constantes de réseau,
- angles entre les axes du réseau.

Types de réseaux :

- **Réseau simple** : tous les points du réseau se situent aux sommets de la maille élémentaire.
- **Réseau à faces centrées** : des atomes supplémentaires sont situés sur l'intersection des diagonales des faces de la maille élémentaire.
- **Réseau centré** : en plus des atomes situés aux sommets de la maille élémentaire, un atome se trouve en son centre au point d'intersection des diagonales de la maille.

29.1.3 Réseau de Bravais

1. Modes de réseaux de Bravais

Réseau de Bravais : dans l'espace, il existe 14 manières différentes de construire des réseaux à l'aide de mailles primitives, ce sont les 14 modes de réseaux de Bravais :

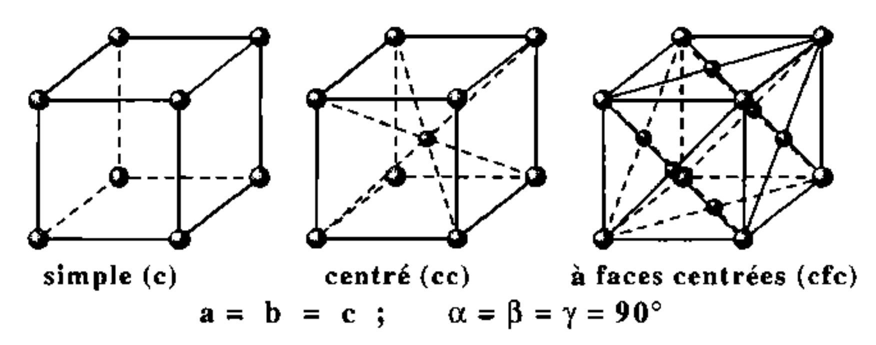
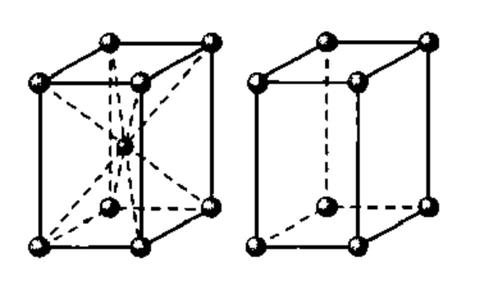


Fig. 29.7 : *Réseaux de Bravais cubiques*



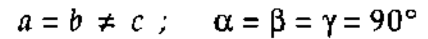


Fig. 29.8 : *Réseaux de Bravais tétragonaux*

$a \neq b \neq c$; $\alpha = \gamma = 90° \neq \beta$

Fig. 29.9 : *Réseaux de Bravais monocliniques*

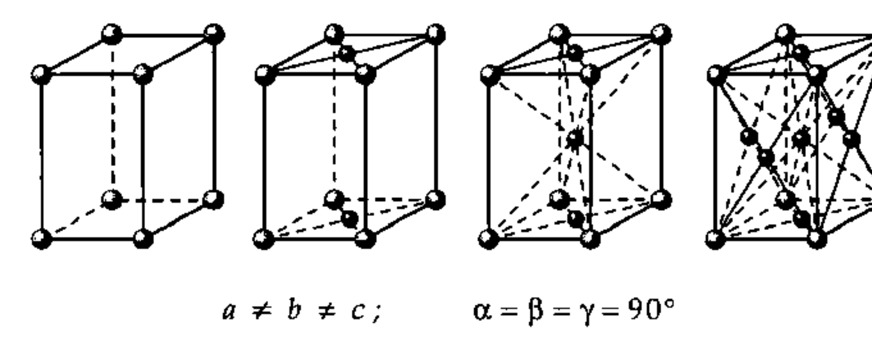


Fig. 29.10 : *Réseaux de Bravais orthorombiques*

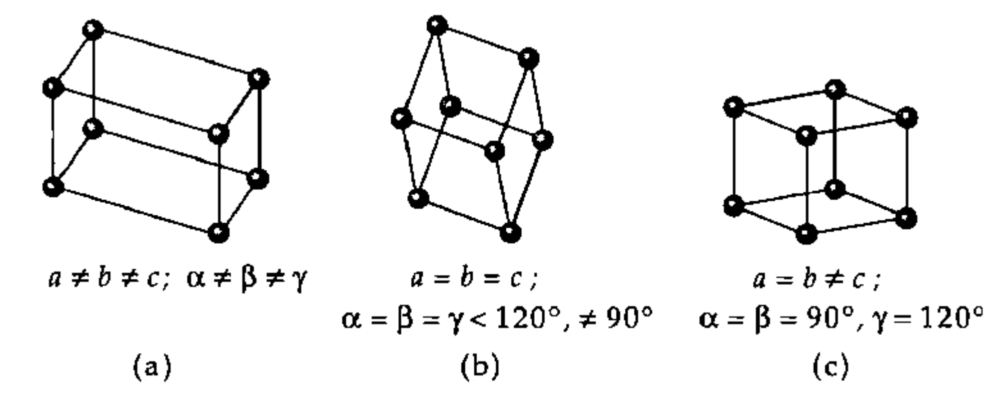


Fig. 29.11 : *Réseaux de Bravais. (a) : triclinique, (b) : rhomboèdrique, (c) : hexagonal*

Les métaux cristallisent uniquement dans l'un des systèmes suivants :

- cubique à faces centrées (cfc),
- cubique centré (cc),
- hexagonal compact (hc).

▷ La structure cristalline des principaux éléments sont reportés sur le **tableau périodique des éléments** à la fin de cet ouvrage.

2. Empilements atomiques du type compact

Empilement compact : arrangement le plus compact possible de sphères toutes identiques sur un plan. Pour obtenir dans l'espace l'assemblage le plus compact possible, il suffit de réaliser la superposition la plus dense de tels plans. On distingue les empilements (AB) à symétrie **cubique à faces centrées** et les empilements (ABC) à symétrie **hexagonale**. La Figure 29.12 représente un plan compact de sphères de centres A.

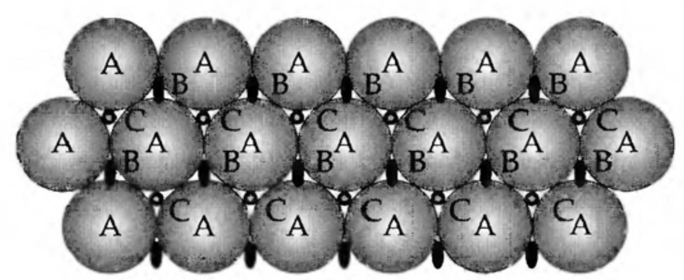


Fig. 29.12 : *Arrangement le plus compact possible de sphères*

Si la deuxième couche se trouve en B (ou les sites équivalents C), il y a deux possibilités pour l'arrangement de la troisième couche :

- Les sphères de la troisième couche peuvent se mettre en A. La séquence est alors $ABABA\ldots$ (structure **hexagonale**).
- Les sphères de la troisième couche peuvent occuper les sites C. La suite est alors $ABCABC\ldots$ (structure **cubique à faces centrées**).

● Dans un empilement compact, chaque sphère est en contact avec six autres sphères.

Densité d'empilement : volume occupé par une maille élémentaire divisé par le volume d'une sphère.

- La densité d'empilement des deux structures est de 74%.
- En comparaison, la densité d'empilement d'une structure cubique centrée est de 68%.

Nombre de coordination : nombre des voisins immédiats (adjacents) d'un atome.

3. Plans réticulaires et indices de Miller

Plan réticulaire : plan quelconque passant par trois nœuds non alignés d'un réseau cristallin. Les plans réticulaires sont définis par leurs intersections avec les axes du cristal.

Indices de Miller : notation abrégée des plans réticulaires à l'aide d'axes prédéfinis du cristal, ils sont déterminés par :

- les intersections du plan avec les axes du cristal définis par les vecteurs de base $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, et exprimés en unité de constantes du réseau (pas du réseau) (Fig. 29.14).
- Les valeurs réciproques de ces nombres sont portées au dénominateur.

- Les numérateurs hkl des fractions, réduites au dénominateur commun, sont les indices de Miller du plan réticulaire.
- La dénomination du plan réticulaire est donnée par les indices de Miller entre **parenthèses** : (hkl).
- Si une intersection se situe à l'infini, l'indice correspondant sera 0.

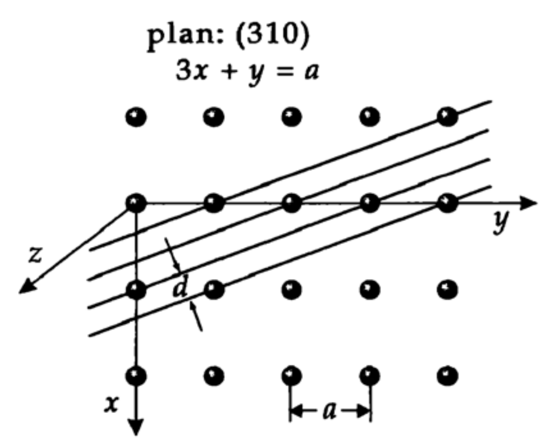


Fig. 29.13 : *Plan réticulaire perpendiculaire à l'axe z, nœuds du réseau dans le plan x, y.*

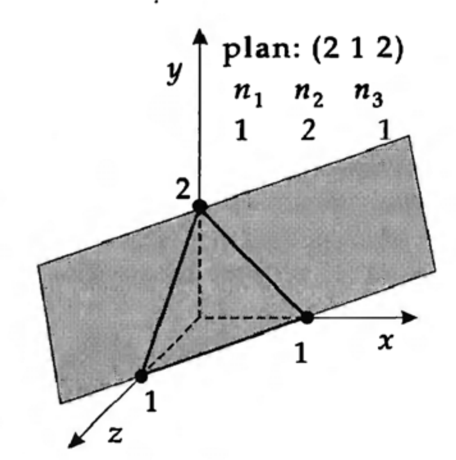


Fig. 29.14 : *Principe de détermination des indices de Miller à partir des intersections* $1, 2, 1$: $hkl = 2, 1, 2$.

■ Pour les plans dont les intersections sont 6, 2, 3, les valeurs réciproques sont $1/6,\ 1/2,\ 1/3\ \rightarrow$ $1/6,\ 3/6,\ 2/6$.
Les indices de Miller sont par conséquent : (132).

■ Si l'intersection du plan réticulaire a lieu pour des valeurs négatives de coordonnées, les indices de Miller correspondants sont surmontés d'un tiret.

■ $(h\bar{k}l)$ signifie que l'axe $\vec{b}$ est coupé dans sa partie négative.

Direction cristallographique : direction d'un vecteur dans le repère des vecteurs de base, dont les composantes sont des nombres entiers (Fig. 29.16).

Ces nombres entiers sont écrits entre **crochets droits** : $[hkl]$.

▷ Dans les cristaux **cubiques**, la **direction** $[hkl]$ est toujours **perpendiculaire** au plan (hkl) de mêmes indices. Dans les autres systèmes cristallins ceci n'est généralement pas le cas.

Coordonnées atomiques $u,\ v\ , w$: déterminent la position des nœuds dans une maille élémentaire. Elles sont exprimées sous forme de fractions des constantes du réseau $a,\ b,\ c$ dans la direction des axes du réseau cristallin.

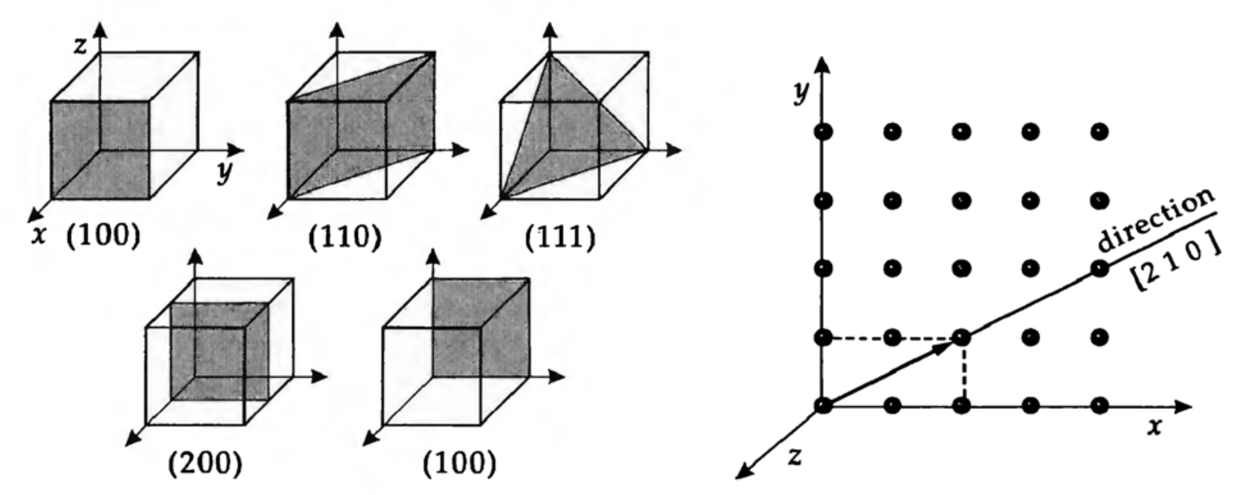
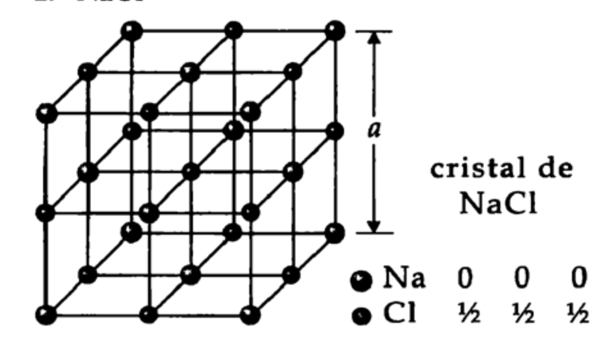


Fig. 29.15 : *Plans réticulaires dans un cristal cubique*

Fig. 29.16 : *Direction cristallographique*

29.1.3.1 Structures cristallines simples

1. NaCl



Cristal	a(nm)	Cristal	a(nm)
LiH	0.408	AgBr	0.577
NaCl	0.563	MgO	0.420
KCl	0.629	MnO	0.443
PbS	0.592	UO	0.492

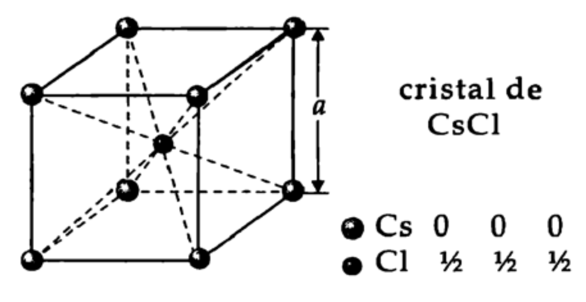
Fig. 29.17 : *Structure de NaCl et cristaux de structures semblables (a : constante de réseau)*

Réseau de Bravais : **cfc,** base : 1 atome de Sodium et 1 atome de Chlore (distance : $\frac{1}{2}$ diagonale principale), nombre d'unités de base/maille élémentaire : 4, nombre de coordination : 6.

Coordonnées atomiques :

Na : $000;\quad \frac{1}{2}\frac{1}{2}0;\quad \frac{1}{2}0\frac{1}{2};\quad 0\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ Cl : $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2};\quad 00\frac{1}{2};\quad 0\frac{1}{2}0;\quad \frac{1}{2}00$

2. CsCl



Cristal	a(nm)	Cristal	a(nm)
CsCl	0.411	AgMg	0.328
TlBr	0.397	LiHg	0.329
TlI	0.420	AlNi	0.288
NH_4Cl	0.387	BeCu	0.270

Fig. 29.18 : *Structure de CsCl et cristaux de structures semblables (a : constante du réseau)*

Réseau de Bravais : cubique **c**, base : 1 atome de Césium et 1 atome de Chlore (distance : $\frac{1}{2}$ diagonale du cube), unités de base/maille élémentaire : 1, nombre de coordination : 8.

Coordonnées atomiques :

Cs : 000 Cl : $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$

29.1.4 Méthodes d'analyse de structure

1. Diffraction de rayons X

Méthode la plus utilisée pour l'analyse de la structure cristalline d'un solide. Elle est basée sur la diffraction de rayons X par les atomes qui constituent le réseau. Longueur d'onde du photon (énergie E_γ) :

$$\lambda_\gamma = \frac{1.24}{E_\gamma/\text{keV}}\ \text{nm}$$

Les rayons X sont diffractés par les électrons des atomes. De ce fait, l'intensité des faisceaux diffractés dépend fortement du numéro atomique Z.

La diffraction de rayons X est peu sensible pour les éléments légers. Les positions des atomes d'Oxygène ou d'Hydrogène sont difficilement répérables par diffraction de rayons X. De plus, les éléments de numéros atomiques voisins, sont difficiles à distinguer.

2. Diffraction d'électrons

Les électrons sont diffractés par les noyaux des atomes, de ce fait la méthode est beaucoup plus sensible au numéro atomique Z. Longueur d'onde des électrons (énergie E_e) :

$$\lambda_e = \frac{1.2}{\sqrt{E_e/\text{eV}}}\ \text{nm}$$

Les électrons sont des particules chargées, environ 2000 fois plus légères que les neutrons ou les protons. Ils interagissent très fortement avec la matière par interaction coulombienne et par conséquent ne pénètrent que peu dans les cristaux. De ce fait, la diffraction d'électrons et surtout utilisée pour les analyses de structure superficielle des cristaux et de structure de couches minces.

3. Diffraction de neutrons

Elle est fondée sur les propriétés ondulatoires des neutrons et leur diffraction par des structures périodiques. La diffraction de neutrons par des cristaux se produit lorsque la longueur d'onde de de Broglie (énergie E_n) associée aux neutrons est du même ordre de grandeur que les distances entre plans réticulaires du cristal. La longueur d'onde associée d'un neutron est :

$$\lambda_n = \frac{0.028}{\sqrt{E_n/\text{eV}}}\ \text{nm}$$

L'intensité de diffraction des neutrons est fonction de la section efficace de diffusion des neutrons par le noyau concerné. Les analyses de structure cristalline peuvent être effectuées avec des neutrons thermiques ($E_n \approx 0.025$ eV).

La diffraction de neutrons permet aussi bien de déterminer les sites des éléments légers dans les cristaux, que de distinguer les éléments de numéros atomiques voisins.

Diffusion magnétique de neutrons : diffusion due à l'interaction des moments magnétiques des atomes avec le moment magnétique du neutron.

4. Condition de Bragg

Condition pour que des rayons incidents, après réflexion sur des plans réticulaires du cristal, puissent donner lieu à des interférences constructives (condition de réflexion sélective). Si cette condition n'est pas

remplie, les rayons interfèrent destructivement.

Condition de Bragg			L
	Symbole	Unité	Dénomination
$n\lambda = 2d \cdot \sin\Theta$	n	1	nombre entier
	λ	m	longueur d'onde
	d	m	distance entre plans réticulaires
	Θ	rad	angle de réflexion sélective

▷ La longueur d'onde des rayonnements utilisés doit correspondre à l'ordre de grandeur des distances entre les plans réticulaires du cristal à étudier.

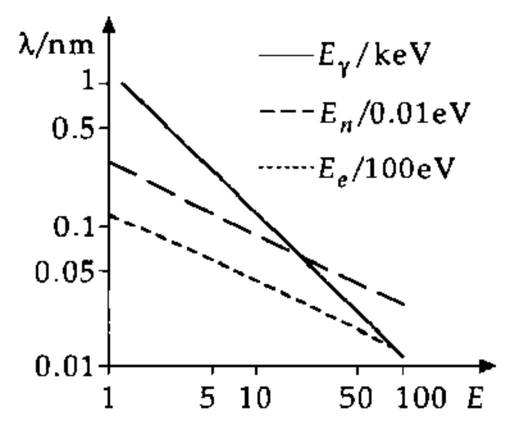


Fig. 29.19 : *Longueurs d'onde de photons, de rayons X, de neutrons et d'électrons en fonction de leur énergie.*

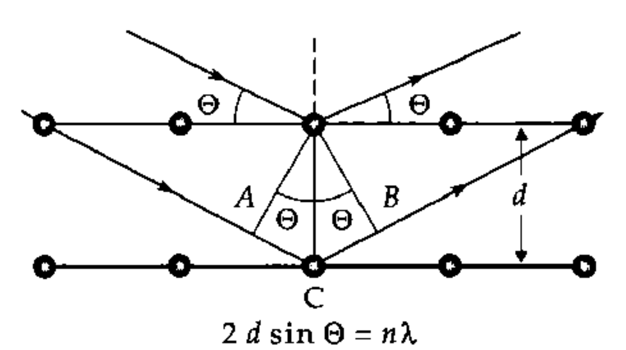


Fig. 29.20 : *Condition de Bragg.*
Θ : angle de réflexion sélective. L'angle d'incidence par rapport à la normale du plan réticulaire est $\pi/2 - \Theta$, A, B : fronts d'onde, ABC : différence de marche $2d \sin\Theta$.

5. Méthodes de diffraction de rayons X et de neutrons

a) Méthode de Laue : un faisceau de rayons X ou de neutrons de **spectre continu, spectre "blanc"** tombe sur un **cristal fixe**. La condition de Bragg n'est remplie que pour certaines longueurs d'onde et pour des angles déterminés. Des interférences constructives produisent sur un écran un motif de points brillants. La répartition de ces points brillants est déterminée par la structure du cristal. Cette méthode permet une détermination rapide de l'orientation du cristal et de ses symétries de structure.

b) Méthode du cristal tournant : un **monocristal**, placé dans un faisceau parallèle, **monoénergétique** de rayons X ou de neutrons, tourne autour d'un axe fixe. Pour certaines positions angulaires, la condition de réflexion sélective de Bragg est remplie. Un motif de points brillants, caractéristique de la structure du cristal, se forme sur un écran par interférences constructives.

c) Méthode de Debye et Scherrer : ou méthode des poudres. Cette méthode s'applique à l'analyse de la structure cristalline de microcristaux sous forme de poudre. L'échantillon de poudre est illuminé par un faisceau parallèle, **monoénergétique**. Les cristallites, orientés aléatoirement dans la poudre, diffractent les rayons incidents. Pour certains des cristallites, l'orientation et la distance des plans réticulaires sont telles que la condition de Bragg est remplie.

La méthode de Debye et Scherrer est principalement utilisée pour mesurer les variations des constantes d'un réseau en fonction de la température, ou la variation de la composition d'alliages. L'avantage de cette méthode réside dans le fait qu'elle n'utilise pas de monocristal mais une poudre de cristallites.

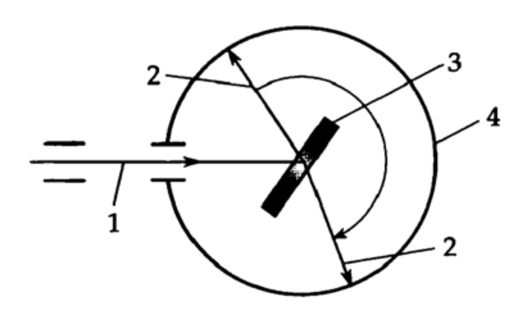


Fig. 29.21 : *Méthode du cristal tournant.*
1 : rayon incident, 2 : rayon diffracté, 3 : cristal tournant, 4 : film

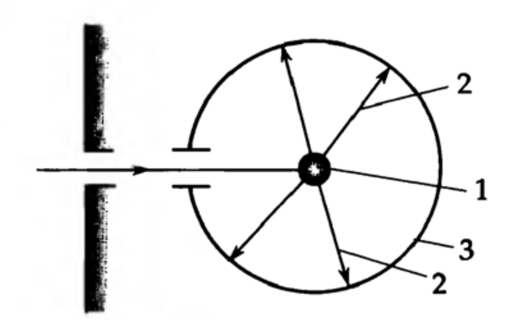


Fig. 29.22 : *Méthode de Debye et Scherrer.*
1 : poudre polycristalline, 2 : rayon diffracté, 3 : film

29.1.5 Liaisons dans les cristaux

1. Types de liaisons dans les cristaux

Liaison	Ionique (hétéropolaire)	Covalente (homopolaire)	Métallique	Van-der-Waals
Propriétés	isolant à basse température, conduction ionique à haute température, déformation plastique	isolant, semiconducteur, point de fusion élevé	conducteur de l'électricité, bon conducteur thermique, plastique, réflectivité dans l'IR et le visible	isolant, point de fusion bas, compressible, transparent à l'UV lointain
Interaction	Cl^- Na^+ Cl^- Na^+ Cl^- Na^+ Cl^- Na^+ Cl^-	C C C C C	Na^+ Na^+ Na^+ Na^+ Na^+	− + − +
Exemples	halogénures alcalins	molécules organiques ; C ; Si ; InSb	métaux, alliages	gaz rares, H_2, O_2, polymères, cristaux moléculaires
Énergie de liaison (eV/atome)	6 – 20	1 – 7	1 – 5	10^{-2}– 10^{-1}

Énergie d'un réseau : différence entre l'énergie des atomes libres et l'énergie du cristal.

- **Un cristal n'est stable que si son énergie de réseau est inférieure à l'énergie totale des atomes ou molécules dont il est constitué.**

2. Liaison ionique

La liaison **ionique, hétéropolaire** ou électrostatique est produite par l'attraction coulombienne entre les ions de charges opposées.

■ Le Chlorure de Sodium, Na^+Cl^-, est un cristal ionique.

Énergie de liaison dans un cristal ionique			ML^2T^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$$E_B = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\alpha}{r}$$	E_B	J	énergie de liaison
	Q	A · s	charge
	ε_0	As/(Vm)	permittivité du vide
	r	m	distance entre ions
	α	1	constante de Madelung

Les forces de liaison ionique sont à longue portée. Il faut tenir compte non seulement des ions adjacents, mais aussi de ceux qui sont plus éloignés.

Constante de Madelung α : détermine la force de la liaison ionique compte tenu des charges des ions plus éloignés.

Constante de Madelung			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\alpha = \sum_j \frac{\pm R}{r_j}$$	R	m	distance des proches voisins
	r_j	m	distance du j-ème ion à l'ion de référence

Si l'ion de référence est chargé négativement, les ions positifs sont affectés du signe + et les ions négatifs du signe −.

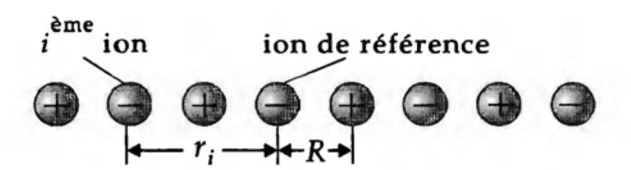


Fig. 29.23 : *Calcul de la constante de Madelung*

Tableau de valeurs typiques de la constante de Madelung α :

Structure	NaCl	CsCl	ZnS (cubique)
α	1.747558	1.747558	1.6381

Interaction répulsive : se manifeste à cause de la répulsion coulombienne entre ions de mêmes signes et du principe d'exclusion de Pauli (voir Page 846), lorsque deux atomes sont très proches et que leurs couches électroniques se recouvrent.

- Aux basses températures, les cristaux sont des isolants.
- Aux hautes températures, la conductivité ionique se manifeste dans les cristaux. Les cristaux ioniques peuvent subir des déformations plastiques.

3. Liaison métallique

Un métal est constitué d'ions positifs baignant dans un ensemble d'électrons, dont la mobilité assure la conductivité électrique et thermique et qui maintient la cohésion. Les électrons de valence ne sont pas localisés et ne sont pas liés à un atome particulier.

■ Sodium, Aluminium, Fer sont des exemples de cristaux à liaison métallique.

Métaux de transition : métaux dont une sous-couche interne **d** (3d, 4d, 5d) est incomplète. Leur énergie de liaison est particulièrement élevée, à cause de l'interaction entre les sous-couches **d** internes.

■ Cuivre, Argent, Or sont des exemples de cristaux de métaux de transition.

Les liaisons métalliques sont plus faibles que les liaisons ioniques. De ce fait, l'énergie de réseau d'un métal alcalin est nettement plus faible que celle des cristaux ioniques d'halogénures alcalins.
Exemple : NaCl : 8,1 eV/atome ; Na : 1,1 eV/atome.

M Les cristaux à liaison métallique sont de bons conducteurs de l'électricité et de la chaleur. Ils peuvent subir des déformations plastiques. Leur réflectivité est importante dans le visible et l'infrarouge.

4. Liaison covalente

ou **liaison homopolaire** : les forces attractives sont essentiellement des forces d'échange. Ce type de liaison prédomine pour les éléments de la troisième à la cinquième colonne du tableau périodique des éléments. Les couches électroniques de valence incomplètes d'atomes voisins se complètent mutuellement pour former une couche fermée, elles correspondent à un recouvrement maximal des orbitales atomiques. Ce sont des liaisons dirigées qui aboutissent à la formation de paires d'électrons de spins opposés. On distingue les liaisons **sigma** (σ) formées par le recouvrement d'orbitales $s - s$, $sp - sp$ ou $s - sp$ dirigées suivant l'axe qui relie les deux atomes et les liaisons **pi** (π= formées du recouvrement des orbitales $p - p$ dirigées perpendiculairement à l'axe de liaison.

■ Beaucoup de composés du Carbone sont liés par des liaisons covalentes, en particulier le diamant et les molécules organiques.

Échange d'électrons : mise en commun d'électrons des couches externes incomplètes d'atomes voisins.

Interaction d'échange de la liaison covalente : force d'attraction produite par l'échange d'électrons de deux atomes voisins. Les spins des deux électrons sont anti-parallèles (état singulet), de sorte que la fonction d'onde est symétrique par rapport à la position (principe de Pauli). Dans le cas d'une fonction d'onde symétrique, la probabilité de présence est plus grande au milieu de la liaison, que pour une fonction d'onde antisymétrique de deux électrons de spins parallèles (état triplet). La configuration singulet apporte un supplément d'énergie qui participe à la liaison des deux atomes.

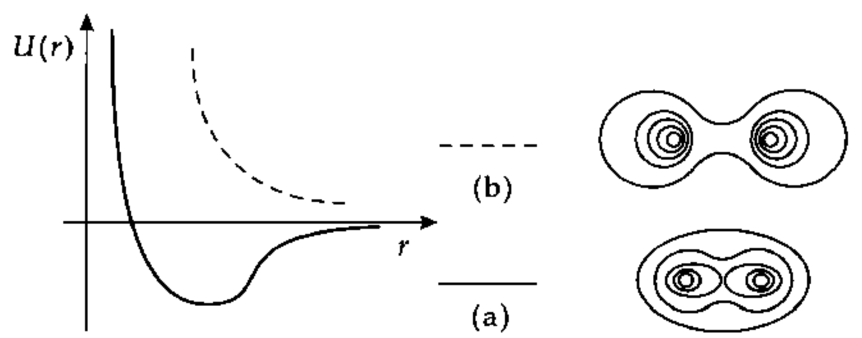


Fig. 29.24 : *Potentiels de liaison en fonction de la distance r de deux atomes pour des paires d'électrons de (a) : spins anti-parallèles (liaison), (b) : spins parallèles (état diffus). À droite figurent les contours de densité électronique : malgré la force d'échange, les électrons restent au voisinage de leur atome.*

● Les liaisons covalentes sont des liaisons entre atomes neutres. La configuration dans laquelle les spins des deux électrons sont parallèles, ne conduit pas à une liaison des atomes.

● Les semiconducteurs covalents sont un exemple important de la liaison covalente.

- En dehors des cristaux à liaison ionique ou covalente, il existe des cristaux à liaisons mixte.

5. Liaison de Van-der-Waals

Interaction dipôle-dipôle faible, qui se manifeste entre atomes ou molécules neutres par l'induction mutuelle de moments dipolaires. L'interaction de ces moments dipolaires induits (interaction dipole-dipole), créé une faible force électrique attractive.

Énergie de liaison de Van-der-Waals			$\mathbf{ML^2T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$U(r) \approx -\frac{C}{r^6}$	$U(r)$	J	potentiel de la liaison
	C	$\mathrm{Jm^6}$	constante d'interaction
	r	m	distance

- L'ordre de grandeur de la constante C est 10^{-77} $\mathrm{Jm^6}$.
- La force de Van-der-Waals est l'interaction attractive la plus importante entre molécules dans certains cristaux de gaz rares.

▷ La description exacte des résultats expérimentaux nécessite l'adjonction d'un faible potentiel répulsif central $\sim r^{-12}$.

Combiné avec le potentiel de Van-der-Waals, ce potentiel répulsif donne le potentiel de **Lennard-Jones**.

Potentiel de Lennard-Jones			$\mathbf{ML^2T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$U(r) = 4\varepsilon\left[\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right]$	$U(r)$	J	énergie de liaison
	r	m	distance
$C = 4\varepsilon\sigma^6$	ε	J	paramètre
	σ	m	paramètre

Les nouveaux paramètres ε et σ, avec $C = 4\varepsilon\sigma^6$, pour des gaz rares, sont donnés dans le tableau suivant.

Gaz rare	He	Ne	Ar	Kr	Xe
$\varepsilon/10^{-23}$ J	14	50	167	225	320
$\sigma/10^{-10}$ m	2.56	2.74	3.40	3.65	3.98
$C = 4\varepsilon\sigma^6/10^{-77}\mathrm{Jm^6}$	0.016	0.085	1.032	2.128	5.088

29.2 Défauts de réseau

Défauts de réseau : régions d'un cristal où la structure idéale de périodicité spatiale rigoureuse est perturbée par divers accidents (lacunes, dislocations, macles, sites interstitiels, etc.).

- Le type de défaut et sa fréquence dans un cristal, détermine les modifications des propriétés mécaniques, électriques, magnétiques et optiques du solide.

29.2.1 Défauts ponctuels

1. Lacunes

Lacunes ou **vacances** : absence d'un atome de son site normal de la structure idéale.

Lacune double : deux lacunes voisines.

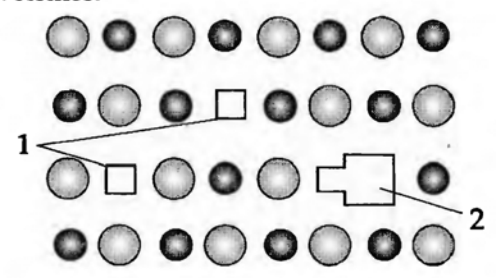


Fig. 29.25 : *Plan réticulaire d'un réseau diatomique avec (1- lacunes, 2- lacune double)*

Énergie de formation d'une lacune : E_V, énergie nécessaire pour extraire un atome de son site normal dans le réseau et l'amener à la surface du cristal.

Densité de lacunes à l'équilibre				$\mathbf{L^{-3}}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$n = N \cdot e^{-\frac{E_V}{k_B T}}$	n	m^{-3}	densité de lacunes	
	N	m^{-3}	densité de particules	
	E_V	J	énergie de formation de lacunes	
	k_B	$J \cdot K^{-1}$	constante de Boltzmann	
	T	K	température	

■ À la température ambiante on a $\frac{n}{N} \approx 10^{-17}$.
À 1000 K la concentration de lacunes augmente à $\frac{n}{N} \approx 10^{-5}$.

● Dans les cristaux ioniques, la formation en nombre égal de lacunes d'anions et de cations est énergétiquement favorisée.

[M] **Mesure de concentrations de lacunes** : La concentration de lacunes peut être déterminée à partir de la différence entre la dilatation thermique linéaire relative $\Delta L/L$ et la variation du pas du réseau $\Delta a/a$, à l'aide de la diffraction de rayons X. Les lacunes influent peu sur la diffraction, mais la longueur du cristal augmente, lorsque des atomes sont extraits des rangées.
Depuis deux décennies, les concentrations de lacunes sont mesurées par la spectroscopie d'annihilation de positrons (PAS). Des positrons thermalisés, émis par exemple par une source de ^{22}Na, sont capturés dans les sites des lacunes (qui se comportent comme une charge négative). Le spectre d'annihilation de ces positrons présente des caractéristiques différentes de celles de positrons libres.

2. Défaut de Frenkel, sites interstitiels et centres colorés

Atomes interstitiels : atomes supplémentaires situés entre les nœuds réguliers du réseau cristallin.

Paire de Frenkel : constituée d'une lacune et d'un atome proche en position interstitielle. Entre l'atome interstitiel et la lacune se manifeste une force attractive.

● Les paires de Frenkel se rencontrent souvent dans les cristaux d'halogénures de métaux alcalins et en particulier dans l'halogénure d'argent.

Impuretés : atomes d'impuretés (atomes de nature différente de ceux de la structure de base d'un cristal), qui occupent :

- des sites réguliers du réseau cristallin. Ils se substituent à des atomes de la structure régulière d'un cristal, atomes **substitutiels** ;
- des positions entre les nœuds réguliers du réseau cristallin. Ils occupent des interstices du réseau, atomes **interstitiels**.

● Les impuretés (atomes étrangers au réseau de base) jouent un rôle important dans la technologie des semiconducteurs ; elles constituent les donneurs ou les accepteurs d'électrons.

Centres colorés : défauts ponctuels dans des cristaux ioniques, qui absorbent la lumière visible. Un **centre F** est formé d'un électron occupant la place d'un anion, un **centre V** est formé par un trou occupant la place d'un cation et un **centre U** par un atome d'Hydrogène en position interstitielle ou substitutielle.

● Les centres colorés se manifestent dans les cristaux ioniques. Ils conditionnent la coloration d'un cristal normalement transparent et incolore.

Centre F : centre coloré le plus simple, un électron lié supplémentaire occupe la place d'un anion du cristal.

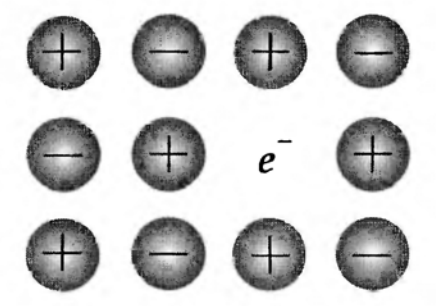


Fig. 29.26 : *Centre F*

29.2.2 Défauts linéaires

Dislocation : déplacement de plans réticulaires essentiellement par translation d'une région du cristal définie par le **vecteur de Burgers**.

Dislocation en coins : un plan réticulaire se termine en forme de coin, le vecteur de Burgers est perpendiculaire à la ligne de dislocation.

Si les forces de liaisons n'ont pas de direction privilégiée, de faibles tensions externes peuvent provoquer des dislocations.

Plan de glissement : plan réticulaire suivant lequel deux parties du cristal peuvent glisser l'une par rapport à l'autre.

● Dans les dislocations en coins, la direction de glissement est perpendiculaire à la ligne de dislocation (symbole $\perp$).

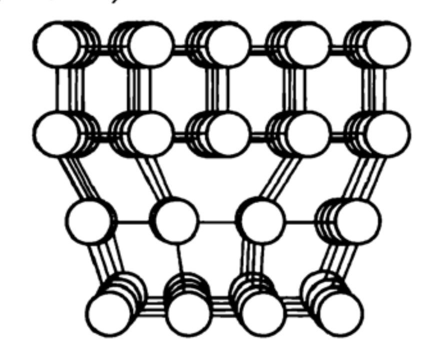


Fig. 29.27 : *Dislocation en coins*

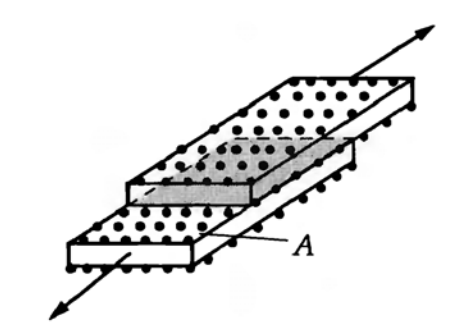


Fig. 29.28 : *Plan de glissement*

■ Des forces de $1\,\mathrm{N/cm^2}$ sont suffisantes pour provoquer une dislocation.

Dislocation en vis : le vecteur de Burgers est parallèle à la ligne de dislocation. On peut décrire la dislocation en vis de la façon suivante : un cristal est entaillé partiellement, puis un cisaillement, parallèle à l'entaille, se produit sur une distance atomique.

● Le réseau cristallin est déplacé d'un plan réticulaire vers le suivant parallèlement à la ligne de dislocation.

Le **vecteur de Burgers** : $\vec{b}$, avec la direction de la **ligne de dislocation** $\vec{s}$ définit les propriétés d'une dislocation. Le vecteur de Burgers $\vec{b}$ est toujours un des vecteurs de base du réseau.

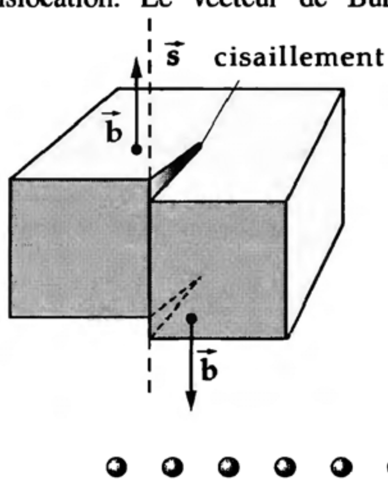


Fig. 29.29 : *Représentation schématique de la formation d'une dislocation en vis.* $\vec{s}$ *: ligne de dislocation,* $\vec{b}$ *: vecteur de Burgers*

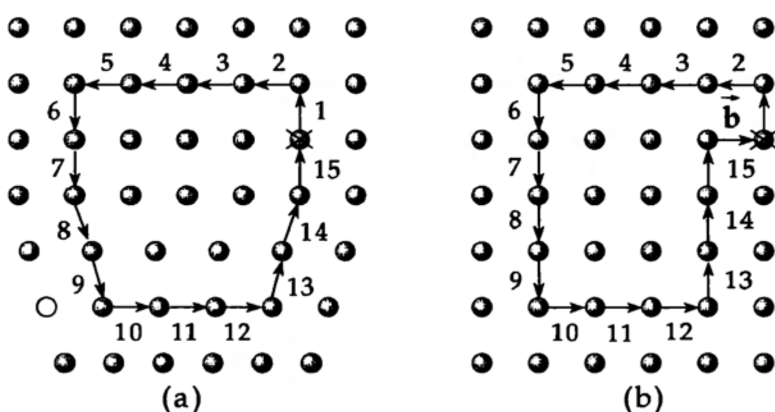


Fig. 29.30 : *Vecteur de Burgers* $\vec{b}$ *d'une dislocation en vis. (a) : parcours dans le cristal déformé, (b) : parcours dans le cristal non perturbé. Les séquences sont numérotées.*

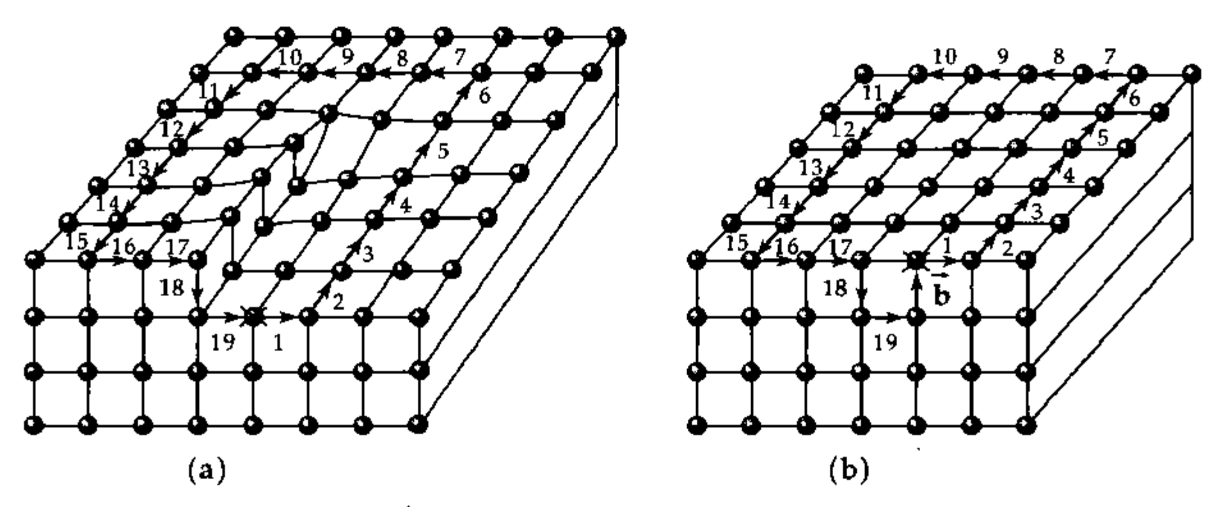


Fig. 29.31 : *Vecteur de Burgers $\vec{b}$ d'une dislocation en vis. (a) : parcours dans le cristal perturbé, (b) : parcours dans le cristal non perturbé, numérotation des étapes successives*

- Un parcours fermé, d'atome en atome, est effectué autour d'une ligne de dislocation dans la région non perturbée du cristal.
- Ce chemin, commençant au même atome, est dupliqué sur le cristal parfait (sans dislocation) correspondant. Ce parcours n'est plus fermé.
- Le vecteur manquant pour fermer le parcours est le vecteur de Burger $\vec{b}$.

● Dans une **dislocation en coin**, le vecteur de Burgers est **perpendiculaire** à la ligne de dislocation.

● Dans une **dislocation en vis**, le vecteur de Burgers et la ligne de dislocation sont **parallèles**.

Densité de dislocations : nombre des dislocations par unité de surface.

■ Dans des cristaux métalliques fortement déformés, la densité de dislocations peut atteindre 10^{11} – $10^{12}\,\text{cm}^{-2}$.

Plasticité : mesure de la déformabilité irréversible d'un solide sous l'influence de forces externes.

● La plasticité d'un cristal est d'autant plus grande qu'il comporte de dislocations.

[M] Les dislocations peuvent ête attaquées chimiquement par des solutions alcalines ou acides appropriées. La vitesse de l'attaque chimique est plus grande dans les régions du cristal perturbées par des dislocations. Les zones ainsi attaquées sont nettement visibles sous microscope optique et peuvent être facilement décomptées.

29.2.3 Défauts bi-dimensionnels dans les réseaux

Joints de grain : limites entre deux zones monocristallines indépendantes d'un cristal (cristallites).

Angles de joints de grains : angle entre joints de grains adjacents. La figure 29.32 représente schématiquement un joint de grains formé de dislocations en coin successives.

Défaut d'empilement : deux plans réticulaires sont déplacés l'un par rapport à l'autre d'un vecteur quelconque qui **n'est pas** un vecteur de base du réseau.

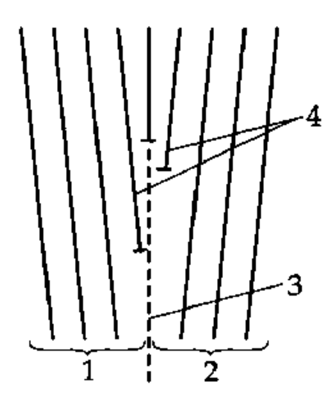


Fig. 29.32 : *Représentation d'un joint de grain à petit angle.*
1 : cristal 1, 2 : cristal 2, 3 : joint de grains, dislocation en coin

29.2.4 Solide amorphe

Solide amorphe : solide dans lequel il n'existe pas d'ordre à longue distance. Un certain ordre à courte distance, dans le voisinage immédiat, peut néanmoins exister.

- Un solide amorphe peut être obtenu lorsqu'on peut éviter la formation de germes cristallins dans la phase liquide en la refroidissant rapidement.
- L'état amorphe est un état métastable, l'agitation thermique y est comparable à celle d'un cristal, c'est à dire qu'après un temps relativement long, le solide peut recristalliser.

M Par traitement thermique, un solide amorphe peut se transformer en solide cristallin.

Verre : substance isotrope possédant les caractéristiques macroscopiques d'un solide, mais pas la régularité de structure d'un cristal. Ils sont thermodynamiquement métastables, mais la transformation en cristal (dévitrification) est extrêmement lente.
Verres métalliques : alliages amorphes qui ont des propriétés de métaux. Découverts en 1960 par P. Duwez, ils ont des propriétés supérieures à certains aciers spéciaux :

- élastiques sous forte contrainte mécanique
- magnétiques
- bons conducteurs de la chaleur
- bons conducteurs de l'électricité

et des propriétés des verres :

- dureté mécanique
- résistant à la corrosion

Pour la production de métaux amorphes, des vitesses de refroidissement d'au moins 10^6 K/s sont requises. Les métaux simples ne peuvent pas être produits à l'état amorphe stable. Les alliages, en plus des métaux, doivent comporter un liant vitreux (du Bore ou du Phosphore). Les verres métalliques ne peuvent être produits que sous forme de bandes d'épaisseur au plus égale à 50 μm . Pour des bandes plus épaisses, la vitesse de refroidissement dans la masse devient trop lente.

M **Méthode de Smelt** : méthode la plus utilisée pour la production de verres métalliques (Fig. 29.33).

Les verres métalliques, grâce à leurs propriétés particulières, trouvent leur application dans :

- les tôles de transformateurs, à cause de leurs faibles pertes par courants de Foucault,
- les têtes d'enregistreurs magnétiques, à cause de leur facile inversion d'aimantation,
- les mémoires magnétiques.

Matériaux nanocristallins : solides qui présentent jusqu'à 50% de défauts de réseau (Fig. 29.34).

Les matériaux nanocristallins sont produits par apport local d'énergie et par conséquent la création d'une forte densité de défauts de réseau.

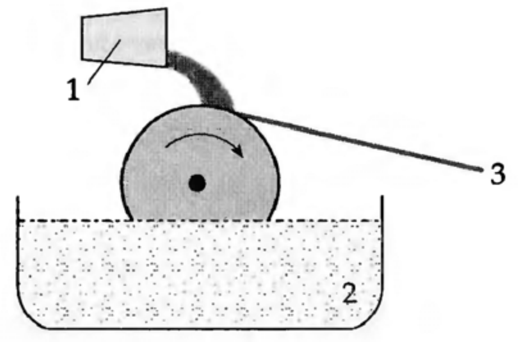


Fig. 29.33 : *Méthode de Smelt (Smelt-Spinning). 1 : creuset, matériau en fusion, 2 : liquide de refroidissement, 3 : bande de verre métallique amorphe*

Fig. 29.34 : *Représentation schématique d'un matériau nanocristallin*

29.3 Propriétés mécaniques de matériaux

Contrainte mécanique : σ, force par unité de surface opposée par un solide à sa déformation.

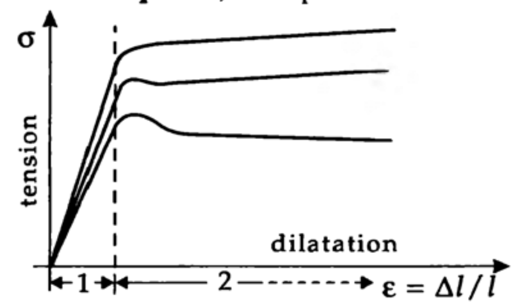


Fig. 29.35 : *Diagramme tension-déformation. 1 : domaine élastique (loi de Hooke), 2 : domaine plastique*

Loi de Hooke : relation linéaire entre les petites déformations et les efforts qui les produisent.

Domaine élastique : domaine d'effort pour lequel la loi linéaire de Hooke s'applique.

Loi de Hooke : tension ∼ dilatation			$ML^{-1}T^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\sigma = E \cdot \varepsilon$	σ	$N \cdot m^{-2}$	tension
$\varepsilon = \Delta l / l$	E	$N \cdot m^{-2}$	module d'élasticité
	ε	1	dilatation
	l	m	longueur
	Δl	m	variation de longueur

Loi de Newton : le comportement visqueux ou plastique d'un matériau est proportionnel à la vitesse de dilatation.

Loi de Newton : tension ∼ vitesse de dilatation			$ML^{-1}T^{-2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\sigma = \eta_0 \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$	σ	$N \cdot m^{-2}$	tension
	η_0	$N \cdot m^{-2} \cdot s$	viscosité dynamique
	$d\varepsilon/dt$	s^{-1}	vitesse de dilatation
	l	m	longueur
	Δl	m	variation de longueur

Fluage : déformation lente d'un solide, non réversible sous l'action de forces généralement considérables. Le fluage est une propriété répandue des polymères et de certains autres matériaux.

29.3.1 Solides macromoléculaires

Solides macromoléculaires : solides constitués de longues chaînes de molécules.

- La cohésion des solides macromoléculaires est assurée par des liaisons covalentes et la force de Van-der-Waals.
- Les solides macromoléculaires peuvent se présenter sous forme amorphe ou cristalline.

29.3.1.1 Polymères

Monomères : molécules organiques qui constituent la base réactive des polymères.

Polymères : macromolécules formées par l'union (condensation, polymérisation) de molécules organiques plus simples (monomères) identiques entre elles. La **polymérisation** procède par ouverture de certaines liaisons chimiques des monomères, qui peuvent alors se lier les uns aux autres. On distingue les polymères **linéaires** ou **chaînes polymères** (polyéthylène, polystyrène) et les poymères **tridimensionnels** (bakélite, résines phénoliques).

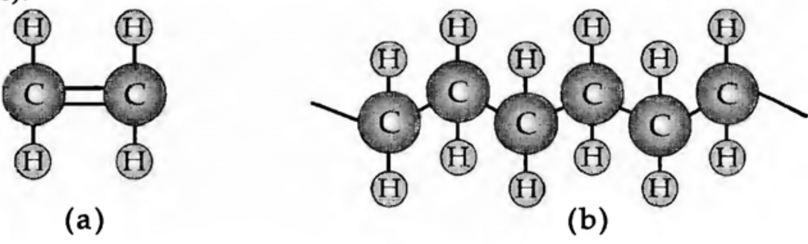


Fig. 29.36 : *Schéma de la polymérisation du polyéthylène. (a) : monomère (éthylène), (b) : polymère (polyéthylène)*

1. Caractéristiques des polymères

Distribution de la masse molaire : variation de la masse molaire en fonction de la longueur des chaînes macromoléculaires.

- La distribution de la masse molaire détermine le comportement du matériau.
- Plus la distribution de masses molaires est large, c'est à dire plus les variations de masses molaires sont grandes, plus le domaine de température de ramollissement est étendu.

Masse moléculaire moyenne : degré de polimérisation, M_r, caractérise un haut polymère, proportionnelle à la longueur d'une chaîne macromoléculaire.

Masse moléculaire moyenne (relative) M_r				**1**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$M_r = \frac{m_M}{u}$	M_r	1	masse moléculaire moyenne (relative)	
	m_M	kg	masse moléculaire	
	u	kg	masse du monomère	

▹ Les masses moléculaires moyennes (relatives), ont des variations de quelques 10^3 à 10^6.

● La masse moléculaire moyenne est aussi une mesure de la viscosité d'un polymère. La viscosité augmente avec la masse moléculaire.

● Il n'existe pas de polymère en phase gazeuse.

L'ordre des polymères peut être :

- **statistique** : structure en pelote ;
- **paracristallin** : les chaînes de macromolécules sont ordonnées entre elles.

● La résistance des polymères à la traction dépend fortement de la température.

● Les polymères solides sont des substances visco-élastiques.

▹ La description théorique de l'ordre dans les polymères peut être faite à l'aide de méthodes de la théorie des champs, développées initialement pour des systèmes magnétiques (Pierre-Gilles de Gennes, prix Nobel 1991).

2. Élasticité et plasticité des polymères

Élasticité : les déformations subies par le polymère sont réversibles (immédiatement, sans relaxation).

Plasticité : les déformations du polymère sont irréversibles et se conservent indéfiniment.

■ Le caoutchouc, en général, est **élastique**, la pâte à modeler est **plastique**.

Viscoélasticité : le solide soumis à une contrainte constante, subit une déformation élastique immédiate suivie d'une déformation plastique lente. À la suppression de la contrainte, la partie élastique de la déformation disparaît immédiatement, alors que la partie plastique est conservée (Fig. 29.37).

● Le comportement viscoélastique est produit par cisaillement des macromolécules entre elles (chaînes macromoléculaires).

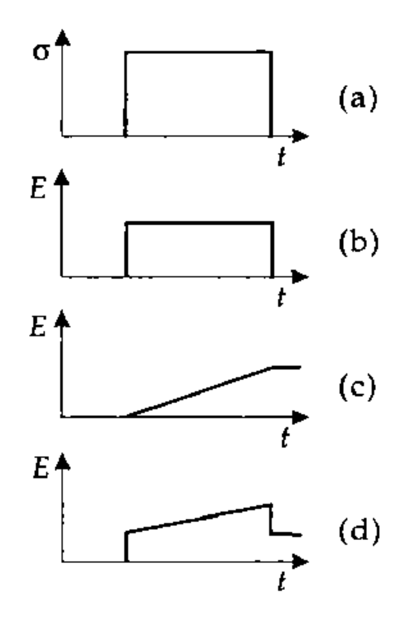


Fig. 29.37 : *Viscoélasticité. (a) : tension appliquée en fonction du temps, (b) : comportement élastique, (c) : comportement plastique, (d) : viscoélasticité*

Vitesse de charge : vitesse $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$ à laquelle varie la tension appliquée au matériau.

Vitesse de déformation : $\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$, vitesse à laquelle un solide réagit à une contrainte, en se déformant.

Modèle de Maxwell de la viscoélasticité :

Modèle de Maxwell				T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{G}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} + \frac{\sigma}{\eta}$$	$\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$	s^{-1}	vitesse de déformation	
	G	$\mathrm{N \cdot m^{-2}}$	module de cisaillement	
	σ	$\mathrm{N \cdot m^{-2}}$	tension	
	η	$\mathrm{N \cdot m^{-2} \cdot s}$	viscosité dynamique	

- Aux petites vitesses de déformation (cisaillement), un polymère se comporte comme un fluide visqueux.
- Aux grandes vitesses de déformation (par exemple par un choc violent), un polymère se comporte comme un solide élastique.

■ Un jeu pour enfant, utilisant une pâte à modeler à base de polymères viscoélastiques, “Silly-Putty” possède ces caractéristiques.

29.3.1.2 Thermoplastes

Thermoplastes : polymères qui fondent facilement et de bonne solubilité. Leur recyclage est possible avec peu d'énergie.

■ Polyéthylène (PE), chlorure de polyvinyle (PVC), polystyrène (PS), polyamide (Nylon, Perlon), polyester (Dacron, Trevira), fibre polyacrylique (Dralon), polycarbonate (Macrolon).

29.3.1.3 Élastomères

Élastomères : polymères naturels ou synthétiques ayant un faible module d'élasticité (module d'Young), subissant des allongements réversibles.

- Les élastomères sont difficilement solubles et ne peuvent être fondus.

● Le comportement élastique des élastomères est dû à un maillage lâche des chaînes macromoléculaires.

Vulcanisation : procédé de maillage des chaînes de macromolécules, permet de donner une forme à un matériau. Le degré de maillage des molécules détermine l'élasticité du matériau.

■ Élastomères : caoutchouc synthétique, Néoprène, Polyuréthane, mastic silicone.

Relaxation : comportement d'un polymère dont la déformation décroît exponentiellement avec le temps, après que la tension mécanique cesse d'être appliquée.

Relaxation : modèle de Voigt-Kelvin			T^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination
$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ après application de la tension	ε	1	dilatation
	E	$N \cdot m^{-2}$	module d'élasticité
$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}e^{-\frac{t}{\tau}}$ après l'arrêt de la tension	σ_0	$N \cdot m^{-2}$	tension
	τ	s	temps de relaxation
	t	s	temps

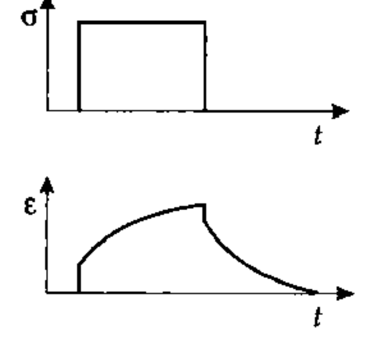


Fig. 29.38 : *Relaxation d'un polymère*

29.3.1.4 Duromères

Duromères (Duroplastes) : polymères à mailles extrêmement serrées, très durs et inélastiques.

● Les duromères ne sont pas solubles et ne peuvent être fondus.

■ Duromères : Bakélite, résines de formaldéhyde et résines époxy.

29.3.2 Matériaux composites

Matériau composite : matériau composé de deux ou plusieurs matériaux différents et qui possède des propriétés physiques supérieures à celles de chacun de ses constituants.

■ Le béton armé, les polyesters renforcés par des fibres de verre sont des matériaux composites.

Matériaux composites stratifiés : matériau réalisé par superposition de couches de matériaux différents, soit sous forme de nappes ou de tissus de fibres (de verre ou de carbone), soit sous forme de couches métalliques.

■ **Bimétal** ou **bilame** : matériau composite constitué de deux matériaux (métaux) de coefficient de dilatation différents, utilisé pour la régulation de température (thermostats mécaniques).

Matériaux composites chargés en poudre : un matériau sous forme de fines particules est dispersé dans une matrice d'un autre matériau.

Durcissement par dispersion : de fines particules d'un matériau dur (carbures, oxydes, siliçures) sont dispersées dans une matrice molle afin d'en augmenter la dureté. Ces particules empêchent le glissement des chaînes macromoléculaires les unes par rapport aux autres.

■ Ces matériaux composites sont utilisés, par exemple, pour la construction d'ailettes de turbines ou de pales de pompes.

● Des particules métalliques ou de carbone dispersées dans un élastomère, peuvent servir à réaliser des composites conducteurs de l'électricité : **élastomères conducteurs.**

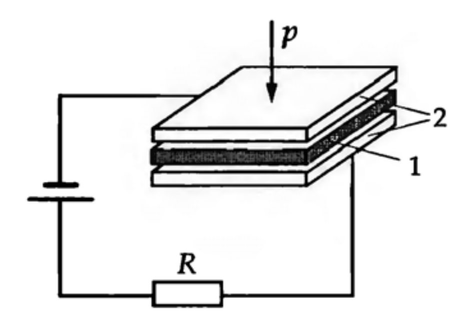


Fig. 29.39 : *Principe d'un capteur de pression.*
1 : élastomère conducteur, 2 : plaques conductrices

Composites à fibres : matériaux constitués d'une matrice plus ou moins molle dans laquelle sont dispersées des fibres (métalliques ou non) plus ou moins longues. Selon la nature et la longueur des fibres on obtient un composite plus ou moins rigide ou élastique.

Whisker ou **cristaux filamenteux :** fibres monocristallines (de diamètre de l'ordre du μm) de module d'élasticité très élevé (très grande rigidité).

■ Les matériaux composites à fibres, grâce à leur grande légèreté et leur résistance mécanique, sont utilisés pour la construction de véhicules légers et d'avions.

29.3.3 Alliages

1. Propriétés principales des alliages

Alliage : corps solide constitué du mélange de plusieurs métaux ou d'un métal et d'autres composants :

- **Mélange eutectique** : solution binaire se solidifiant à température constante (**point d'eutexie**) comme un composé défini, mais constitué d'un mélange hétérogène de petits cristaux de ses composants. Les composants ne se mélangent pas et l'eutectique est constitué de cristaux des divers types.

■ Mélange cuivre-plomb.

- **Solutions solides** ou **cristaux mixtes :** cristaux mixtes, d'apparence homogène, contenant deux espèces chimiques dont les fractions molaires sont quelconques (mélangeables en toutes proportions). Les cristaux mixtes sont constitués d'un type de cristal.

■ L'alliage cuivre-nickel est une solution solide.

Liaisons intermétalliques : dans un composé intermétallique, plusieurs éléments métalliques se combinent dans des rapports stoechiométriques mal définis. Cependant, certains rapports sont caractérisés par un réseau cristallin typique.

■ Exemple de composé intermétallique : Fe_3Al.

2. Modification de forme en fonction de la température

Alliages à mémoire de forme : alliages métalliques subissant une **transition martensitique**, leur variation de forme dépend de la température.

● La mémoire de forme est due à une **transition de phase martensitique** , qui est une transition de phase dans les alliages solides polymorphes, c'est à dire une transition de phase sans diffusion des atomes, réversible, conduisant à la formation d'un magma cristallin. Les déplacements d'atomes sont inférieurs aux distances atomiques. Les cisaillements de réseau cristallin peuvent être orientés par des traitements thermomécaniques appropriés. Une modification de forme visible se produit.

▹ Les alliages à mémoire de forme présentent des coefficients de dilatation de valeurs et de signes différents dans les directions de l'espace. Leur ordre de grandeur est 3 à 4 fois supérieur aux coefficients de dilatation des métaux ordinaires.

● Le volume d'un objet métallique augmente avec la température. La variation de volume en fonction de la température d'un corps à effet de mémoire peut être différente.

Propriétés des alliages à mémoire de forme :

- **Superélasticité** ;
- **Grand pouvoir d'amortissement**.

Effet à sens unique : effet de mémoire de forme, lors duquel l'état initial avant la déformation se rétablit après échauffement et persiste après refroidissement.

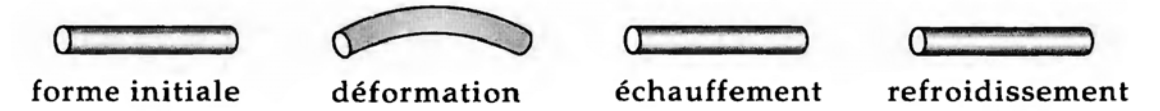


Fig. 29.40 : *Alliage à mémoire de forme. Effet à sens unique*

Effets à deux sens : effets irréversibles produits par des dislocations supplémetaires lors de déformations. En chauffant au-delà de la température de transition de phase, on produit une déformation à haute température et en refroidissant une déformation correspondante à basse température.

▹ De telles transformations peuvent être reproduites plusieurs fois.

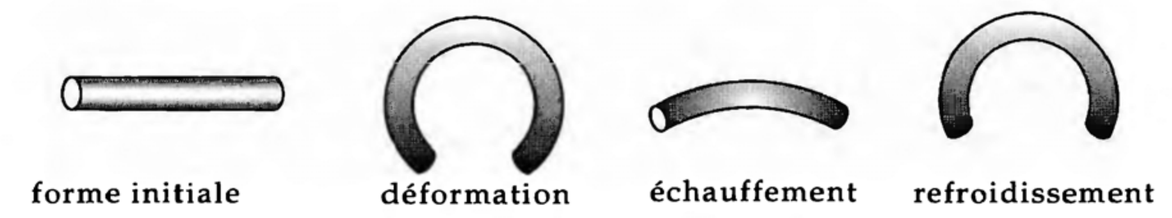


Fig. 29.41 : *Alliage à mémoire de forme. Effet à deux sens*

Effet total : se produit avec certains alliages de NiTi. Le matériau est mis en forme et **trempé** par un traitement thermique à 400 – 500 °C. Il y a changement de forme total lors d'une variation de température.

▹ Ce type de transformation peut être reproduit de nombreuses fois.

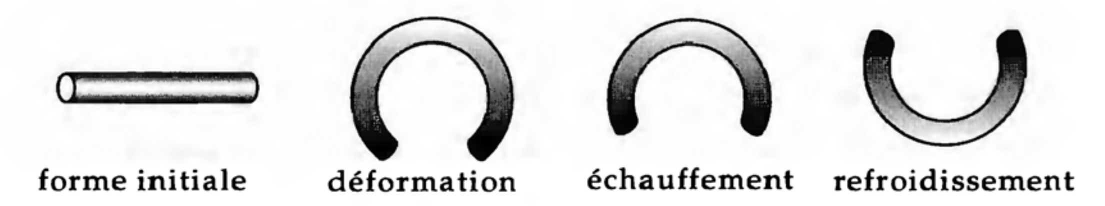


Fig. 29.42 : *Alliage à mémoire de forme. Effet total*

3. Application des alliages à effet de mémoire

- Les antennes de satellites terrestres peuvent être constituées d'un ensemble filiforme compact, qui, une fois dans l'espace, sous l'action du rayonnement thermique du Soleil, change de forme et se déploie pour former une antenne de plusieurs kilomètres de diamètre.
- **Soudure à froid** : technique pour relier entre eux des tuyaux d'une conduite de fluide. Un manchon en alliage à mémoire de forme est réalisé avec un diamètre intérieur légèrement inférieur au diamètre extérieur des tuyaux à relier. À la température convenable, le diamètre du manchon augmente, on peut alors emmancher les extrémités des tuyaux à assembler, lorsque la température redevient normale le diamètre du manchon reprend sa valeur initiale est assure une liaison étanche et mécaniquement résistante.

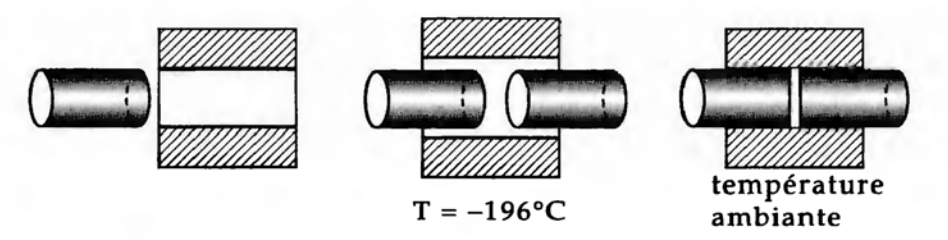


Fig. 29.43 : *Soudure à froid*

- En orthopédie, pour la mise en place de prothèses osseuses ou lors de la réduction de fractures complexes, une broche de forme et de dimensions adéquates est dilatée à basse température et fixée par des vis sur l'os à réparer. À la température du corps humain, la broche reprend sa forme définie et en même temps passe dans un état **super élastique**. De cette manière, lorsque l'os se ressoude, une tension constante reste appliquée.
- Mise en place de prothèses orthopédique dans une forme facile à implanter, puis changement de forme fonctionnelle à la température du corps humain.
- Certaines démonstrations de "psycho-kinésie" de music-hall sont peut-être obtenues à l'aide d'alliages à mémoire de forme.

4. Super élasticité

Propriété de certains alliages d'être étirables élastiquement au-delà du domaine de Hooke. Après un allongement supplémentaire de 10%, lors de la suppression de la tension, la courbe est un peu plus basse, mais il n'y a pas de déformation permanente.

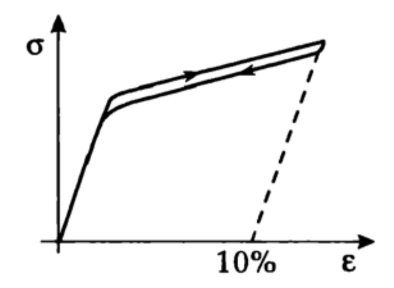


Fig. 29.44 : *Diagramme tension-déformation d'un matériau super élastique*

29.3.4 Cristaux liquides

1. Types de cristaux liquides

Les **cristaux liquides** présentent, dans un domaine donné de température ou de concentration d'un solvant, des propriétés similaires à la fois aux liquides et aux solides cristallins. Les cristaux liquides sont généralement constitués de molécules allongées, le plus souvent de composés aromatiques.

Phases nématiques : les molécules sont disposées parallèlement à leur axe longitudinal, mais leurs centres de masse sont répartis au hasard.

Phases smectiques : les molécules, toutes parallèles entre elles, sont distribuées en couches. Leurs centres de gravité sont ordonnés normalement aux couches, mais désordonnés sur une couche.

- Des champs extérieurs peuvent conduire au cas idéal où toutes les molécules d'une région étendue sont parallèles entre elles.

Phases cholestériques : cas particuliers des nématiques, où les molécules sont orientées parallèlement entre elles dans des plans parallèles entre eux, leur orientation tournant légèrement d'un plan à un autre.

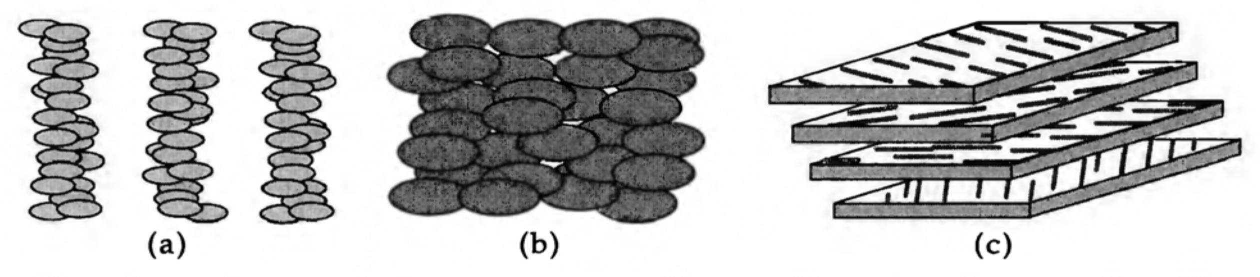


Fig. 29.45 : *(a) : phase smectique, (b) : phase nématique, (c) : phase cholestérique*

2. Propriétés des cristaux liquides

Élasticité d'orientation : propriété de l'orientation de l'axe longitudinale des molécules de cristaux liquides sous l'influence d'une force extérieure. Si une force extérieure a modifié l'orientation des molécules, lorsque l'application de la force cesse, les molécules reprennent leur orientation initiale.

Biréfringence optique : anisotropie optique due à la structure des cristaux liquides, elle est particulièrement marquée dans le cas des cristaux liquides cholestériques.

Réflexion totale sélective : seules certaines longueurs d'onde sont réfléchies. La réflexion sélective est une propriété des cristaux liquides cholestériques qui sont formés de **structures nématiques inclinées**. Dans un plan donné, les molécules, parallèles entre elles, sont inclinées d'un certain angle par rapport à la normale à ce plan ; l'angle d'inclinaison change d'un plan à l'autre en formant, dans un ensemble de plans, une sorte d'hélice. La réflexion totale sélective dépend de la pression et de la température ainsi que des champs électriques et magnétiques.

- La longueur d'onde réfléchie dépend du pas de l'hélice et de la valeur moyenne de l'indice de réfraction du cristal liquide.

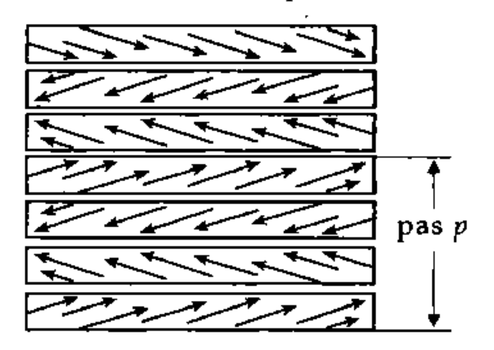


Fig. 29.46 : *Structure nématique inclinée, formant une hélice autour de la direction verticale*

3. Applications des cristaux liquides

- Les cristaux liquides sont utilisés dans les diagnostiques médicaux pour mesurer la répartition superficielle de la température de certaines parties du corps humaine. Éclairés en lumière blanche, la lumière réfléchie par les feuilles de cristaux liquides prend localement une coloration fonction de la température de la surface du corps en contact.
- Les écrans d'affichage de nombreux appareils de mesure, ou d'écrans de visualisation, utilisent des cristaux liquides (**LCD**, **Liquid Crystal Display**) : une couche nématique en hélice de 10 - 20 μm d'épaisseur est placée entre deux plans portant des électrodes transparentes. Près de ces plans les directions des molécules sont tournées de $\pi/2$ sur une face par rapport à l'autre. Si l'épaisseur de la cellule est grande devant la longueur d'onde de la lumière, la direction de polarisation de la lumière subit une rotation de $\pi/2$ lors de la traversée de la cellule. Lorsqu'on éclaire l'ensemble avec de la lumière polarisée rectilignement par un polariseur placé parallèlement à la direction priviligiée, la cellule, examinée par un analyseur tourné de $\pi/2$ par rapport au polariseur, est transparente. Si différents segments des électrodes sont portés à un potentiel de $10 - 20$ V, les molécules de cristaux liquides s'orientent suivant le champ électrique et la direction de polarisation n'est plus modifiée sous ces segments qui apparaissent alors noirs. Sous les électrodes non polarisées, les molécules restent structurées en hélice dans l'épaisseur de la couche de cristaux liquides, le plan de polarisation y subit la rotation de $\pi/2$ et la lumière traverse l'analyseur.

▷ Bien qu'il faille des tensions de l'ordre de $10 - 20$ V, la rotation des molécules ne requiert que peu d'énergie. Les afficheurs à cristaux liquides (LCD) ne consomment que peu de puissance.

29.4 Phonons et vibrations d'un réseau

29.4.1 Ondes élastiques

1. Vibrations d'un réseau

Oscillations de faible amplitude et de fréquence élevée des constituants d'un réseau cristallin autour de leurs positions d'équilibre.

- Pour de petites amplitudes des vibrations, la loi de Hooke s'applique (vibrations harmoniques d'un réseau).

Constante élastique : C_n, constante de la force s'exerçant entre des plans réticulaires dont la distance est $n \cdot a$, a étant le pas du réseau.

Équation du mouvement avec un atome par cellule élémentaire			**MLT^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$M\frac{d^2u_s}{dt^2} = F_s = \sum_n C_n(u_{s+n} - u_s)$$	C_n	kgs^{-2}	constante élastique
	u_s	m	élongation du plan réticulaire s
	u_{s+n}	m	élongation du plan de distance $n \cdot a$
	M	kg	masse atomique
	F_s	kgms^{-2}	force
	t	s	temps

2. Ondes élastiques

Déformations locales qui se propagent grâce à l'élasticité du réseau cristallin, ce sont les solutions u_s de l'équation du mouvement :

Onde élastique			**L**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$u_s(\vec{r}, t) \sim e^{j(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$	u_s	m	élongation
	$\vec{k}$	m^{-1}	vecteur d'onde
	ω	rad/s	pulsation
	$\vec{r}$	m	rayon vecteur
	t	s	temps

3. Dispersion des ondes élastiques

Dispersion : $\omega(\vec{k})$, variation de la pulsation ω de l'onde élastique en fonction du vecteur d'onde $\vec{k}$. Pour un réseau cubique monoatomique, dans lequel seuls les atomes voisins immédiats ($n = 1$) interagissent, dans les directions de propagation parallèles à [100], [110] et [111] (réduction à un problème à une dimension d'une onde linéaire) :

Dispersion : onde élastique			**T^{-1}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\omega = \sqrt{\frac{4C_1}{M}} \cdot \left|\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right|$$	ω	rad/s	pulsation
	k	m^{-1}	nombre d'onde
	a	m	constante du réseau
	C_1	kgs^{-2}	constante élastique
	M	kg	masse de l'atome

4. Phonons

a) **Zones de Brillouin** : polyèdres formés dans l'*espace réciproque* d'un réseau cristallin, en construisant les plans perpendiculaires aux milieux des vecteurs joignant un nœud du réseau réciproque pris pour origine aux autres nœuds de ce réseau. Le plus petit de ces polyèdres est la **première zone de Brillouin**.

Première zone de Brillouin ou **zone réduite** : domaine dans lequel se trouvent les valeurs physiquement significatives du vecteur d'onde $\vec{k}$ (Fig. 29.47). Le domaine $-\pi \ldots + \pi$ de la phase ka englobe **toutes** les valeurs indépendantes de ω. La différence de phase entre deux atomes voisins ne peut pas être plus grande que π, puisqu'il y a toujours une valeur physiquement identique dans l'intervalle $-\pi \ldots + \pi$.

- La valeur du nombre d'onde k peut être restreinte à l'intervalle $-\pi/a \leq k \leq +\pi/a$.

Phonon : quasi-particule associée à une onde élastique sinusoïdale progressive. Quantum d'énergie de l'onde élastique. Analogue au **photon**, quantum d'énergie associé à une onde électromagnétique.

- L'énergie élastique d'un réseau cristallin est quantifiée.

▷ La propagation des phonons est décrite par un vecteur d'onde $\vec{\mathbf{k}}$ et sa relation de dispersion $\omega(\vec{\mathbf{k}})$.

- Les phonons interagissent avec des particules ou des champs, comme s'ils possédaient une "quasi-quantité de mouvement" ou quasi-impulsion $\hbar\vec{\mathbf{k}}$.

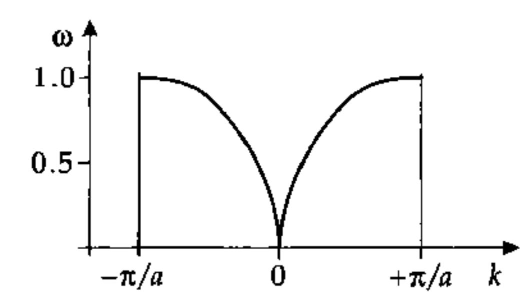


Fig. 29.47 : *Première zone de Brillouin*

Quasi-impulsion d'un phonon, $\hbar\vec{\mathbf{k}}$: grandeur de la dimension d'une quantité de mouvement, mais qui n'existe pas réellement dans le cristal. Néanmoins, elle obéit à des règles de sélection conservant la quantité de mouvement lors de transitions entre deux états quantiques.

5. Méthodes de mesure pour les phonons

Spectre de phonons : distribution de l'énergie des ondes élastiques dans un solide.

M **Diffusion inélastique de neutrons :** principale méthode de mesure des spectres de phonons d'un solide. Électriquement neutres, les neutrons ne sont pas influencés par le champ coulombien des atomes. Ils interagissent directement avec les noyaux des atomes du réseau cristallin.

La **cinématique de la diffusion de neutrons** est déterminée par les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Diffusion de neutrons : conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement			
	Symbole	Unité	Dénomination
$E_f = E_i \pm \hbar \cdot \omega$	ω	rad/s	pulsation des phonons
	$\vec{\mathbf{k}}$	m^{-1}	vecteur d'onde
$\vec{\mathbf{p}}_f = \vec{\mathbf{p}}_i \pm \hbar\vec{\mathbf{k}}$	E_i, E_f	J	énergie incidente et sortante du neutron
	$\vec{\mathbf{p}}_i, \vec{\mathbf{p}}_f$	$kg \cdot m \cdot s^{-1}$	quantité de mvt. incidente et sortante du neutron
	$\hbar$	Js	constante de Planck réduite

Les signes (+) correspondent aux diffusions dans lesquelles un phonon est détruit, les signes (−) à celles où un phonon est créé. Si la vitesse des phonons est v_s, alors on a $\omega = v_s \cdot k$.

M Pour déterminer la relation de dispersion, et par là la constante élastique, on mesure la perte ou le gain d'énergie des phonons diffusés en fonction de la direction de diffusion $\vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i$. Les valeurs typiques des énergies de neutrons sont de l'ordre de quelques MeV.

6. Types de phonons

Phonons longitudinaux : correspondent aux vibrations du milieu dans une direction proche de la direction de propagation de l'onde élastique.

Phonons transversaux : les quanta d'énergie des oscillations du milieu sont approximativement perpendiculaires à la direction de propagation.

▷ Les vibrations ne sont strictement parallèles (ou perpendiculaires) à la direction de propagation que le long de certains axes de symétrie dans les cristaux ou dans les milieux homogènes, isotropes.

Phonons acoustiques : les atomes d'une cellule élémentaire primitive oscillent dans la même direction (analogue à des oscillateurs couplés oscillant en phase). Pour les petits nombres d'onde, il y a une relation approximativement linéaire $\omega \approx ck$ et par conséquent une vitesse du son.

Phonons optiques : si la cellule élémentaire contient un nombre $N > 1$ d'atomes, il y a, en plus des phonons acoustiques, $3N-1$ phonons optiques, pour lesquels les différents atomes vibrent à des fréquences plus élevées que celles des phonons acoustiques.

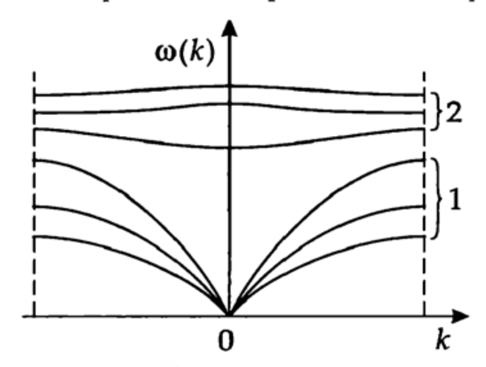


Fig. 29.48 : *Relation de dispersion $\omega(k)$ dans le cas limite d'ondes longues. (1) : phonons acoustiques, (2) : phonons optiques*

■ Dans un réseau à deux éléments (par exemple : NaCl), les atomes oscillent en opposition de phase.

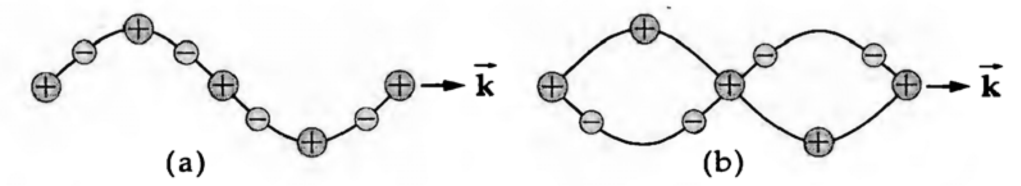


Fig. 29.49 : *États de vibration de phonons transversaux. (a) : phonon acoustique, (b) : phonon optique*

7. Équation du mouvement d'une onde élastique

Équation du mouvement d'une onde élastique dans un cristal à deux éléments par cellule élémentaire et dans l'hypothèse que seuls les atomes les plus proches voisins interagissent (pour des directions de propagation des ondes qui coïncident avec des axes de symétrie dont les plans réticulaires ne contiennent qu'une sorte d'atomes) :

Équations du mouvement avec 2 atomes par cellule élémentaire			MLT^{-2}
	Symbole	Unité	Dénomination
$M_1 \frac{d^2 u_{2i+1}}{dt^2} = C_1(u_{2i+2} + u_{2i} - 2u_{2i+1})$	u_i	m	élongation du i-ème plan réticulaire
$M_2 \frac{d^2 u_{2i}}{dt^2} = C_1(u_{2i+1} + u_{2i-1} - 2u_{2i})$	C_1	$kg \cdot s^{-2}$	constante élastique
	M_1, M_2	kg	masses des atomes

● Le système d'équations différentielles couplées n'admet de solution que si la relation de dispersion suivante est valable :.

$$\omega^2 = C_1 \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) \pm C_1 \sqrt{\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)^2 - \frac{4\sin^2(k \cdot a)}{M_1 \cdot M_2}}$$

- Pour des valeurs faibles de k, donc de très grandes longueurs d'onde ($\lambda \gg a$) on a :

$$\omega^2 \approx 2C_1\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}\right) \quad \textbf{phonon optique}$$

$$\omega^2 \approx \frac{2C_1}{M_1+M_2}k^2a^2 \quad \textbf{phonon acoustique}$$

8. Vitesse des phonons

Vitesse de groupe $v_{gr} = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\vec{k}}$ de l'onde élastique, correspond à la vitesse des phonons.

$$v_{gr} = \sqrt{\frac{C_1 a^2}{M}}\cos\frac{ka}{2}$$

- **Au bord de la zone de Brillouin** ($ka = \pm\pi$), la **vitesse de groupe est toujours nulle**. Ces ondes élastiques sont par conséquent des ondes stationnaires.

- La **constante élastique** C_1 est proportionnelle au **module d'élasticité** E :
$C_1 = a \cdot E\ ,\quad a:$ pas du réseau.

▹ Dans les **cristaux ioniques**, les phonons optiques produisent une forte polarisation électrique, de sorte que ce type de vibrations peut être efficacement induit par des **photons** (champs électromagnétiques).

Intervalle de fréquence, Gap : domaine du spectre, entre les fréquences des phonons acoustiques et des phonons optiques, où aucune vibration ne se produit. Les cristaux ne possèdent pas de fréquences propres dans ce domaine, la propagation des ondes électromagnétiques de ce domaine de fréquences est fortement atténuée dans le cristal : le pouvoir réfléchissant est particulièrement grand dans ce domaine.

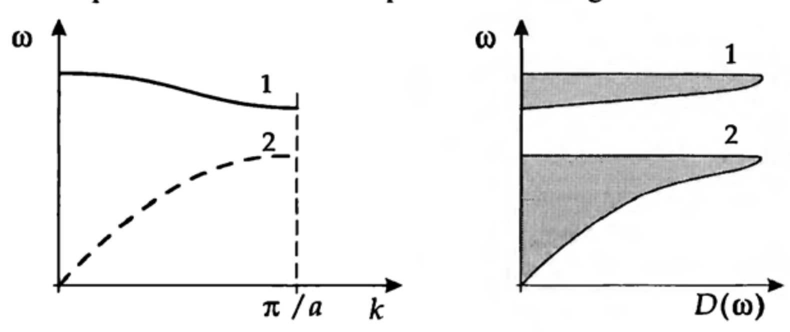


Fig. 29.50 : *Représentation schématique du "gap" dans le spectre $D(\omega)$ des phonons. (1) : fréquence optique, (2) : fréquence acoustique*

M La dispersion des cristaux ioniques est utilisée pour la spectroscopie infrarouge.

29.4.2 Phonons et capacité calorifique spécifique

D'après la mécanique classique, chaque élément d'un cristal possède trois degrés de liberté de translation. Dans une représentation équivalente, ceci signifie qu'à une température finie $T > 0$ d'un solide, des phonons sont excités dans le réseau cristallin. La dépendance en température de cette excitation des degrés de liberté se mesure par la capacité calorifique $C(T)$.

Capacité calorifique : C_V, dérivée partielle de l'énergie interne par rapport à la température à volume constant :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

Capacité calorifique spécifique : c_V, capacité calorifique C_V rapportée à la masse m du corps :

$$c_V = \frac{C_V}{m}$$

Capacité calorifique molaire : C_{mol}, capacité calorifique C_V rapportée à la quantité de matière $n = m/M$, M : masse molaire :

$$C_{\text{mol}} = \frac{C_V}{n}$$

▷ La capacité calorifique C_P à pression constante est la grandeur mesurée ; la capacité calorifique C_V à volume constant est la grandeur déterminée théoriquement à partir de l'énergie interne U.

Règle de Dulong et Petit : le produit de la masse atomique d'un corps simple à l'état solide par sa chaleur spécifique à pression constante est voisin de 6,2 cal aux températures ordinaires. Cette règle ne vaut pas pour certains corps (Be, B, C, Si) et ne s'applique pas à basse température. On peut déduire de cette règle que la capacité calorifique molaire est une constante.

Règle de Dulong et Petit			$\mathbf{ML^2T^{-2}\Theta^{-1}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$C_{\text{mol}} = 3N_A k_B = 24.9 \dfrac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$	C_{mol}	$\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$	capacité calorifique molaire
	N_A	mol^{-1}	Nombre d'Avogadro
	k_B	JK^{-1}	constante de Boltzmann

Basses températures ($T \to 0$) : pour des températures voisines de $T = 0$, la capacité calorifique spécifique varie en T^3 pour les isolants et en T pour les métaux :

$$c_V \sim \begin{cases} T^3 & \text{isolants} \\ T & \text{métaux} \end{cases} \qquad \text{pour} \quad \text{T} \to 0$$

Distribution de Bose-Einstein : distribution de la probabilité $n(\omega, T)$, de trouver un état d'énergie $\hbar\omega$ à l'équilibre thermodynamique à la température T :

$$n(\omega, T) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}$$

Densité d'états : $D(\omega)$, distribution des états de vibrations sur le domaine de fréquences. $D(\omega)\mathrm{d}\omega$ est le nombre des fréquences propres dans l'intervalle de fréquences compris entre ω et $\omega + \mathrm{d}\omega$.

Énergie interne U d'un cristal :

Énergie interne d'un cristal de densité d'états $D(\omega)$			$\mathbf{ML^2T^{-2}}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$U = \displaystyle\int_0^\infty \hbar\omega\, n(\omega, T) D(\omega) \mathrm{d}\omega$	U	J	énergie interne
	ω	rad/s	pulsation
	$D(\omega)$	s	densité d'états
	$n(\omega, T)$	1	fonction de distribution de Bose-Einstein
	T	K	température
	$\hbar$	Js	constante de Planck

29.4.3 Modèle d'Einstein

Tous les N atomes du réseau effectuent des oscillations harmoniques, isotropes, de même pulsation ω_E autour de leurs positions d'équilibre, mais totalement indépendantes les unes des autres (pas de relation de phase définie).

Densité d'états du modèle d'Einstein :

$$D(\omega) = N \cdot \delta(\omega - \omega_E)$$

où $\delta(\omega - \omega_E)$ est la fonction delta :

$$\delta(\omega - \omega_E) = \begin{cases} 0 & pour \quad \omega \neq \omega_E \\ \to \infty & pour \quad \omega = \omega_E \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_E) \mathrm{d}\omega = 1.$$

Énergie interne de N oscillateurs (modèle d'Einstein)			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$U = \frac{f \cdot N\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}} - 1}$$	U	J	énergie interne
	ω	rad/s	pulsation
	N	1	nombre d'oscillateurs
	k_B	JK^{-1}	constante de Boltzmann
	T	K	température
	f	1	nombre de degrés de liberté
	$\hbar$	Js	constante de Planck/2π

Capacité calorifique :

$$C_V = f \cdot Nk_B \left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right)^2 \cdot \frac{e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_BT}} - 1\right)^2}$$

Fig. 29.51 : *Comparaison de la valeur mesurée de la capacité calorifique molaire du diamant à sa valeur calculée d'après le modèle d'Einstein, pour le paramètre* $T_E = \frac{\hbar\omega}{k_B} = 1320$ *K*

Le modèle d'Einstein pour des températures élevées tend vers la règle de Dulong et Petit. Pour les très basses températures, il prédit des valeurs trop faibles pour C_V.

29.4.4 Modèle de Debye

Modèle de Debye : la densité d'états augmente quadratiquement avec ω jusqu'à la fréquence limite ω_D. À cette **fréquence de Debye** ω_D, la densité d'états décroît de façon abrupte vers zéro.

Densité d'états dans le modèle de Debye			**T**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$D(\omega) = \begin{cases} \omega^2/\omega_D^3 & \text{pour} \quad \omega \le \omega_D \\ 0 & \text{pour} \quad \omega > \omega_D \end{cases}$$ $$\omega_D^3 = 6\pi^2 v_s^3 N/V\,, \qquad \omega = v_s \cdot k$$	$D(\omega)$	srad^{-1}	densité d'états
	ω	$\mathrm{rad\ s^{-1}}$	pulsation
	ω_D	$\mathrm{rad\ s^{-1}}$	fréquence de Debye
	v_s	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	vitesse du son
	k	$\mathrm{m^{-1}}$	nombre d'onde
	N	1	nombre des oscillateurs
	V	$\mathrm{m^3}$	volume

La vitesse du son v_s est une constante avec $\omega = v_s \cdot k$. Dans le modèle de Debye, les vitesses de groupe sont remplacées par les valeurs moyennes des vitesses du son.

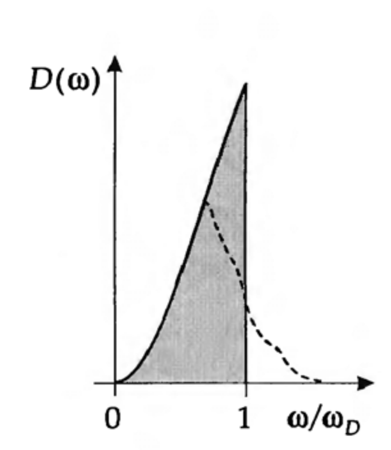


Fig. 29.52 : *Densité des états d'un réseau cubique (modèle de Debye). Zone ombrée : intégration sur la sphère de Debye, ligne tiretée : intégration sur la première zone de Brillouin*

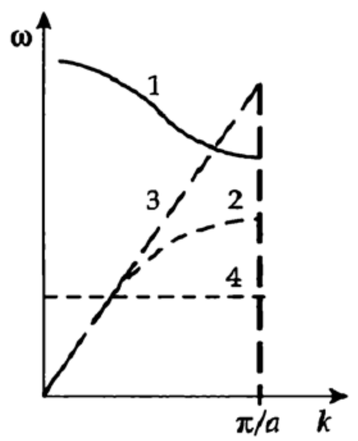


Fig. 29.53 : *Dispersion selon les modèles d'Einstein et de Debye, 1 : phonon optique, 2 : phonon acoustique, 3 : modèle de Debye, 4 : modèle d'Einstein*

Température de Debye : Θ_D, déterminée à partir de la fréquence de Debye ω_D :

Température de Debye			Θ
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\Theta_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B} = \frac{\hbar v_s}{k_B} \cdot \left(\frac{6\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}$$	ω_D	$\mathrm{rad\ s^{-1}}$	fréquence de Debye
	v_s	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	vitesse du son
	N	1	nombre d'oscillateurs
	V	$\mathrm{m^3}$	volume
	k_B	$\mathrm{JK^{-1}}$	constante de Boltzmann
	$\hbar$	Js	constante de Planck

N : nombre total de particules dans le volume V.

Énergie interne pour de très basses températures $T \ll \Theta_D$ dans toutes les directions du réseau :

Énergie interne dans le modèle de Debye			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$U = \frac{3}{5}\pi^4 N k_B T \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3$	U	J	énergie interne
	N	1	nombre d'oscillateurs
	k_B	JK^{-1}	constante de Boltzmann
	T	K	température
	Θ_D	K	température de Debye

Loi de Debye en T^3 aux basses températures $T \ll \Theta_D$:

Loi de Debye en T^3			**$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$C_V \approx \frac{12}{5}\pi^4 N \cdot k_B \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)^3$	C_V	$JK^{-1}kg^{-1}$	capacité calorifique
	N	1	nombre d'oscillateurs
	k_B	JK^{-1}	constante de Boltzmann
	T	K	température
	Θ_D	K	température de Debye

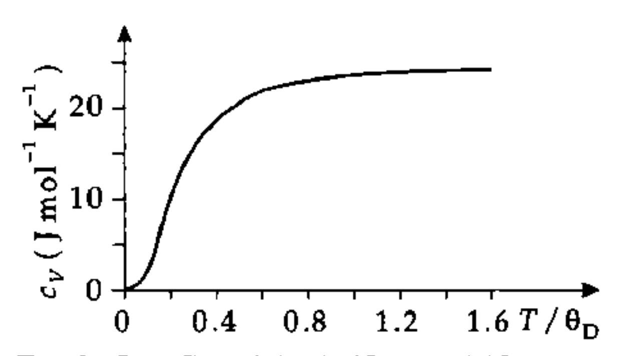


Fig. 29.54 : *Capacité calorifique spécifique c_V d'un solide d'après le modèle de Debye. La loi en T^3 correspond au domaine $T/\Theta_D < 0,1$*

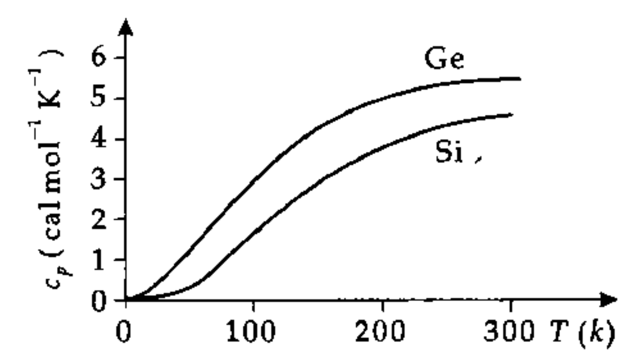


Fig. 29.55 : *Capacité calorifique spécifique c_p du Silicium et du Germanium*

29.4.5 Conductibilité thermique

1. Isolants

Conductibilité thermique dans les isolants : transport d'énergie par l'intermédiaire de phonons dans un solide.

Gaz de phonons : modèle dans lequel les phonons – à la manière d'un gaz – se déplacent librement et indépendamment les uns des autres.

- Dans un solide, les phonons se déplacent à la vitesse du son. Toutefois, le transport de chaleur produit par les phonons s'effectue à une vitesse nettement plus faible, car les phonons subissent des chocs entre eux ou avec des impuretés et, de ce fait, changent constamment de direction.

Libre parcours moyen des phonons : Λ_{ph}, distance que parcourt un phonon entre deux collisions successives dans un milieu.

- La conductibilité thermique dans un isolant peut être modélisée à l'aide d'un gaz de phonons.

Conductibilté thermique λ dans les isolants				**$MLT^{-3}\Theta^{-1}$**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\lambda = \frac{1}{3} v \Lambda_{Ph} C_{Ph} \rho_{Ph}$	λ	W/(mK)	conductibilité thermique	
	v	m/s	vitesse moyenne des phonons	
	Λ_{Ph}	m	libre parcours moyen des phonons	
	C_{Ph}	JK^{-1}	capacité calorifique du gaz de phonons	
	ρ_{Ph}	m^{-3}	densité de phonons	

▷ La vitesse de groupe moyenne et la capacité calorifique spécifique peuvent être évaluées à l'aide du modèle de Debye. Le libre parcours moyen ne peut pas être déduit du modèle de Debye. Dans le cadre de ce modèle, le libre parcours moyen serait infini.

- Aux basses températures, le libre parcours moyen est essentiellement déterminé par la diffusion des phonons par les défauts du réseau.

Densité de flux thermique : j_q, quantité de chaleur transportée par unité de temps et de surface, sous l'influence d'une différence de température.

Densité de flux thermique j_q dans les isolants				**MLT^{-3}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$j_q = \lambda \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$	j_q	Wm^{-2}	densité de flux thermique	
	λ	W/(mK)	conductibilité thermique	
	$\Delta T/\Delta x$	Km^{-1}	gradient de température	

▷ La conductibilité thermique est un processus non stationnaire. Un élément de volume infiniment petit, peut néanmoins être souvent considéré comme étant à l'équilibre thermodynamique.

2. Métaux

Conductibilité thermique dans les métaux : se différencie de celle dans les isolants par le fait que les électrons libres participent aussi au transport de la chaleur.

Conductibilité thermique électronique λ_{el} dans les métaux				**$MLT^{-3}\Theta^{-1}$**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\lambda_{el} = \frac{1}{3} v_{el} \Lambda_{el} C_{el} \rho_{el}$	λ_{el}	W/(mK)	conductivité thermique des électrons	
	v_{el}	m/s	vitesse moyenne des électrons	
	Λ_{el}	m	libre parcours moyen des électrons	
	C_{el}	J/K	capacité calorifique du gaz d'électrons	
	ρ_{el}	m^{-3}	densité du gaz d'électrons	

▷ La capacité calorifique du gaz d'électrons est nettement plus faible que celle du système de phonons. En revanche, la vitesse moyenne des électrons est beaucoup plus grande que la vitesse de groupe moyenne (vitesse du son) des phonons. Le libre parcours moyen des électrons est aussi plus grand que celui des phonons.

- Dans les métaux, la chaleur est principalement transportée par le gaz d'électrons.

Loi de Wiedemann et Franz : la conductivité thermique λ d'un métal est proportionnelle à la conductivité électrique κ.

Loi de Wiedemann-Franz, dans les métaux				$MLT^{-3}\Theta^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$\lambda_{el} = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2 T\kappa$$	λ	W/(mK)	conductivité thermique des électrons	
	k_B	JK^{-1}	constante de Boltzmann	
	e	C	charge élémentaire	
	κ	$\Omega^{-1}m^{-1}$	conductivité	
	T	K	température	

29.5 Électrons dans les solides

Conductivité électrique : κ, d'un métal, rapport de la densité de courant au champ électrique. Elle est inversement proportionnelle à la résistivité ρ (résistance spécifique) :

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \qquad \vec{\mathbf{j}} = \kappa\,\vec{\mathbf{E}}$$

▷ L'unité SI de conductivité est $(\Omega m)^{-1}$.

■ La résistivité ρ des solides varie entre 10^{-8} Ωm et 10^{13} Ωm.

Les substances, selon leur résistivité, sont répartis en :

- **Conducteur** : $\rho < 10^{-5}$ Ωm $\Longleftrightarrow \kappa > 10^5(\Omega m)^{-1}$ (par ex. Cu : $5{,}88 \cdot 10^7$, Ag : $6{,}21 \cdot 10^7$, Au : $4{,}55 \cdot 10^7$)
- **Semiconducteur** : 10^{-5} Ωm $< \rho < 10^7$ Ωm $\Longleftrightarrow 10^{-7}(\Omega m)^{-1} < \kappa < 10^5(\Omega m)^{-1}$
- **Isolant**: $\rho > 10^7$ Ωm $\Longleftrightarrow \kappa < 10^{-7}(\Omega m)^{-1}$

29.5.1 Gaz d'électrons

Gaz de Fermi : état à plusieurs particules libres, qui n'interagissent pas et qui obéissent au principe d'exclusion de Pauli.

1. Fonction propre et valeurs propres d'électrons libres

La **fonction d'onde d'un électron libre,** à l'état stationnaire, est une **onde plane** :

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$ normalisée à la fonction δ.

Puisque les électrons sont confinés dans le solide, leur probabilité de présence doit s'annuler à la surface du solide. Si le solide est modélisé par un cube d'arête L avec des conditions aux limites périodiques, le vecteur d'onde le long des arêtes est un multiple entier de $2\pi/L$:

Composantes du vecteur d'onde				L^{-1}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$k_x = \frac{2\pi}{L}\cdot n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L}\cdot n_y,$$ $$k_z = \frac{2\pi}{L}\cdot n_z$$	k_x, k_y, k_z	m^{-1}	composantes du vecteur d'onde	
	n_x, n_y, n_z	1	nombres entiers	
	L	m	longueur de l'arête du volume de référence	

- L'énergie des électrons libres dans un solide ne peut prendre que des valeurs discrètes :

Énergie des électrons libres dans un solide			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$E = \dfrac{\hbar^2}{2m} \cdot \vec{k}^2 = \dfrac{2\pi^2\hbar^2}{mL^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$	E	J	énergie d'un électron
	m	kg	masse de l'électron
	L	m	arête du cube solide
	n_x, n_y, n_z	1	nombres entiers

- Le principe de Pauli empêche que tous les électrons soient dans l'état de plus basse énergie ($n_x = n_y = n_z = 1$). Chaque état ne peut être occupé que par deux électrons de spins opposés.

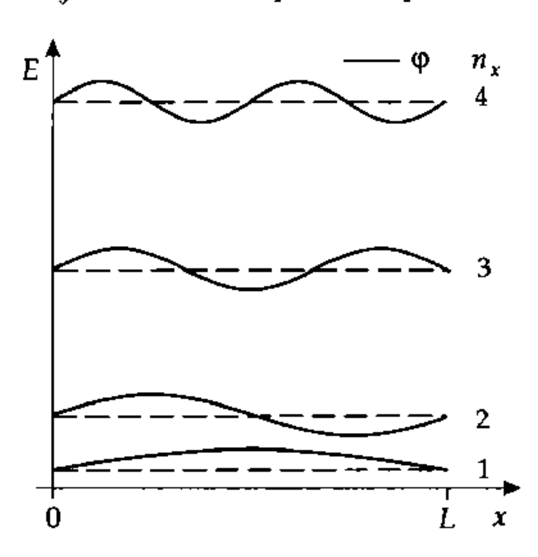


Fig. 29.56 : *Niveaux d'énergie (- - -) et fonctions d'onde (φ) d'un gaz d'électrons dans un solide cubique d'arête L*

2. Caractéristiques du gaz de Fermi

Espace des positions, espace configurationnel : espace engendré par les rayons vecteurs $\vec{r}$. Dans l'espace configurationnel à 3 dimensions, un point est défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z).

Espace des moments, espace des quantités de mouvement : espace engendré par les vecteurs quantité de mouvement $\vec{p}$. Dans l'espace des moments, un point est défini par ses composantes cartésiennes p_x, p_y, p_z.

Espace k, espace des vecteurs d'onde $\vec{k}$: dans l'espace k, un point est défini par les composantes k_x, k_y, k_z.

Une particule de quantité de mouvement $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, dans l'espace k, a les composantes :

$$(k_x, k_y, k_z) = \hbar^{-1}(p_x, p_y, p_z)$$

État fondamental : état de plus basse énergie (le plus stable). Pour un système de N particules, cet état est construit en remplissant successivement les états d'énergie les plus bas possibles, jusqu'à ce que toutes les N particules soient placées.

Niveau de Fermi : niveau d'énergie électronique quantifié dans un solide, dont la probabilité d'occupation pour un électron, calculée par la statistique de Fermi-Dirac est $1/2$. Dans un système composé de fermions dans son état fondamental, c'est le niveau de plus haute énergie occupé. Dans un métal, c'est le niveau le plus élevé de la bande de conduction occupée par les électrons.

Sphère de Fermi : volume de l'espace des moments, occupé dans son état fondamental par les électrons d'un gaz de Fermi (électrons sans interaction).

Quantité de mouvement de Fermi : p_F, rayon de la sphère de Fermi. L'impulsion de Fermi est la quantité de mouvement la plus grande d'une particule de masse m d'un gaz de Fermi, $p_F = \hbar k_F = \sqrt{2mE_F}$.

Vitesse de Fermi : v_F, vitesse des particules (électrons) de masse m à la surface de la sphère de Fermi :

$$v_F = \hbar k_F / m \,.$$

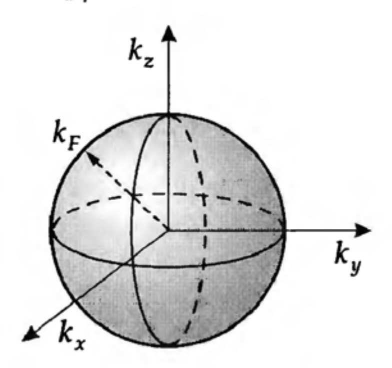


Fig. 29.57 : *Sphère de Fermi*

Énergie de Fermi : E_F, énergie du niveau de Fermi. Dans l'approximation des électrons libres, c'est la surface de la sphère de Fermi.

Relation entre l'énergie de Fermi et la quantité de mouvement			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$$	E_F	J	énergie de Fermi
	p_F	kg·m/s	quantité de mouvement de Fermi
	k_F	m^{-1}	nombre d'onde de Fermi
	m	kg	masse de la particule
	$\hbar$	Js	constante de Planck / (2π)

Le gaz d'électrons ne se trouve dans son état fondamental qu'à la température $T = 0$. Pour des températures finies, à cause de l'énergie d'agitation thermique, les électrons acquièrent une quantité de mouvement supérieure à $\hbar k_F$ et quittent la sphère de Fermi : la surface de la sphère de Fermi se "ramollit".

3. Densité électronique dans le gaz de Fermi

Volume élémentaire dans l'espace des vecteurs d'onde (espace k) :

$$V_k = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$$

- Dans le volume élémentaire, deux électrons de spins opposés peuvent coexister.

Dans un gaz d'électrons à trois dimensions, le volume de la sphère de Fermi est :

$$V_F = \frac{4\pi}{3} k_F^3$$

Nombre des particules dans la sphère de Fermi de rayon k_F :

$$N = 2 \cdot \frac{V_F}{V_k} = \frac{L^3}{3\pi^2} k_F^3 = \frac{V k_F^3}{3\pi^2}$$

Le facteur 2 tient compte des deux orientations de spin par état. $V = L^3$ est le volume de l'espace

configurationnel (espace des positions).

Nombre d'onde de Fermi et énergie d'un système à N électrons			
	Symbole	Unité	Dénomination
$k_F = \left(\frac{3\pi^2 N}{L^3}\right)^{1/3}$	k_F	m^{-1}	nombre d'onde de Fermi
	E_F	J	énergie de Fermi
$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{L^3}\right)^{2/3}$	L	m	largeur du puits de potentiel
	m	kg	masse de l'électron
	N	1	nombre d'électrons

- La densité électronique n détermine la position du niveau de Fermi, c'est à dire la grandeur de la quantité de mouvement de Fermi :

$$n = \frac{N}{L^3} = \frac{N}{V}$$

▷ À nombre N de particules constant, l'impulsion de Fermi augmente si le volume V, dans lequel le gaz de Fermi est confiné, diminiue.

4. Détermination expérimentale de la densité électronique

La **densité électronique** est déterminée expérimentalement à l'aide de l'**effet Hall.** Dans la direction x d'une plaquette conductrice, de largeur b et d'épaisseur d, circule un courant de densité de courant $j_x = n \cdot e \cdot v_x$, où n est la densité électronique, v_x la vitesse de migration des électrons et e la charge élémentaire.

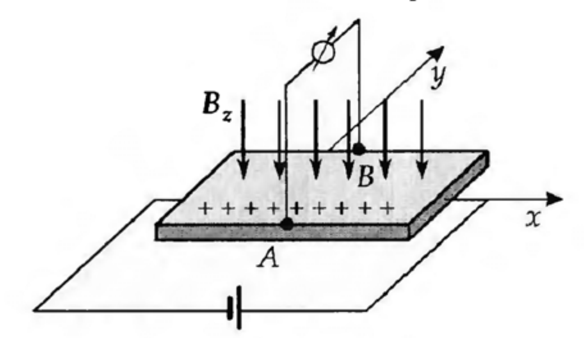


Fig. 29.58 : *Effet Hall*

Dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}_z$ perpendiculaire au plan de la plaquette, les électrons sont soumis à la force de Lorentz :

$$F_L = -ev_x \cdot B_z$$

Sous l'action de cette force, les électrons, dans le conducteur, sont déviés dans la direction perpendiculaire à la fois à la direction initiale $\vec{e}_x$ du courant et au champ magnétique transversal. Entre les points A et B des faces latérales s'établit une différence de potentiel (**tension de Hall**) :

$$U_H = B_z v_x b = \frac{1}{n \cdot e} j_x B_z b = R_H j_x B_z b$$

Coefficient de Hall : $R_H = \dfrac{1}{n \cdot e}$ (voir **Tab. 30.7/1**)

5. Effet Hall quantique

Aux très basses températures (Hélium liquide, $T \approx 4\,\text{K}$) et dans des champs magnétiques très intenses (bobine supraconductrice), la résistance de Hall $R_H = U_H/I_x$ d'une plaquette extrèmement mince est

quantifiée et reliée à la constante de Planck h et à la charge élémentaire e par :

$$R_{\mathrm{H}} = \frac{h}{e^2} = 25812{,}807\ \Omega$$

Lors de variations de champ magnétique ou de courant, on observe les résistances de Hall :

$$R_{\mathrm{Hall}} = \frac{1}{n}\frac{h}{e^2} \qquad n \text{ entier}$$

Cet effet fut observé pour la première fois en 1977 par **Klaus von Klitzing** lors de mesures de l'effet Hall dans des transistors à effet de champ en Silicium (Prix Nobel 1985).

▷ Grâce à la haute précision de la détermination de la résistance R_{Hall}, l'effet Hall quantique peut servir à la définition d'un **étalon de résistance**.

M La constante de structure fine α peut être mesurée avec grande précision par l'effet Hall quantique :

$$\alpha = \frac{1}{2\varepsilon_0 c}\frac{e^2}{h} = \frac{1}{2\varepsilon_0 c}/R_{\mathrm{Hall}}$$

6. Table de quelques paramètres du niveau de Fermi de divers métaux

	Métaux alcalins			Métaux de transition		
	Li	Na	K	Cu	Ag	Au
concentration électronique n en 10^{22} cm^{-3}	4.6	2.5	1.34	8.5	5.76	5.9
Énergie de Fermi E_F en eV	4.7	3.1	2.1	7.0	5.5	5.5
Nombre d'onde de Fermi k_F en 10^{10} m^{-1}	1.1	0.9	0.73	1.35	1.19	1.20
Vitesse de Fermi v_F en 10^6 m/s	1.3	1.1	0.85	1.56	1.38	1.39

7. Densité d'états dans des systèmes de Fermi

Densité d'états $D(E)$: nombre des états d'énergie par unité de volume et par intervalle d'énergie dE.

Densité d'états par unité de volume et d'énergie — $\mathbf{M^{-1}L^{-5}T^2}$

$$D(E) = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E}$$

Symbole	Unité	Dénomination
$D(E)$	m^{-3}J^{-1}	densité d'états
dE	J	intervalle d'énergie
dN	1	nombre d'états dans l'intervalle d'énergie dE
V	m^3	volume

Densité d'états dans l'état fondamental pour $T = 0$ — $\mathbf{M^{-1}L^{-5}T^2}$

$$D_0(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{E}$$

Symbole	Unité	Dénomination
$D_0(E)$	m^{-3}J^{-1}	densité d'états à $T = 0$
m	kg	masse de l'électron
$\hbar$	Js	constante de Planck/(2π)
E	J	énergie du gaz d'électrons

8. Fonction de distribution de Fermi-Dirac

$f(E,T)$: distribution de la probabilité, dans un gaz d'électrons à la température T, d'occuper un état d'énergie E.

$$f(E,T) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1}$$

- À une température $T > 0$, pour obtenir la densité d'états $D(E,T)$, la densité d'états D_0 doit être multipliée par la distribution de Fermi $f(E,T)$ (Fig. 29.59).

Densité d'états pour $T > 0$			**$\mathbf{M^{-1}L^{-5}T^2}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$D(E,T) = f(E,T)D_0(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{E}}{\mathrm{e}^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1}$$	$D(E,T)$	$\mathrm{m^{-3}J^{-1}}$	densité d'états pour $T > 0$
	$D_0(E)$	$\mathrm{m^{-3}J^{-1}}$	densité d'états pour $T = 0$
	$f(E,T)$	1	distribution de Fermi
	m	kg	masse de l'électron
	$\hbar$	Js	constante de Planck/(2π)
	k_B	$\mathrm{JK^{-1}}$	constante de Boltzmann
	T	K	température
	E_F	J	énergie de Fermi
	E	J	énergie de l'électron

▷ En augmentant la température de 0 à T, des électrons sont excités thermiquement de la région sous le niveau de Fermi à une région située au-dessus du niveau de Fermi. Dans un solide, les électrons proches du niveau de Fermi peuvent recevoir de l'énergie des phonons.

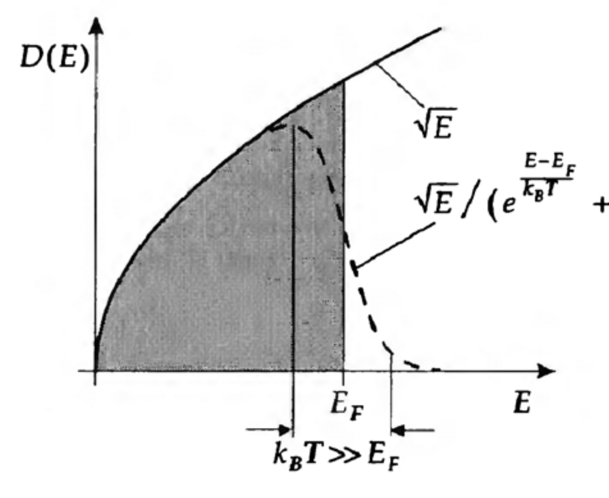


Fig. 29.59 : *Densité d'états D du gaz de Fermi en fonction de l'énergie E. Ligne tiretée : densité des états occupés à une température finie T ($k_B T \ll E_F$), surface ombrée : densité des états occupés à $T = 0$*

9. Température de Fermi et capacité calorifique

La **température de Fermi**, T_F correspond à l'énergie de Fermi E_F :

$$T_F = E_F / k_B$$

▷ La température de Fermi T_F n'est pas la température physique du système, elle est un élément de comparaison avec l'énergie de Fermi.

▷ Seuls les électrons de la surface de la sphère de Fermi peuvent se déplacer et peuvent contribuer à la chaleur spécifique. Ceci correspond à une fraction T/T_F des électrons du système.

Capacité calorifique du gaz d'électrons : C_e, dépend linéairement de la température.

Énergie interne et capacité calorifique du gaz d'électrons			
	Symbole	Unité	Dénomination
$U \approx N(k_BT)\frac{T}{T_F}$	U	J	énergie interne
$C_e \approx 2k_BN\frac{T}{T_F}$	C_e	JK^{-1}	capacité calorifique du gaz d'électrons
	N	1	nombre d'électrons
	T	K	température
	T_F	K	température de Fermi
	k_B	JK^{-1}	constante de Boltzmann

29.5.2 Modèle des bandes

1. Thèorème de Bloch et modèle des électrons quasi-libres

Thèorème de Bloch : les solutions de l'équation de Schrödinger $\psi_k(\vec{r})$ pour un **potentiel périodique** $V(\vec{r}) = V(\vec{r} + \vec{T})$ sont toujours de la forme :

Fonction de Bloch			$L^{-3/2}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$\psi_k(\vec{r}) = u_k(\vec{r})\, e^{j\vec{k}\vec{r}}$	$\psi_k(\vec{r})$	$m^{-3/2}$	fonction d'état
	$u_k(\vec{r})$	$m^{-3/2}$	fonction périodique
$u_k(\vec{r} + \vec{T}) = u_k(\vec{r})$	$\vec{r}$	m	rayon vecteur
	$\vec{k}$	m^{-1}	vecteur d'onde

- $\vec{T}$ est un **vecteur fondamental de translation** du réseau cristallin (voir page 972).

Modèle de Kronig et Penney : modèle pour l'étude de la propagation des électrons dans les cristaux. Aux emplacements des atomes, on admet un potentiel δ.

- Dans le modèle de Kronig et Penney se produisent des **lacunes énergétiques** (gap).

Électrons quasi-libres : modèle pour la description des mécanismes de conduction dans les métaux, fondé sur l'hypothèse que les électrons ne sont que faiblement affectés par le potentiel périodique du réseau, mais peuvent subir la réflexion sélective de Bragg aux nœuds du réseau.

2. Condition de Bragg et ondes stationnaires d'électrons

Condition de Bragg : condition pour la réflexion d'une onde par le réseau cristallin. Des longueurs d'onde données ne peuvent être réfléchies que sous certains angles θ dits de réflexion sélective (angle d'incidence $\pi/2 - \theta$) :

Réflexion sélective de Bragg			L
	Symbole	Unité	Dénomination
	a	m	pas du réseau
$2a\sin\theta = n\lambda$	θ	rad	angle par rapport à la surface du plan réticulaire
	λ	m	longueur d'onde
	n	1	nombre entier

Condition de Bragg à une dimension	Symbole	Unité	Dénomination
$\lambda_n = \dfrac{2a}{n}$	a	m	pas du réseau
avec $k_n = \pm\dfrac{2\pi}{\lambda_n} = \pm\dfrac{n\pi}{a}$	λ_n	m	longueur d'onde
	k_n	m^{-1}	nombre d'onde
	n	1	nombre entier

Les **ondes stationnaires d'électrons** dans un cristal sont produites par les interférences constructives des ondes d'électrons diffusées aux nœuds du réseau.

Si la condition de Bragg est satisfaite, il se forme des ondes stationnaires (à l'ordre $n = 1$) :

$$\psi(+) = e^{jk_1x} + e^{-jk_1x} = 2\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$\psi(-) = e^{jk_1x} - e^{-jk_1x} = 2j\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

Probabilité de présence d'ondes stationnaires d'électrons	Symbole	Unité	Dénomination
$\rho(+) = \lvert\psi(+)\rvert^2 \sim \cos^2\dfrac{\pi x}{a}$	a	m	pas du réseau
$\rho(-) = \lvert\psi(-)\rvert^2 \sim \sin^2\dfrac{\pi x}{a}$	$\rho(+), \rho(-)$	m^{-3}	densités de probabilité
	x	m	position

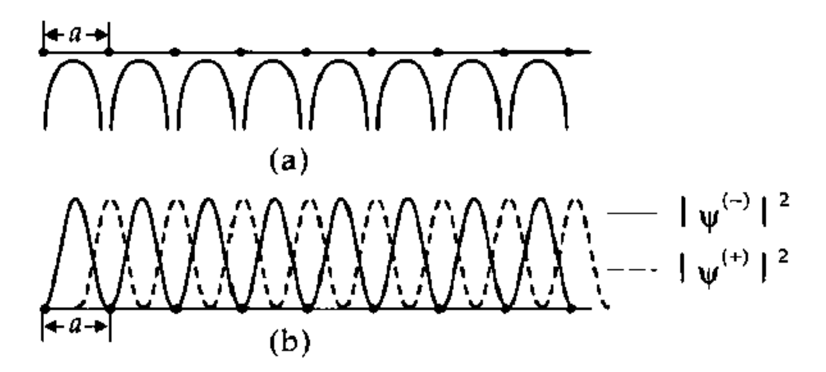


Fig. 29.60 : *(a) : Représentation schématique de l'énergie potentielle, (b) : probabilité de présence d'ondes stationnaires*

Selon la nature des interférences, les électrons se trouvent majoritairement :

- proches des atomes ($x = 0,\ a,\ 2a, \ldots$, maxima de $\rho(+)$)
- loin des atomes ($x = a/2,\ 3a/2, \ldots$, maxima de $\rho(-)$)

Aux deux états correspondent des énergies *différentes*.

▷ La valeur attendue de l'énergie potentielle d'une onde progressive, ne satisfaisant pas à la condition de Bragg, est plus grande que celle de l'état $\psi(+)$, mais plus faible que celle de l'état $\psi(-)$. Dans ce modèle, des valeurs d'énergie comprises entre ces deux niveaux ne peuvent pas être prises par des ondes progressives.

3. Bandes d'énergie permises et bandes d'énergie interdites

Bande d'énergie : pour un cristal constitué de N atomes, un état est dégénéré N fois, mais la dégénérescence est levée par la perturbation due aux interactions et chaque niveau se divise en N niveaux

très voisins formant une bande. Le degré d'occupation des bandes et leurs différences d'énergie distinguent les conducteurs, les isolants et les semiconducteurs.

Bande interdite : E_g, domaine d'énergie compris entre deux bandes d'énergie permises. La largeur de la bande interdite est souvent désignée par le nom anglais "gap" ou encore appelée *énergie d'activation.*

Si le niveau de Fermi se trouve à l'intérieur d'une bande permise, les électrons peuvent, par excitation thermique très faible (petite augmentation de la température), occuper des niveaux d'énergie plus élevés. Si le niveau de Fermi se situe à l'intérieur d'une bande interdite, les électrons doivent franchir la barrière de potentiel (gap) pour occuper des états de plus grande énergie.

- **Bande de valence** : bande d'énergie permise dont tous les états sont occupés à $T = 0$. Une bande de valence est toujours pleine.
- **Bande de conduction** : bande d'énergie permise d'énergie supérieure à celle des bandes de valence. Dans l'état fondamental ($T = 0$), la bande de conduction n'est que partiellement remplie. Les électrons, par un faible apport d'énergie, peuvent se déplacer dans la bande de conduction d'un état à un autre, ils assurent la conduction électrique.

● Les électrons d'une bande de conduction contribuent à la conductivité électrique.

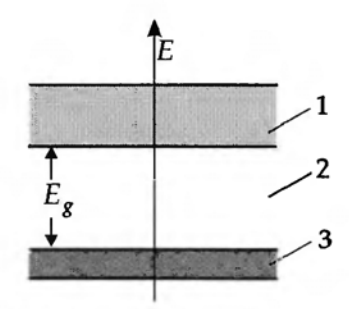


Fig. 29.61 : *Schéma des bandes d'énergie. 1 : bande de conduction, partiellement occupée, 2 : bande interdite de largeur E_g "gap", 3 : bande de valence complètement remplie*

4. Métaux, isolants et semiconducteurs

Métaux : corps pour lesquels le niveau de Fermi se situe approximativement au milieu d'une bande permise. La bande permise n'est que partiellement occupée et constitue par conséquent une bande de conduction. Le nombre d'états occupés est sensiblement égal au nombre d'états vides, de sorte que beaucoup d'électrons peuvent, même à basse température, se déplacer dans la bande de conduction.

Isolants, diélectriques : substances pour lesquelles le niveau de Fermi se trouve dans la bande interdite entre une bande permise pleine et une bande permise vide. L'énergie thermique ne suffit pas pour promouvoir suffisamment d'électrons de la bande de valence pleine vers la bande de conduction vide.

Semi-métaux : métaux mauvais conducteurs, leur niveau de Fermi se situe près de la limite supérieure ou inférieure d'une bande permise. Si le niveau de Fermi se trouve près du bord inférieur de la bande, il n'y a pas suffisamment d'électrons pouvant acquérir de l'énergie dans un champ électrique pour participer à la conduction. Si le niveau de Fermi est proche du bord supérieur de la bande, il y a assez d'électrons, mais le nombre d'états inoccupés est trop faible pour assurer une mobilité suffisante aux électrons.

Semiconducteurs : le niveau de Fermi est dans la bande interdite dont la largeur est faible ($E_g \approx 1\text{eV}$). Des électrons peuvent, par un faible apport d'énergie (par exemple par excitation thermique), passer de la bande de valence sous-jacente pleine vers la bande de conduction vide.

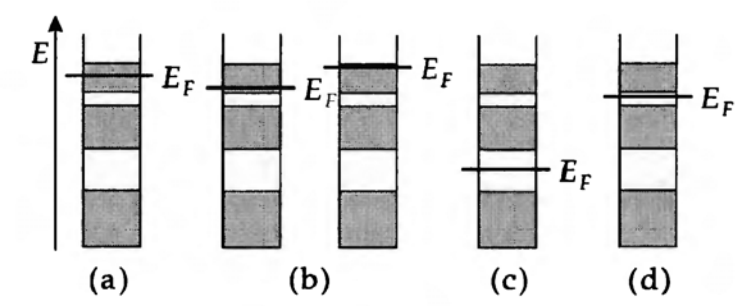


Fig. 29.62 : *Schémas des bandes d'énergie de diverses substances. (a) : métal, (b) : semi-métal, (c) : isolant, (d) : semiconducteur*

5. Énergie de Fermi et propriétés optiques

Les **propriétés optiques des solides** sont fortement influencées par la position du niveau de Fermi. La lumière visible a une énergie de l'ordre de $1,6\ \text{eV} < E < 3,2\ \text{eV}$. Puisque la largeur de la bande interdite dans les diélectriques (isolants) est d'au moins 4 eV, l'énergie de la lumière visible n'est pas suffisante pour promouvoir des électrons dans la bande permise immédiatement supérieure.

● Tous les **diélectriques** parfaits sont transparents au spectre visible. L'opacité de beaucoup de diélectriques minéraux est due à des impuretés qui modifient la structure des bandes.

● Les **métaux** possèdent suffisamment d'électrons libres et d'états inoccupés, pour absorber des quanta de lumière. De ce fait les métaux sont **opaques**. D'autre part, un électron peut perdre de l'énergie en produisant l'émission d'un photon d'énergie équivalente. Les deux processus sont équiprobables, par conséquent les métaux sont aussi de bons réflecteurs.
L'état de surface et de propreté d'un métal sont des conditions prépondérantes pour une **réflexion** ou une **absorption** élevées. En particulier, l'oxydation produit souvent une couche superficielle diélectrique qui diminue le pouvoir réfléchissant.

■ Les miroirs ordinaires réfléchissent la lumière sur une couche métallique (par exemple de l'aluminium ou de l'argent) évaporée à l'arrière d'une surface en verre.

▷ Les semiconducteurs, dont la largeur de la bande interdite est de l'ordre de 1 eV peuvent absorber des quanta de lumière visible. Un électron, à l'aide de l'énergie fournie par un photon, peut passer de la bande de valence dans la bande de conduction (**courant photoélectrique**). Divers appareils utilisent cette propriété (photo-diodes).

6. Nombres d'occupation et équation du mouvement

Nombre d'occupation : nombre des électrons qui peuplent une bande d'énergie donnée. Dans un atome isolé, le nombre d'occupation des états d'énergie, classés par leur nombre quantique principal n et leur nombre quantique orbital l, est donné par $2(2l+1)$.

● Les bandes d'énergie sont désignées par les mêmes nombres quantiques que les états des atomes isolés.

■ L'atome de Lithium possède trois électrons. Deux électrons occupent le niveau de plus basse énergie (état 1s), qui est alors plein. L'électron supplémentaire occupe l'état 2s dont l'énergie est un peu plus élevée. Si des atomes de Lithium forment un cristal, il se forme un état de cœur localisé de caractère 1s et un peu au-dessus une bande d'énergie de caractère 2s. Chaque atome de Lithium du cristal fournit 2 électrons dans l'état de cœur 1s qui est alors complètement occupé. Chaque troisième électron occupe la bande 2s qui n'est alors qu'à moitié occupée. Un cristal de Lithium se comporte par conséquent comme un métal.
Les autres métaux alcalins Na, K, Rb, Cs et Fr se comportent de manière analogue.

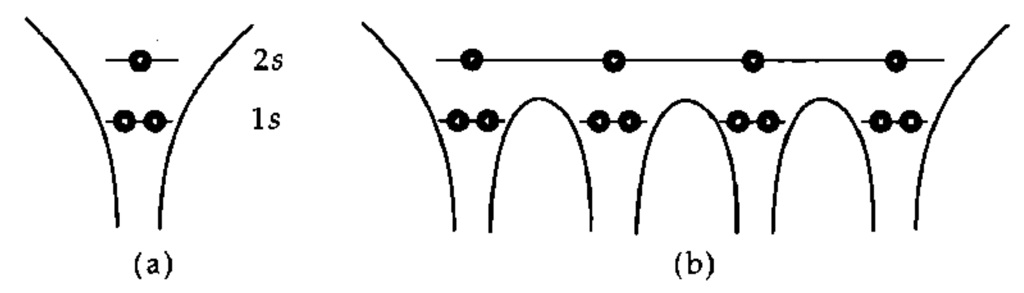


Fig. 29.63 : *(a) : Niveaux d'énergie de l'atome de Li, (b) : bande d'énergie (2s) et états localisés du cœur 1s du cristal de Lithium*

Équation du mouvement d'un électron dans un solide sous l'influence des forces du réseau cristallin :

Équation du mouvement d'un électron			**MLT^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\hbar\frac{d\vec{k}}{dt} = m^* \cdot \frac{d\vec{v}_{gr}}{dt} = \vec{F}$$ $$v_{gr} = \frac{1}{\hbar}\cdot\frac{d\varepsilon}{dk}$$	F	$kg \cdot ms^{-2}$	force
	k	m^{-1}	nombre d'onde de l'électron
	m^*	kg	masse effective de l'électron
	v_{gr}	m/s	vitesse de groupe de l'onde d'électrons
	$\varepsilon(k)$	J	dispersion de l'électron
	$\hbar$	Js	constante de Planck/(2π)

Masse effective, m^* : tient compte de la dépendance de l'énergie de l'électron en fonction de son nombre d'onde (dispersion).

Masse effective d'un électron dans un solide			**M**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$m^* = \frac{\hbar^2}{\frac{d^2\varepsilon}{dk^2}}$$	m^*	kg	masse effective
	$\hbar$	Js	constante de Planck/(2π)
	ε	J	énergie de l'électron
	k	m^{-1}	nombre d'onde

● À des bandes d'énergie étroites correspond une grande masse effective.

■ Na : dans le Sodium, la bande 3s est à moitié pleine. Le mouvement des électrons est approximativement libre :

$$\frac{m^*}{m} \approx 1$$

Fe, Co, Pt : métaux de transitions de la bande 3d. Pour ces corps, la bande 4s se remplit avant de compléter la bande 3d.

Toutes les bandes s sont très étroites, par conséquent la masse effective m^* est grande :

$$\frac{m^*}{m} \approx 10$$

29.6 Semiconducteurs

Semiconducteurs : solide non métallique de conductivité intermédiaire entre celle des métaux ou alliages et celle des isolants. La largeur de leur bande interdite est faible.

Élément semiconducteur : élément de la 4 − *ième* colonne de la classification périodique, qui possèdent quatre électrons de valence.

■ Éléments semiconducteurs : C, Si, Ge, Sn. Pour leurs propriétés, voir **Tab. 30.9/1**.

Composés semiconducteurs : alliages et combinaisons chimiques qui possèdent les propriétés des semiconducteurs, (→ **Tab. 30.9/2**).

On distingue les semiconducteurs :

- **intrinsèques :** corps pur dont l'intervalle d'énergie entre la bande de valence et la bande de conduction est de l'ordre de l'électron-volt.
- **extrinsèques :** corps très pur auquel on a ajouté de très petites quantités (dopage, $\approx 10^{-7}$) d'atomes étrangers.

Conductivité intrinsèque d'un semiconducteur : peut se produire lorsque, par échauffement ou par de la lumière, des électrons de la bande de valence passent dans la bande de conduction.

Lacunes électroniques ou **trous** : électrons manquants de la bande de valence, ils correspondent à des niveaux d'énergie de la bande de valence non occupés par un électron. Les lacunes ou vacances électroniques se comportent comme une particule, au signe de la charge près (**trou positif**).

● Dans les semiconducteurs, les électrons libres et les trous positifs se manifestent toujours par paires (**paire électron-trou**).

1. Densité électronique et conductivité des semiconducteurs

Densité des électrons libres = densité des trous			L^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination
$n = p$	n	m^{-3}	densité des électrons libres
	p	m^{-3}	densité des trous

La conductivité κ est définie par le produit de la mobilité μ et du nombre des porteurs libres n, p.

Conductivité d'un semiconducteur			$I^2T^3M^{-1}L^{-3}$
	Symbole	Unité	Dénomination
	κ	$\Omega^{-1}m^{-1}$	conductivité
	e	C	charge élémentaire
$\kappa = e(\mu_n \cdot n + \mu_p \cdot p)$	μ_n	$m^2/(Vs)$	mobilité des électrons
	μ_p	$m^2/(Vs)$	mobilité des trous
	n	m^{-3}	densité des électrons libres
	p	m^{-3}	densité des trous

Densité électronique dans la bande de conduction				L^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$n = n_L \cdot e^{-\frac{E_L - E_F}{k_B T}}$$	n	m^{-3}	densité des électrons libres	
	E_L	J	bord inférieur de la bande de conduction	
	E_F	J	énergie de Fermi	
	n_L	m^{-3}	densité électronique effective dans la bande de conduction	
	k_B	JK^{-1}	constante de Boltzmann	
	T	K	température	

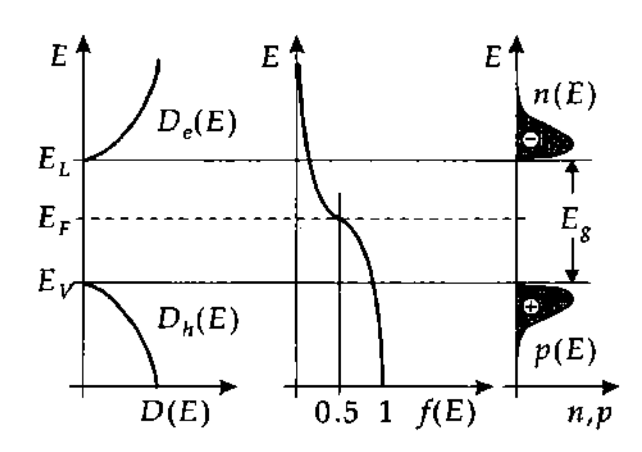


Fig. 29.64 : *Densité d'états D, fonction de distribution f et densité de porteurs n,p d'un semiconducteur. E_V : limite supérieure de la bande de valence, E_L : limite inférieure de la bande de conduction, E_F : énergie de Fermi, E_g : largeur de la bande interdite*

Densité des trous dans la bande de valence				L^{-3}
	Symbole	Unité	Dénomination	
$$p = n_V \cdot e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}}$$	p	m^{-3}	densité des trous	
	E_V	J	limite supérieure de la bande de valence	
	E_F	J	énergie de Fermi	
	n_V	1	densité effective de trous dans la bande de valence	
	k_B	JK^{-1}	constante de Boltzmann	
	T	K	température	

▷ La mobilité μ_n des électrons et celle μ_p des trous, dépendent fortement du matériau semiconducteur.

● La mobilité des électrons dans les semiconducteurs purs (intrinsèques), ne dépend que faiblement de la température,

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}$$

Densité intrinsèque de porteurs n_i : densité des porteurs de charges libres pour des semiconducteurs intrinsèques.

Densité intrinsèque des porteurs de charge n_i				**L^{-3}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$n_i = \sqrt{n_L n_V} \cdot e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$	n_i	m^{-3}	densité intrinsèque des porteurs de charge	
	n_L, n_V	m^{-3}	densités d'états effectives dans les bandes de conduction et de valence	
	E_g	J	largeur de la bande interdite	
	T	K	température	
	k_B	J/K	constante de Boltzmann	

▷ La conductivité intrinsèque σ est rès faible. À la température ambiante :

$k_B T \approx \frac{1}{40}$ eV

Avec une largeur de bande interdite de $E_g \approx 1$ eV, on obtient :

$\sigma \approx 10^{-8}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$

M La résistance du semiconducteur, $R(T)$, peut par conséquent être utilisée pour mesurer des basses températures, selon la relation :

$R(T) \approx R_0 \cdot e^{\frac{-E_g}{2k_B T}}$

où R_0 est une constante qui dépend du matériau utilisé.

2. Propriétés des semiconducteurs principaux Ge, Si

	Ge	Si
Structure cristalline		
Structure	Diamant	Diamant
Constante de réseau a	0.564613 nm	0.543095 nm
Densité atomique n	$4.42 \cdot 10^{22}$ cm^{-3}	$0.5 \cdot 10^{22}$ cm^{-3}
Propriétés électriques		
Largeur de la bande interdite E_g	0.66 eV	1.11 eV
Densité intrinsèque de porteurs n_i	$2.24 \cdot 10^{13}$ cm^{-3}	$1.14 \cdot 10^{10}$ cm^{-3}
Permittivité relative ε	16	11.8
Mobilité μ_n	3900 cm^2 V^{-1} s^{-1}	1350 cm^2 V^{-1} s^{-1}
Mobilité μ_p	1900 cm^2 V^{-1} s^{-1}	480 cm^2 V^{-1} s^{-1}
Densité d'états effective		
Bande de conduction n_L	$1.04 \cdot 10^{19}$ cm^{-3}	$3.22 \cdot 10^{19}$ cm^{-3}
Bande de valence n_V	$6.03 \cdot 10^{18}$ cm^{-3}	$1.83 \cdot 10^{19}$ cm^{-3}

29.6.1 Conduction d'impuretés

Atomes d'impureté ou atomes étrangers : atomes inclus dans le réseau cristallin d'un semiconducteur pur, qui modifient de façon appréciable sa résistivité.

▹ L'addition de 1 ppm (= 10^{-6}) d'atomes d'impureté, peut augmenter la conductivité de plus d'un facteur 100.

1. Donneurs :

Atomes d'impureté donneurs d'électrons, ce sont généralement des atomes de la $5-ième$ colonne du tableau périodique des éléments. Un atome sur un million, par exemple, du cristal semiconducteur pur est remplacé par un atome de valence plus élevée d'une unité. Les électrons excédentaires ne participent pas à l'édifice du réseau cristallin et ne sont que très faiblement liés.

● Dans le modèle des bandes, ces électrons occupent des niveaux très localisés situés à quelques centièmes d'électron-volts sous la bande de conduction.

■ Pour les éléments semiconducteurs du groupe IV (par ex. Ge) les éléments du groupe V (par ex. P) sont des donneurs.

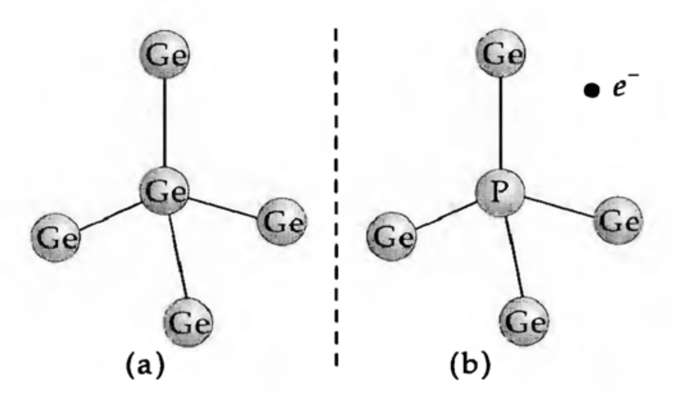


Fig. 29.65 : *Dopage d'un cristal de germanium avec des atomes de phosphore.*
(a) : germanium non dopé,
(b) : germanium dopé avec un atome de phosphore

Dopage d'un cristal de germanium par du phosphore : l'électron du phosphore pentavalent qui n'est pas partagé avec un atome de germanium, forme avec l'ion phosphore un état analogue à un atome hydrogénoïde. L'énergie de liaison d'un tel système n'est que de 0.01 eV pour le germanium et 0.03 eV pour le silicium.

2. Accepteurs :

Atomes d'impureté dont le nombre d'électrons de valence est inférieur à celui des atomes du réseau cristallin. Ces atomes introduisent des niveaux d'énergie non ocupés (vides), localisés légèrement au-dessus du sommet de la bande de valence. Lorsque des électrons de la bande de valence viennent occuper ces niveaux, la bande de valence contient des trous positifs qui peuvent se déplacer de proche en proche et contribuent ainsi à la conduction.

● Dans le modèle des bandes d'énergie, ces niveaux accepteurs d'électrons se situent à quelques centièmes d'électron-volt au-dessus de la bande de valence.

■ Pour les éléments semiconducteurs du groupe IV, les éléments du groupe III sont des accepteurs d'électrons.

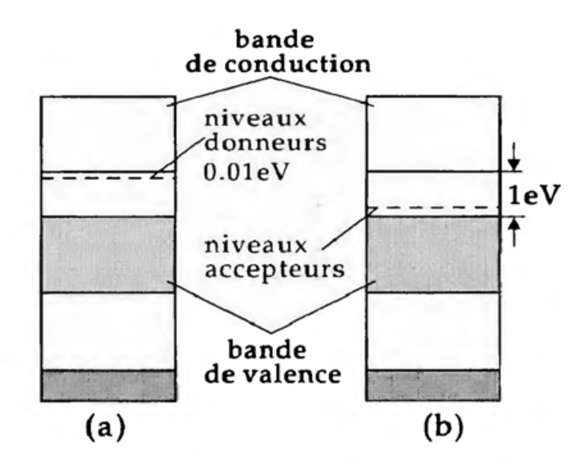


Fig. 29.66 : *Schéma des bandes d'énergie et des niveaux localisés. (a) : niveaux donneurs, (b) : niveaux accepteurs*

3. Dopage des semiconducteurs

Dopage : addition de petites quantités connues d'impuretés à un corps très pur, afin de modifier ses caractéristiques. Dans les semiconducteurs purs (intrinsèques), on ajoute de très faibles quantité d'éléments de valence différente pour former des niveaux donneurs ou accepteur d'électrons, dans le but d'augmenter la conductivité (→ **Tab. 30.9/3 et 30.9/4**).

Porteurs majoritaires : porteurs de charge électrique qui prédominent dans la conduction du semiconducteur considéré.

Dopage n : addition d'éléments donneurs d'électrons, la conduction par électrons prédomine.

Dopage p : addition d'éléments accepteurs d'électrons, la conduction par trous prédomine.

Semiconducteur n : caractérisé par $n > p$, la conduction par électrons est prédominante.

Semiconducteur p : caractérisé par $p > n$, la conduction par trous positifs domine.

4. Jonction p-n

Une jonction p-n est constituée de la juxtaposition, dans un même monocristal de semiconducteur de deux régions de types de dopage différents. La différence des densités de porteurs et d'accepteurs $n_D - n_A$ passe d'une valeur négative dans la région de type **p à une** valeur positive dans la région de type **n**.

▷ Dans une jonction p-n, sans polarisation extérieure, les électrons majoritaires de la zone **n** diffusent vers la zone **p** initialement neutre, mais qui comporte des lacunes (trous). À l'équlibre thermodynamique, la région **n** s'est appauvrie en charges négatives majoritaires et la zone p s'est enrichie en électrons, il en résulte un champ électrique (**champ de jonction**) dirigé de la zone **n** vers la zone **p.**

Zone de charge d'espace : à l'interface (jonction) entre les régions **n et p** du semiconducteur, se forme une charge d'espace positive du côté **n** et une charge d'espace négative dans la zone **p.** Dans son intégralité, le semiconducteur reste neutre.

Les **largeurs** des zones de charge d'espace négative d_n et positive d_p, à cause de la neutralité globale, satisfont la relation :

Largeurs des zones de charge d'espace			**L**
	Symbole	Unité	Dénomination
$d_n \cdot n_D \;=\; d_p \cdot n_A$	d_n	m	largeur de la charge d'espace négative
	d_p	m	largeur de la charge d'espace positive
	n_D, n_A	m^{-3}	densités des porteurs majoritaires

▹ De manière analogue à un condensateur plan parallèle, les charges d'espace créent une différence de potentiel, la tension de diffusion de la jonction p-n.

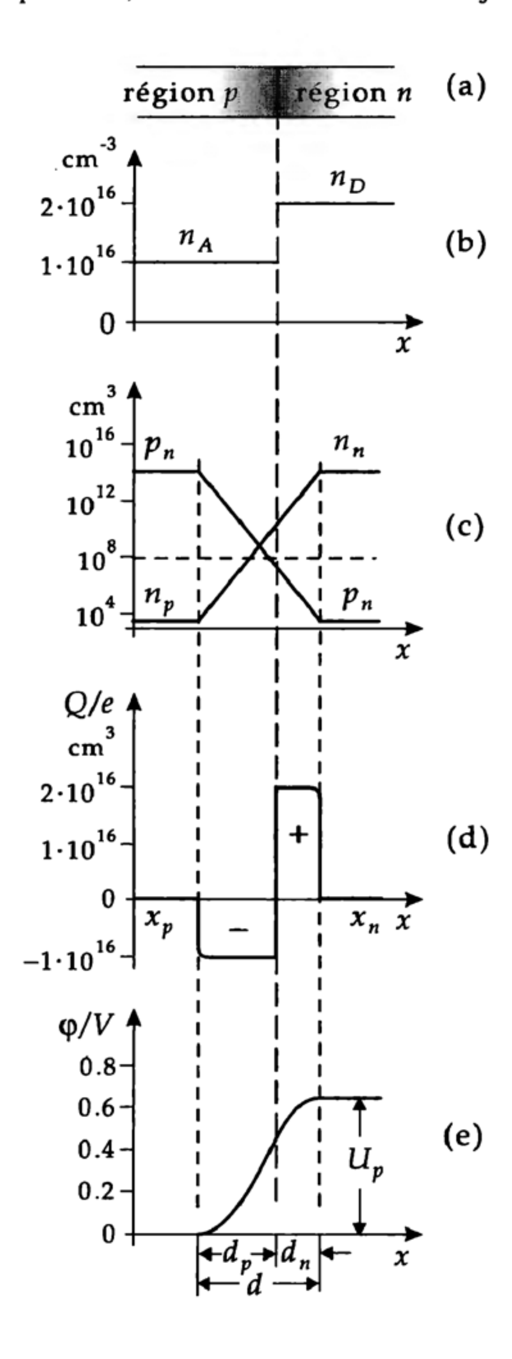


Fig. 29.67 : *Propriétés des semiconducteurs dopés (extrinsèques).*
(a) : zone de jonction p-n,
(b) : concentrations des donneurs n_D et des accepteurs n_A,
(c) : densités des porteurs de charge,
(d) : zones de charge d'espace de largeurs d_n (négative) et d_p (positive),
*(e) : différence de potentiel entre les zones **n** et **p** (champ de jonction)*

Tension de diffusion, U_D : différence de potentiel entre les régions **n** et **p** d'une jonction,

Tension de diffusion d'une jonction p-n			$L^2T^{-3}MI^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$U_D = \frac{k_B T}{e} \ln \frac{n_A n_D}{n_i^2}$	U_D	V	tension de diffusion
	n_A	m^{-3}	concentration des accepteurs
	n_D	m^{-3}	concentration des donneurs
	n_i	m^{-3}	densité de porteurs intrinsèques
	e	C	charge élémentaire
	k_B	JK^{-1}	constante de Boltzmann
	T	K	température

La largeur de la zone de charge d'espace s'en déduit:

Largeur de la zone de charge d'espace			L
	Symbole	Unité	Dénomination
$d = \sqrt{\frac{2\varepsilon_r \varepsilon_0 U_D}{e} \cdot \frac{n_A + n_D}{n_A \cdot n_D}}$	d	m	largeur de la zone de charge d'espace
	ε_r	1	permittivité relative
	ε_0	C/(Vm)	permittivité du vide
	U_D	V	tension de diffusion
	n_A	m^{-3}	concentration des accepteurs
	n_D	m^{-3}	concentration des donneurs

29.6.2 Diode semiconductrice

Diode : composant électronique, constitué d'une jonction p-n, qui ne laisse passer le courant que dans un sens. L'application d'une tension continue, dont le pôle positif est relié à la région **p** du semiconducteur (polarisation directe), abaisse la barrière de potentiel et permet le passage du courant. La polarisation inverse augmente la barrière de potentiel et bloque le passage du courant des porteurs majoritaires.

1. Caractéristiques des diodes semiconductrices

Anode : électrode de la région **p** de la jonction semiconductrice.
Cathode : électrode de la zone **n** de la jonction.

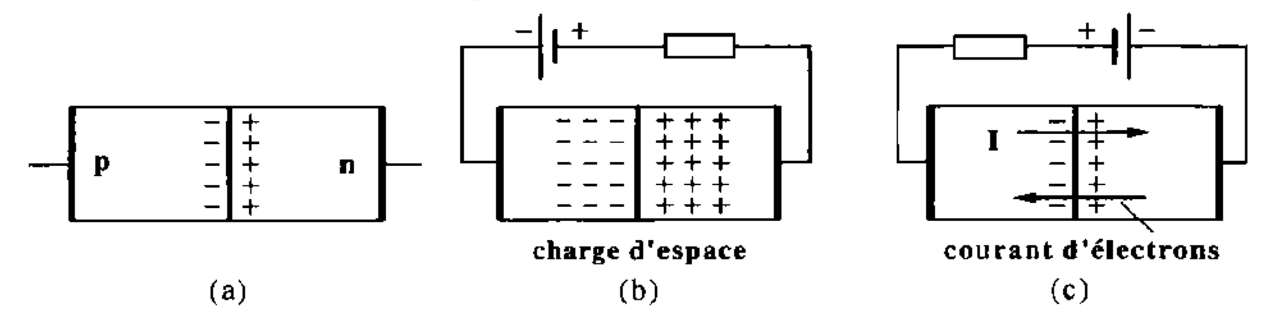


Fig. 29.68 : *Jonction p-n, tension externe (a) : nulle, (b) : négative (inverse), (c) : positive (directe)*

Tension inverse, U_{Sp} : tension négative appliquée entre les zones **p et n d'une** jonction. Elle produit un élargissement de la zone de charge d'espace : les porteurs de charge majoritaires sont repoussés par le champ électrique et le courant électrique est interrompu. La zone de charge d'espace (**couche d'arrêt**) est désertée de porteurs majoritaires libres (**zone déplétée**), elle se comporte comme un isolant.

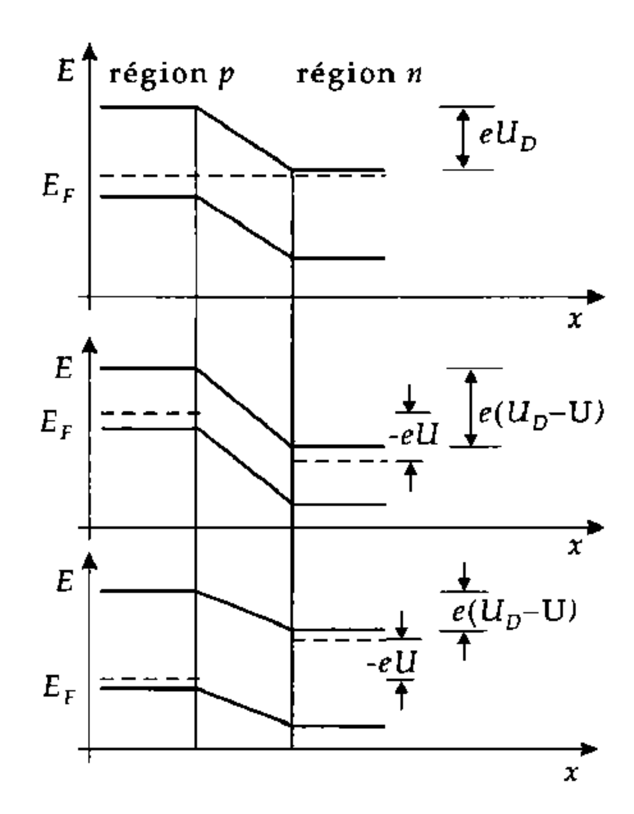


Fig. 29.69 : *Niveaux d'énergie dans une jonction p-n, d'après le modèle des bandes*

Avalanche : lorsqu'une diode à semiconducteurs est soumise à une tension inverse élevée, l'énergie des charges transportant le courant devient suffisante pour ioniser par chocs les atomes de la bande de valence et produire une très forte multiplication des porteurs et un brusque accroissement du courant. Lorsque la multiplication des porteurs tend vers l'infini, on observe le **claquage par avalanche**.

Diode Zener : utilise l'effet d'avalanche. Lorsqu'on augmente la polarisation inverse et que le champ électrique au niveau de la jonction est de l'ordre de 10^6 Volts/m, un électron lié de la bande de valence peut être excité vers un état libre de la bande de conduction. Le semiconducteur devient alors conducteur (courant inverse) et la tension à ses bornes n'augmente plus. Pour que ce champ ne produise pas un destruction de la jonction, il faut que la largeur de la zone de charge d'espace soit suffisamment grande, ce qui nécessite un dopage important de l'ordre de $N_D = 10^{18}$ cm^{-3}.

Tension de claquage, tension Zener, U_Z : tension inverse, qui produit l'effet Zener ou l'avalanche.

Une tension positive appliquée entre les zones **p** et **n** (polarisation directe) augmente la diffusion des porteurs **n** vers la région **p** : les électrons sont accélérés dans le sens opposé au champ électrique appliqué. Le courant direct augmente exponentiellement avec la tension (**formule de Shockley**).

Formule de Shockley — I

$$I = I_S\left(e^{U/U_T} - 1\right)$$

$$I_S \sim e^{-E_g/k_BT}$$

$$U_T = k_BT/e$$

Symbole	Unité	Dénomination
I_S	A	courant de saturation
E_g	eV	largeur de la bande interdite
U_T	V	tension due à la température
U	V	tension directe
I	A	courant direct
k_B	JK^{-1}	constante de Boltzmann
T	K	température
e	C	charge élémentaire

▷ Le dépassement de la tension de claquage peut entraîner la destruction de la jonction.

● Les propriétés électriques des diodes dépendent fortement de leur géométrie, de leur dopage et de la température.

▷ Le courant de saturation I_S dépend des propriétés du matériau semiconducteur et de sa géométrie.

▷ La tension due à la température U_T correspond à l'énergie thermique kT et est souvent donnée en eV.

Sens bloquant : la diode est polarisée en inverse, l'anode (zone p) est au potentiel **négatif** par rapport à la cathode (zone n).

Courant de saturation, I_S : courant résiduel inverse dans une diode semiconductrice, dû aux porteurs minoritaires. Les électrons de la zone **p** et les trous de la zone **n**, grâce au champ électrique, traversent la zone de jonction.

Sens passant : la diode est polarisée en direct, l'anode est **positive** par rapport à la cathode.

Tension de seuil, U_S : tension de polarisation directe à partir de laquelle la résistance de la diode devient faible, donc tension à partir de laquelle la diode conduit. Cette tension de seuil de conduction est parfois appelée tension de déchet. En pratique, la valeur U_S de la tension de seuil, à cause de la variation abrupte de la caractéristique courant-tension d'une diode, est mal définie, elle se situe entre 0,4 et 0,8 Volt et dépend du semiconducteur utilisé.

Temps de récupération : temps nécessaire à une diode pour basculer de l'état passant à l'état bloqué. Lorsqu'on inverse la polarisation d'une diode, les distributions de porteurs de charge se modifient, cette évolution n'est pas instantanée et est conditionnée par la recombinaison et la diffusion des porteurs minoritaires.

Caractéristiques : d'une façon générale, représentent graphiquement la relation courant-tension d'un composant électronique.

Il existe différents types de diodes, qui se distinguent principalement par l'importance du dopage des deux régions **p** et **n**. Ceci se répercute sur les valeurs des caractéristiques.

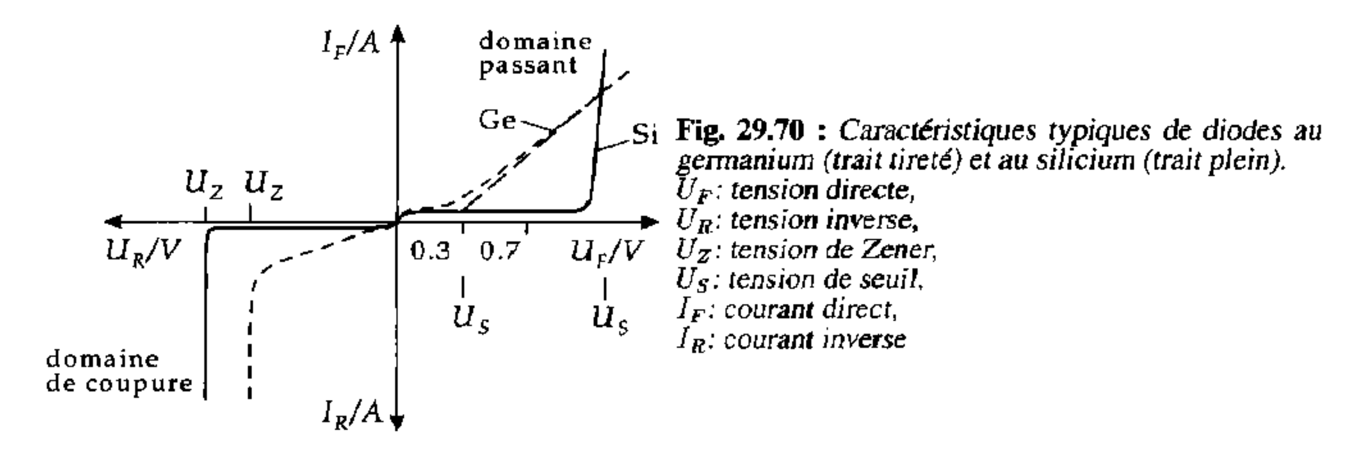


Fig. 29.70 : *Caractéristiques typiques de diodes au germanium (trait tireté) et au silicium (trait plein).*
U_F: tension directe,
U_R: tension inverse,
U_Z: tension de Zener,
U_S: tension de seuil,
I_F: courant direct,
I_R: courant inverse

▷ La cathode d'une diode est généralement repérée par un anneau noir imprimé sur le corps du composant et par un trait vertical sur les schémas électroniques.

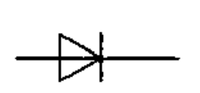


Fig. 29.71 : *Marquage de la cathode sur une diode (à gauche) et symbole utilisé dans les schémas (à droite)*

2. Diode de commutation

Diode rapide à faible temps de récupération. La résistance directe est faible, dans le sens bloquant le courant est faible. Les diodes de commutation sont faciles à réaliser en grande série et ont de multiples applications (diode universelle).

Fig. 29.72 : *Diode de commutation : symbole et caractéristiques principales.*
U_S : faible (Si : 0,7 V, Ge : 0,3 V),
U_Z : 50 ... 100 V,
I_F : 50 ... 200 mA,
I_R : ≈ 1 nA,
τ : 2 ... 20 ns

M Ces diodes sont utilisés pour la commutation, la limitation de surtensions, le découplage de tensions continues et dans les circuits logiques.

3. Diode Schottky

Diode à hétérostructure, constituée d'un contact métal-semiconducteur à la place d'une jonction p-n. Il résulte du contact métal-semiconducteur que seuls les porteurs majoritaires (électrons) participent à la conduction. Les diodes Schottky réagissent très rapidement aux variations de tension et sont particulièrement utilisées pour les signaux de haute fréquence (domaine du GHz).

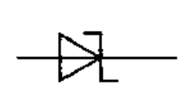


Fig. 29.73 : *Diode Schottky : symbole et caractéristiques typiques.*
U_S : 0,3 - 0,4 V,
U_Z : 50 ... 100 V,
I_F : 0,1 ... 1 mA,
τ : 10 ... 100 ps

■ Les diodes Schottky sont utilisées dans les circuits haute fréquence jusqu'à des fréquences de l'ordre de 40 GHz.

4. Redresseur

Diode utilisée pour le redressement de tensions alternatives. Au contraire des diodes de commutation, les redresseurs peuvent dissiper de fortes puissances et acceptent de fortes variations de courants. Elles doivent admettre des tensions inverses élevées et leur courant de saturation (courant inverse) doit rester aussi faible que possible afin de limiter les dissipations. Ses autres caractéristiques sont comparables à celles d'une diode de commutation.

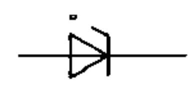


Fig. 29.74 : *Redresseur : symbole et caractéristiques principales.*
U_F : $\leq$ 1 V,
U_Z : bis 500 V,
I_R : ≈ 50 μA,
τ : de l'ordre de la μs (beaucoup plus faible pour les redresseurs spécifiques aux hautes fréquences)

■ **Ponts redresseurs :**

Les ponts redresseurs sont constitués de quatre diodes (Fig. 29.75) et permettent de redresser les alternances positives et négatives (**redressement double alternance**). Lorsque U_E est à une demi-alternance positive, le courant passe par les diodes 1 et 2 et la résistance de charge R_L. Les diodes 3 et 4 sont boquées. À la demi-alternance suivante, les diodes D_4 et D_3 conduisent, alors que D_1 et D_2 sont bloquées. Dans la résistance R_L, le courant circule dans le même sens. Les ondulations résiduelles (*ripple*) qui subsistent néanmoins, peuvent être amoindries par l'utilisation d'un condensateur de filtrage C monté en parallèle ou d'une self L montée en série avec R_L.

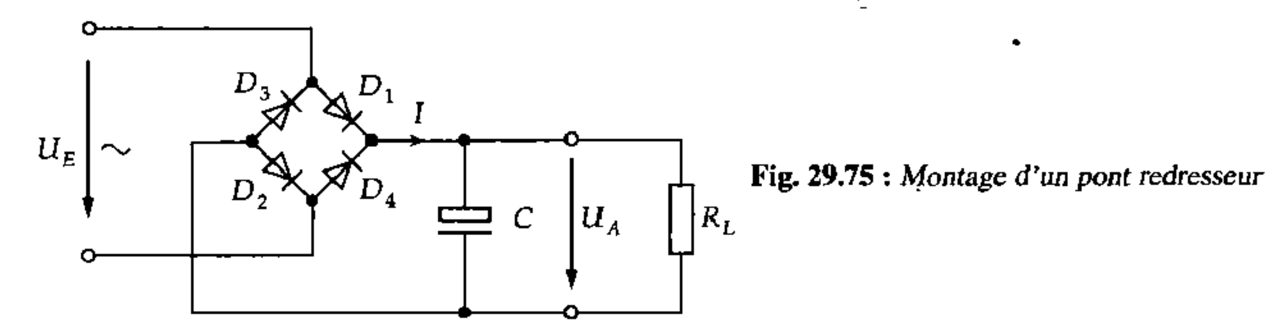


Fig. 29.75 : *Montage d'un pont redresseur*

5. Diode Zener

Diode fortement dopée, polarisée en inverse. Elle utilise l'effet d'avalanche, sa tension de Zener est très bien définie et dépend du dopage. On réalise des diodes Zener dans un large éventail de valeurs de tensions de Zener. Le fort dopage entraîne une zone de charge d'espace très large qui évite la destruction de la jonction même à des valeurs de champ très élevées.

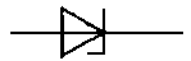


Fig. 29.76 : *Symbole graphique d'une diode Zener*

■ Les diodes Zener sont utilisées comme tension de référence et servent de stabilisateurs de tension.

6. Diac :

(**DI**ode **A**lternating **C**urrent switch), diode de commutation en courant alternatif. Un Diac est constitué de **deux** jonctions p-n et devient conducteur à partir d'une tension de **seuil**.

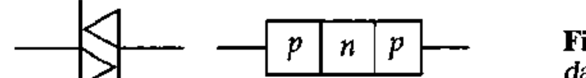


Fig. 29.77 : *Symbole et disposition des jonctions p-n dans un Diac*

Le principe de fonctionnement est celui de deux diodes en opposition. Lors de l'application d'une tension, une des diodes est dans le sens passant, l'autre est bloquée. Un faible courant résiduel $I \leq 100\ \mu$A circule tant que la tension de Zener U_Z n'est pas dépassée. Lorsque cette valeur est dépassée, le Diac devient brusquement conducteur, le courant augmente fortement et la tension aux bornes s'abaisse. Si la tension appliquée diminue, le Diac se bloque à nouveau dès que la tension devient inférieure à la tension d'arrêt. À cause de la symétrie du montage, la polarité des tensions ne joue aucun rôle. Selon le dopage, les tensions de Zener (conduction) et d'arrêt (non conduction) prennent diverses valeurs.

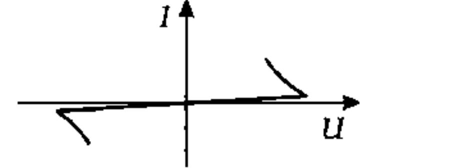


Fig. 29.78 : *Caractéristique d'un Diac*

Les Diacs sont utilisés pour construire des commutateurs électroniques qui doivent activer des circuits à

des valeurs de tension bien définies. Ils peuvent aussi servir à produire des impulsions courtes d'amplitudes bien définies.

7. Photodiode

Diode p-n, dont la zone de jonction est proche de la surface du semiconducteur. Les photodiodes sont utilisées en **polarisation inverse,** leur résistance interne varie en fonction de la quantité de lumière incidente.

▷ Les photodiodes sont polarisées à une tension inverse inférieure à la tension de claquage (tension Zener), la capacité de la couche d'arrêt est alors faible et les temps de réponse peuvent être courts. Le courant inverse, dans un large domaine, dépend de l'intensité d'éclairement ($\approx 0.1\ \mu A/lx$) et ne dépend que faiblement, mais linéairement, de la tension inverse.

Les porteurs de charges liés au cristal dopé de la photodiode peuvent, par apport d'énergie de la lumière incidente, passer de la bande de valence dans la bande de conduction (effet photoélectrique, production de paires électron-trou). L'énergie des quanta de lumière (photons) :

$$E_{Ph} = hf$$

doit être au moins égale à l'énergie de liaison des porteurs de charge au réseau cristallin (→ **Tab. 30.9/5**).

▷ Si la fréquence f de la lumière est trop faible (sa longueur d'onde trop grande), aucun porteur de charge ne sera libéré, même à très forte intensité lumineuse (domaine spectral : **Si**, $600 \ldots 1$ nm ; **Ge**, $0,5 \ldots 1,700$ nm).

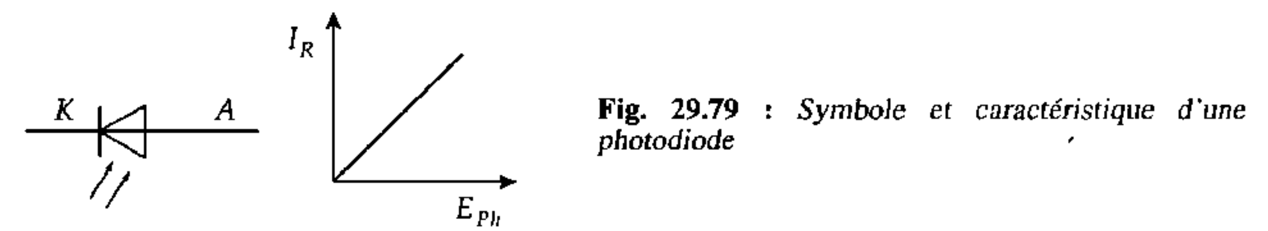


Fig. 29.79 : *Symbole et caractéristique d'une photodiode*

8. Diode PIN

Diode utilisée pour les signaux rapidement variables ; polarisée en directe, sa résistance dynamique est fonction de l'intensité du courant.

Une diode PIN comporte une zone isolante (zone i) intrinsèque, non dopée entre les zones **p** et **n**. La zone i ne contient pas de porteurs libres. En polarisation inverse, la région intrinsèque isole bien et le courant inverse reste très faible. En polarisation directe, les porteurs peuvent néanmoins franchir cette mince région intrinsèque et la diode conduit normalement.

● Pour des signaux à haute fréquence, une diode PIN constitue une résistance ohmique dont la valeur dépend de l'intensité du courant.

Un courant continu direct I_d, qui détermine la valeur R de la résistance, est superposé aux signaux variables.

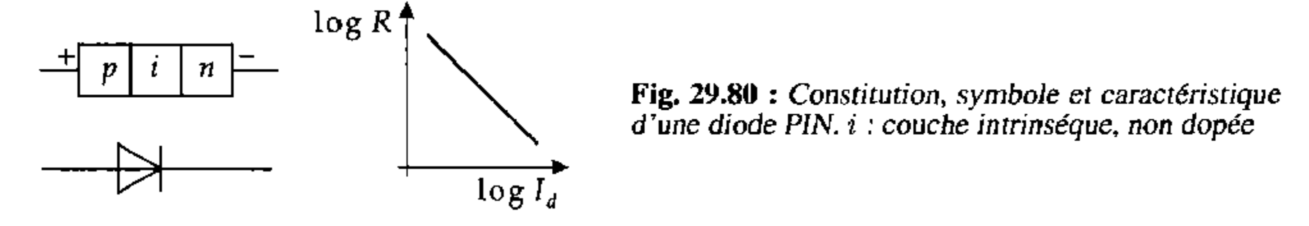


Fig. 29.80 : *Constitution, symbole et caractéristique d'une diode PIN. i : couche intrinsèque, non dopée*

■ Application : commutateur commandé par un courant continu, pour des signaux à haute fréquence.

9. Step-Recovery-Diode

(SRD), le courant varie de façon **abrupte** et non constante, lors de la transition de l'état conducteur à l'état bloqué.

▹ Toutes les diodes présentent cette caractéristique, dans les *Step-Recovery-Diode*, par leur dopage particulier, cet effet est particulièrement accentué.

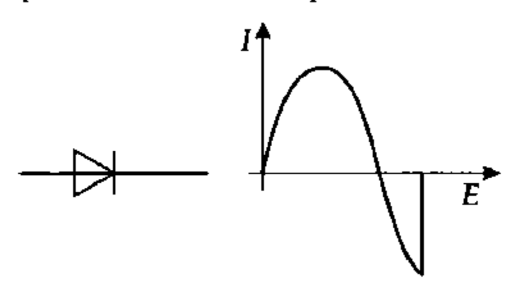


Fig. 29.81 : *Symbole et caractéristique d'une Step-Recovery-Diode*

■ Application : production d'impulsions abruptes, multiplicateur de fréquence jusque dans le domaine des GHz.

10. Diode tunnel

Effet tunnel : effet quantique, qui permet à une particule de franchir une barrière de potentiel de hauteur supérieure à l'énergie de la particule. La probabilité de franchir la barrière de potentiel est fonction d'une part, de la largeur et de la hauteur de la barrière et d'autre part, de l'énergie de la particule.

Diode tunnel : diode en germanium constituée par une jonction p-n dont les régions **p** et **n** sont fortement dopées. Dans chacune des régions, le niveau de Fermi est situé à l'intérieur de la bande permise correspondante. En raison de l'importance du dopage de chaque région, la zone de charge d'espace est très étroite. En polarisation inverse, certains états de la bande de valence de la région p se trouvent à la même énergie que des états inoccupés de la bande de conduction de la région **n.** Les électrons de la région **p** peuvent alors passer dans la bande de conduction de la région **n**, par effet tunnel, à travers l'étroite barrière de potentiel. Quand la polarisation inverse augmente, le courant inverse augmente fortement. La zone de charge d'espace étant mince, on atteint rapidement le régime de Zener.

En polarisation directe, le processus inverse se produit. Les électrons de la bande de valence de la région **n** passent par effet tunnel dans la bande de conduction de la région **p**. Le courant direct augmente avec la tension de polarisation, jusqu'à ce que le niveau de Fermi de la région **n** soit à la même énergie que le sommet de la bande de valence de la région **p.** Le courant direct diminue et s'annule lorsque le bas de la bande de conduction de la région **n** est plus haute que le sommet de la bande de valence **p.** En continuant d'augmenter la tension de polarisation, le courant direct croît à nouveau par injection thermique de porteurs au-dessus de la barrière. C'est le fonctionnement normal d'une jonction p-n. Les temps de commutation des diodes tunnel sont extrêmement courts ≈ 100 ps.

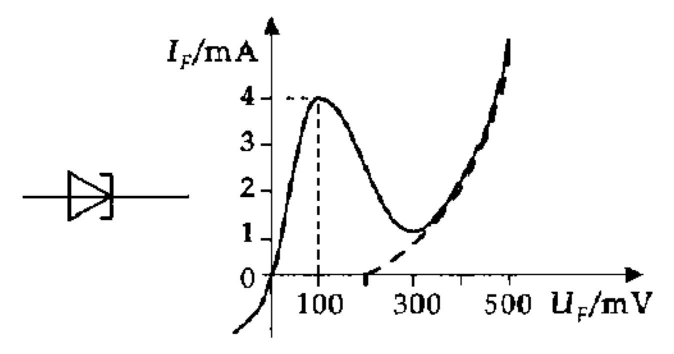


Fig. 29.82 : *Symbole et caractéristique d'une diode tunnel*

■ Application : circuits électroniques rapides, discriminateurs (trigger) rapides, oscillateurs à très haute fréquence.

11. Diode backward

Jonctions plus faiblement dopées que celles d'une diode tunnel et qui possède par conséquent un pic de courant direct plus réduit. En polarisation inverse, le courant inverse conserve les caractéristiques d'une diode tunnel. La caractéristique totale d'une diode backward est alors symétrique de celle d'une diode normale, elle conduit en polarisation inverse, sans tension seuil, et se bloque en polarisation directe jusqu'à une tension directe relativement faible.

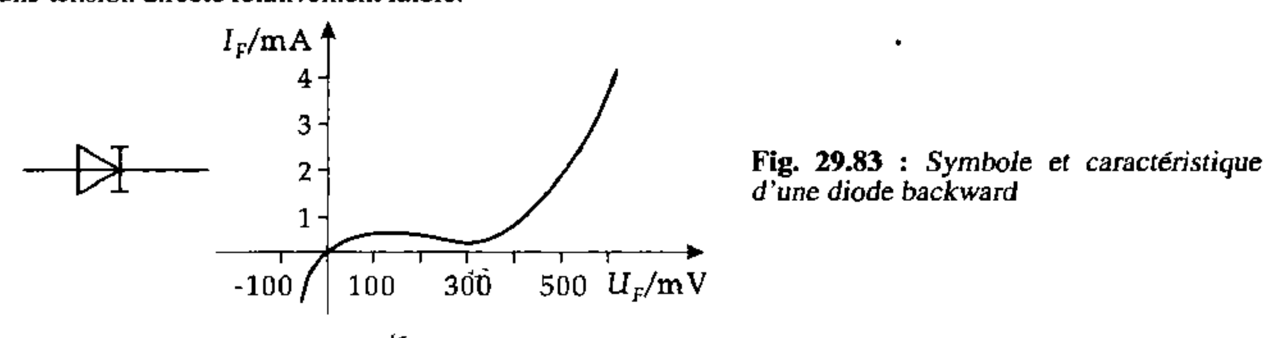


Fig. 29.83 : *Symbole et caractéristique d'une diode backward*

■ Application : redresseurs haute fréquence pour des signaux de faible amplitude.

12. Diode à capacité variable (varactor, varicap)

Diode à semiconducteur, polarisée en inverse, dont la capacité est fonction de la tension de polarisation.

La zone de charge d'espace se comporte comme le diélectrique d'un condensateur plan parallèle dont la surface des armatures est constante, mais dont l'épaisseur (largeur de la zone de charge d'espace) est variable en fonction de la tension de polarisation. Cet effet se produit avec toute jonction. Les varicaps se distinguent par le large domaine de variation de capacités, entre (1 ... 5 pF) et (5 ... 300 pF). Leurs fuites sont négligeables.

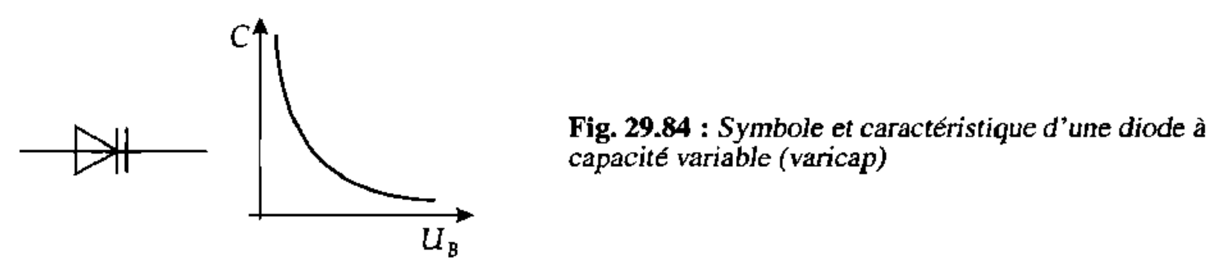


Fig. 29.84 : *Symbole et caractéristique d'une diode à capacité variable (varicap)*

■ Application : accord automatique de fréquence dans les récepteurs de radio et de télévision.

13. Diode électroluminescente (LED)

Light Emitting Diode, émet un rayonnement visible ou infrarouge lorsqu'elle est traversée par un courant direct. Cette émission est due à la recombinaison de paires électrons-trous du semiconducteur. La longueur d'onde de la lumière émise dépend de la largeur de la bande interdite (*gap*). L'intensité de la lumière émise est fonction du courant direct de la jonction.

Si la région **n** est fortement dopée par rapport à la région **p**, le courant est principalement dû aux électrons et n'est que peu affecté par les trous. Les électrons qui atteignent la région **p**, s'y recombinent avec les trous. L'énergie ainsi libérée dépend de la largeur de la bande interdite, donc du matériau semiconducteur.

▷ Les LED ne sont pas réalisées en Silicium ou en Germanium, mais à partir de composés binaires et ternaires : GaAsP (composé des groupes III et V). Leur rendement dans l'infrarouge est de l'ordre de quelques pourcents, pour le reste du spectre visible, il est inférieur à 0.1%.

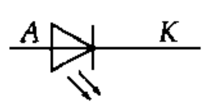


Fig. 29.85 : *Diode électroluminescente.*
rouge, jaune : GaAsP (phosphoarséniure de gallium),
vert : GaP (phosphure de gallium),
bleu : SiC (carbure de silicium),
infrarouge : GaAs (arséniure de gallium), GaAlAs (arséniure de gallium-aluminium)

● La fréquence de la lumière émise correspond au gain d'énergie lors de la recombinaison.

■ Application : lampes témoins, électronique grand-public, opto-coupleurs, systèmes de transmission par fibres optiques.

29.6.3 Transistor

Transistor : contraction des termes **Transfer resistor**, élément semiconducteur formé d'au moins deux jonction p-n dans un même cristal. Les transistors sont principalement utilisés pour l'amplification de signaux électriques analogiques et numériques, mais aussi comme commutateurs et dans les systèmes de commande.

On distingue les transistors bipolaires et les transistors unipolaires (transistors à effet de champ). Les transistors bipolaires sont commandés en courant, les transistors unipolaires en tension. Par conséquent, les transistors unipolaires consomment moins de puissance que les transistors bipolaires et sont de plus en plus utilisés en microélectronique et dans les circuits à large intégration.

29.6.3.1 Transistors bipolaires

Transistor bipolaire : constitué de deux jonctions, formées sur chaque face d'une région très mince **base** de type **p** ou **n**. La succession (**npn** ou **pnp**) des régions dopées du monocristal, définit la dénomination et les propriétés d'un transistor.

Transistor npn : transistor bipolaire dont la succession des régions semiconductrices du cristal est npn.

Transistor pnp : transistor bipolaire dont la succession des régions semiconductrices du cristal est pnp.

Base : B, électrode de la région médiane d'un transistor, elle est généralement très mince et dopée **p** (transistor npn) ou n (transistor pnp). Les signaux à amplifier ou de commande sont généralement appliqués à la base d'un transistor.

Collecteur : C, électrode d'une des régions extrêmes d'un transistor. La jonction Collecteur-Base est généralement polarisée en inverse, c'est à dire que le potentiel du Collecteur est positif par rapport à la base dans un transistor npn.

Émetteur : E, électrode de l'autre extrémité d'un transistor. La jonction Émetteur-Base est généralement polarisée en direct. Le rôle de l'émetteur est d'injecter des porteurs majoritaires (électrons dans le cas d'un transistor npn, trous positifs dans le cas d'un transistor pnp). La tension Émetteur-Base, contrôle ce flux de porteurs qui, la Base étant mince, peuvent parvenir dans la région du Collecteur.

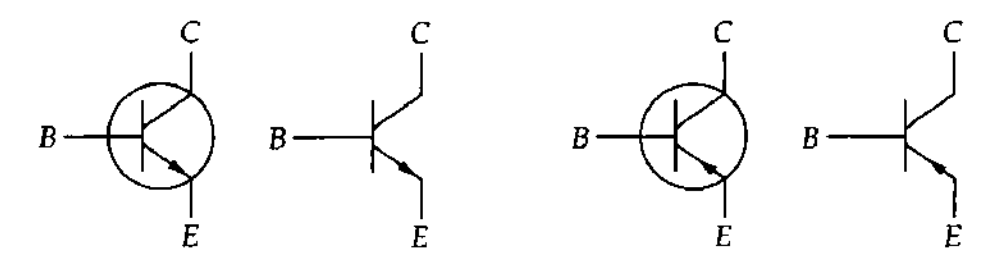


Fig. 29.86 : *Symboles anciens (cercle) et nouveaux d'un transistor npn et d'un transistor pnp*

- Les transistors ne sont pas constitués symétriquement. Émetteur et Collecteur ne sont ni géométriquement identiques, ni dopés identiquement ; ils ne sont pas interchangeables et ne doivent pas être confondus.

▷ L'émetteur émet des porteurs majoritaires et le collecteur les collecte. Il est à noter que quelque soit le type de transistor, donc la nature des porteus majoritaires, le **courant** électrique circule **toujours** du Collecteur vers l'Émetteur.

▷ Le transistor npn étant le plus couramment utilisé, nous ne décrirons que son fonctionnement. Le fonctionnement du transistor pnp, peut s'en déduire facilement. Le principe de fonctionnement d'un transistor pnp est équivalent au signe des porteurs majoritaires près et par conséquent du signe de sa polarisation. Cependant, à cause de la différence de mobilité des électrons et des trous positifs, les transistors pnp ont des caractéristiques, notamment de temps de réponse, moins favorables.

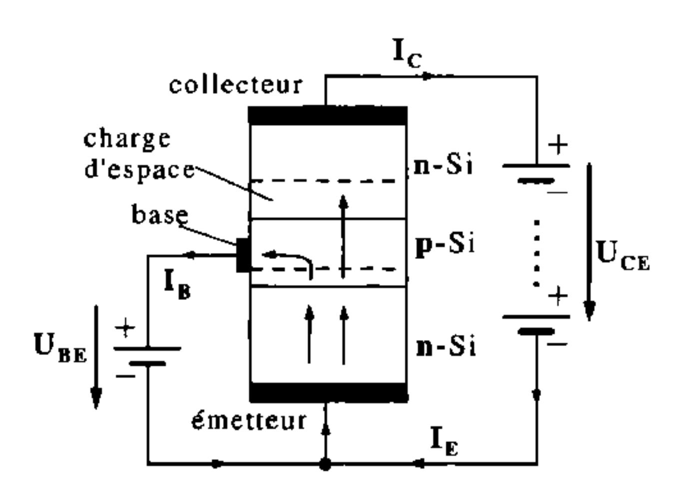


Fig. 29.87 : *Constitution et principe de fonctionnement d'un transistor bipolaire npn*

Une tension positive U_{CE} est établie entre le collecteur C et l'émetteur E. Si la base B est négative par rapport à E, aucun courant ne peut circuler vers le collecteur, car la jonction BC et la jonction EB sont à la fois bloquées. Si en revanche, la base B est positive par rapport à l'émetteur E, la jonction BE conduit et les électrons de la région **n** de l'émetteur parviennent dans la région **p** de la base. Si le libre parcours moyen des électrons avant recombinaison est grand et la base suffisamment mince, les électrons peuvent diffuser à travers la jonction BC puis être accélérés vers le collecteur par le champ électrique produit par la tension U_{CE} positive : un courant circule entre collecteur et émetteur.

Dénominations usuelles pour les transistor :

I_C courant Collecteur
I_B courant de Base
I_E courant d'Émetteur
U_{CE} tension Collecteur-Émetteur
U_{BE} tension Base-Émetteur
U_{BC} tension Base-Collecteur

▷ Dans le cas des transistors pnp, la base doit être négative par rapport à l'émetteur.

● Le transistor opère en amplificateur de courant : une petite variation du courant de base entraîne une forte variation du courant collecteur.

Caractéristiques d'entrée et de sortie d'un transistor : la présentation la plus compacte possible de l'ensemble des caractéristiques d'un transistor, est généralement effectuée par la représentation en quatre quadrants qui résume ses caractéristiques d'entrée et de sortie.

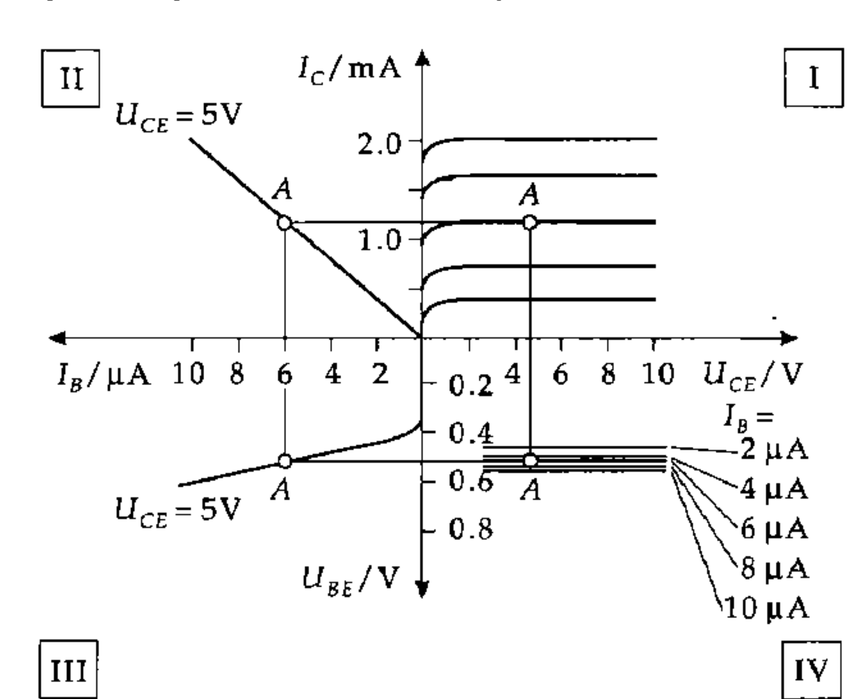


Fig. 29.88 : *Caractéristiques typiques d'ι transistor npn monté en émetteur commu Les points A marquent les points ι fonctionnement (point de repos) dans partie linéaire des caractéristiques.*

Caractéristiques d'entrée : la relation $I_B = I_B(U_{BE})$ à U_{CE} = const. (troisième quadrant). Elle correspond à la caractéristique de la diode Base-Émetteur.

Caractéristique de sortie : la relation $I_C = I_C(U_{CE})$ en fonction du paramètre I_B (premier quadrant).

Région de saturation : domaine de la caractéristique de sortie pour lequel I_C augmente fortement avec U_{CE} (faibles valeurs de U_{CE}).

Domaine actif : la partie de la caractéristique de sortie pour laquelle le courant collecteur I_C dépend peu de la tension collecteur-émetteur U_{CE}, mais dépend fortement du courant de base I_B. Les montages amplificateurs à transistors, travaillent dans ce domaine.

Caractéristique de transfert en courant ou **amplification en courant** : indique la variation du courant collecteur en fonction du courant de base $I_C = I_C(I_B)$ à U_{CE} = const. (deuxième quadrant).

Caractéristique de réaction en tension : elle représente la réaction de la tension de sortie U_{CE} sur la tension d'entrée.

$U_{BE} = U_{BE}(U_{CE}, I_B)$ (quatrième quadrant). Dans le domaine actif, la réaction est très faible ≈ 0, c'est à dire que U_{BE} est indépendant de U_{CE}.

Caractéristique de commande : combinaison des caractéristiques d'entrée et d'amplification en courant :

$$I_C = I_C(U_{BE}) \text{ à } U_{CE} = \text{const.}$$

Valeurs limites : valeurs maximales des paramètres de fonctionnement d'un transistor. Si ces valeurs sont dépassées, le transistor peut être détruit par fusion des jonctions par exemple. Les transistors sont particulièrement sensibles aux surtensions ou aux surintensités de la Base. Les fortes dissipations dans le circuit de sortie (collecteur) peuvent également entraîner la destruction d'un transistor. Les valeurs limites à ne pas dépasser sont données par les fabricants des divers types de transistors.

Point de fonctionnement : détermine la partie du domaine des caractéristiques dans laquelle le transistor fonctionne. En **électronique analogique**, le transistor est souvent utilisé pour amplifier des signaux alternatifs. Pour que le transistor ne distordent pas ces signaux, il faut qu'il opère dans la partie linéaire des caractéristiques (autour des points A). Les parties extrêmes, près de l'origine ne sont pas linéaires. Les composants extérieurs doivent être calculés en fonction des paramètres des divers transistors, pour placer le transistor en ses points de fonctionnement.

Résistance de Collecteur : résistance placée en série dans le circuit de polarisation du Collecteur (résistance de charge dans le montage émetteur commun). On définit de même la **résistance d'Émetteur** et la **résistance de Base.**

Droite de charge : droite dans le premier quadrant des caractéristiques qui détermine le point de fonctionnement du transistor. Sa pente, dans le montage émetteur commun, est donnée par la valeur de la résistance de charge R_C et ses intersections avec les axes dépendent de la tension de polarisation et du courant de repos de la Base. L'équation de la droite de charge résulte de l'application de la loi d'Ohm pour I_C et U_{CE} :

$$I_C = \frac{U_0 - U_{CE}}{R_C}$$

qui doit être satisfaite en plus de la relation précédente $I_C = I_C(U_{CE})$. Pour un courant de Base I_B donné, le point de fonctionnement est alors déterminé.

▷ Le choix du point de fonctionnement est très important dans tout montage à transistor dont il détermine les propriétés. Il faut également veiller à ne pas dépasser les valeurs limites.

29.6.3.2 Montages élémentaires

Montages élémentaires : il existe trois possibilités fondamentales de montage pour les transistors bipolaires selon laquelle des trois électrodes est commune aux circuits d'entrée et de sortie. On distingue les montages en :

- émetteur commu
- collecteur commun
- base commune

dont les propriétés d'amplification, de résistance d'entrée et de sortie sont particulières et répondent à des types d'applications différents. Le montage émetteur commun est le plus utilisé pour l'amplification de tensions variables.

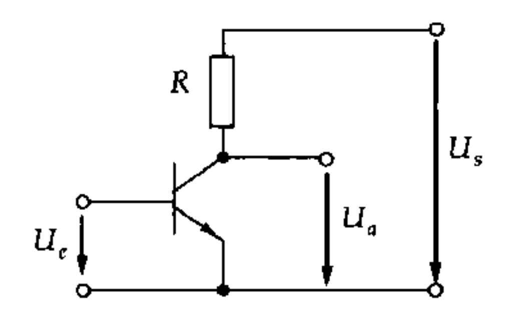


Fig. 29.89 : *Principe du montage émetteur commun.*
$U_e = U_{BE}$: tension d'entrée
$U_a = U_{CE}$: tension de sortie

Montage émetteur commun : l'émetteur est le point commun de retour des tensions d'entrée et de sortie.

Paramètres d'un transistor en montage émetteur commun			
	Symbole	Unité	Dénomination
$R_{BE} = \frac{\partial U_{BE}}{\partial I_B}$	R_{BE}	Ω	résistance différentielle d'entrée
$v_r = \frac{\partial U_{BE}}{\partial U_{CE}}$	v_r	1	tension de réaction
$\beta = \frac{\partial I_C}{\partial I_B}$	β	1	amplification en courant
$R_{CE} = \frac{\partial U_{CE}}{\partial I_C}$	R_{CE}	Ω	résistance différentielle de sortie

Quadripôle : réseau électrique comportant deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie, dont les détails de la structure interne ne sont pas examinés et dont on ne s'intéresse qu'aux relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie.

Équations d'un quadripôle : équations qui déterminent les propriétés d'un quadripôle, elles relient généralement deux grandeurs d'entrée et deux grandeurs de sortie du quadripôle.

Un transistor peut être considéré comme un quadripôle. Dans ce cas, une des trois électrodes du transistor est commune à l'entrée et à la sortie du quadripôle équivalent (l'émetteur E dans le montage émetteur commun). À l'aide des équations du quadripôle, on peut calculer la fonction de transfert de la tension U_{BE} et du courant I_B d'entrée. Des relations analogues peuvent être établies pour les montages collecteur commun ou base commune.

Équations du quadripôle pour un transistor en émetteur commun			
	Symbole	Unité	Dénomination
$\Delta U_{BE} = R_{BE}\Delta I_B + v_r \Delta U_{CE}$	ΔU_{BE}	V	variation de la tension de la base
	ΔI_B	A	variation du courant de la base
$\Delta I_C = \beta \Delta I_B + \frac{1}{R_{CE}} \Delta U_{CE}$	ΔU_{CE}	V	variation de la tension de sortie
	ΔI_C	A	variation du courant collecteur
	R_{BE}	Ω	résistance différentielle d'entrée
	R_{CE}	Ω	résistance différentielle de sortie

- Aux grandeurs différentielles, on peut attribuer les grandeurs :

$$R_E = \frac{\Delta U_{\mathrm{BE}}}{\Delta I_{\mathrm{B}}} \quad \text{résistance d'entrée}$$

$$B = \frac{\Delta I_{\mathrm{C}}}{\Delta I_{\mathrm{B}}} \quad \text{amplification en courant}$$

$$R_A = \frac{\Delta U_{\mathrm{CE}}}{\Delta I_{\mathrm{C}}} \quad \text{résistance de sortie}$$

Dans le domaine actif des caractéristiques, les valeur différentielles et les valeurs intégrées sont en relativement bon accord.

Grandeurs caractéristiques du montage en émetteur commun	Symbole	Unité	Dénomination
Amplification en tension :			
$v_u = \frac{\Delta U_{\mathrm{CE}}}{\Delta U_{\mathrm{BE}}} = -\frac{\beta R_C}{R_{BE.A}}$	R_C	Ω	résistance de collecteur
$v_u \approx -100 \ldots -200$	β	1	amplification en courant
Résistance d'entrée :	$R_{BE.A}$	Ω	résistance d'entrée au point de fonctionnement
$R_{\mathrm{BE}} = \frac{U_T}{I_{\mathrm{B}}} \approx \frac{40\ \mathrm{mV}}{I_{\mathrm{B}}}$	U_T	V	tension due à la température
Résistance de sortie :	$\|$		associées en parallèle
$R_A = R_{\mathrm{CE}} \| R_{\mathrm{C}}$			

▷ Le signe moins devant la valeur de v_u signifie que le signal de sortie est déphasé de 180° par rapport au signal d'entrée. Le gain en tension v_u est naturellement limité par la tension de réaction et par la résistance différentielle de sortie R_{CE} et ne peut pas être augmenté indéfiniment par simple accroissement de la résistance de charge R_{C}.

Contre réaction ou réaction négative : méthode qui consiste à ajouter, en opposition de phase (retrancher), une partie de la grandeur de sortie à la grandeur d'entrée. L'amplification globale est alors diminuée, mais le point de fonctionnement est stabilisé et la caractéristique devient plus linéaire.

Contre réaction en tension : rétroaction pour laquelle la *tension de sortie* est appliquée à l'entrée de l'amplificateur par l'intermédiaire d'un pont diviseur de tension. Le gain de l'étage amplificateur devient indépendant des caractéristiques du transistor et ne dépend pratiquement que des composants extérieurs du montage.

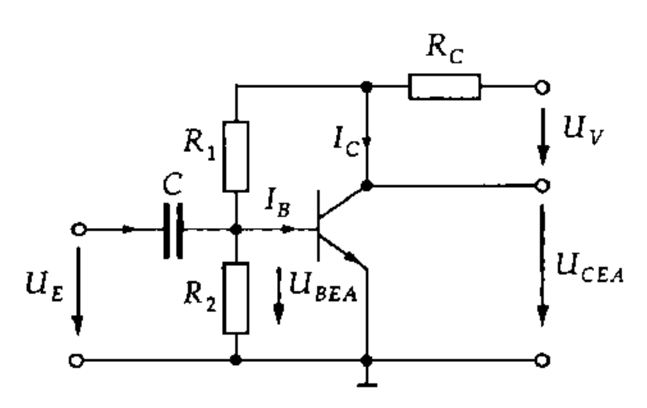


Fig. 29.90 : *Amplificateur monté en émetteur commun avec une contre réaction en tension*

Amplification en tension :

$$v \approx -\frac{R_2}{R_i}$$ R_i : résistance interne de la source de tension.

Résistance d'entrée :

$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{BE}} + \frac{v_u}{R_2} \Rightarrow R_E \ll R_{BE}$$

Résistance de sortie :

$$R_A = R_C \| R_{CE} \cdot \frac{v}{v_u}$$

Par la réduction du gain, le point de fonctionnement est plus stable proportionnellement à $\Delta U_{CE} = v_D \Delta U_{BE}$.

$$v_D = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Contre réaction en courant : une tension proportionnelle au *courant de sortie* est ajoutée en opposition de phase à la tension d'entrée. La résistance d'émetteur R_E produit cet effet.

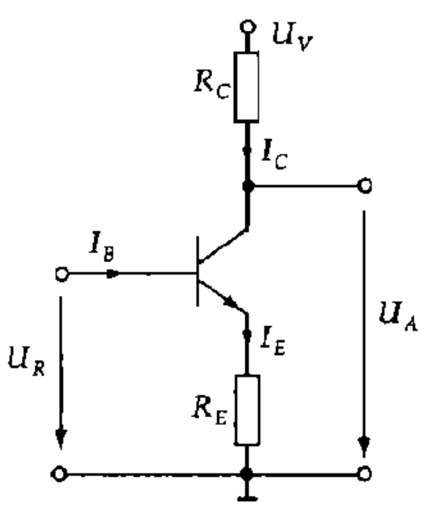


Fig. 29.91 : *Amplificateur monté en émetteur commun avec une contre réaction en courant*

Amplification en tension	Résistance d'entrée	Résistance de sortie
$v \approx -\frac{R_C}{R_E}$	$R_E = R_{BE} + \beta R_E \gg R_{BE}$	$R_A \approx R_{CE}(1 + \beta \frac{R_E}{R_{BE}})$

▷ Un amplificateur, dont la résistance d'entrée a une valeur élevée, ne charge que faiblement la source du signal d'entrée.

- Grâce à la valeur élevée de sa résistance de sortie, un amplificateur émetteur commun à contre réaction en courant constitue un ***générateur à courant constant***.

- **Étage amplificateur en émetteur commun :** le condensateur d'entrée C_1 isole la source du signal d'entrée de la tension continue du circuit de polarisation de la base. Le condensateur de sortie C_2 isole la résistance de charge R_L de la tension continue de polarisation du collecteur. Pour les signaux alternatifs, le condensateur C_E court-circuite la résistance d'émetteur R_E.

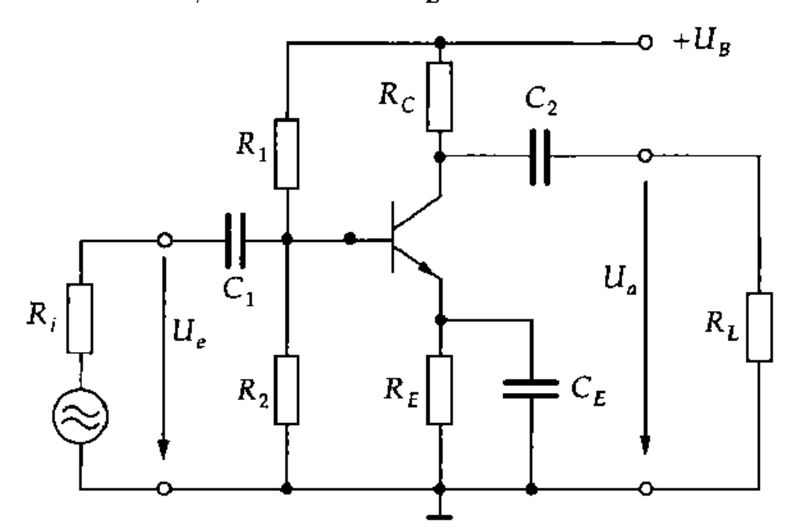


Fig. 29.92 : *Étage amplificateur en émetteur commun*

Montage collecteur commun : montage élémentaire dans lequel le Collecteur est le point de retour commun des signaux d'entrée et de sortie. Le signal d'entrée est appliqué entre Base et Collecteur, le signal de sortie est prélevé entre Émetteur et Collecteur. L'impédance d'entrée est forte, l'impédance de sortie très faible.

▷ Le montage en collecteur commun est parfois appelé **emitter follower**.

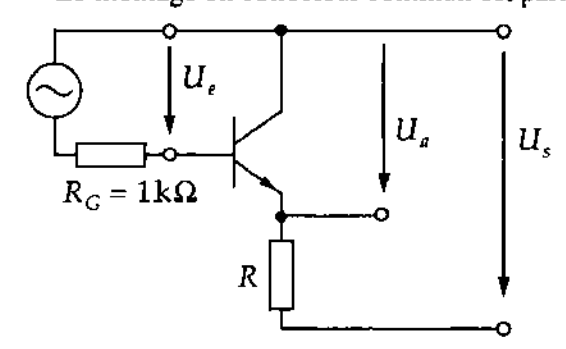


Fig. 29.93 : *Montage collecteur commun*

Amplification en tension	Amplification en courant	Résistance de sortie
$v_u \approx 1$	$I_E = \beta I_B$	$R_A = \dfrac{R_{BE}}{\beta} \ll R_{BE}$

- À cause de la valeur élevée de sa résistance d'entrée et de la faible valeur de sa résistance de sortie, le montage émetteur commun est utilisé comme **adaptateur d'impédance**. Il permet d'adapter un générateur de signaux de grande résistance interne à un récepteur de faible résistance interne. Il permet aussi de réaliser des liaisons à grande distance dont les pertes sont réduites.

Montage base commune : montage élémentaire dans lequel la Base est l'électrode commune au circuit d'entrée et de sortie. Le signal d'entrée est appliqué entre l'émetteur et la base, le signal de sortie est prélevé

entre le collecteur et la base.

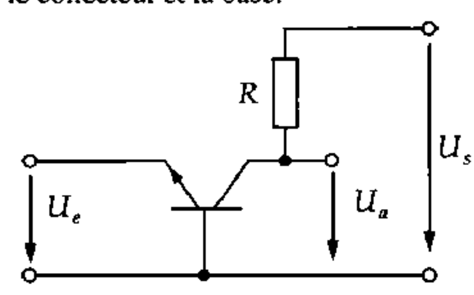


Fig. 29.94 : *Montage base commune*

Amplification en tension	**Amplifcation en courant**	**Résistance d'entrée**
$v_u = +\frac{\beta R_C}{R_{BE}}$	$\alpha \approx 1$	$R_E = \frac{R_{BE}}{\beta}$

L'amplification en tension est égale à celle du montage émetteur commun. Le signal de sortie est en phase avec le signal d'entrée, la contre réaction en tension est ainsi empêchée. L'entrée et la sortie, à cause du potentiel de base constant, sont complètement découplées.

■ La limite supérieure de fréquence du montage base commune est très élevée et a par conséquent une bande passante beaucoup plus large que le montage émetteur commun. Les étages amplificateurs en base commune sont, de ce fait, souvent utilisés dans les circuits haute fréquence des récepteurs de signaux radioélectriques.

29.6.3.3 Transistor Darlington

Transistor Darlington : montage amplificateur comprenant deux transistors en cascade, réalisés dans le même cristal semiconducteur. Le gain en courant total correspond au produit des gains en courant individuels de chaque transistor.

■ La très forte amplification en courant ($\beta > 1000$) est parfois utile pour adapter des sources de tension à résistance interne élevée à des récepteurs de faible résistance de charge.



Fig. 29.95 : *Schéma de principe d'un transistor Darlington*

29.6.4 Transistors unipolaires (à effet de champ)

Transistor à effet de champ (FET) (Field Effect Transistor) : transistor commandé en tension, de très grande résistance d'entrée, qui consomme peu de puissance. Dans beaucoup d'applications, un FET peut remplacer un transistor bipolaire. Il est constitué d'un barreau de semiconducteur dopé appelé *canal*, dont la résistance électrique varie suivant la tension appliquée à la jonction p-n par une électrode en forme d'anneau, la **porte** (gate). Le courant traversant le barreau de la **source** au **drain** est commandé par la tension entre porte et source.

Substrat : barreau de semiconducteur dopé, dans lequel une jonction **p-n** est créée entre la porte et le barreau semiconducteur.

Alors que dans le transistor bipolaire les deux types de porteurs de charge (électrons et trous) participent à la conduction, dans le transistor unipolaire les seuls porteurs majoritaires du barreau semiconducteur

assurent la conduction : les électrons *ou* les trous selon le type de barreau. Le passage des porteurs de charge est modulé par *l'élargissement* ou *le rétrécissement* du canal commandé par la tension entre porte et source. Le circuit de la porte ne consomme pas de puissance.

29.6.4.1 Transistor à effet de champ à jonction (Junction-FET)

Transistor à effet de champ à jonction, JFET : constitué d'un substrat de Silicium monocristallin dopé, dans lequel est implanté une zone de dopage opposé formant un canal (épaisseur ≈ 1 μm). Suivant le dopage du canal, on distingue les FET à canal **p** et les FET à canal **n**. La figure 29.96 représente un FET à canal **n**.

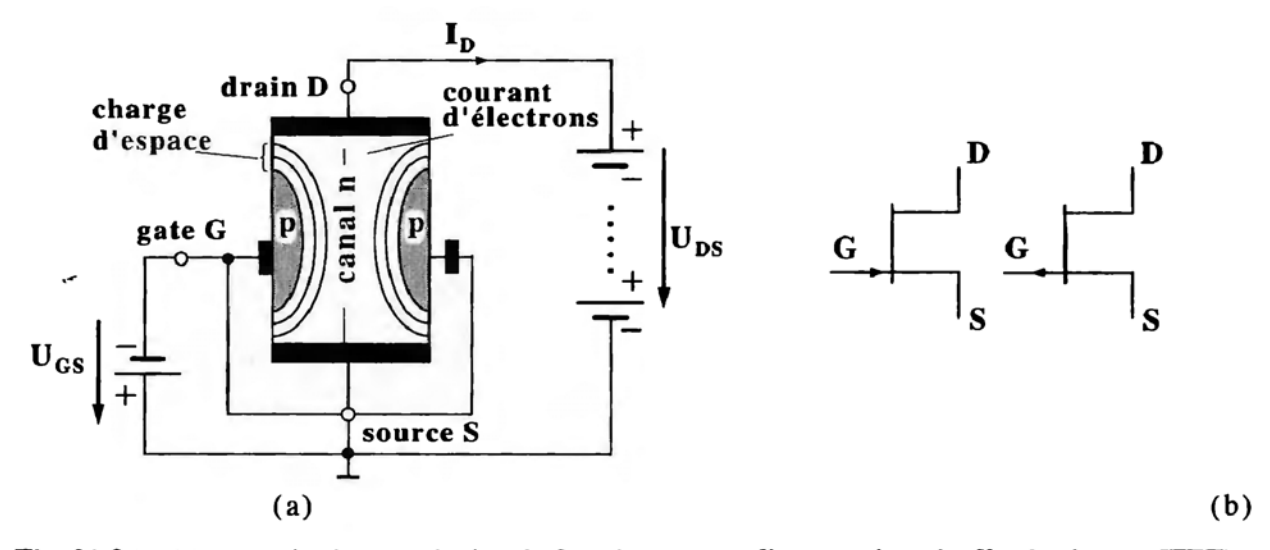


Fig. 29.96 : *(a) : constitution et principe de fonctionnement d'un transistor à effet de champ (JFET), (b) : symboles des FET à canal n et à canal p*

Drain (D) et **Source** (S) : électrodes d'un FET reliées au canal. Les signaux à commander sont appliqués entre D et S.

Gate (G) grille ou **porte** : électrode implantée par diffusion d'une mince couche de matériau dont les porteurs majoritaires sont de signe opposé à ceux du substrat. Les signaux servant à commander le courant entre source et drain sont appliqués à cette électrode.

Bulk (B) : électrode supplémentaire, appliquée au substrat, qui n'existe que dans le cas des MOSFET (transistor à effet de champ à grille isolée). B est souvent relié intérieurement à la source.

Lorsqu'une différence de potentiel U_{DS} est appliquée entre D et S, un courant électrique circule dans le canal (n) comme à travers une résistance ohmique. Si G est portée à un potentiel négatif par rapport à S ($U_{GS} < 0$), la jonction p-n entre S et G se bloque.

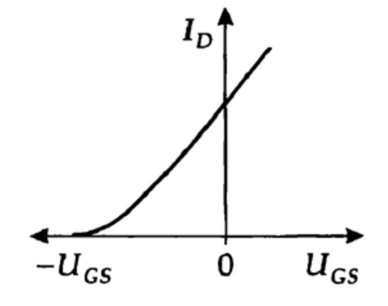


Fig. 29.97 : *Caractéristique d'un transistor à effet de champ à jonction*

▷ Le nom de FET à jonction vient de la jonction qui est implantée entre l'électrode de commande

(porte) et le substrat qui conduit le courant (canal).

Près de la jonction se forme une zone désertée de porteurs qui, avec l'augmentation de la tension de commande U_{GS}, s'étend de plus en plus dans le canal. La section effective du canal se rétrécit alors, ce qui a pour conséquence d'augmenter sa résistance : la résistance du canal est commandée par la tension porte.

FET autoconducteur : transistor à effet de champ qui conduit le courant entre S et D, sans application d'une tension de commande à la porte G.

FET autobloquant : FET qui, en l'absence d'une tension de commande entre G et S, ne conduit pas le courant entre la source et le drain.

▷ Les transistors à effet de champ à jonction (JFET) sont autoconducteurs.

Au contraire des transistors bipolaires, les JFET sont généralement de construction symétrique, de sorte que drain D et source S sont interchangeables.

▷ Lorsque la porte (gate) est négative, le courant de porte n'est que de 1 pA à 1 μA. Si, au contraire, la tension de porte U_{GS} est positive, la jonction p-n entre porte et canal **n** conduit. Dans ce cas le FET dissipe de la puissance, cette situation devrait être évitée.

29.6.4.2 FET à grille isolée, Insulated Gate FET (IGFET, MOSFET)

Technologie MOS : (**MOS Metal-Oxide-Silicon**) méthode de production de transistors à effet de champ, dans laquelle la porte est isolée de la jonction p-n par une mince couche isolante (d'oxyde métallique).

MOSFET : transistor à effet de champ réalisé en technologie MOS. Son principal avantage est qu'il n'y a pas de courant porte-source même lorsque la porte est polarisée positivement.

Régime d'enrichissement : MOSFET autobloquant, normalement isolant. La porte doit être polarisée par une tension supérieure à la tension de seuil, pour que le courant drain-source circule. On distingue les MOSFET à canal **p** et à canal **n**. Dans un MOSFET à canal n, deux zones dopées **n**, la source S et le drain D sont implantées dans un substrat de type **p**. Aucun courant ne peut circuler entre D et S, puisque quelque soit le sens du courant, une des jonctions p-n est bloquée (le drain D, le canal (substrat) et la source S constituent deux diodes en opposition. À la surface du substrat se trouve une mince couche d'oxyde métallique isolante, sur laquelle est évaporée une couche métallique conductrice qui constitue la porte (gate ou grille) G. Le substrat lui-même peut être relié à une quatrième électrode B (Bulk) ou être relié directement à la source S (important dans le cas des MOSFET de puissance). Si la porte G devient positive par rapport à la source S, les porteurs minoritaires de la zone **p**, les électrons, à cause de l'attraction électrostatique sont attirés vers la couche isolante, de sorte qu'un canal conducteur **n** s'ouvre entre S et D.

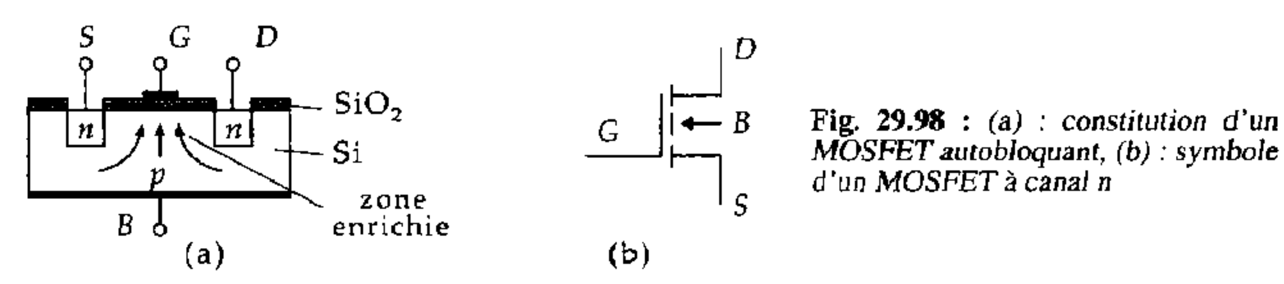


Fig. 29.98 : *(a) : constitution d'un MOSFET autobloquant, (b) : symbole d'un MOSFET à canal n*

▷ Pour les transistors qui fonctionnent en régime d'enrichissement, les porteurs minoritaires du substrat sont enrichis entre les deux ilôts dopés **n** et constituent les électrons qui contribuent à la conduction.

Plus la tension de polarisation de la porte est élevée, plus le nombre d'électrons dans le canal DS devient important et la résistance du canal diminue. **Régime d'appauvrissement** : transistor autoconducteur,

analogue à un FET à jonction. Entre les deux ilôts du MOSFET à régime d'enrichissement, on introduit un mince canal conducteur n, qui conduit en l'absence de polarisation de la porte : le FET est autoconducteur. Si la polarisation de la porte est négative, les porteurs majoritaires de la zone **n** s'échappent et il ne reste que peu d'électrons de conduction : la résistance du canal augmente. La particularité de ce FET est qu'avec une polarisation positive de la porte, le canal n s'enrichit en porteurs minoritaires (électrons) du substrat **p** et que le courant entre source et drain est ainsi augmenté.

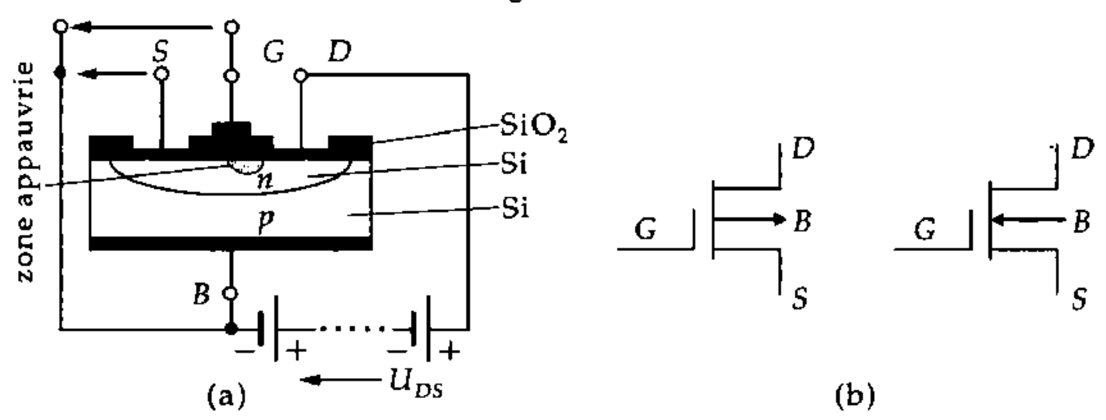


Fig. 29.99 : *(a) : constitution d'un transistor MOSFET autoconducteur, (b) : symbole des Mosfet à canal* **p** *et à canal n*

▹ Lorsque les électrodes Bulk B et source S sont reliées intérieurement, le symbole suivant est utilisé :

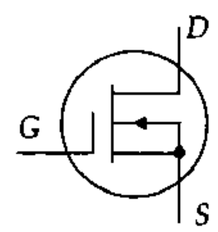


Fig. 29.100 : *Symbole d'un MOSFET autoconducteur à canal* **n**, *dans lequel les électrodes Source et Bulk sont reliées*

■ Les FET, parce que leur circuit de commande ne consomme pas de puissance et qu'il est possible de les réaliser sur de très petites surfaces de substrat, sont indispensables pour la réalisation de circuits à très haute intégration.

Dual-Gate-MOSFET : transistor MOSFET à deux grilles (portes) G_1 et G_2, appliquées au-dessus du canal de conduction. Lorsque les deux portes sont commandées indépendamment, elles agissent de manière indépendante sur le courant source-drain, tant qu'une des portes ne bloque pas la conduction du canal.

■ Application : amplificateur haute fréquence réglable. Une des portes commande le signal à amplifier, l'autre porte agit sur la pente d'amplification du MOSFET.

29.6.5 Thyristor

Thyristor : suite de trois jonctions p-n-p-n entre semiconducteurs. Le thyristor, comme une diode normale, ne peut conduire le courant que dans un sens.

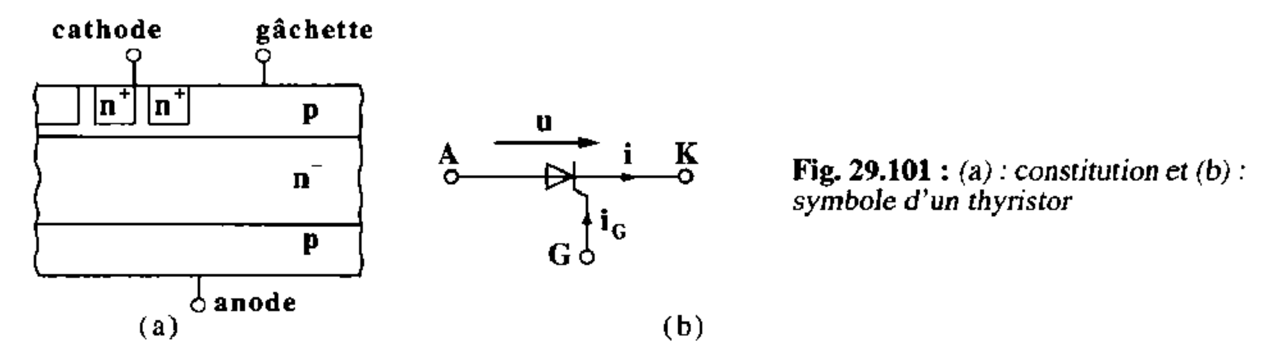


Fig. 29.101 : *(a) : constitution et (b) : symbole d'un thyristor*

Anode et **cathode** : électrodes appliquées respectivement aux zones **p** et **n** extrêmes du semiconducteur.

Gâchette ou gate : électrode appliquée à la zone p intermédiaire. Lorsque la gâchette (gâchette de cathode) est positive par rapport à la cathode, le thyristor devient conducteur entre anode et cathode. Certains thyristors possèdent, en outre, une gâchette d'anode (zone **n** intermédiaire) qui, polarisée négativement, rend le thyristor conducteur.

Lorsque la différence de potentiel anode-cathode est négative, la jonction centrale j_2 est polarisée en directe, mais les jonctions extrêmes j_1 et j_3 sont polarisées en inverse : le thyristor est bloqué, la caractéristique est celle d'une diode polarisée en inverse. Lorsque la tension anode-cathode devient positive, seule la jonction j_2 est polarisée en inverse et s'oppose au passage du courant. Pour débloquer le thyristor, deux possibilités existent :

- on peut augmenter la tension anode-cathode jusqu'à provoquer l'avalanche dans la jonction j_2, le thyristor reste alors conducteur jusqu'à ce que la tension anode-cathode diminue jusqu'à désamorcer l'avalanche dans j_2.
- tout en maintenant la tension positive anode-cathode, on peut injecter un courant de gâchette qui abaisse la valeur de la tension critique d'avalanche dans la jonction j_2. Le thyristor se débloque sans augmentation de la tension anode-cathode et reste conducteur, même en supprimant le courant de gachette. Pour rebloquer le thyristor, il faut aussi supprimer le courant d'anode pendant un temps suffisamment long : **temps de désamorçage**. Ce mode de fonctionnement est généralement utilisé dans les applications pratiques.

Courant d'amorçage : i_G, courant de gachette qui injecte des porteurs de charge dans la jonction centrale, qui a pour effet d'abaisser la tension critique d'avalanche de cette jonction et ainsi *débloquer* le thyristor.

Courant résiduel : courant inverse i_R, de quelques μA qui circule entre anode et cathode dans le thyristor bloqué.

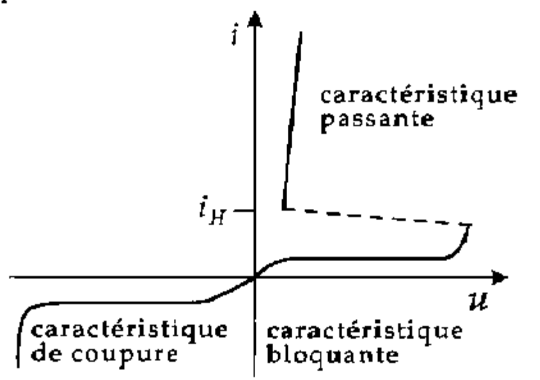


Fig. 29.102 : *Caractéristique d'un thyristor*

Courant d'arrêt i_H : valeur de l'intensité du courant entre anode et cathode (généralement entre 10 et 100 mA) au-dessus de laquelle un thyristor reste conducteur même lorsque le courant de gâchette est supprimé.

Impulsion d'amorçage : impulsion appliquée à la gâchette d'un thyristor bloqué qui permet de le rendre conducteur.

Temps d'amorçage : temps nécessaire au thyristor pour passer de l'état bloqué à l'état conducteur, sous l'action d'une impulsion d'amorçage. Ce temps est fonction du temps de montée de l'impulsion et de l'intensité du courant d'arrêt.

■ Les thyristors sont principalement utilisés dans les circuits à fort courant. Ils permettent de faire varier la puissance dissipée dans une charge en commandant la gâchette avec des impulsions plus ou moins longues. Les thyristors peuvent être utilisés dans des circuits alimentés par des tensions alternatives, mais seules les alternances positives peuvent donner lieu à conduction. Dans ce cas, les impulsions de gâchette, de durées variables, doivent cependant être en phase avec la tension d'alimentation du circuit.

▷ L'utilisation des thyristors reste limitée au domaine des basses fréquences jusqu'au kHz. Les tensions d'utilisation peuvent atteindre quelques kV et le courant quelques kA.

29.6.5.1 Triac

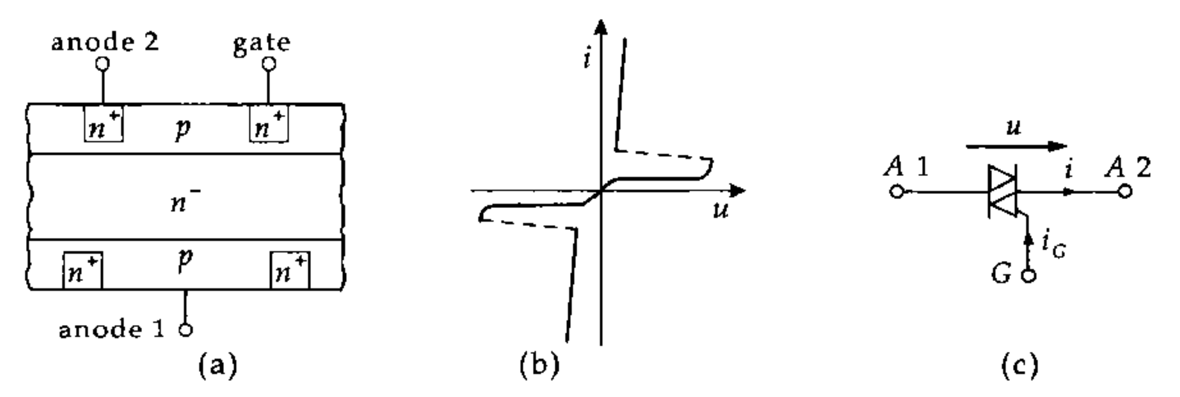


Fig. 29.103 : *(a) : constitution, (b) : caractéristique et (c) : symbole d'un Triac*

Triac (**TRI**ode Alternating Current switch) : fonctionne comme deux thyristors montés tête-bêche, parfois appelé **thyristor bidirectionnel**. Un Triac peut alors devenir conducteur dans les deux sens. Ils sont souvent utilisés pour des applications de variateurs de puissance en courant alternatif. Des impulsions plus ou moins longues, appliquées à la gâchette, permettent alors au Triac d'être conducteur pendant une partie des alternances seulement : variateur de vitesse de moteur à courant alternatif, gradateur d'éclairage.

29.6.5.2 Thyristor désamorçable (GTO)

Thyristor désamorçable, (**GTO**, **G**ate **T**urn **O**ff Thyristor) : thyristor qui peut être amorcé par une impulsion de gâchette positive et désamorcé par une impulsion négative. Il existe des GTO asymétriques et symétriques.

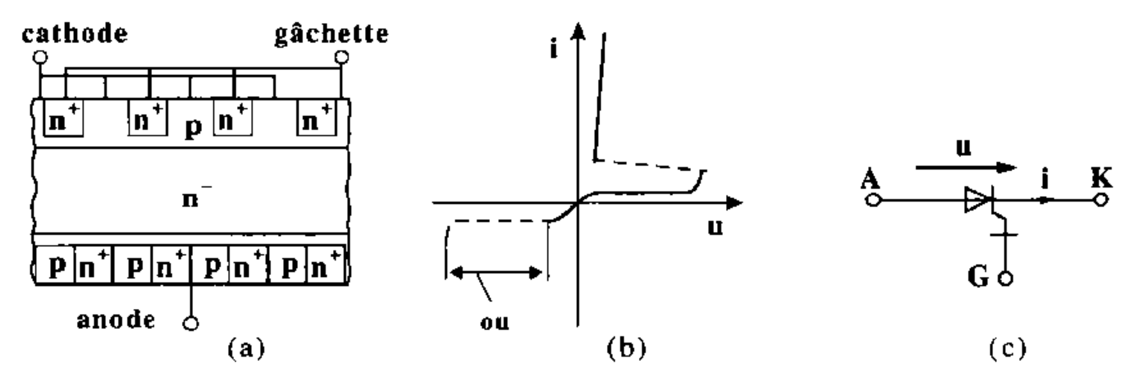


Fig. 29.104 : *(a) : constitution, (b) : caractéristique et (c) : symbole d'un thyristor GTO*

- Application : génération d'une tension sinusoïdale à partir d'une tension continue à l'aide d'impulsions (alimentation à découpage).

29.6.5.3 Thyristor bipolaire à grille isolée (IGBT)

IGBT, Insulated-Gate-Bipolar-Thyristor : thyristor bipolaire à grille isolée, combinaison de la technologie MOS et de celle des transistors bipolaires. La puissance nécessaire pour amorcer ou désamorcer est alors extrêmement faible ; la résistance interne est très faible.

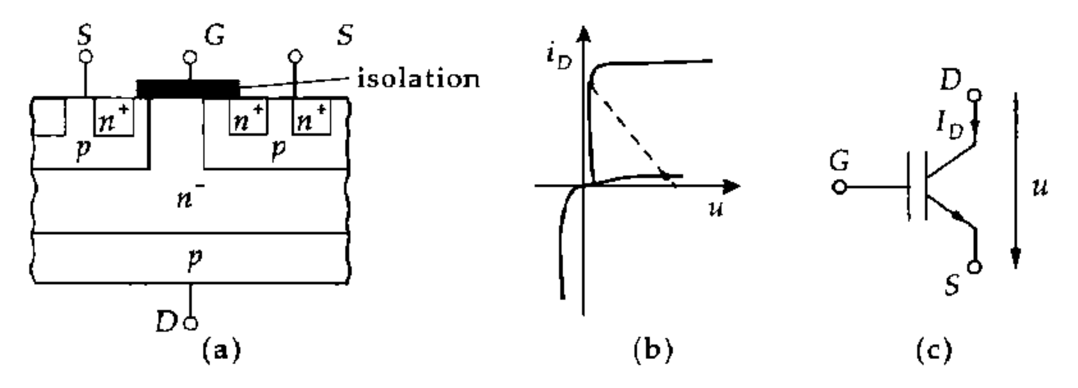


Fig. 29.105 : *(a) : constitution, (b) : caractéristique et (c) : symbole d'un IGBT*

29.6.6 Circuits intégrés (IC)

Circuit intégré (IC : Integrated Circuit) : circuit électronique de petites dimensions, comprenant un grand nombre d'éléments (*résistances, capacités, inductances, diodes et transistors*), obtenu un déposant des substances isolantes et conductrices sur un même substrat semiconducteur.

29.6.6.1 Fabrication de circuits intégrés

Plaquette ou parfois le terme anglais **Wafer** : substrat de Silicium, sur lequel sont déposées les structures isolantes et conductrices nécessaires à l'obtention des fonctionnalités voulues du circuit intégré.

[M] **Épitaxie en phase vapeur** : procédé de déposition de couches cristallines minces de Silicium d'orientation constante par rapport au réseau cristallin du substrat. Les vapeurs de silicium sont produites par réaction chimique, sous vide, dans un évaporateur à haute température, puis condensent sur le substrat.

■ À 1250 °C le chlorure de Silicium $SiCl_4$ est réduit par de l'Hydrogène H_2 en atomes de Si et acide chlorhydrique HCl. L'acide HCl est éliminé et le Silicium se dépose sur la plaquette.

▷ Les couches successives peuvent être **dopées** en ajoutant des gaz contenant du Bore (dopage p) ou du Phosphore (dopage n).

Oxydation : production d'une mince couche de SiO_2 à la surface de la plaquette pour :

- isolation
- protection des jonctions p-n contre les impuretés (passivation)
- constitution de composants des circuits

29.6.6.2 Élaboration des structures d'un circuit

Méthode générale (voir Fig. 29.106) :

(a) production d'une couche d'oxyde de Silicium SiO_2 sur le substrat ;
(b) déposition d'une couche photosensible ;
(c) **photolithographie** : masquage des régions sous lesquelles l'oxyde SiO_2 doit être enlevé et illumination avec de la lumière UV (modifie la nature chimique des parties illuminées de la couche photosensible).
(d) **développement** dans une solution appropriée. La couche photosensible illuminée subsiste, tandis que les parties non illuminées (sous le masque) sont éliminées ;
(e) attaque chimique et élimination du SiO_2 des parties non protégées par le vernis photosensible ;
(f) élimination des restes du vernis photosensible.

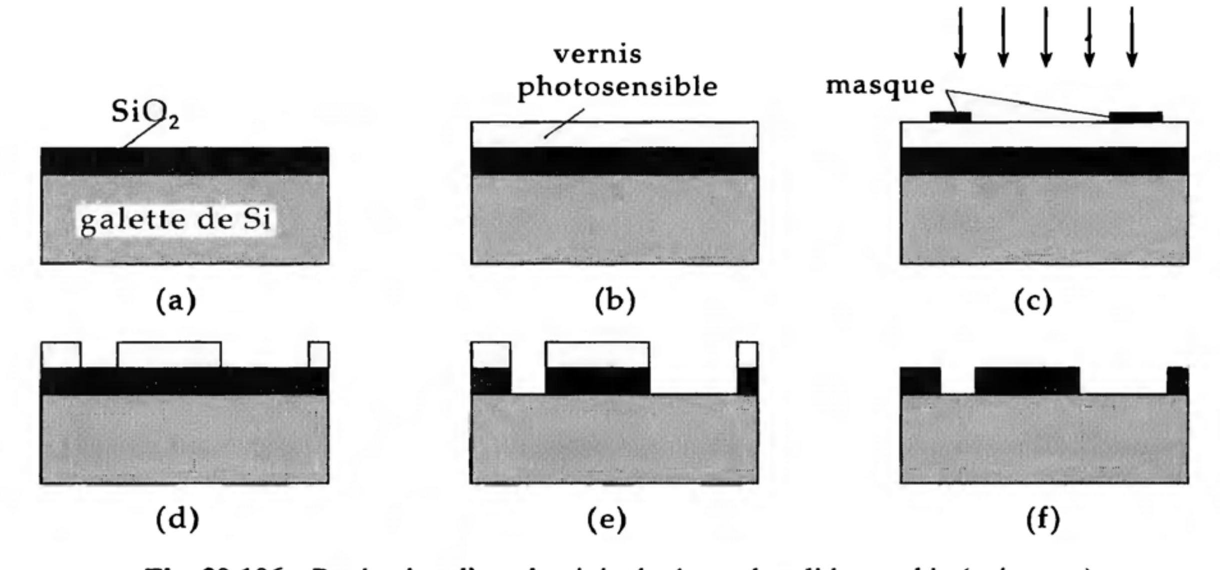


Fig. 29.106 : *Production d'un circuit intégré par photolithographie (voir texte)*

Dopage

M Le Silicium est chauffé à environ 1000 °C dans une atmosphère enrichie en Bore (ou en Phosphore). Dans le réseau cristallin, par diffusion thermique, quelques atomes de Silicium sont remplacés par des atomes de Bore (ou de Phosphore).

● La profondeur de pénétration de la diffusion dépend de la **température** et de **la durée** du processus.

■ Si le substrat est chauffé à 1000 °C, en 1 heure, des atomes de Phosphore peuvent pénétrer dans le substrat juqu'à une profondeur de 1 μm.

▹ La vitesse de diffusion dans l'oxyde SiO_2 est sensiblement plus faible que dans le Silicium pur. Les structures à doper sont définies par **photolithographie**.

Réalisation de composants électroniques

Transistor et **diode** (voir Fig. 29.107) :

(a) déposition d'une couche dopée **n**, sur un substrat dopé p : une partie de cette couche deviendra le Collecteur ;
(b) oxydation puis photolithographie pour réaliser la structure (b) ;
(c) diffusion thermique d'atomes accepteurs dans la partie ouverte de la couche dopée n : cette zone deviendra la Base du transistor ;
(d) oxydation puis photolithographie pour diffuser une petite région n à l'intérieur de la couche **p** (Base) : cette zone deviendra l'Émetteur ;
(e) oxydation et production de trois fenêtres dans la nouvelle couche d'oxyde, de manière à produire les contacts métalliques par évaporation d'aluminium.

▹ pour la réalisation de diodes, les étapes (d) et (e) ne sont pas nécessaires .

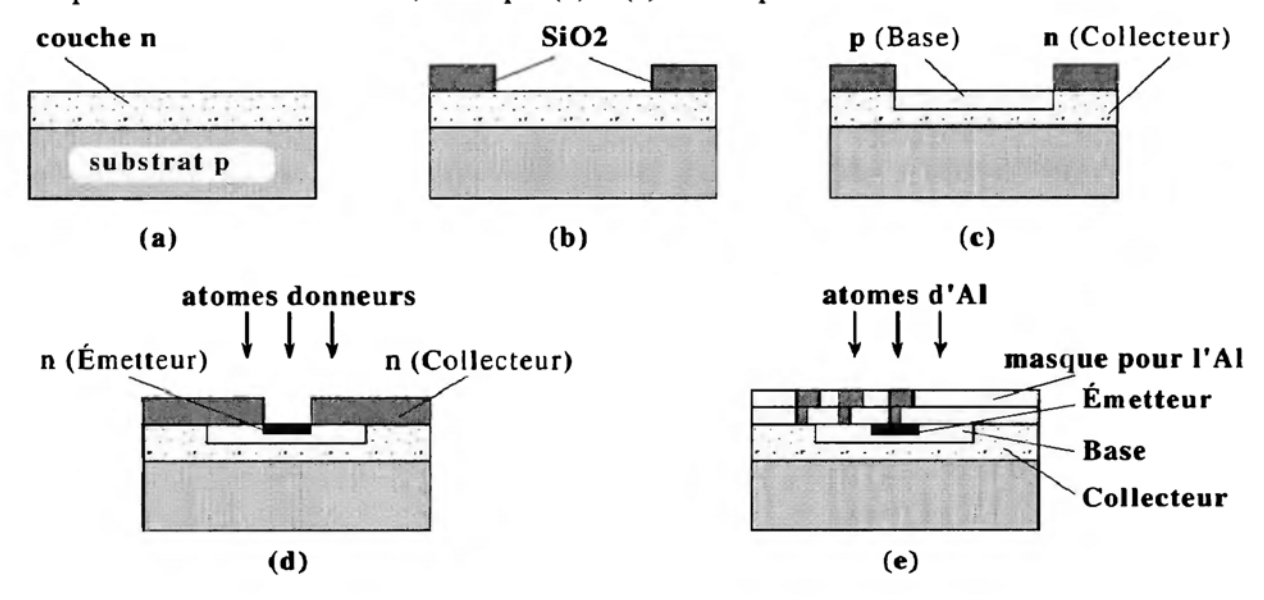


Fig. 29.107 : *Réalisation d'un transistor (voir texte)*

Résistance : une couche étroite **p** est implantée dans une couche dopée **n**. La jonction p-n ainsi réalisée, polarisée en inverse, constitue une résistance. La valeur de la résistance dépend de la longueur du canal **p**, de sa section et de la concentration du dopage.

▹ À cause de la conductivité élevée du Silicium, il est difficile de réaliser des résistances de forte valeur ayant un encombrement réduit. Souvent, une résistance est remplacée par un transistor dont le courant de Base détermine la valeur de la résistance.

Condensateur : un condensateur est essentiellement constitué de deux électrodes conductrices séparées par un isolant. Une des électrodes est, la plupart du temps, une région fortement dopée **n** ou **p**. Sur cette zone, on produit une couche isolante d'oxyde de Silicium SiO_2. La deuxième électrode est généralement produite par évaporation d'une mince couche d'aluminium sur la couche d'oxyde.

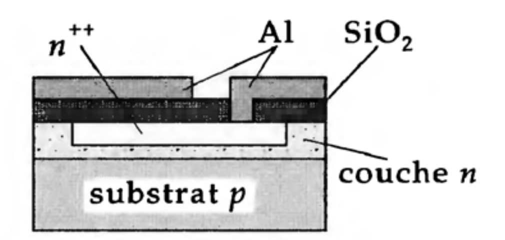


Fig. 29.108 : *Condensateur réalisé sur une plaquette de Silicium*

- Dans la plupart des cas, les circuits intégrés sont réalisés en **technologie MOS**. La faible consommation des fonctions transistor individuelles évite l'échauffement exagéré du composant.

▷ Pour des circuits à très haute intégration (grand nombre de transistors), des problèmes de dissipation de chaleur peuvent néanmoins survenir. On équipe parfois ces circuits d'un dispositif de refroidissement (radiateur, ventilateur ou circulation d'un fluide réfrigérant).

M En pratique, le refroidissement est assuré un établissant un contact thermique avec un matériau bon conducteur de chaleur, en général du cuivre. Plus récemment on a montré que le **diamant** (98.9 % ^{12}C et 1.1 % ^{13}C), en diminuant son contenu en ^{13}C (à 0.001 %) et en le refroidissant à 80 K (azote liquide), atteint une conductibilité thermique $\lambda > 2000$ W cm^{-1} K^{-1}, environ **500 fois** plus grande que celle du cuivre : $\lambda = 4.01$ W cm^{-1} K^{-1}.

29.6.7 Amplificateur opérationnel

Amplificateur opérationnel : amplificateur de tension différentiel, de très grand gain, comportant plusieurs étages amplificateurs. Par l'adjonction de **composants extérieurs**, il peut réaliser des **opérations mathématiques** sur des signaux analogiques de basse fréquence et de faible puissance.

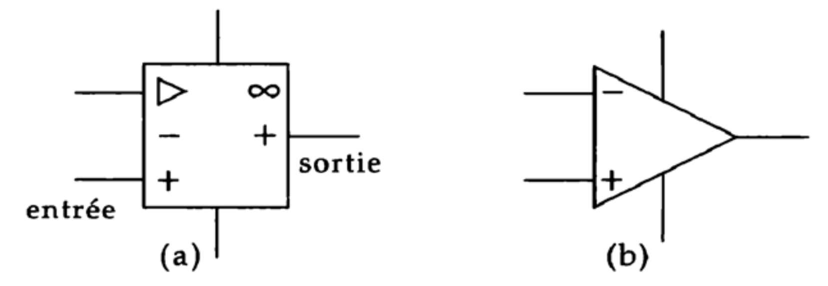


Fig. 29.109 : *(a) : symbole normalisé, (b) : ancien symbole d'un amplificateur opérationnel. - désigne l'entrée inverseuse, + l'entrée non inverseuse*

▷ Les connexions verticales représentent les alimentations (symétriques) de l'amplificateur opérationnel et sont généralement omises dans les schémas.

Entrée inverseuse : le signe (phase) des signaux appliqués à cette entrée, après amplification, est inversé à la sortie.

Entrée non inverseuse : le signe (phase) des signaux appliqués à cette entrée est conservé après amplification.

Amplificateur différentiel ou comparateur : composant de base d'un amplificateur opérationnel. Il est composé de deux transistors appariés. L'amplitude du signal de sortie est proportionnel à la différence des signaux appliqués à chaque transistor.

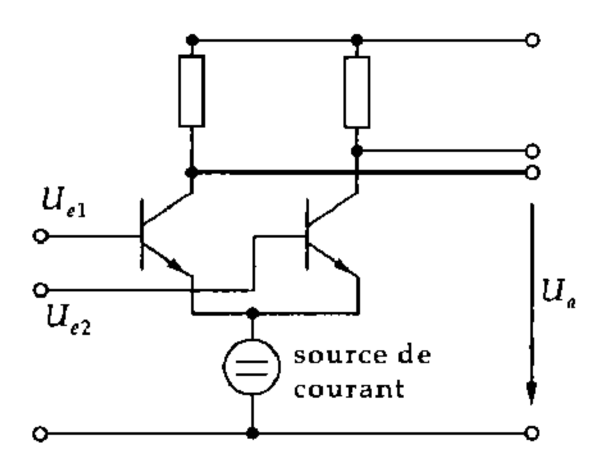


Fig. 29.110 : *Amplificateur différentiel*

M Si les deux entrées sont au **même** potentiel, la sortie devrait être $U_a = 0$. En **pratique**, ceci n'est cependant pas le cas et la sortie est **toujours** $U_a \neq 0$. La dispersion des valeurs des composants et des caractéristiques des transistors fait que l'amplificateur n'est pas symétrique.

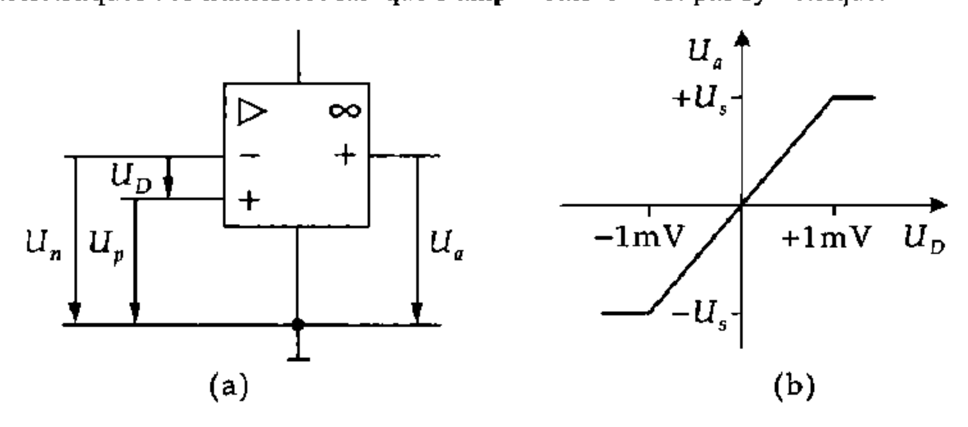


Fig. 29.111 : *(a) : schéma de principe et (b) : caractéristique d'un amplificateur opérationnel*

- Un amplificateur opérationnel amplifie la **différence** des tensions appliquées à ses deux entrées.

Tension de sortie d'un amplificateur opérationnel			
	Symbole	Unité	Dénomination
$U_a = A(U_p - U_n) = AU_D$	U_a	V	tension de sortie
	U_p	V	tension à l'entrée non inverseuse
	U_n	V	tension à l'entrée inverseuse
	U_D	V	différence de tensions
	A	1	amplification

- À cause du grand gain d'un amplificateur opérationnel, la différence des signaux qui lui sont appliqués doit rester faible (de l'ordre de quelques millivolts).

Domaine linéaire : domaine de valeur de la différence U_D des tensions, pour lequel les signaux de sortie sont directement proportionnels à U_D (jusqu'à ± 1 mV).

Région de saturation : lorsque la différence U_D des tensions d'entrée excède le domaine linéaire, la tension de sortie n'est plus proportionnelle à U_D. La tension de sortie ne suit plus les variations de U_D et reste constante et égale à la tension d'alimentation $\pm U_S$ de l'amplificateur opérationnel.

Amplificateur opérationnel idéal : amplificateur parfait dont les caractéristiques sont :

	idéal	réel
Amplification en boucle ouverte A	∞	$10^3 \dots 10^6$
Résistance d'entrée R_e (aux deux entrées)	∞	$\approx 1\ \text{M}\Omega$
Résistance de sortie R_a	0	$\approx 100\ \Omega$

29.6.7.1 Amplificateur opérationnel en boucle fermée

- Afin d'obtenir un point de fonctionnement stable dans le **domaine linéaire**, empêcher sa saturation et pour réaliser l'opération mathématique souhaitée, l'amplificateur opérationnel est muni d'un circuit de **contre réaction** (fonctionnement en boucle fermée).

Contre réaction : le signal de sortie U_a de l'amplificateur opérationnel, en partie ou en totalité, est réinjecté sur **l'entrée inverseuse** (en opposition de phase).

29.6.7.2 Amplificateur inverseur

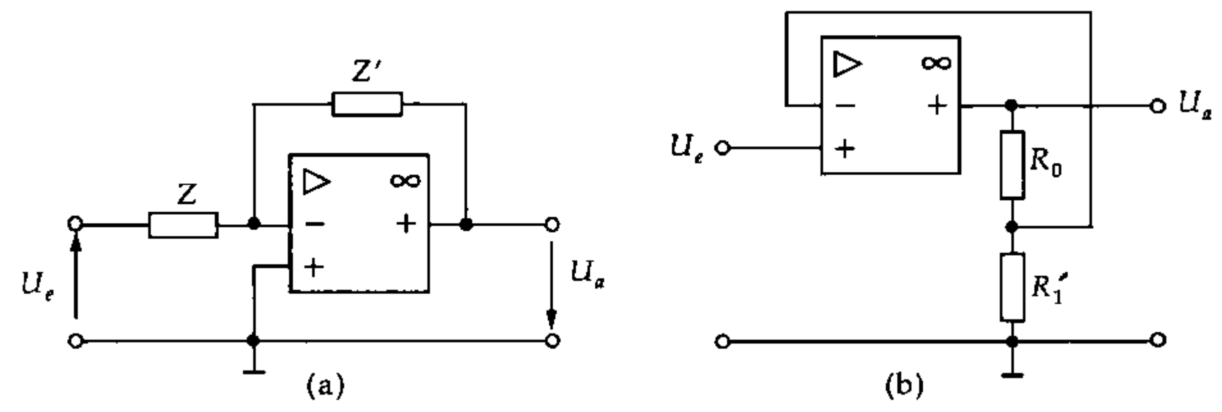


Fig. 29.112 : *(a) : amplificateur inverseur, (b) : amplificateur non inverseur. Z et Z' désignent des résistances ou des impédances complexes.*

Gain de l'amplificateur inverseur			1
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{U_a}{U_e} = -\frac{Z'}{Z}\frac{A\beta}{1+A\beta} \approx -\frac{Z'}{Z}$$ $$\beta \approx \frac{Z}{Z+Z'}$$	U_a	V	tension de sortie
	U_e	V	tension d'entrée
	Z, Z'	Ω	résistances ou impédances
	A	1	amplification en boucle ouverte
	β	1	taux de contre réaction

- Parce que l'amplification en boucle ouverte est très grande, le gain d'un amplificateur inverseur est **indépendant** de l'architecture interne de l'amplificateur opérationnel et **ne dépend** que des circuits extérieurs.

- L'amplificateur inverseur effectue la **multiplication de U_e par un facteur constant** $-Z'/Z$.

▷ À partir d'un amplificateur opérationnel on peut aussi réaliser un amplificateur **non inverseur** (Fig 29.112 (b)) dont le gain est :

$$\frac{U_a}{U_e} = 1 + \frac{R_0}{R_1}$$

- Le gain d'un amplificateur non inverseur est relativement faible.

29.6.7.3 Amplificateur de sommation

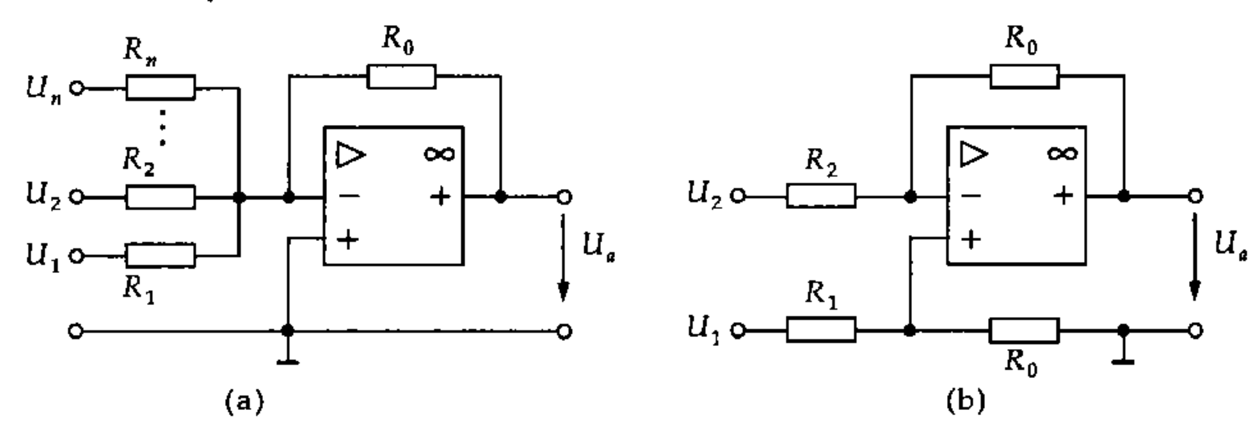


Fig. 29.113 : *(a) : amplificateur de sommation, (b) : amplificateur de somme et de différence*

- Les résistances $R_1 \dots R_n$ déterminent le facteur de pondération des tensions d'entrée $U_1 \dots U_n$. La tension de sortie correspond à la somme pondérée des tensions multipliée par un facteur constant déterminé par la résistance R_0.

Catactéristiques d'un amplificateur de sommation			
	Symbole	Unité	Dénomination
$U_a = -R_0\left(\frac{U_1}{R_1} + \cdots + \frac{U_n}{R_n}\right)$	U_a	V	tension de sortie
$U_a = -\frac{R_0}{R}(U_1 + \cdots + U_n)$	$U_1, \dots, U_n$	V	tensions d'entrée
pour $R = R_1 = \cdots = R_n$	R_0	Ω	résistance de contre réaction
	$R_1 \dots R_n$	Ω	pondération des entrées

Amplificateur de soustraction : analogue à l'amplificateur de sommation, les signaux à soustraire sont appliqués à l'entrée **non inverseuse** avec, éventuellement, des résistances de pondération.

▷ Addition et soustraction peuvent être effectuées **simultanément** avec un amplificateur opérationnel unique.

29.6.7.4 Intégrateur

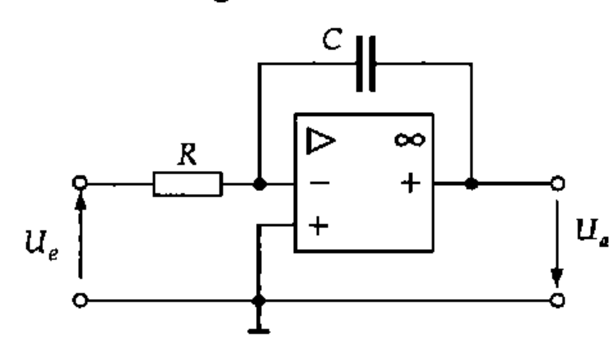


Fig. 29.114 : *Schéma de principe d'un intégrateur*

Pour des signaux sinusoïdaux $U_e(t) \sim e^{j\omega t}$ de pulsation ω, l'impédance Z_C d'un condensateur de capacité C est :

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Avec $Z = R$ et $Z' = Z_C$, le signal de sortie d'un amplificateur opérationnel représente l'intégrale du signal sinusoïdal d'entrée :

Intégrateur de signaux harmoniques	Symbole	Unité	Dénomination
$U_a = -\frac{U_e}{j\omega RC}$	U_a	V	tension de sortie
$= -\frac{1}{RC}\int_0^t U_e(t')\,dt'$	U_e	V	tension d'entrée
	R	Ω	résistance de charge de C
	C	F	capacité du condensateur

▷ Puisque toute fonction dépendante du temps peut être décomposée en une somme de fonctions sinusoïdales (série de Fourier), toute forme de signal peut être intégrée de cette manière. L'intégrale de la somme est égale à la somme des intégrales.

Intégrateur de somme : le courant de charge du condensateur C est injecté, à partir des différentes sources de signaux à intégrer, à travers des résistances séparées $R_1 \ldots R_n$ (à la manière de l'amplificateur de sommation) :

$$U_a = -\frac{1}{C}\int_0^t \left(\frac{U_1}{R_1} + \cdots + \frac{U_n}{R_n}\right) dt'$$

29.6.7.5 Différentiateur

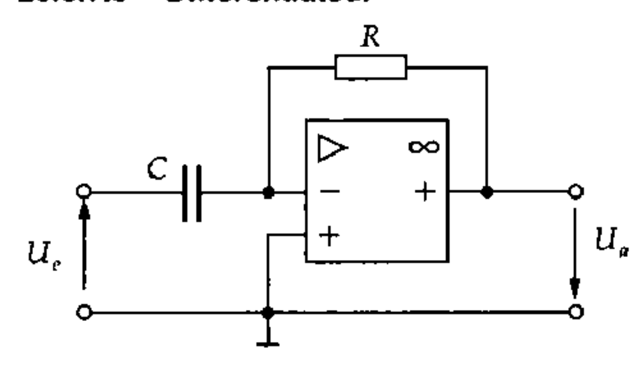


Fig. 29.115 : *Schéma de principe d'un différentiateur*

Pour une tension harmonique $U_e(t)$, avec $Z = 1/(j\omega C)$ et $Z' = R$ on a :

Différentiateur de signaux harmoniques	Symbole	Unité	Dénomination
$U_a = -j\omega RC \cdot U_e$	U_a	V	tension de sortie
$= -RC\frac{dU_e}{dt}$	U_e	V	tension d'entrée
	R	Ω	résistance de charge de C
	C	F	capacité du condensateur

● De même que pour l'intégrateur, toute forme de signaux peut être différenciée.

▷ Toutefois, en pratique la différentiation est plus difficile à réaliser que l'intégration :

- Pour des fréquences ω élevées les approximations de l'amplificateur opérationnel idéal sont mal vérifiées car le gain en boucle ouverte $A \to A/(j\omega RC)$ diminue pour les hautes fréquences et l'approximation $A \to \infty$ n'est plus valable.
- Les composantes haute fréquence du bruit électronique peuvent contribuer de manière non négligeable à la différentiation.
- Pour les fortes valeurs de ω, et par conséquent pour les faibles valeurs de l'impédance du condensateur $1/(jC\omega)$, il faut tenir compte de la résistance interne R_i du générateur de signaux.

M Application : **calculateurs analogiques**.
À l'aide d'amplificateurs opérationnels, on peut résoudre des problèmes mathématiques dont les solutions analytiques sont difficiles. On peut, par exemple, résoudre des équations différentielles qui régissent l'écoulement des fluides ou les distributions de potentiel électrique dans des structures complexes.

29.6.7.6 Amplificateu suiveur

Amplificateu suiveur ou suiveur de tension : amplificateur non inverseur dont la résistance R_0 est nulle et la résistance R_1 infinie (100% de contre réaction) : le signal de sortie suit le signal d'entrée et lui est en tout point conforme.

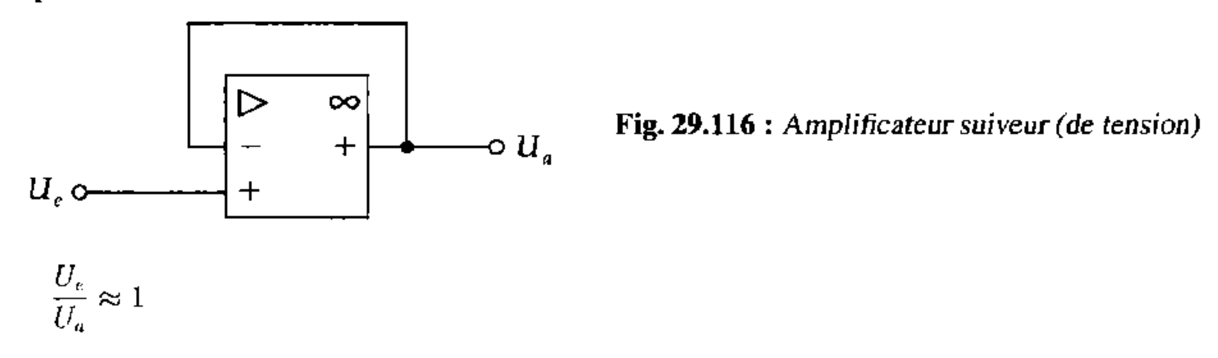


Fig. 29.116 : *Amplificateur suiveur (de tension)*

$$\frac{U_e}{U_a} \approx 1$$

- La résistance de sortie est très faible alors que la résistance d'entrée est élevée.

- Le suiveur de tension est souvent utilisé comme **adaptateur d'impédance** .

29.6.7.7 Amplificateurs opérationnels à réaction

Réaction : le signal de sortie est couplé en partie à l'entrée **non inverseuse**. À cause du grand gain d'un amplificateur opérationnel, celui-ci est alors **saturé** et sa tension de sortie devient égale à sa **tension** d'alimentation.

Bascule bistable : montage utilisant un amplificateur opérationnel et qui possède deux états stables (saturé ou bloqué). Les bascules bistables sont, entre autres applications, utilisées pour produire des **signaux rectangulaires**.

29.6.7.8 Trigger de Schmitt

Trigger de Schmitt : ou déclencheur de Schmitt, circuit bistable, dont chacun des deux états stables correspond à une tension d'entrée donnée. Le basculement d'un état stable à l'autre doit se faire très rapidement.

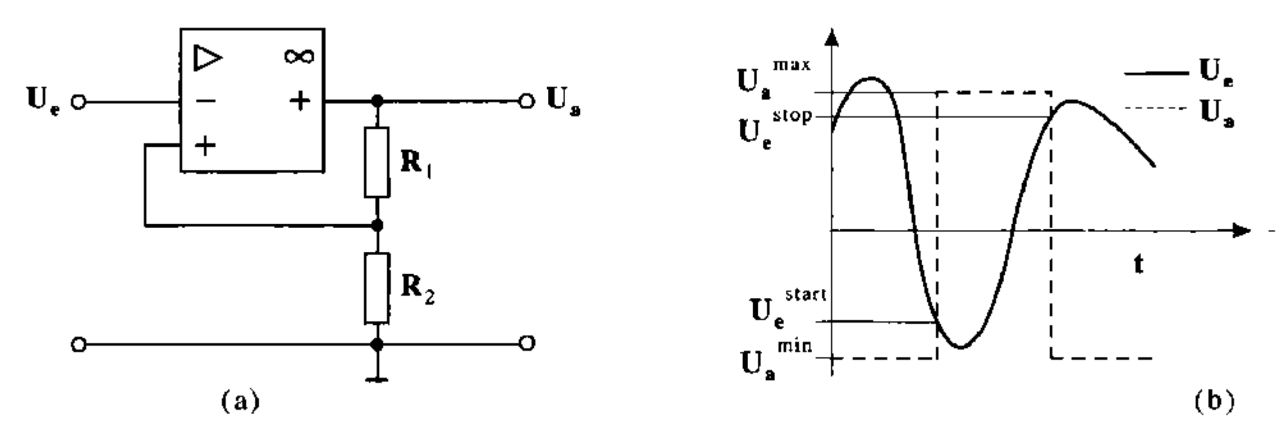


Fig. 29.117 : *Trigger de Schmitt, (a) : schéma de principe, (b) : diagramme de fonctionnement*

Lorsque l'amplitude du signal d'entrée dépasse la valeur U_e^{start}, le circuit bascule dans l'état U_a^{max}. Lorsque l'amplitude du signal atteint la valeur U_e^{stop}, le circuit rebascule dans l'état U_a^{min} initial.

$$U_e^{\text{start}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_a^{\text{min}}$$

$$U_e^{\text{stop}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_a^{\text{max}}$$

Le trigger de Schmitt est un comparateur à hystérésis.

Hystérésis de commutation : différence $U_e^{\text{stop}} - U_e^{\text{start}}$. Elle est déterminée par la valeur des composants extérieurs R_1 et R_2 et ne peut pas être diminuée infiniment :

$$U_e^{\text{stop}} - U_e^{\text{start}} = (U_a^{\text{max}} - U_a^{\text{min}})(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{A})$$

$$\approx (U_a^{\text{max}} - U_a^{\text{min}})\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

▷ $R_1/(R_1 + R_2)$ doit **toujours** rester supérieur à A^{-1}.

29.7 Supraconduction

Supraconduction : phénomène présenté par certains métaux, alliages ou céramiques dont la résistivité électrique devient pratiquement nulle au-dessous d'une certaine température critique (Fig. 29.118). Ce phénomène fut découvert en 1911 par Kammerling Onnes.

▷ Des métaux ou des alliages magnétiques ne sont pas supraconducteurs ; les corrélations magnétiques détruisent les propriétés de supraconductivité.

Deux effets sont particulièrement importants pour la supraconductivité :

- La résistivité électrique $\rho(T)$, au-dessous d'une valeur caractéristique de la température T_c, tombe brusquement à une valeur qu'il n'est pas possible de distinguer expérimentalement de la valeur $\rho = 0$.
- Pour des températures $T < T_c$ et des champs magnétiques $B < B_{c1}$, les corps sont parfaitement diamagnétiques (effet Meissner-Ochsenfeld).

29.7.1 Propriétés fondamentales des supraconducteurs

1. Effet Meissner-Ochsenfeld

Effet Meissner-Ochsenfeld ou **Effet Meissner** : diamagnétisme parfait observé sur un métal pur (supraconducteur de première espèce) en présence d'un champ magnétique faible ($B < B_{c1}$) et à basse température ($T < T_c$). Le supraconducteur acquiert une aimantation M qui s'oppose à B, de sorte que l'induction magnétique est nulle à l'intérieur de l'échantillon.

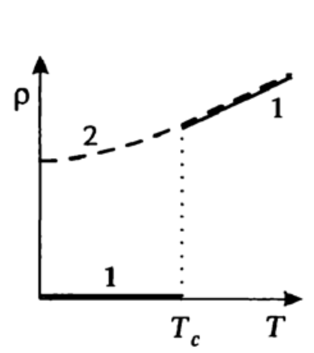


Fig. 29.118 : *Résistivité en fonction de la température.*
(1) supraconducteur,
(2) conducteur normal

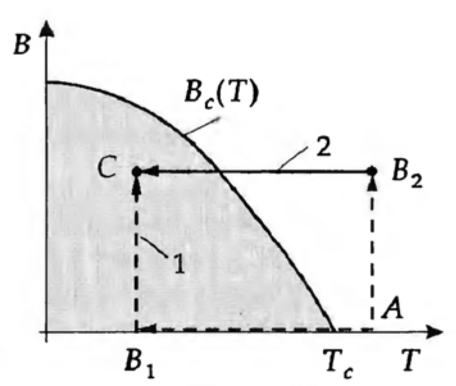


Fig. 29.119 : *Champ en fonction de la température pour un supraconducteur et un conducteur parfait. Pour un conducteur parfait, l'état final (C) dépend du chemin suivi. Pour un supraconducteur, C est indépendant du chemin (état thermodynamiquement stable).*

▷ Au-dessous de T_c (dans l'état supraconducteur), les grandeurs thermodynamiques et quelques propriétés physiques de la plupart des supraconducteurs dépendent exponentiellement de la température. Ceci indique qu'il y a des états d'énergie vides près du niveau de Fermi.

▷ La susceptibilité magnétique d'un supraconducteur parfait de première espèce est :

$\chi = -\frac{1}{4\pi}$ (système cgs) $\chi = -1$ (système SI)

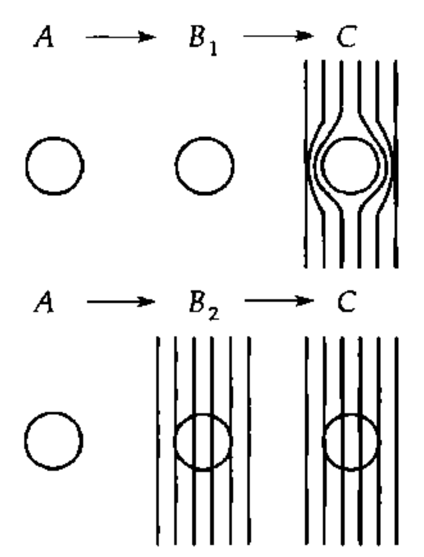


Fig. 29.120 : *États pour les chemins 1 et 2 dans le cas de conducteurs parfaits*

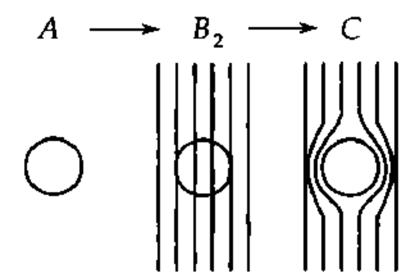


Fig. 29.121 : *États pour le chemins 2 dans le cas d'un supraconducteur de première espèce*

▷ La capacité calorifique présente une anomalie λ à T_c .
Pour $T < T_c$, son comportement est exponentiel.

▷ À l'état supraconducteur, l'amortissement ultrasonore se comporte comme la capacité calorifique.

M La dépendance de l'amortissement ultrasonore en fonction de la température, proportionnel au nombre d'électrons de conduction, fut l'une des premières confirmations expérimentales de la théorie BCS.

2. Théorie de la supraconduction

Théorie BCS (d'après Bardeen, Cooper et Schrieffer, prix Nobel 1972) : description microscopique de la supraconductivité. Elle décrit le couplage de deux électrons de spins et de quantités de mouvement opposés à l'aide d'un phonon.

L'interaction coulombienne entre un électron et les ions du réseau cristallin provoque une déformation locale de ce réseau. À cause de l'inertie due à la masse des atomes du cristal, la déformation n'est pas immédiatement annulée par l'agitation thermique. Un deuxième électron peut alors se déplacer dans le champ de l'excédent de charge positive dû à la déformation produite par le premier électron qui se déplace beaucoup plus vite que les ions positifs déplacés du réseau. Le deuxième électron sentira cette charge positive même lorsque le premier électron sera loin de lui. De ce fait, il existe une interaction **attractive** à longue portée entre ces deux électrons. Ce couplage est favorisé énergétiquement, si les spins et les quantités de mouvement des deux électrons sont antiparallèles.

Ces deux électrons de conduction, par l'intermédiaire d'un phonon, constituent une quasi-particule appelée **paire de Cooper**. Par la formation de la paire, chaque électron gagne une énergie $E_G/2$. De plus, dans la distribution des électrons au voisinage du niveau de Fermi, il se forme une bande d'énergie interdite de largeur E_G. Cette bande interdite détermine les propriétés physiques des supraconducteurs BCS. Puisque sa largeur décroît exponentiellement lorsque la température s'abaisse, toutes les propriétés physiques liées aux électrons de conduction subissent la même variation exponentielle en fonction de la température.

Paire de Cooper : quasi-particule de la théorie BCS. C'est un *boson*. Son spin est entier, elle obéit par conséquent à la statistique de Bose-Einstein. Les paires de Cooper ne sont pas soumises au principe d'exclusion de Pauli.

- Les paires de Cooper peuvent toutes occuper l'état de plus basse énergie (condensation de Bose-Einstein). Leurs relations de phase sont fixes, ce qui conduit à la formation d'états quantiques macroscopiques.
- Dans leur mouvement, les paires de Cooper ne subissent pas de diffusion inélastique tant que la perte d'énergie reste inférieure à la largeur de la bande interdite.

3. Effet isotopique et effet Josephson

Effet isotopique : la température critique T_c d'un supraconducteur dépend de la masse M de l'isotope :

$$M^{\alpha} \cdot T_c = \text{const.} \qquad \alpha \approx 0,5$$

M Le paramètre α dépend des isotopes, sa valeur expérimentale est aux environs de 1/2. Une telle valeur est attendue d'après la théorie BCS. L'effet isotopique est utilisé expérimentalment pour la vérification de la théorie BCS et la mise en évidence des vibrations du réseau lors de la formation de paires de Cooper.

Effet Josephson : effet macroscopique typiquement quantique, qui consiste en l'existence d'un courant alternatif entre deux couches supraconductrices séparées par un mince film d'isolant. Le phénomène est dû au passage de paires de Cooper par effet tunnel à travers la couche isolante. On peut, de cette manière, réaliser des **jonctions Josephson.**

M Les effets de cohérence de phase dans les supraconducteurs offrent des possibilités de mesure de champs magnétiques extrèmement faibles (10^{-13}T). De tels systèmes sont appelés des **SQUID** (superconducting quantum interferometer device). Ces **magnétomètres de Josephson** sont utilisés pour des mesures en physique du solide, en géophysique et plus particulièrement en biophysique et en médecine.

4. Densité de courant critique

Densité de courant pour laquelle l'état supraconducteur passe à l'état conducteur normal. Ceci a lieu lorsque la perte d'énergie lors des diffusions inélastiques des paires de Cooper devient supérieure à la largeur de la bande interdite.

- La densité de courant est $j = 2env$, où n est le nombre de paires de Cooper par unité de volume et v leur vitesse de migration. On observe un réseau cristallin de masse M contenant un défaut. Le réseau se déplace à la vitesse v par rapport au gaz d'électrons. Si lors d'une collision, une quantité d'énergie ε est transférée au cristal, les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement imposent :
$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv'^2 + \varepsilon \quad M\vec{\mathbf{v}} = M\vec{\mathbf{v}}' + \hbar\vec{\mathbf{k}}$$
d'où :
$$\hbar\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{v}} + \frac{\hbar^2k^2}{2M} + \varepsilon = 0$$
Si la masse du cristal est très grande ($M \to \infty$), alors on a :
$$v_c = \frac{\varepsilon}{\hbar k}$$
avec v_c : vitesse correspondant à l'énergie $\varepsilon = E_g$. L'existence de la bande interdite de largeur E_g empêche la diffusion inélastique pour les vitesses $v < v_c$. Pour des vitesses plus grandes, la diffusion inélastique est possible.

5. Induction magnétique critique

B_c : conséquence de la densité de courant critique. Au-delà d'une valeur critique du champ magnétique, la supraconductivité disparaît.

■ En dehors des systèmes SQUID, la construction d'électroaimants à champ très élevé ($\approx$ 10T) constitue la principale application de la supraconductivité. La densité de courant critique du matériau utilisé est alors la grandeur décisive. Actuellement on fabrique des câbles constitués d'un alliage de Niobium noyé dans une matrice de Cuivre.

Ancrage : dans les supraconducteur de deuxième espèce, pour des champs magnétiques supérieurs au champ critique, se forme un réseau régulier de *lignes de tourbillons* ou *vortex*. Le transport du courant exerce une force du type de celle de Laplace sur les lignes de flux qui peuvent alors subir un frottement de type visqueux. Cet effet dissipatif se traduit par une résistance finie et non plus nulle. Le blocage ou **ancrage** des **vortex** limite cet effet. Tout un art métallurgique est nécessaire pour créer des centres d'ancrage. Ces supraconducteurs sont appelés **supraconducteurs durs** et sont utilisés pour fabriquer les bobinages des aimants supraconducteurs.

Centres d'ancrage : lieux de piégeage des *vortex* créés par l'introduction contrôlée de défauts dans le réseau cristallin et de structures composites qui permettent d'atteindre de forts courants critiques et d'éviter des sauts de flux importants qui sont la cause d'un échauffement local jusqu'au voisinage de la température critique. Ils peuvent être constitués de dislocations ou de joints de grains.

6. Supraconducteurs de première et de deuxième espèce

Un champ magnétique suffisamment élevé perturbe la supraconductivité et le comportement diamagnétique. Les supraconducteurs de première et deuxième espèce se comportent différemment :

- **Première espèce** (ou **supraconducteurs doux**) : lorsque le champ magnétique augmente, une transition brusque entre supraconductivité et conductivité normale a lieu pour $H = H_c$. Les courants d'écrantage circulent dans une mince pellicule superficielle d'épaisseur λ (**pénétration de London**). Les valeurs du champ critique H_c sont trop faibles pour pouvoir utiliser les supraconducteurs de première espèce pour la construction de bobines d'aimants.
- **Deuxième espèce** (ou **supraconducteurs durs**) : ils sont souvent réalisés à partir d'alliages ou de métaux de transition de résistivité élevée à température normale, c'est-à-dire dont le libre parcours moyen des électrons est faible. Le passage de l'état supraconducteur à l'état normal de conduction ne s'effectue pas par un saut brusque, mais progressivement sur un intervalle de champ magnétique compris entre H_{c1} et H_{c2}. À $H_{c1} < H_c$, le champ commence à pénétrer l'échantillon sous forme de lignes de flux (vortex). Les points de sortie des lignes de flux peuvent être visualisés sous un microscope électronique à l'aide de fines particules ferromagnétiques ; elles forment des structures ordonnées. Le moment magnétique des vortex est quantifié. Ce n'est que pour des champs magnétiques $> H_{c2}$ que la supraconductivité disparaît complètement.

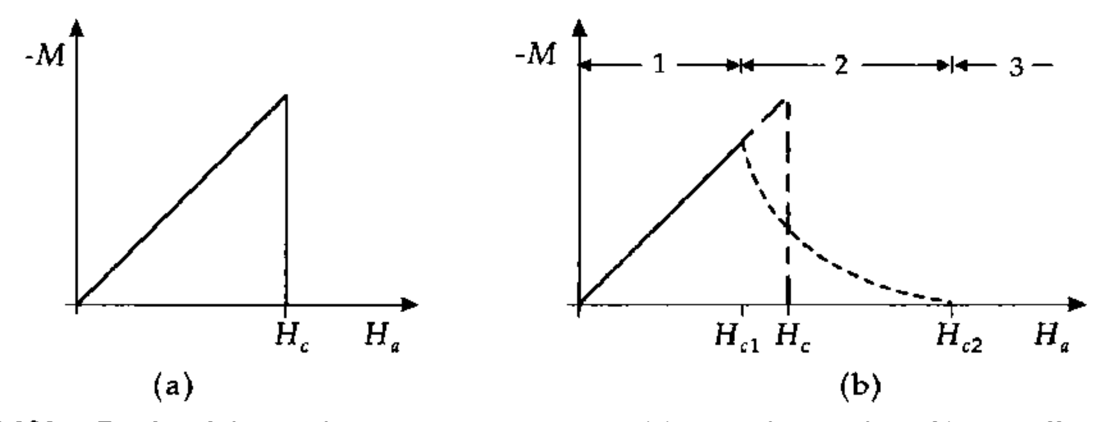


Fig. 29.122 : *Courbe d'aimantation de supraconducteurs. (a) : première espèce, (b) : deuxième espèce. 1 : supraconduction, 2 : état mixte, 3 : conduction normale. Le signe moins devant M correspond au comportement diamagnétique.*

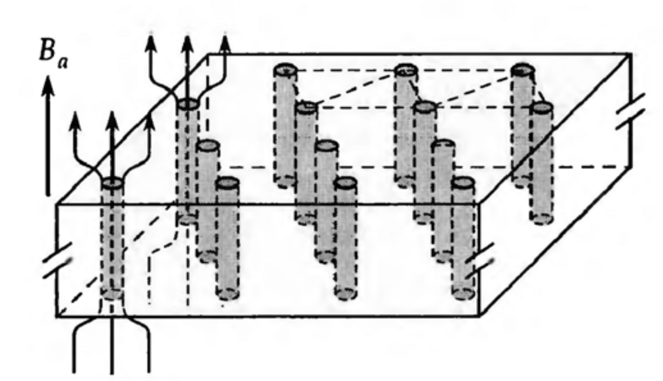


Fig. 29.123 : *Réseau des lignes de tourbillon ou vortex dans un supraconducteur de deuxième espèce*

Quantum de flux magnétique : grandeur élémentaire du flux magnétique. Sa valeur, dans les lignes de flux (vortex) est :

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{Vs}$$

▷ Le 2 du dénominateur est une conséquence de la double charge d'une paire de Cooper.

7. Profondeur de pénétration de London et paramètre de Ginsburg-Landau

Profondeur de pénétration de London : généralement désignée par la lettre λ. Elle définit la profondeur à laquelle le champ magnétique pénètre dans le supraconducteur.

Longueur de cohérence : généralement désignée par ξ. Elle correspond à l'étendue spatiale d'une paire de Cooper. Le rapport κ de λ à ξ est appelé le paramètre de Ginsburg-Landau, dont la valeur distingue les supraconducteurs de première et de deuxième espèce.

Paramètre de Ginsburg-Landau

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi}$$

- Supraconducteur de première espèce : $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$
- Supraconducteur de deuxième espèce : $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$

M Parce que, dans un supraconducteur, un champ magnétique est refoulé vers l'extérieur, on utilise des matériaux supraconducteurs pour constituer des blindages contre les champs électromagnétiques perturbateurs.

29.7.2 Supraconducteurs à haute température critique

Supraconducteurs à haute température (SHTc) : les matériaux supraconducteurs à haute température appartiennent à la famille des cuprates, caractérisés par des plans CuO_2, dont la température critique est $T_c \geq 80\,\mathrm{K}$. Ils cristallisent dans la structure tétragonale **perovskite**. Ceci produit une anisotropie des propriétés de supraconductivité.

▷ Les supraconducteurs à haute température, à cause de l'agitation thermique des tubes de flux magnétiques, présentent une résistance résiduelle appréciable.

▷ Les supraconducteurs à haute température seront très utilisés dans les applications industrielles. Pour obtenir l'état supraconducteur, il n'est plus besoin d'utiliser l'hélium liquide, très onéreux à produire : la température de l'azote liquide est suffisante.

Actuellement, les système supraconducteur à haute température le plus étudié est $YBa_2Cu_3O_7$. Selon la contenance en oxygène de l'échantillon, sa température critique est de 60 - 93 K.

▷ Ces supraconducteurs sont des céramiques, dont la densité de courant critique en l'absence de champ magnétique ($B = 0$ T) et à $T = 77$ K est relativement faible.

1. Familles de supraconducteurs à haute température et propriétés spécifiques

Le tableau suivant résume les principales familles de SHTc :

Désignation	Formule chimique	T_c maximale
123-HTSL	$(Y, Eu, Gd, \cdot)Ba_2CU_3O_7$	92 (YBCO)
Bismuth-22$(n-1)n$	$Bi_2Sr_2Ca_{n-1}Cu_nO_{2n+4}$	90 (Bi-2212) 122 (Bi2223) 90 (Bi-2234)
Thallium-22$(n-1)n$	$Tl_2Ba_2Ca_{n-1}Cu_nO_{2n+4}$	110 (Tl-2212) 127 (Tl-2223) 119 (Tl-2234)
Thallium-12$(n-1)n$	$Tl(Sr, Ba)_2Ca_{n-1}Cu_nO_{2n+3}$	90 (Tl-1212) 122 (Tl-1223) 122 (Tl-1234) 110 (Tl-1245)

- Tous les SHTc comportent un certain nombre de couches de Cu-O intercallées entre des couches constituées d'ions d'Y ou de Ca. Les couches conductrices de CuO sont séparées par des couches isolantes (BaO, SrO ou TcO).

- Les propriétés supraconductrices des SHTc sont fortement anisotropes :

  $j_C, H_{C_{1,2}}$ $\|$ à la couche de CuO est 5 à 10 fois plus élevée que $j_C, H_{C_{1,2}}$ $\perp$ à la couche de CuO.

▷ Les nombreux joints de grains dans les supraconducteurs céramiques constituent des barrières aux paires de Cooper et de ce fait, réduisent la densité de courant critique.

2. Procédés de fabrication de couches SHTc

Films épitaxiaux de SHTc : ils sont élaborés par croissance de couches épitaxiales minces sur un substrat monocristallin. Les substrats sont constitués de $SrTiO_3$, $LaHCO_3$ ou de Al_2O_3.

Texturation : méthode utilisée pour augmenter la densité de courant critique. La cristallisation est conduite de façon à c orienter les cristallites dans une direction donnée.

▷ Cette méthode est utilisée pour produire des céramiques SHTc compactes.

■ Résonateurs supraconducteurs : à cause de la largeur de leur bande interdite, les supraconducteurs à haute température subissent nettement moins de pertes en haute fréquence, jusqu'à 100 GHz, que les conducteurs normaux (Fig. 29.125).

■ Il est possible de réaliser des antennes miniaturisées pour des ondes millimétriques ou dans le domaine du GHz. Leurs pertes sont significativement plus faibles que pour des conducteurs normaux (Fig. 29.124).

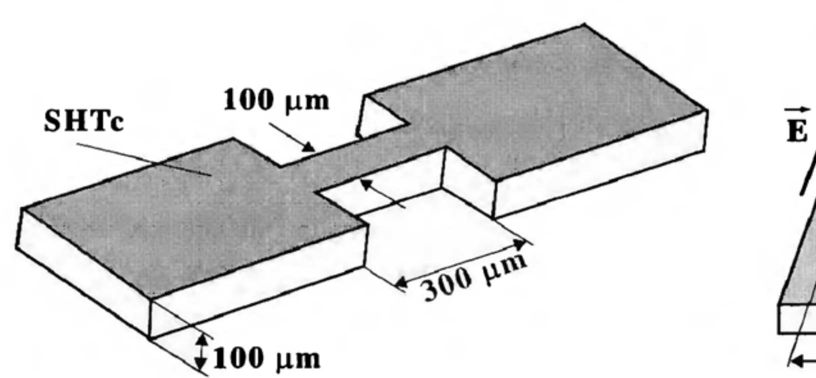


Fig. 29.124 : *Modèle d'une antenne constituée de couches de SHTc*

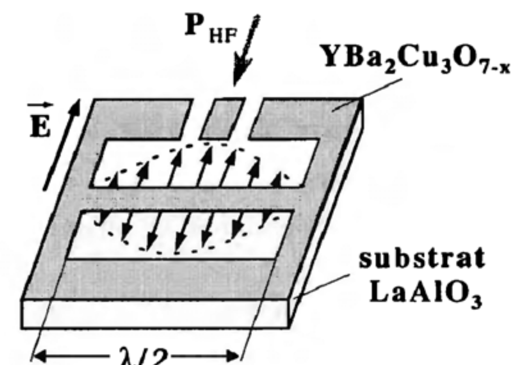


Fig. 29.125 : *Modèle d'un résonateur céramique en $YBa_2Cu_3O_7$*

■ Lignes à courant élevé dans des champs magnétiques faibles : on utilise la phase 2223 du Bismuth. La poudre céramique est introduite dans un tube en argent, qui est ensuite étiré ou laminé, puis soumis à un traitement thermique. On peut atteindre des densités de courant critiques de 13000 $\mathrm{A/cm^2}$ (à $T = 77$ K et 0 T).

▷ Les céramiques SHTc présentent quelques inconvénients :

- fragiles et cassants ;
- grande instabilité d'absorption de l'oxygène.

29.8 Propriétés magnétiques

Magnétisme : phénomène quantique, état de la matière qui se produit sous diverses formes dans les conducteurs et les isolants. Des systèmes métalliques, à très basse température, deviennent supraconducteurs ou magnétiques.

Aimantation, M : définie comme le quotient du moment magnétique et du volume d'un échantillon. M dépend de l'intensité du champ magnétique externe et de la température.

Définitions :

Système cgs : $\vec{\mathbf{B}}' = \vec{\mathbf{B}}_a + 4\pi\vec{\mathbf{M}}$

Système SI : $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_a + \mu_0\vec{\mathbf{M}}$

$\vec{\mathbf{B}}_a$: induction du champ magnétique externe.

Susceptibilité magnétique, χ_m : rapport de l'aimantation $|\vec{\mathbf{M}}|$ à l'intensité du champ magnétique $|\vec{\mathbf{H}}|$:

$$\chi_m = \frac{M}{H} \quad \text{respectivement} \quad \chi_m = \frac{\partial M}{\partial H}$$

Dimension : d'après la relation $\vec{\mathbf{B}} = \mu_0\vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{I}} = \mu_0(\vec{\mathbf{H}} + \vec{\mathbf{M}})$, la définition de la polarisation magnétique $\vec{\mathbf{I}} = \mu_0\chi_m\vec{\mathbf{H}}$ et de $\vec{\mathbf{B}} = \mu_r\mu_0\vec{\mathbf{H}}$ (μ_0 : perméabilité magnétique, μ_r : perméabilité relative, $\mu = \mu_r\mu_0$: perméabilité) la susceptibilité est sans dimensions et reliée à la perméabilité relative du milieu isotrope par :

$$\chi_m = \mu_r - 1$$

Les valeurs de la susceptibilité exprimées dans le système cgs diffèrent de celles exprimées dans le système SI par le facteur 4π.

1. Types de magnétisme

Pour les susbstances **paramagnétiques**, on a $\chi_m > 0$ ($\vec{\mathbf{M}}, \vec{\mathbf{H}}$ parallèles),
pour les substances **diamagnétiques**, on a $\chi_m < 0$ ($\vec{\mathbf{M}}, \vec{\mathbf{H}}$ antiparallèles),
pour les substances **ferromagnétiques** la valeur de χ_m dépend des antécédants de l'aimantation.

M Les susceptibilités magnétiques sont déterminées en mesurant, à l'aide d'une balance magnétique, la force $\vec{\mathbf{F}}$ qui s'exerce sur un échantillon placé dans un champ magnétique inhomogène $\vec{\mathbf{H}}$:

$$F_x \sim V \cdot \vec{\mathbf{H}} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{H}}}{\mathrm{d}x}$$

Il est nécessaire que le champ $\vec{\mathbf{H}}$ ainsi que $\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{H}}}{\mathrm{d}x}$ soient constant sur le volume de l'échantillon. Cette méthode permet de mesurer des variations de susceptibilités aussi faibles que 10^{-10}.

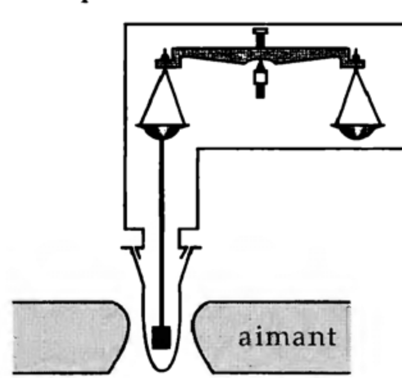


Fig. 29.126 : *Balance magnétique*

2. Diamagnétisme

Les charges électriques empêchent un champ magnétique externe de pénétrer dans le milieu supraconducteur.

▷ On peut faire une analogie avec la loi de Lenz en électrodynamique.

Susceptibilité diamagnétique molaire (Langevin) : produite par les électrons des atomes individuels :

Susceptibilité diamagnétique molaire			**$L^3 mol^{-1}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\chi_d = -\mu_0 \frac{N_A Z e^2}{6m} < r^2 >$ (SI)	χ_d	1	susceptibilité diamagnétique
	μ	Am^2	moment magnétique de l'électron
$\chi_d = -\frac{N_A Z e^2}{6mc^2} < r^2 >$	Z	1	numéro atomique
	e	C	charge élémentaire
	N_A	mol^{-1}	nombre d'Avogadro
	m	kg	masse de l'électron
	c	ms^{-1}	vitesse de la lumière

$< r^2 >$ est la distance quadratique moyenne de l'électron au noyau.
Des valeurs typiques de la susceptibilité diamagnétique molaire sont :

	He	Ne	Ar	Kr	Xe
χ_{d_μ} (in $10^{-12} m^3/mol$)	-1.9	-7.2	-19.4	-28.0	-43.0

▷ La relation ci-dessus présuppose que la direction du champ magnétique corresponde avec l'axe de symétrie du système. Pour beaucoup de molécules, ceci n'est pas le cas.

● Les supraconducteurs de première espèce, se comportent comme des susbstances diamagnétiques parfaites.

3. Paramagnétisme

Le paramagnétisme se produit dans :

- Les atomes, les molécules et les défauts des réseaux cristallins comportant un nombre impair d'électrons. Le spin total ne peut pas être nul dans ces cas.
- Les atomes libres et les ions, dont une couche électronique interne n'est pas complète. Tel est le cas de métaux de transition, des terres rares et des actinides.

▷ La présence de tels atomes dans un réseau cristallin n'est pas nécessairement liée à un comportement paramagnétique de l'ensemble du solide.

- Quelques corps comportant un nombre pair d'électrons.
- Les métaux.

4. Équation de Langevin et loi de Curie

L'**aimantation** d'une mole d'une substance de moment magnétique atomique μ est décrite par la relation de Langevin :

$$M = N_A \cdot \mu \cdot L(x) \qquad x = \frac{\mu \cdot H}{k_B \cdot T}$$

La fonction de Langevin $L(x)$ qui intervient dans l'application de la statistique classique aux propriétés électriques et magnétiques de la matière est :

$$L(x) = \coth x - \frac{1}{x}$$

avec $x = \frac{\mu B}{kT}$, où μ est le moment dipolaire magnétique de la molécule, pour les propriétés magnétiques, de même que $x = \frac{pE}{kT}$, où p est le moment dipolaire électrique, pour les propriétés électriques.

À haute température $T \gg \frac{\mu H}{k_B}$, $x \ll 1$, le développement limité de la fonction coth donne :

$$L(x) \approx \frac{x}{3}$$

Dans cette approximation, la dépendance de la susceptibilité magnétique en fonction de la température est doonée par **la loi de Curie** :

$$\chi_M = \frac{M}{H} = \frac{N_A \mu^2}{3k_B T} = \frac{C_p}{T}$$

où $C_p = N_A \mu^2/(3k_B)$ est fonction de la température.

M À cause du comportement en $\frac{1}{T}$ de la susceptibilité magnétique, la loi de Curie permet d'utiliser des sels paramagnétiques pour la mesure de basses températures ($T < 1$ K). Le paramagnétisme des électrons de conduction provient du spin des électrons.

Pour $\frac{\mu_B H}{k_B T} \ll 1$, on a :

$$\chi_M = \frac{N_A \mu_B^2}{k_B T} \qquad \mu_B: \text{ magnéton de Bohr}$$

Le magnéton de Bohr μ_B est défini dans le système d'unités **cgs** par $e\hbar/(2mc)$, et en unités **SI** par $e\hbar/(2m)$. Il correspond pratiquement au moment magnétique de spin d'un électron libre.
Seuls les électrons de conduction proches de l'énergie de Fermi peuvent contribuer à la susceptibilité paramagnétique. Cette contribution est donnée par T/T_F. La contribution des électrons de conduction à la susceptibilité magnétique est :

$$\chi_{el} = \chi_m \frac{T}{T_F} = \frac{N_A \mu_B^2}{k_B T_F}$$

- Les électrons de conduction apportent une contribution **indépendante de la température** à la susceptibilité à haute température.
- Aux basses températures, les spins des électrons sont orientés parallèlement au champ.

29.8.1 Ferromagnétisme

1. Origine du ferromagnétisme

Le passage du **paramagnétisme** au **ferromagnétisme** est une transition entre un état désordonné des moments magnétiques atomiques et un état plus ordonné où les moments magnétiques sont parallèles dans des **domaines d'aimantation spontanée** (contenant de 10^4 à 10^6 atomes) appelés **domaines de Weiss,** et limités par les **parois de Bloch**. Le ferromagnétisme est conditionné par des couches électroniques incomplètes.

Intégrale d'échange I : détermine l'énergie d'interaction E_{int} entre atomes voisins de l'interaction magnétique dipôle-dipôle des spins des électrons $\vec{s}_i, \vec{s}_{i+1}$, $(i, i+1$: positions voisines) :

$$E_{\text{int}} = -\frac{2I}{\hbar^2} (\vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i+1})$$

L'intégrale d'échange I dépend du recouvrement des probabilités de présence des électrons de deux atomes. De ce fait, l'interaction est limitée à des atomes du voisinage immédiat.

- En négligeant la répulsion coulombienne, deux électrons de spins opposés s'attirent ($I > 0$).
- Une interaction dipôle-dipôle pure ne peut pas être à l'origine des domaines orientés de Weiss.
- L'état de spin d'électrons atomiques voisins est influencé par les électrons de conduction.
- Le ferromagnétisme repose sur les électrons de conduction, c'est pourquoi il ne se produit que dans les conducteurs.

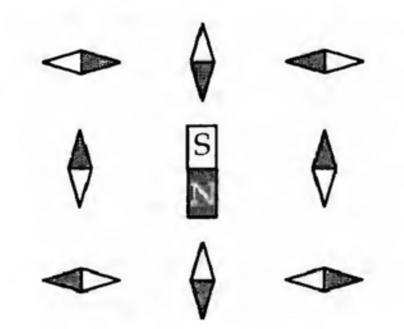


Fig. 29.127 : *Orientation de dipôles atomiques sous l'influence d'un dipôle central*

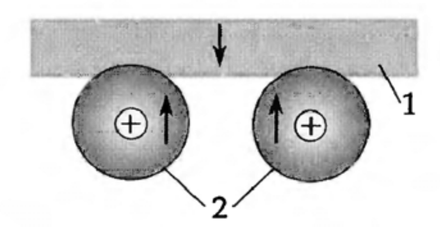


Fig. 29.128 : *Interaction d'échange entre atomes voisins à l'aide des électrons de conduction. 1 : électrons de conduction, 2 : atomes*

2. Équation de Langevin du ferromagnétisme

Champ moléculaire : produit par l'aimantation spontanée :

$$\vec{\mathbf{H}}_{\text{champ moléculaire}} = \lambda \cdot \vec{\mathbf{M}}$$

Les moments magnétiques atomiques sont sous l'influence du champ externe $\vec{\mathbf{H}}$ et du champ moléculaire. L'aimantation est alors :

$$M = N_A \mu_B \tanh \frac{\mu_B (H + \lambda M)}{k_B T}$$

En l'absence de champ externe, on a :

$$M = N_A \mu_B \tanh \frac{\lambda \mu_B M}{k_B T} = f(M, T)$$

La Figure 29.129 représente les solutions graphiques de cette équation et sa dépendance en température.

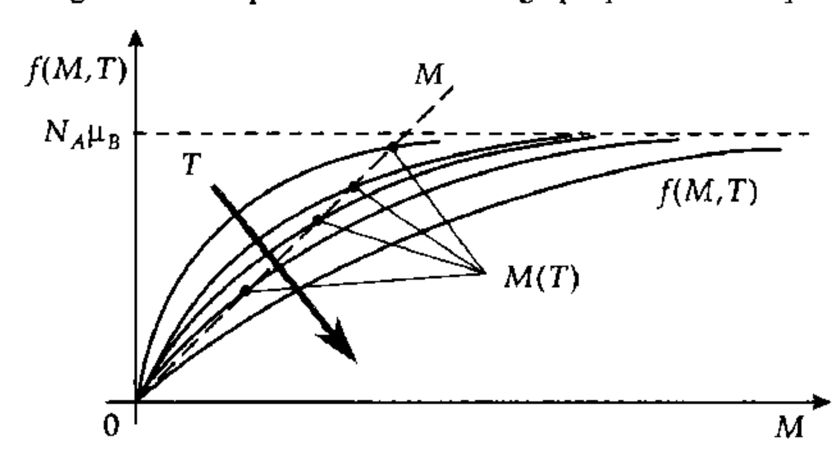


Fig. 29.129 : *Résolution graphique de l'équation de Langevin*

Il n'y a pas de solution si la pente de la fonction $f(M,T)$ est plus petite ou égale à 1. Dans ce cas il n'y a plus d'aimantation. Ceci se produit pour une température supérieure à la température de Curie T_C :

$$T > T_C = \frac{N_A \mu_B^2 \lambda}{k_B}$$

Loi de Curie-Weiss : décrit l'aimantation pour $T > T_C$.

$$M = \frac{T_C \cdot H}{\lambda (T - T_C)}, \qquad \chi_m = \frac{C}{T - T_C}$$

3. Hystérésis d'aimantation

Hystérésis : dépendance de l'état physique d'un solide en fonction d'états antérieurs. Phénomène de retard qui se manifeste lorsque les relations entre une propriété physique d'un corps et une grandeur dont elle dépend ne sont pas biunivoques.

Hystérésis d'aimantation : propriété des corps ferromagnétiques (et ferrimagnétiques), l'aimantation M n'est pas une fonction déterminée du champ actuel H, mais dépend aussi des valeurs antérieures de H.

Courbe de première aimantation : représentation de l'aimantation M en fonction du champ H d'un corps ferromagnétique qui n'a pas été soumis précédemment à un champ magnétique. Les moments magnétiques des domaines de Weiss ont des directions aléatoires.

Saturation, M_s : aimantation maximale d'un corps pour lequel tous les dipôles atomiques sont orientés parallèlement entre eux. Tous les domaines de Weiss sont orientés dans la même direction.

Aimantation rémanente, B_R : résidu d'aimantation lorsqu'on supprime le champ externe H.

Champ coercitif, H_c : champ magnétique externe négatif nécessaire pour annuler l'aimantation M d'un corps ferromagnétique.

- L'aire comprise sous la courbe d'hystérésis représente l'énergie magnétique absorbée lors de l'aimantation. Cette énergie est entièrement dégagée sous forme de chaleur.

- Pour des champs magnétiques faibles, l'orientation des domaines de Weiss est réversible.

Effet Barkhausen : l'aimantation induite dans un barreau de métal ferromagnétique par un champ magnétique croissant de manière **continue** varie de façon **discontinue**. La direction d'aimantation des domaines d'orientation spontanée change brusquement.
La Figure 29.131 représente un agrandissement d'une partie de la courbe d'hystérésis.

Aimant doux : aimant dont la courbe d'hystérésis est relativement étroite. Les champs rémanent et coercitif sont faibles.

Aimant dur : aimant dont la courbe d'hystérésis est large et pratiquement rectangulaire. Les champs coercitif et rémanent sont très grands.

- Les corps ferromagnétiques ont de nombreuses applications. Les aimants doux sont utilisés pour fabriquer des tôles de transformateurs, des électroaimants ou des blindages magnétiques. Les aimants durs sont utilisés comme aimants permanents dans les moteurs et les générateurs électriques. Les poudres d'oxydes magnétiques utilisées pour l'enregistrement magnétique ont des champs coercitifs élevés (bandes magnétiques d'enregistrement audio et vidéo, disques durs et disquettes informatiques, etc.).

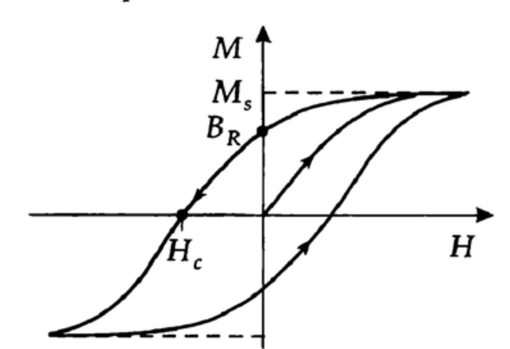


Fig. 29.130 : *Courbe d'hystérésis. M_s : saturation, B_R : champ rémanent, H_c : champ coercitif*

Fig. 29.131 : *Effet Barkhausen*

29.8.2 Antiferromagnétisme et ferrimagnétisme

Antiferromagnétisme et ferrimagnétisme : propriétés magnétiques de certains cristaux dans lesquels existent deux sous-réseaux de moments magnétiques opposés.

Antiferromagnétisme : l'aimantation des deux sous-réseaux se compense. L'aimantation résultante est nulle. Magnétisme présenté par certains oxydes (FeO, MnO, ...), leur susceptibilité paramagnétique passe par un maximum à une certaine température T_N (température de Néel).

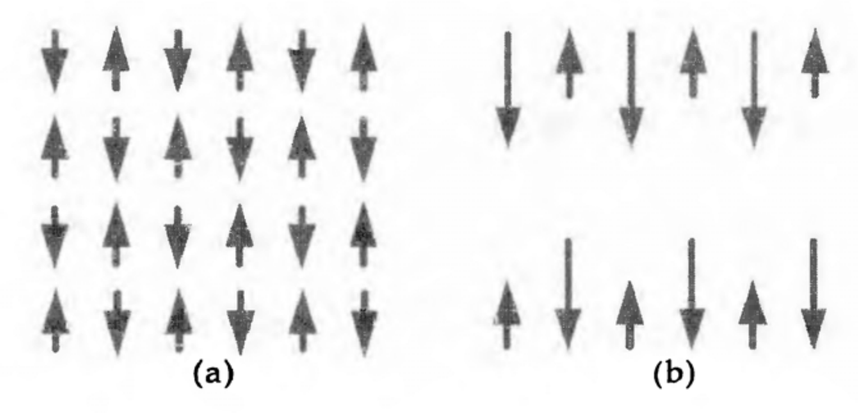


Fig. 29.132 : *Antiferromagnétisme (a) et ferrimagnétisme (b)*

Température de Néel, T_N : température au-delà de laquelle, à cause de l'agitation thermique, les moments magnétiques atomiques sont orientés aléatoirement. La susbstance devient paramagnétique. La susceptibilité pour $T \geq T_N$, est :

$$\chi_m = \frac{C}{T + \theta}$$

où θ est la température paramagnétique de Néel.

■ L'oxyde de manganèse (MnO) est un exemple de composé antiferromagnétique.

Ferrimagnétisme : les moments magnétiques des sous-réseaux ne se compensent que partiellement. Les moments magnétiques antiparallèles voisins ont des grandeurs différentes. Il apparaît un moment magnétique résultant non nul, le corps est faiblement ferromagnétique. C'est une propriété de certains grenats et spinelles.

■ L'oxyde de fer Fe_2O_3 est ferromagnétique. L'atome de fer peut être bi- et trivalent. De ce fait, deux moments magnétiques atomiques de valeurs différentes sont présents.

▷ Le traitement de l'antiferromagnétisme et du ferrimagnétisme s'effectue à l'aide de la méthode des champs moléculaires, de manière analogue au traitement du ferromagnétisme. Les champs moléculaires des deux sous-réseaux sont affectés de signes opposés.

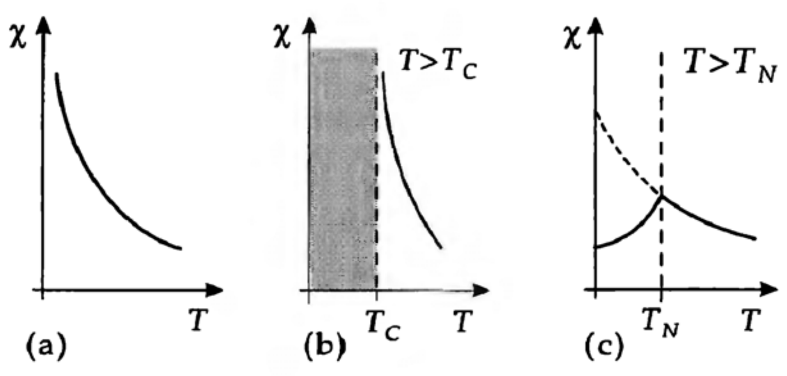


Fig. 29.133 : *Comparaison des susceptibilités (a) : paramagnétique, (b) : ferromagnétique (comportement complexe dans la partie grisée), (c) : antiferromagnétique.* T_C *: température de Curie,* T_N *: température de Néel*

29.9 Propriétés diélectriques

Diélectrique : cristal dont la conductivité est environ 20 ordres de grandeurs plus faible que celle d'un métal. La capacité d'un condensateur est augmentée lorsqu'on interpose un diélectrique entre ses deux armatures.

Polarisation $\vec{P}$: moment dipolaire électrique par unité de volume d'un solide.

Polarisation par orientation ou **polarisation de Debye** : les molécules, si elles sont polaires, tendent à s'orienter de façon à ce que leur moment dipolaire permanent soit parallèle au champ électrique externe.

Polarisation de déformation : les charges électriques de toute molécule ou de tout réseau cristallin se déplacent sous l'influence d'un champ électrique externe $\vec{E}$. Les charges de signe opposés se déplaçant dans des directions opposées, un moment dipolaire électrique se créé.

▷ Dans les deux cas, la polarisation entraîne une **séparation des charges**.

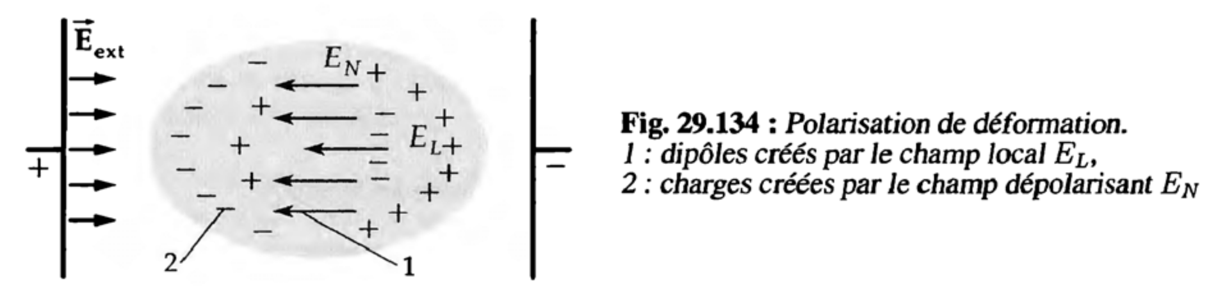


Fig. 29.134 : *Polarisation de déformation.*
1 : dipôles créés par le champ local E_L,
2 : charges créées par le champ dépolarisant E_N

Les dipôles permanents ou les dipôles induits sont réorientés par le champ électrique.

1. Déplacement électrique dans un diélectrique

Déplacement électrique, $\vec{D}$: caractérise le champ électrique dans un diélectrique.

Déplacement électrique $\vec{D}$			**ITL^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$	$\vec{D}$	Cm^{-2}	déplacement électrique
	$\vec{E}$	Vm^{-1}	champ électrique
	$\vec{P}$	Cm^{-2}	polarisation
	ε_0	$CV^{-1}m^{-1}$	permittivité du vide

2. Séparation des charges dans un diélectrique

Susceptibilité électrique, χ : mesure de la séparation des charges dans un diélectrique. χ décrit le comportement diélectrique macroscopique d'une substance.

▷ Pour des valeurs faibles du champ électrique externe, la polarisation électrique est proportionnelle au champ électrique **polarisation linéaire** :
$\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$
avec χ : susceptibilité électrique, $\vec{E}$: champ électrique et ε_0 : permittivité du vide.
Pour quelques cas particuliers, un terme constant est présent dans cette relation (par exemple, les sels de Seignette).

Pour des intensités de champ électrique E faibles, on a :

Déplacement électrique $\vec{\mathbf{D}}$ dans le cas de champs faibles				**ITL^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination	
$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \varepsilon_0\chi\vec{\mathbf{E}}$	$\vec{\mathbf{D}}$	Cm^{-2}	déplacement électrique	
$= \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{\mathbf{E}}$	$\vec{\mathbf{E}}$	Vm^{-1}	champ électrique	
	χ	1	susceptibilité électrique	
$\varepsilon_r = 1 + \chi$	ε_0	$\mathrm{CV}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$	permittivité du vide	
	ε_r	1	permittivité relative	

▷ Un rayonnement laser peut produire un champ électrique assez intense, de sorte que l'approximation linéaire de la polarisation en fonction du champ n'est plus valable. La polarisation doit alors être développée en une série de puissances :

$$\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon(A + \chi E + \chi' E^2 + \cdots)\frac{\vec{\mathbf{E}}}{E}$$

● Pour les substances anisotropes, la permittivité relative est un tenseur.

● La permittivité relative, et par conséquent la constante diélectrique, dépendent de la fréquence du champ électrique.

3. Polarisabilité et champ local

Polarisabilité, α_i : détermine la grandeur du moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}_i$ produit à l'endroit i d'un dipôle sous l'influence d'un champ électrique :

$$\vec{\mathbf{p}}_i = \alpha_i \cdot \vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{L}i}$$

où $\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{L}i}$ est le champ local au point i. La polarisabilité est une grandeur à l'échelle atomique et dépend de la structure du cristal.

Champ local, E_{L} : superposition du champ externe $\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{ext}}$ et du champ $\vec{\mathbf{E}}_{\text{échantillon}}$ produits par les dipôles de l'échantillon :

$$\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{L}} = \vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_{\text{échantillon}}$$

▷ En général, on se limite à des échantillons de forme géométrique simple : ellispsoïde, sphère ou disque.

Champ dépolarisant, $\vec{\mathbf{E}}_N$: champ produit près de la surface de l'échantillon diélectrique lors de la séparation des charges. Il est opposé au champ électrique externe et dépend de la géométrie du diélectrique. Dans le diélectrique, on a :

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{ext}} + \vec{\mathbf{E}}_N$$

avec

$$\vec{\mathbf{E}}_N = -\frac{1}{\varepsilon_0}N\vec{\mathbf{P}} \qquad N = \begin{cases} 1 & \text{ellipsoïde} \\ \frac{1}{3} & \text{sphère} \\ 1 & \text{disque} \perp \vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{ext}} \\ 0 & \text{disque} \parallel \vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{ext}} \end{cases}$$

Champ de Lorentz, $\vec{\mathbf{E}}_i$: champ électrique dans une cavité fictive au sein du volume d'un diélectrique polarisé :

$$\vec{\mathbf{E}}_i = -\vec{\mathbf{E}}_N = -\frac{N}{\varepsilon_0} \cdot \vec{\mathbf{P}}$$

N est déterminé par la forme géométrique de la cavité.

4. Champ dipolaire dans un réseau cristallin

Champ dipolaire, $\vec{\mathbf{E}}_D(\vec{\mathbf{r}})$: champ électrique à une distance $\vec{\mathbf{r}}$ d'un dipôle de moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}$:

Champ d'un dipôle			**$\mathrm{LT^{-3}MI^{-1}}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{\mathbf{E}}_D(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{3(\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{r}})\vec{\mathbf{r}} - r^2\vec{\mathbf{p}}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$	$E_D(\vec{\mathbf{r}})$	V/m	champ du dipôle
	$\vec{\mathbf{r}}$	m	distance au dipôle
	$\vec{\mathbf{p}}$	Cm	moment dipolaire
	ε_0	C/(Vm)	permittivité du vide

Champ dipolaire dans un réseau cristallin :

$$\vec{\mathbf{E}}_D = \sum_i E_D(\vec{\mathbf{r}}_i)$$

▷ Le champ dipolaire $\vec{\mathbf{E}}_D$ dépend de la structure du réseau.

▷ Dans tous les réseaux de symétrie cubique, le champ dipolaire est nul : $\vec{\mathbf{E}}_D = 0$.
Dans les cristaux tétragonaux de structure pérovskite (⟶ supraconducteurs à haute température critique (SHTc)), ceci n'est pas le cas.

■ Le champ local dans des **réseaux cubiques**, pour un échantillon sphérique, est :

$$\vec{\mathbf{E}}_L = \vec{\mathbf{E}}_{ext} - \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \vec{\mathbf{P}} + \frac{1}{3\varepsilon_0} \cdot \vec{\mathbf{P}}$$

Ce champ local produit la polarisation locale d'un atome du réseau.

● Pour N_V atomes semblables par unité de volume, la polarisation de l'échantillon est :

$$\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 N_V \alpha \vec{\mathbf{E}}_L = \varepsilon_0 N_V \alpha (\vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{3\varepsilon_0} \cdot \vec{\mathbf{P}})$$

Polarisation d'un échantillon sphérique			**$\mathrm{ITL^{-2}}$**
	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \chi \vec{\mathbf{E}}$	$\vec{\mathbf{P}}$	$\mathrm{Cm^{-2}}$	polarisation
$\chi = \frac{N_V \alpha}{1 - \frac{1}{3} N_V \alpha}$	χ	1	susceptibilité électrique
	$\vec{\mathbf{E}}$	$\mathrm{Vm^{-1}}$	champ électrique
	N_V	1	nombre d'atomes par volume
	α	1	polarisabilité

▷ Si le cristal est constitué de divers atomes de polarisabilités différentes, la susceptibilité totale du cristal est obtenue par sommation pondérée des différentes polarisabilités.

Susceptibilité électrique	**1**

$$\chi = \frac{\sum_i N_i \alpha_i}{1 - \frac{1}{3}\sum_i N_i \alpha_i}$$

Symbole	Unité	Dénomination
χ	1	susceptibilité électrique
N_i	1	nombre des atomes i
α_i	1	polarisabilité des atomes i

5. Polarisation électronique et polarisation ionique

Polarisation électronique : due au déplacement des électrons du cortège par rapport aux noyaux atomiques positifs quasi-ponctuels (Fig. 29.135).

▷ La polarisation électronique est toujours présente.

▷ Dans le champ d'un rayonnement électromagnétique, la polarisation électronique n'est pas une grandeur statistique. Elle oscille au rythme de l'onde électromagnétique qui la produit. Les charges électriques subissant une accélération rayonnent de l'énergie : les oscillations forcées du cortège électronique sont amorties. La polarisabilité α_i et par conséquent, la susceptibilité électrique χ sont des grandeurs complexes. La permittivité relative ε_r (constante diélectrique) est aussi une grandeur complexe.

● Pour un diélectrique placé dans un champ électromagnétique variable, il existe une relation entre l'indice de réfraction optique n, le coefficient d'absorption κ et la susceptibilité électrique κ :

Constante diélectrique	**1**

$$\varepsilon_r = 1 + \chi = (n + \mathrm{j}\kappa)^2$$

Symbole	Unité	Dénomination
ε_r	1	constante diélectrique
χ	1	susceptibilité électrique
n	1	indice de réfraction
j	–	nombre imaginaire

Polarisation ionique : résulte du déplacement relatif des charges électriques des deux signes dans les réseaux cristallins lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique extérieur.

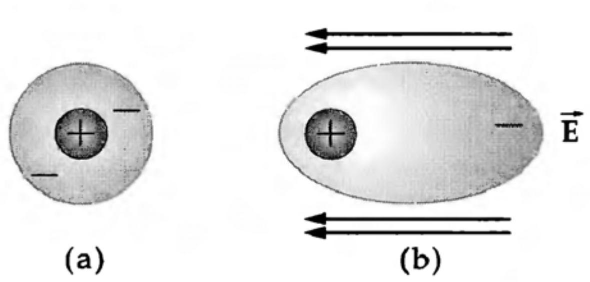


Fig. 29.135 : *Polarisation électronique dans un champ électrique $\vec{E}$. Zone ombrée : cortège électronique. (a) : distribution des charges d'un atome en l'absence de champ, (b) : distribution des charges dans un champ*

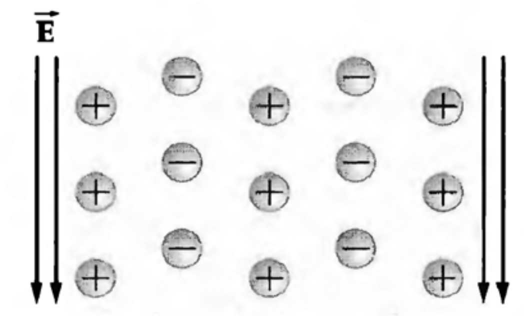


Fig. 29.136 : *Polarisation ionique dans un champ électrique $\vec{E}$*

Polarisation totale : somme des polarisations électroniques et ioniques d'une substance.

29.9.1 Paraélectricité

Paraélectricité : propriété de solides cristallins dont la permittivité électrique ε obéit à la loi de Curie-Weiss. Ces corps ne renferment pazs de dipôles électriques permanents, mais sous l'action d'un champ externe des dipôles sont induits. Du fait de l'agitation thermique, l'orientation de ces dipôles est aléatoires.

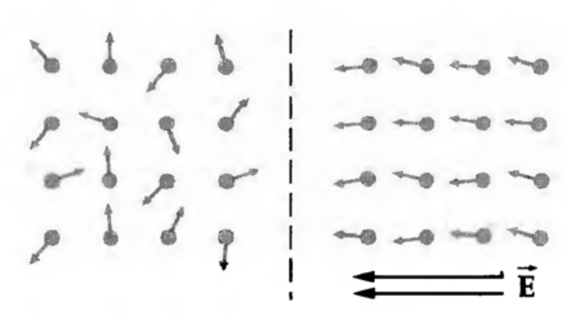


Fig. 29.137 : *Polarisation d'orientation dans un solide paraélectrique*

Polarisabilité d'orientation, α_{orient} : fonction de la fréquence du champ. À cause de l'amortissement, c'est une grandeur complexe :

$$\alpha_{\text{orient}} = \frac{\alpha_0}{1 - j\omega\tau}$$

τ est une constante de temps caractéristique : le temps de relaxation. α_0 est la polarisabilité statistique due à l'application d'un champ constant dans le temps (stationnaire).

■ La polarisation d'orientation se produit dans les cristaux liquides.

▷ Dans le cas d'un champ stationnaire ($\omega = 0$), la permittivité relative $\varepsilon_r = 1 + \chi$ de l'eau pure vaut 81 à la température normale.
Dans le cas de la lumière visible (champ variable), cette valeur n'est plus que de 1,77. Cette différence de la valeur de la permittivité relative est due à la polarisation d'orientation : à haute fréquence elle est pratiquement annulée par l'amortissement.

Pertes diélectriques, w : dissipation de chaleur, dans un diélectrique, d'une partie de l'énergie du champ électrique qui y est appliqué. Une partie des pertes est due à l'effet Joule provenant de l'existence d'une conductivité ohmique non nulle du diélectrique. Une autre partie, qui ne se manifeste que dans un champ alternatif, provient de l'existence d'un temps de relaxation de l'orientation des molécules :

$$w = \operatorname{Im}\chi \cdot E^2\omega$$

où $\operatorname{Im}\chi$ est la partie imaginaire de la susceptibilité électrique.

29.9.2 Ferroélectricité

1. Électrets

Cristaux ferroélectriques : présentent une polarisation spontanée, même en l'absence de champ électrique.

Électrets : cristaux ferroélectriques qui possèdent un moment dipolaire permanent. Leur polarisation n'est pas influencée par un champ électrique extérieur.

▷ La polarisation des électrets est analogue à l'aimantation des aimants permanents.

■ Exemples d'électrets : le nylon et certaines cires.

- En général, les cristaux ferroélectriques présentent une hystérésis diélectrique comparable à l'hystérésis magnétique des corps ferromagnétiques.

▷ La courbe d'hystérésis des électrets est pratiquement rectangulaire.

Température ferroélectrique de Curie, T_C : température au-delà de laquelle le cristal ne se trouve plus dans l'état ferroélectrique.

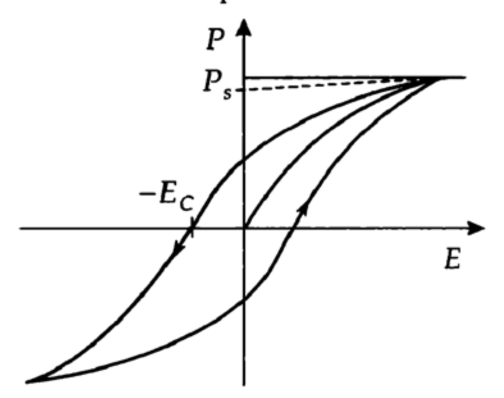


Fig. 29.138 : *Hystérésis ferroélectrique.*
P_s : polarisation spontanée,
E_c : champ électrique coercitif

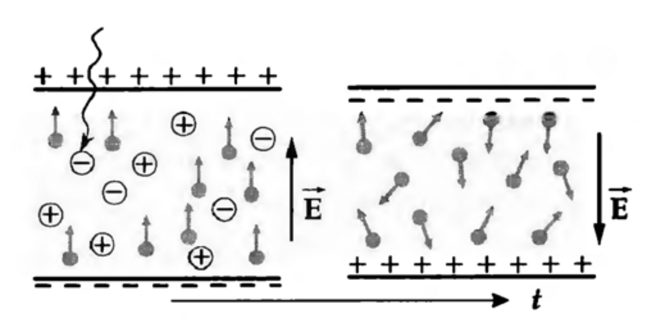


Fig. 29.139 : *Influence d'un rayonnement ionisant sur la distribution des charges dans un électret*

M Les électrets sont produits par des procédés thermiques ou photoélectriques. L'échantillon est porté à une température supérieure à la température ferroélectrique de Curie, puis soumis à un champ électrique stationnaire intense. Les dipôles orientés par le champ électriques sont figés lors du refroidissement de l'échantillon. Cet état n'est pas un état d'équilibre thermodynamique, l'électret tend vers un état d'équilibre avec un temps de relaxation τ. Pour la plupart des électrets, ce temps de relaxation est de plusieurs années.

- Un rayonnement ionisant produit des porteurs de charges libres dans un électret. De ce fait, la densité superficielle de charge est modifiée. Le champ électrique interne est inversé.

■ Les électrets sont utilisés pour réaliser des dosimètres de rayonnements ionisants.

2. Piezoélectricité

Effet piezoélectrique direct : propriété d'un diélectrique, qui sous l'action d'une déformation mécanique, se polarise. Il se manifeste dans des cristaux dépourvus de centre de symétrie.

Effet piezoélectrique inverse ou électrostriction : certains diélectriques, sous l'influence d'un champ électrique extérieur, se déforment mécaniquement.

La piezoélectricité est due aux modules d'élasticité différents des deux sous-réseaux d'ions positifs et négatifs du réseau cristallin.

- Les cristaux ioniques peuvent être piezoélectriques s'ils sont dépourvus de centre de symétrie.

■ Exemples de cristaux piezoélectriques : le quartz, les sels de Seignette (tartrate double de Sodium et de Potassium) et le titanate de Barium.

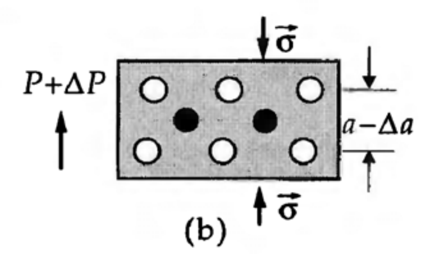


Fig. 29.140 : *Piezoélectricité. (a) : cristal sans contrainte mécanique, (b) : cristal sous une contrainte mécanique σ.*
ΔP : polarisation piezoélectrique induite par la contrainte

■ **Transformation d'une contrainte mécanique en tension électrique** :
Allume gaz piezoélectrique, briquets à gaz ;
Microphones et cellules de lecture de disques piezoélectriques.

■ **Transformation d'une tension électrique en déformation mécanique** :
Oscillateur à quartz ;
Vibreur piezoélectrique (ultra-sons) ;
Haut-parleur piezoélectrique.

▷ Les cristaux piezoélectriques ne sont pas obligatoirement des substances ferroélectriques. Exemple : le quartz.

Domaines : régions dans un solide ferroélectrique dont les éléments de structure sont orientés dans la même direction. Dans les domaines adjacents, les orientations sont différentes.

● Les dimensions des domaines sont de l'ordre de quelques micromètres.

▷ Il n'y a jusqu'à présent pas d'explication microscopique satisfaisante de la ferroélectricité.

29.10 Propriétés optiques des cristaux

● Les cristaux qui se comportent comme des isolants à la température ambiante, sont généralement transparents.

● Les cristaux non colorés ne possèdent pas d'états électroniques ou des états de vibrations pouvant être excités par de la lumière du spectre visible.

▷ Les longueurs d'ondes du spectre visible se situent entre 360 nm et 740 nm. Ce domaine de longueur d'onde correspond à des photons d'énergies comprises entre 3.4 eV et 1.7 eV.

29.10.1 Excitons et leurs propriétés

Exciton : ensemble d'un électron et d'un trou positif liés électrostatiquement, formé dans certains cristaux isolants par absorption d'un photon d'énergie inférieure à celle E_g du *gap*. C'est une *paire électron-trou* liée. Lors de la formation d'un exciton, une énergie égale à son énergie de liaison E_B est libérée. De ce fait, la formation d'une *paire électron-trou* **non liée** (libre) requiert au moins une énergie E_g, alors que la formation d'une *paire électron-trou* **liée** ne requiert que l'énergie $E_g - E_B$.

▷ Les excitons sont des ensembles électriquement neutres qui peuvent se déplacer dans un cristal sans le rendre conducteur. Ils forment une **onde d'excitation** et se comportent comme une quasi-particule.

Recombinaison : l'exciton se détruit spontanément après une certaine durée de vie. L'électron occupe l'état inoccupé (trou). L'énergie d'excitation est libérée sous forme d'onde électromagnétique qui quitte le cristal.

▷ La paire électron-trou peut être considérée comme l'analogue du positronium (système lié d'un électron et d'un positron e^+e^-).

Niveau d'énergie d'un exciton : pour des excitons faiblement liés (exciton de Mott-Wannier), dont la distance électron-trou est grande devant les dimensions de la maille cristalline, l'énergie par rapport au haut de la bande de valence se calcule à l'aide de la relation suivante :

Niveaux d'énergie de l'exciton de Mott-Wannier			**ML^2T^{-2}**
	Symbole	Unité	Dénomination
$$E_n = E_g - \frac{2\pi^2\mu e^4}{h^2\varepsilon^2 n^2} \quad \text{(cgs)}$$	E_n	J	énergie de l'exciton
	E_g	J	*gap*
$$E_n = E_g - \frac{\mu e^4}{8h^2\varepsilon_0^2\varepsilon^2 n^2} \quad \text{(SI)}$$	μ	kg	masse réduite de la paire
	m_e^*	kg	masse effective de l'électron
$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_e^*} + \frac{1}{m_h^*}$$	m_h^*	kg	masse effective du trou
	e	C	charge élémentaire
	h	Js	constante de Planck
	ε	$C^2N^{-1}m^{-2}$	permittivité du cristal
	n	1	nombre quantique principal

■ Le spectre d'absorption par excitation d'excitons d'un cristal de Cu_2O à basse température peut être calculé à l'aide de la relation ci-dessus.

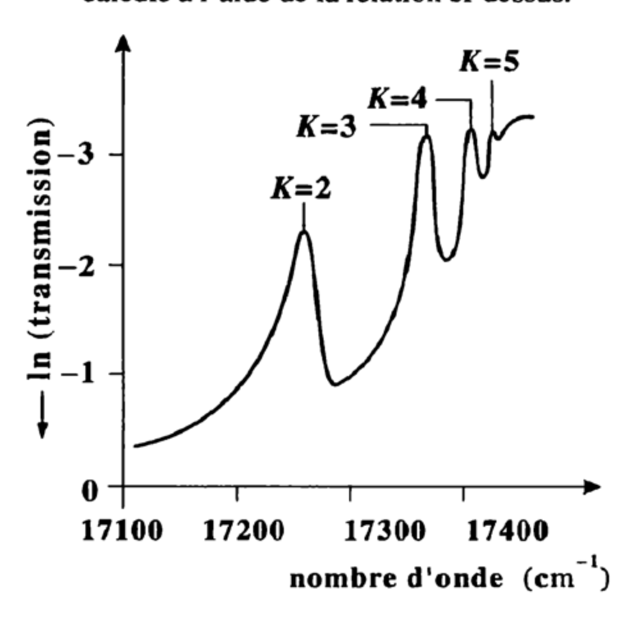


Fig. 29.141 : *Spectre d'absorption du Cu_2O*

M Les spectres d'absorption son mesurés à l'aide d'un dispositif représente sur la Figure 29.142.

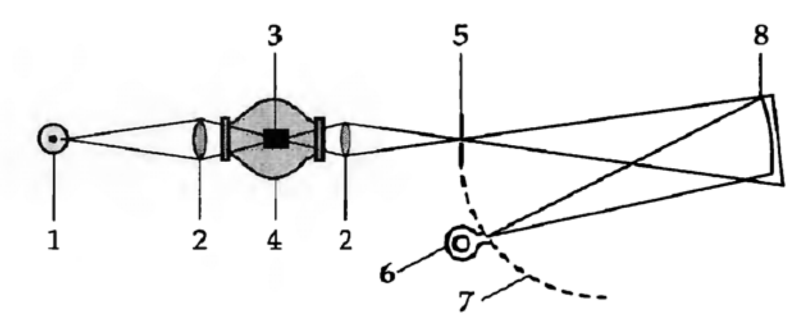


Fig. 29.142 : *Spectromètre optique. 1 : filament de tungstène, 2 : lentille, 3 : échantillon, 4 : vase Dewar, 5 : fente d'entrée, 6 : photomultiplicateur, 7 : cercle de Rowland, 8 : réseau concave*

Exciton de Frenkel : existe dans les cristaux moléculaires ; l'électron et le trou provenant d'un même atome sont plus étroitement liés. Un exciton de Frenkel se propage dans le cristal sous forme d'une onde. La paire électron-trou reste étroitement liée.

- Dans les cristaux d'halogénures alcalins, les électrons de plus basse énergie sont localisés près des ions halogènes négatifs.
- Les cristaux d'halogénures alcalins purs sont transparents au spectre visible. L'absorption dans la partie ultraviolette du spectre est très structurée.

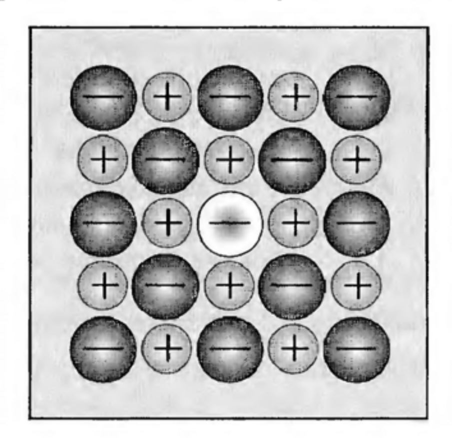


Fig. 29.143 : *Représentation schématique d'un exciton de Frenkel, localisé près d'un atome d'un cristal d'halogénure alcalin*

29.10.2 Photoconductivité

Photoconductivité : augmentation de la conductivité électrique d'un solide isolant ou semiconducteur, lorsqu'il absorbe un rayonnement électromagnétique. L'énergie apportée par le rayonnement, si elle est supérieur au *gap*, fait passer un électron de la bande de valence dans la bande de conduction et crée, par conséquent, un trou dans la bande de valence.

- Les trous aussi bien que les électrons peuvent participer à la conductivité électrique.

Variation temporelle de la densité de porteurs n : dans le cadre d'un modèle simple (les paires électron-trou sont créées uniformément dans tout le cristal ; la recombinaison se produit par destruction directe des paires électron-trou), on établit :

Variation de la densité électronique			$L^{-3}T^{-1}$
	Symbole	Unité	Dénomination
$$\frac{dn}{dt} = L - An^2$$	n	m^{-3}	densité électronique
	L	$s^{-1}m^{-3}$	probabilité d'absorption
	A	m^3s^{-1}	probabilité de recombinaison

Dans l'état stationnaire $\frac{dn}{dt} = 0$, et on a :

$$n_0 = \sqrt{\frac{L}{A}}$$

Constante de temps, t_0 : détermine la diminution de nombre de porteurs de charge après extinction de la source de lumière :

$$n = \frac{n_0}{1 + \frac{t}{t_0}}$$

Au bout du temps t_0, la densité de porteurs de charges tombe à la valeur $n_0/2$.

Sensibilité (rendement quantique), G : rapport du courant photonique I à la probabilité d'absorption :

$$G = \frac{I}{L \cdot d \cdot e} \qquad d \text{ : épaisseur de l'échantillon.}$$

Pièges, traps : défauts du réseau cristallin auxquels correspondent des niveaux d'énergie entre la bande de valence et la bande de conduction. Des électrons ou des trous peuvent être **piégés** sur ces niveaux d'énergie et ne participent par conséquent pas à la conductivité.

■ Les pièges influencent le comportement temporel des cellules photoconductrices, **luxmètre**, ou des **couches luminescentes** des tubes cathodiques.

29.10.3 Luminescence

Luminescence : émission de rayonnement électromagnétique du domaine visible ou proche du visible par des gaz, des liquides et des solides consécutivement à l'absorption de photons, d'électrons, de particules chargées ou de réactions chimiques.

▷ Excepté l'élévation de température, la nature de l'excitation n'a pas d'influence particulière sur la luminescence.

Phosphore : solide cristallin qui est susceptible de produire la luminescence (revêtement des tubes cathodiques).

Fluorescence : émission de rayonnement électromagnétique dès l'excitation ou après un temps très court de l'ordre de 10^{-8} s.

▷ L'intervalle de temps 10^{-8} s correspond à la durée de vie des niveaux d'énergie atomiques pour une transition dipolaire permise dans le spectre visible.

Phosphorescence : la luminescence persiste pendant un temps relativement long après la suppression de l'excitation. On dit qu'il y a **rémanence**. La phosphorence est due au piégeage pendant un temps plus ou moins long. L'électron ou le trou quitte l'état métastable pour aller dans un niveau excité par effet tunnel. La recombinaison qui produit l'émission de lumière se produit alors. Le temps de rémanence peut varier dans un domaine relativement grand : les phosphores constitués de terres rares, de sulfure de zinc et de silicate de zinc, selon leur composition, ont des rémanences comprises entre quelques μs (tubes cathodiques des téléviseurs) et plusieurs heures (cadrans lumineux de montres).

▷ Le rendement de transformation d'une forme d'énergie en rayonnement lumineux est faible pour beaucoup de solides.

Activateurs : substances qui, mélangées en faible proportion aux phosphores, peuvent augmenter considérablement leur rendement.

29.10.4 Propriétés optoélectroniques

Optoélectronique : étude de la transformation d'énergie électrique en énergie optique et réciproquement.

● L'élément le plus important en optoélectronique est la jonction semiconductrice p-n.

Diode électroluminescente (Light Emitting Diode, LED) : constituée d'une jonction semiconductrice p-n.

Fig. 29.144 : *Représentation schématique de la jonction p-n d'une LED.*
1 : zone p, 2 : zone n

Une tension directe abaisse la barrière de potentiel entre les régions n et p de la jonction. L'énergie nécessaire aux électrons pour passer de la zone n à la zone p n'est plus que $e(U_d - U)$. Ceci vaut aussi pour les trous positifs dont le passage de la zone p à la zone n est facilité. Au voisinage de la jonction, les électrons et les trous se recombinent en libérant une énergie E_g égale à la largeur de la bande interdite (*gap*) sous forme d'onde électromagnétique.

- Les LED produisent une lumière pratiquement monochromatique, mais généralement **non cohérente**, de longueur d'onde :
  $$\lambda \approx \frac{1.24}{E_g/\mathrm{eV}}\ \mu\mathrm{m}$$
  (E_g en électronvolt). La couleur de la lumière émise est définie par la largeur de la bande interdite.
- L'intensité de la lumière émise est proportionnelle au courant circulant à travers la jonction.
- La durée de vie des LED est très grande.

Diode laser, LD : jonction p-n fortement dopée $n_D \approx 10^{19}$ cm^{-3} (**semiconducteur dégénéré**).

- Les diodes laser émettent de la lumière **cohérente.**
- Les électrons remplissent la bande de conduction dans la zone n. Réciproquement, les trous remplissent la bande de valence.

Inversion de population dans les diodes laser : pour une diode laser, les états d'énergie élevée de la bande de conduction sont occupés par des électrons, alors que les états de plus faible énergie sont vides (cela se produit dans la zone de jonction).

- L'inversion de population, indispensable pour obtenir l'émission stimulée et une amplification de la lumière, est ainsi réalisée.

Résonateur : constitué de surfaces réfléchissantes (miroirs), aux extrémités du semiconducteur. Ces surfaces sont parfaitement planes et parallèles entre elles forment un interféromètre de Fabry Perot. La lumière peut effectuer plusieurs aller-retours suivant la direction de l'axe du semiconducteur. Grâce à l'indice de réfraction élevé des semiconducteurs, le coefficient de réflexion est très élevé.

Émission spontanée ($\rightarrow$ *Physique atomique*) : se produit même pour des courants faibles.

Courant de seuil, I_{th} : courant au-delà duquel se produit l'émission stimulée.

Modes d'oscillation longitudinale d'un laser : ondes stationnaires qui composent le spectre d'émission d'un laser. À cause de la longueur finie L d'un laser (distance entre les miroirs du résonateur), uniquement les ondes stationnaires de longueurs d'onde λ déterminées par la relation suivante peuvent prendre naissance :

$$\lambda = \frac{m}{n}\frac{L}{2} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

où n est l'indice de réfraction du cristal semiconducteur.

Symboles de la physique quantique

Symbole	Unité	Dénomination
α	Cm^2V^{-1}	Polarisabilité
α	1	Constante de structure fine
α	1	Constante de Madelung
β	1	Amplification en courant (petits signaux)
γ	Nm^2/kg^2	Constante d'attraction universelle
Γ	MeV	Largeur de transition
Δ	$1/m^2$	Opérateur de Laplace, laplacien
ε	1	Énergie/m_0c^2
ε	1	Dilatation
ε	J	Énergie d'un électron
ε	J	Paramètre de Lennard-Jones
ε_P	J	Énergie d'apariement
ε_0	As/Vm	Permittivité du vide
$d\varepsilon/dt$	s^{-1}	Vitesse de dilatation
η	1	Impulsion/m_0c
η	1	Rendement
η_0	$N\,m^{-2}s$	Viscosité dynamique
θ, Θ	rad	Angle
Θ_D	K	Température de Debye
κ	1	Coefficient d'absorption
κ	$\Omega^{-1}m^{-1}$	Conductivité électrique
λ	1/s	Constante de décroissance
λ	W/(mK)	Conductivité thermique
λ	m	Longueur d'onde
Λ	m	Libre parcours moyen
μ	1/m	Coefficient d'atténuation linéaire
μ	kg	Masse réduite
μ	J/T	Moment magnétique
μ	J	Potentiel chimique
$\hat{\mu}_l, \hat{\mu}_s$	J/T^1	Opérateur de moment magnétique
μ_n	$m^2/(Vs)$	Mobilité des électrons
μ_p	$m^2/(Vs)$	Mobilité des trous
μ_B	J/T	Magnéton de Bohr
μ_K	J/T	Magnéton nucléaire
ν	1	Nombre moyen de neutrons
π	1	Parité
ρ	m^{-3}	Densité de particules

Symbole	Unité	Dénomination
σ/ρ	m^2/kg	Coefficient d'atténuation massique de Compton
σ	b	Section efficace
σ	J/m^2K^4	Constante de Stefan-Boltzmann
σ	$N\,m^{-2}$	Tension
σ	1	Constante d'écran
σ	m	Paramètre de Lennard-Jones
τ/ρ	m^2/kg	Coefficient d'atténuation massique
τ	s	Vie moyenne
τ	s	Temps de relaxation
$\Phi(\vec{r})$	$1/m^2$	Fluence
$\phi(\vec{r},t)$	$1/m^2s$	Débit de fluence
Φ_{ex}	W	Flux total de rayonnement
φ	$1/m^2s$	Débit de fluence après un absorbeur
φ	rad	Angle de diffusion
χ	1	Susceptibilité électrique
χ_d	1	Susceptibilité diamagnétique
χ_μ	m^{-1}	Susceptibilité molaire
ψ	$m^{-3/2}$	Fonction d'onde
$\psi_k(\vec{r})$	$m^{-3/2}$	Fonction d'état
ω_D	$rad\,s^{-1}$	Fréquence de Debye
ω	$rad\,s^{-1}$	Pulsation
Ω	sr	Angle solide
a	m	Pas d'un réseau
a_C	MeV	Coefficient de l'énergie coulombienne
a_S	MeV	Coefficient de l'énergie de surface
a_{sy}	MeV	Coefficient de symétrie
a_V	MeV	Coefficient de l'énergie de volume
A	Bq	Activité
A	m^3s^{-1}	Probabilité de recombinaison
A	1	Nombre de masse
A	1	Amplification
b	mK	Constante de Wien
B	1	Nombre baryonique
B	1	Bottom
B	J	Énergie de liaison
B	T	Induction magnétique
c	m/s	Vitesse de la lumière
c_V	J/kgK	Capacité calorifique à volume constant
C	F	Capacité d'un condensateur
C	Jm^6	Constante de l'interaction de Van-der-Waals
C	1	Charme
$\hat{C}$	1	Opérateur de conjugaison de charge
C_e	JK^{-1}	Capacité calorifique d'un gaz d'électrons
C_n	$kg\,s^{-2}$	Constante élastique
C_{Ph}	JK^{-1}	Capacité calorifique d'un gaz de phonons
d	m	Distance réticulaire

Symbole	Unité	Dénomination
d_n	m	Largeur de la charge d'espace négative
d_p	m	Largeur de la charge d'espace positive
D	Gy	Dose de rayonnement absorbée
$\vec{\mathbf{D}}$	$\mathrm{Asm^{-2}}$	Densité de déplacement électrique
$D(\omega)$	s	Densité d'états
e	As	Charge élémentaire
E	$\mathrm{N\,m^{-2}}$	Module d'élasticité
E	J	Énergie
$\mathrm{d}E$	J	Intervalle d'énergie
$\vec{\mathbf{E}}$	$\mathrm{Vm^{-1}}$	Champ électrique
E_B	J	Énergie de liaison
$E_D(\vec{\mathbf{r}})$	V/m	Champ dipolaire
E_F	J	Énergie de Fermi
E_g	J	Lacune énergétique, gap
E_L	J	Limite inférieure de la bande de conduction
E_N	J	Énergie d'exciton
E_V	J	Limite inférieure de la bande de valence
E_I	J	Énergie d'ionisation
E_cin	J	Énergie cinétique
f	1/s	Fréquence
f	1	Nombre de degrés de liberté
f	1	Probabilité de fission
$f(E,T)$	1	Distribution de Fermi
$\vec{\mathbf{F}}$	N	Force
$F(Z,\eta)$	1	Fonction de Fermi
F_S	$\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$	Force de déformation
G	$\mathrm{N\,m^{-2}}$	Module de cisaillement
g	1	Facteur de Landé
g_s, g_l	1	Facteur g
h	Js	Quantum d'action, constante de Planck
$\hbar$	Js	Constante de Planck réduite ($h/2\pi$)
ED	Sv	Équivalent de dose
$\hat{H}$	J	Opérateur de Hamilton, hamiltonien
I	$\mathrm{kg\,m^2}$	Moment d'inertie
$\bar{I}$	J	Énergie d'ionisation moyenne
I	1	Isospin
$\vec{\mathbf{I}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{J}}$	Js	Moment angulaire total
I_Sp	A	Courant inverse (diode)
ΔI_B	A	Variation du courant base
ΔI_C	A	Variation du courant collecteur
j	1	Unité imaginaire
j_q	$\mathrm{Wm^{-2}}$	Densité de courant thermique
J	1	Nombre quantique de rotation
J, j	1	Nombre quantique de moment cinétique

Symbole	Unité	Dénomination
k	$\mathrm{J/K}$	Constante de Boltzmann
k	1	Facteur multiplicatif
k	$\mathrm{m^{-1}}$	Vecteur d'onde
$\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{K}}$	$1/\mathrm{m}$	Vecteur d'onde
k_{B}	$\mathrm{JK^{-1}}$	Constante de Boltzmann
k_{F}	$\mathrm{m^{-1}}$	Impulsion de Fermi
K	$\mathrm{m^{-1}}$	Nombre d'ondes
K	Gy	Kerma(K*inetic* E*nergy* R*elease* in MA*tter*)
$\vec{\mathbf{l}}, \vec{\mathbf{L}}$	Js	Moment cinétique orbital
L	1	Taux de fuite
L	1	Nombre leptonique
L	$\mathrm{s^{-1}m^{-3}}$	Probabilité d'absorption
L, l	1	Nombre quantique orbital
$L_{e,\nu}(T)/(\mathrm{m^2sr})$	Ws	Luminance énergétique spectrale
m	kg	Masse d'une particule
m^*	kg	Masse effective
m_M	kg	Masse d'une molécule
m_e	kg	Masse de l'électron
m_{j}	1	Nombre quantique magnétique
M	kg	Masse d'un atome
M	kg/mol	Masse molaire
M_{r}	1	Masse moléculaire relative moyenne
n	$\mathrm{m^{-3}}$	Densité des trous
n	$\mathrm{m^{-3}}$	Densité des électrons libres
n, m	1	Nombre quantique principal
$n(\omega, T)$	1	Distribution de Bose-Einstein
n_{A}	$\mathrm{m^{-3}}$	Concentration des accepteurs
n_{D}	$\mathrm{m^{-3}}$	Concentration des donneurs
n_{i}	$\mathrm{m^{-3}}$	Densité intrinsèque de porteurs de charge
n_{L}	$\mathrm{m^{-3}}$	Densité effective d'électrons (bande de conduction)
n_{V}	1	Densité effective des trous
N	$\mathrm{m^{-3}}$	Densité de particules
N_1, N_2	1	Nombres d'occupation
N_{A}	1	Nombre d'Avogadro
p	$\mathrm{m^{-3}}$	Densité des trous
$\vec{\mathbf{p}}$	kg m/s	Impulsion, quantité de mouvement
$\vec{\mathbf{p}}, d$	Cm	Moment dipolaire électrique
$\vec{\mathbf{P}}$	$\mathrm{A\,s\,m^{-2}}$	Polarisation électrique
$p_{\mathrm{E}}(\vec{\mathbf{r}})$	$1/(\mathrm{Js\,sr\,m^2})$	Radiance spectrale
$\hat{P}$	1	Opérateur de symétrie
Q	As	Charge
Q	J	Énergie rayonnante
Q	J	Quantité de chaleur
$r_{BE,A}$	Ω	Résistance d'entrée au point de fonctionnement

Symbole	Unité	Dénomination
r_{BE}	Ω	Résistance différentielle d'entrée
r_{CE}	Ω	Résistance différentielle de sortie
r_{n}	m	Rayon de Bohr
R_∞	$1/\text{m}$	Constante de Rydberg
R_{C}	Ω	Résistance de collecteur
R_{H}	$1/\text{m}$	Constante de Rydberg (correction du c.d.m.)
$\vec{\mathbf{s}}, \vec{\mathbf{S}}$	Js	Spin
S	MeV/cm	Pouvoir d'arrêt
S	1	Étrangeté
S, s	1	Spin, nombre quantique de spin
T	K	Température
$\hat{T}$	1	Opérateur d'inversion du temps
T_F	K	Température de Fermi
$T_{1/2}$	s	Période, demi-vie
u	J/m^3	Densité d'énergie du rayonnement
u	kg	Unité de masse atomique
$u_k(\vec{\mathbf{r}})$	$\text{m}^{-3/2}$	Fonction périodique
$u_\nu(\nu, T)$	Js/m^3	Densité d'énergie spectrale
U	J	Énergie interne
$U(R)$	J	Énergie de liaison
U_0	V	Tension d'accélération
U_{n}	V	Tension d'entrée
U_{a}	V	Tension de sortie
U_{D}	V	Différence de tension
U_{e}	V	Tension d'entrée
U_{n}	V	Tension d'entrée inversée
U_{p}	V	Tension d'entrée non inversée
U_{T}	V	Tension d'un couple thermométrique
ΔU_{BE}	V	Tension dynamique de Base
ΔU_{CE}	V	Tension dynamique de sortie
V	m^{-3}	Volume
$V(r)$	J	Potentiel
v	1	Nombre quantique de vibration
v	m/s	Vitesse moyenne des phonons
v_{el}	m/s	Vitesse moyenne des électrons
v_{gr}	m/s	Vitesse de groupe de l'onde associée aux électrons
v_{r}	1	Tension de réaction
w	1	Probabilité de présence
W_{A}	J	Travail de sortie, travail d'extraction
W_{I}	J	Énergie d'ionisation
Z	1	Numéro atomique
Z	Ω	Impédance
Z^*	1	Numéro atomique effectif

30 Tables de la physique quantique

30.1 Potentiels d'ionisation

30.1/1 : **Énergie d'ionisation des éléments**

Z	État de charge											
	1^+	2^+	3^+	4^+	5^+	6^+	7^+	8^+	9^+	10^+	11^+	12^+
1 H	13.598											
2 He	24.587	54.416										
3 Li	5.392	75.638	122.451									
4 Be	9.322	18.211	153.893	217.713								
5 B	8.298	25.154	37.930	259.368	340.217							
6 C	11.260	24.383	47.887	64.492	392.077	489.981						
7 N	14.534	29.601	47.448	77.472	97.888	552.057	667.029					
8 O	13.618	35.116	54.934	77.412	113.896	138.116	739.315	871.387				
9 F	17.422	34.970	62.707	87.138	117.240	157.161	185.182	953.886	1103.89			
10 Ne	21.564	40.962	63.45	97.11	126.21	157.93	207.27	239.09	1195.797	1362.164		
11 Na	5.139	47.286	71.64	98.91	138.39	172.15	208.47	264.18	299.87	1465.091	1648.659	
12 Mg	7.646	15.035	80.143	109.24	141.26	186.50	224.94	265.90	327.95	367.53	1761.802	1962.613
13 Al	5.986	18.828	28.447	119.99	153.71	190.47	241.43	284.59	330.21	398.57	442.07	2085.983
14 Si	8.151	16.345	33.492	45.141	166.77	205.05	246.52	303.17	251.10	401.43	476.06	523.50
15 P	10.486	19.725	30.18	51.37	65.023	230.43	263.22	309.41	371.73	424.50	479.57	560.41
16 S	10.360	23.33	34.83	47.30	72.68	88.049	280.93	328.23	279.10	447.09	504.78	564.65
17 Cl	12.967	23.81	39.61	53.46	67.8	98.03	114.193	348.28	400.05	455.62	529.26	591.97
18 Ar	15.759	27.629	40.74	59.81	75.02	91.007	124.319	143.456	422.44	478.68	538.95	618.24
19 K	4.341	31.625	45.72	60.91	82.66	100.00	117.56	154.86	175.814	503.44	564.13	629.09
20 Ca	6.113	11.871	50.908	67.10	84.41	108.78	127.70	147.24	188.54	211.270	591.25	656.39
21 Sc	6.54	12.80	24.76	73.47	91.66	111.1	138.0	158.7	180.02	225.32	249.832	685.89
22 Ti	6.82	13.58	27.491	43.266	99.22	119.36	140.8	168.5	193.2	215.91	265.23	291.497
23 V	6.74	14.65	29.310	46.707	65.23	128.12	150.17	173.7	205.8	230.5	255.04	308.25
24 Cr	6.766	16.50	30.96	49.1	69.3	90.56	161.1	184.7	209.3	244.4	270.8	298.0
25 Mn	7.435	15.640	33.667	51.2	72.4	95	119.27	196.46	221.8	248.3	286.0	314.4
26 Fe	7.870	16.18	30.651	54.8	75.0	99	125	151.06	235.04	262.1	290.4	330.8
27 Co	7.86	17.06	33.50	51.3	79.5	102	129	157	186.13	276	305	336
28 Ni	7.635	18.168	35.17	54.9	75.5	108	133	162	193	224.5	321.2	352
29 Cu	7.726	20.292	36.83	55.2	79.9	103	139	166	199	232	266	368.8
30 Zn	9.394	17.964	39.722	59.4	82.6	108	134	174	203	238	274	310.8
31 Ga	5.999	20.51	30.71	64								
32 Ge	7.899	15.934	34.22	45.71	93.5							
33 As	9.81	18.633	28.351	50.13	62.63	127.6						
34 Se	9.752	21.19	30.820	42.944	68.3	81.70	155.4					
35 Br	11.814	21.8	36	47.3	59.7	88.6	103.0	192.8				
36 Kr	13.99	24.359	36.95	52.5	64.7	78.5	111.0	126	230.39			
37 Rb	4.177	27.28	40	52.6	71.0	84.4	99.2	136	150	277.1		
38 Sr	5.695	11.030	43.6	57	71.6	90.8	106	122.3	162	177	324.1	
39 Y	6.38	12.24	20.52	61.8	77.0	93.0	116	129	146.52	191	206	374.0
40 Zr	6.84	13.13	22.99	34.84	84.5							
41 Nb	6.88	14.32	25.04	38.3	5055	102.6	125					
42 Mo	7.099	16.15	27.16	46.4	61.2	68	126.8	153				

Z	État de charge										
	1^+	2^+	3^+	4^+	5^+	6^+	7^+	8^+	9^+	10^+	11^+	12^+
43 Tc	7.28	15.26	29.54	43	59	76	94	161	183	185		
44 Ru	7.37	16.76	28.47	46.5	63	81	100	119	192	216		
45 Rh	7.46	18.08	31.06	45.6	67	85	105	126	147	225		
46 Pd	8.34	19.43	32.93	48.8	66	90	110	132	155	178		
47 Ag	7.576	21.49	34.83	52	70	89	116	139	162	187		
48 Cd	8.991	16.904	4405	550	73	94	115	146	170	185		
49 In	5.785	19.86	28.0	58	77	98	120	144	178	204		
50 Sn	4.332	14.63	30.7	46.4	81.1	103	126	150	176	213		
51 Sb	8.64	16.7	24.8	44.1	63.8	107.6	132	157	184	211		
52 Te	9.01	18.8	30.6	37.9	66	83	137.1	164	192	220		
53 I	10.44	19.0	31.4	41.7	71	83	104	169.9	200	229		
54 Xe	12.127	21.2	32.1	45.5	57	89	102	126	204.3	238		
55 Cs	3.893	25.1	34.6	45.5	62	74	108	122	150	256		
56 Ba	5.210	10.01	37	48.8	62	80	93	106	144	158		
57 La	5.61	11.43	19.17	52	66	80	100	114	151	165		
58 Ce	6.91	12.3	19.5	36.7	70	85	100	122	137	172		
59 Pr	5.76	10.55	21.62	39.95	57.45							
60 Nd	5.49	10.72										
61 Pm	5.55	10.90										
62 Sm	5.63	11.07										
63 Eu	5.67	11.25										
64 Gd	6.14	12.1										
65 Tb	5.85	11.52										
66 Dy	5.93	11.67										
67 Ho	6.02	11.80										
68 Er	6.10	11.93										
69 Tm	6.18	12.05	23.71									
70 Yb	6.254	12.17	25.2									
71 Lu	5.426	13.9	19									
72 Hf	7.0	14.9	23.3	33.3								
73 Ta	7.89	16.2	22.3	33.1	45							
74 W	7.98	17.7	24.1	35.4	48	61						
75 Re	7.88	16.6	26	37.7	51	64	79					
76 Os	8.7	17	25	40	54	68	83	99				
77 Ir	9.1	17.0	27	39	57	72	88	104	121			
78 Pt	8.96	18.54	28.5	41.1	55	75	92	109	127	146		
79 Au	9.223	20.5	30.5	43.5	58	73	96	114	133	153		
80 Hg	10.434	18.761	34.21	46	61	77	94	120	139	159		
81 Tl	3.106	20.42	29.8	50.7	64	81	98	116	145	166		
82 Pb	7.415	15.03	31.93	42.3	69.73	84	103	122	142	173		
83 Bi	7.287	19.3	25.6	45.3	56	94.42	107	127	148	169		
84 Po	8.2	19.4	27.3	38	61	73	112	132	154	176		
85 At	9.2	20.1	29.3	41	51	78	91	138	160	183		
86 Rn	10.745	21.4	29.4	43.8	55	67	97	111	166	190		
87 Fr	3.98	22.5	33.5	43	59	71	84	117	133	197		
88 Ra	5.277	10.144	34.3	46.4	58.5	76	89	103	140	156		
89 Ac	6.89	11.5	–	49	62	76	95	109	123	164		
90 Th	6.95	11.5	20.0	28.7	65	8,	94	115	130	145		
91 Pa	–	–	–	–	–	84	100	115	138	154		
92 U	6.2	–	–	–	–	–	104	121	137	126		

30.1/2 : Énergie d'ionisation de composés azotés

Molécule	E_i (eV)	Molécule	E_i (eV)	Molécule	E_i (eV)	Molécule	E_i (eV)		E_i (eV)
NH	13.10	CH_3CN	11.96	$n - C_3H_7NH_2$	9.17	N_2^+	50	CH_3N_3	9.5
NH_2	11.4	C_2H_5N	9.94	$(CH_3)_3N$	8.32	N_2H_2	9.85	NF	12.0
NH_3	10.15	$(CH_3)_2NH$	8.4	C_4N	12.3	N_2H_3	7.88	NF_2	12.0
ND_3	11.52	$C_2H_5NH_2$	9.32	$(CH_3)_2CCN$	9.15	N_2H_4	9.56	NF_3	13.2
CN	15.13	C_2H_3CN	10.75	$n - C_4H_9NH_2$	9.19	$CH_3N - NH_2$	5.07	CH_2FCN	13.0
HCN	13.86	C_2H_5CN	11.85	$(C_6H_5)_2NH$	8.44	C_2N_2	13.8	N_2F_4	12.04
CH_3NH_2	9.41	C_3N	14.3	C_5N	12.0	$(CH_3)_2N - NH_2$	8.12	CNCl	12.49
CH_5N	8.97	C_3HN	11.6	C_6H_7N	7.70	$(CH_3)_3N_2$	4.95	CH_2ClCN	12.2
C_2N	12.8	CH_3CHCN	9.76	C_7H_9N	7.34	$NCC \equiv CCN$	11.4	CNBr	11.95
CH_2CN	10.87	$C_3H_5NH_2$	9.6	N_2	15.51	NH_3	10.3	CNI	10.98

30.1/3 : Énergie d'ionisation d'hydrocarbures

Molécule	E_i (eV)	Molécule	E_i (eV)
H_2	15.427	$C_5H_2 = C(CH_3) - CH = CH_2$	8.85
Graphite	3.8	$CH_3CH_2CCH_3 = CH_2$	9.12
CH_2	11.82	$CH_3CH_2CH_2CH = CH_2$	9.50
CH	9.86	C_5H_{12}	10.37
CD_3	9.95	C_6H_4	10.23
CH_4	12.99	C_6H_6	9.245
CD_4	13.25	$CH_2 = C(CH_3 - C)CH_3 = CH_2$	8.72
C_2H_2	11.41	C_6H_{10}	8.945
C_2H_3	9.45	$C_4H_9CH = CH_2$	9.46
C_2H_4	10.516	$(CH_3)_2CHCH = CHCH_3$	8.30
$(C_4H_8)_4$	9.23	C_6H_{12}	9.08
C_2H_5	8.80	C_6H_{14}	10.17
C_2H_6	11.65	C_7H_7	7.73
C_3H_3	8.25	C_7H_8	8.820
$C_3HC \equiv CH$	10.34	$CH_3C_6H_{11}$	9.86
$CH_3CH \equiv CH_2$	9.73	C_7H_16	10.06
C_3H_8	11.08	$C_6H_5CH = CH_2$	8.86
$CH \equiv C - C \equiv CH$	10.73	$1.2 - (CH_3)_2C_6H_4$	8.56
$CH_2 = CH - CH = CH_2$	9.07	$C_6H_5CH_2CH_3$	8.76
$CH_3C \equiv CCH_3$	11.46	$C_6H_{13}CH = CH_2$	9.52
$CH_3CH_2CH = CH_2$	9.58	C_8H_{18}	10.24
$(CH_3)_2C = CH_2$	9.23	$C_6H_5C_3H_7$	8.72
$CH_3C_3H_5$	9.88	C_9H_{20}	1021
C_4H_{10}	9.08	$C_{10}H_8$	8.12
C_5H_6	8.58	$C_{14}H_{10}$	7.38

30.1/4 : Énergie d'ionisation d'hallogénures

Molécule	E_i (eV)	Molécule	E_i (eV)	Molécule	E_i (eV)	Molécule	E_i (eV)
HF	15.77	$C_6F_5CH_3$	9.6	C_2H_3Cl	9.995	CH_2Br_2	10.8
F_2	15.83	HCl	12.74	$Cl_2C = CH_2$	9.79	C_2H_3Br	9.80
CF	13.81	ClF_3	13.0	$C_6H_6 - ClHC - CHCl$	9.67	$C_6H_6 - BrHC = CHBr$	9.69
CF_2	13.30	Cl_2	11.48	$C_2F_2Cl_2$	10.0	C_2HBr_3	9.27
CHF_2	9.45	CCl	12.9	C_2F_3Cl	10.4	C_2H_5Br	10.29
CF_3	10.10	CCl_2	13.10	C_2Cl_4	9.5	$CH_3 - C \equiv CBr$	10.1
CH_3F	12.85	CH_2Cl	9.70	C_2H_5Cl	10.97	C_6H_5Br	9.41
CF_7	17.8	CCl_2	8.78	$CH_3C \equiv CCl$	9.9	HI	10.38
C_2H_3F	10.37	CH_3Cl	11.28	HBr	11.62	IF_5	13.5
$H_2C = CF_2$	10.30	CF_3Cl	12.92	C_6H_5Cl	9.07	ICl	10.4
C_2HF_3	10.14	CClF	13.13	Br_2	10.55	IBr	10.3
C_2H_4	10.12	CCl_2F	8.96	BrCl	11.1	I_2	9.28
C_2H_5F	12.00	CCl_3	7.92	CBr	10.11	CH_3I	9.51
$CH_2 = CHCF_3$	10.9	CCl_4	11.1	CH_2Br	8.34	CF_3I	10.0
C_6H_4F	10.86	CH_2Cl_2	11.4	$CHBr_2$	8.13	C_2H_5I	9.33
C_6H_5F	9.197	CF_2Cl_2	11.8	CH_3Br	10.54	$n - C_3H_7I$	9.41
C_6ClF_5	10.4	$CHCl_3$	11.42	$CHBrF_2$	12.1	$CH_2 - C_4H_9$	9.19
C_6BrF_5	9.6	C_2HCl_3	9.47	CF_3Br	12.3	C_6H_5I	9.10

30.1/5 : Énergie d'ionisation de composés de l'oxygène

Molécule	E_i (eV)	Molécule	E_i (eV)	Molécule	E_i (eV)	Molécule	E_i (eV)
OH	13.18	$n - C_3H_7OH$	10.42	$HFC = O$	11.4	ClO	10.4
H_2O	12.60	$n - C_4H_9OH$	10.30	CHOCHO	9.48	$COCl_2$	11.77
CO	14.01	$(C_2H_5)_2O$	9.53	$(H_2CO)_2$	10.51	$CH_2ClCOCH_3$	9.91
CO^+	43	C_6H_5OH	8.50	CH_3COOH	10.38	$CHCl_2COCH_3$	10.12
CH_2O	10.90	$(C_6H_5)HC = O$	9.51	$HCOOCH_3$	10.82	ClO_2	11.1
CH_3O	9.2	O_2	14.01	CH_3COCHO	9.60	ClO_3	11.7
CH_2OH	8.2	O_2^+	50	C_2H_5COOH	10.47	ClO_3F	13.6
CH_3OH	10.95	HO_2	11.53	CH_3COOCH_3	10.27	NO	9.25
$CH_2 = C = O$	9.60	H_2O_2	1092	$n - C_3H_7COOH$	10.2	$NH_2HC = O$	10.16
C_2H_5O	9.2	CO_2	13.79	O_3	11.7	N_2O	12.63
C_2H_4OH	7.0	HCOO	9.0	FO	13.0	NO_2	9.78...12.3
C_2H_5OH	10.25	COOH	8.7	F_2O	13.7	CH_5ONO	10.7
$(CH_3)_2O$	10.00	HCOOH	11.05	$(CF_3)_2C = O$	11.82	CH_3NO_2	11.34

30.1/6 : Énergie de dissociation de molécules diatomiques

Molécule	E_d (eV)	Molécule	E_d (eV)	Molécule	E_d (eV)	Molécule	E_d (eV)	Molécule	E_d (eV)
Ag_2	1.8	BO	7.45	CsBr	4.3	I_2	1.54	NaK	0.61
AgBr	3.1	BaBr	2.8	CsCl	4.4	IBr	1.82	N_2	9.76
AgCl	3.4	BaCl	2.7	CsF	5.0	ICl	2.15	NBr	2.9
AgH	2.36	BaF	3.8	CsH	1.9	IF	2.9	NF	2.6
AgI	2.6	BaH	1.8	CsI	3.6	IO	1.9	NH	3.6
AgO	2.5	BaO	4.7	Cu_2	0.2	K_2	0.51	NO	3.5
AgSn	2.55	BaS	2.4	CuBr	3.4	KBr	3.95	NS	5.0
AlBr	4.6	BeCl	4.8	CuCl	3.7	KCl	4.4	O_2	5.1
AlC	1.9	BeF	7.0	CuF	3.0	KF	5.1	OH	4.4
AlCl	5.1	BrCl	2.23	CuH	2.9	KH	1.86	P_2	5.0
AlF	7.65	BrF	2.4	CuI	3.0	KI	3.33	Rb_2	0.48
AlH	2.9	BrO	2.4	CuO	4.8	Li_2	1.1	RbBr	4.0
AlI	3.84	CaBr	2.9	D_2	4.55	LiBr	4.4	RbCl	4.4
AlO	5.0	CaCl	2.8	F_2	1.6	LiCl	4.8	RbF	5.4
AlS	3.5	CaF	3.1	FO	1.9	LiF	6.0	RbH	1.8
AsN	6.6	CaH	1.7	H_2	4.48	LiH	2.4	RbI	3.3
AsO	5.0	CaI	2.8	HD	4.51	LiI	3.6	S_2	4.3
Au_2	2.28	CaO	5.0	HT	4.52	LiO	3.43	SF	2.8
AuAl	3.1	CaS	3.0	HBr	3.75	MnBr	3.2	SH	3.5
AuCl	3.1	C_2	6.2	HCl	4.43	MnCl	3.9	SO	5.3
AuCr	2.2	CCl	2.8	HF	5.9	MnF	5.0	Tl_2	4.59
AuCu	2.4	CF	4.7	HI	3.05	MnH	2.2	TlBr	3.4
AuH	3.1	CH	3.47	Hg_2	0.06	MnO	3.4	TlCl	3.8
AuMg	2.7	CN	8.4	HgBr	0.7	Na_2	0.7	TlF	4.7
AuSn	2.55	CO	11.1	HgCl	1.0	NaBr	3.8	TlH	2.0
BBr	4.5	Cl_2	2.48	HgF	1.8	NaCl	4.2	TlI	2.8
BCl	5.2	ClF	2.6	HgH	0.38	NaF	5.0	ZnCl	2.6
BF	8.1	ClO	2.8	HgI	0.36	NaH	2.1	ZnH	0.85
BH	3.0	Cs_2	0.45	HgS	2.8	NaI	3.1	ZnI	1.4

30.2 Rayons atomiques et ioniques des éléments

Les valeurs mesurées des rayons des atomes et des ions dépendent de la méthode de mesure. Pour cette raison, les valeurs sont données à titre indicatif.

30.2/1 : Rayons atomiques et ioniques des éléments

Z	Élément	Charge	Rayon (nm)	Z	Élément	Charge	Rayon (nm)	Z	Élément	Charge	Rayon (nm)
1	H	−1	0.154	16	S	−2	0.184	28	Ni	0	0.121
		0	0.46			0	0.095			+2	0.069
2	He	0	0.122			+2	0.219			+3	0.035
3	Li	0	0.155			+4	0.037	29	Cu	0	0.128
		+1	0.068			+6	0.030			+1	0.096
4	Be	0	0.113	17	Cl	−1	0.181			+2	0.072
		+1	0.044			0	0.089	30	Zn	0	0.139
		+2	0.035			+5	0.034			+1	0.088
5	B	0	0.091			+7	0.027			+2	0.074
		+1	0.035	18	Ar	0	0.192	31	Ga	0	0.139
		+3	0.023			+1	0.154			+1	0.081
6	C	−4	0.260	19	K	0	0.236			+3	0.062
		0	0.077			+1	0.133	32	Ge	−4	0.272
		+4	0.016	20	Ca	0	0.197			0	0.139
7	N	−3	0.171			+1	0.118			+2	0.073
		0	0.071			+2	0.099			+4	0.053
		+3	0.016	21	Sc	0	0.164	33	As	−3	0.222
		+5	0.013			+3	0.073			0	0.148
8	O	−2	0.132	22	Ti	0	0.146			+3	0.058
		−1	0.176			+1	0.096			+5	0.046
		0	0.056			+2	0.094	34	Se	−2	0.191
		+1	0.022			+3	0.076			−1	0.232
		+6	0.009			+4	0.068			0	0.160
9	F	−1	0.133	23	V	0	0.134			+1	0.066
		0	0.053			+2	0.088			+4	0.050
		+7	0.007			+3	0.074			+6	0.042
10	Ne	0	0.160			+4	0.063	35	Br	−1	0.196
		+1	0.112			+5	0.059			0	0.105
11	Na	0	0.189	24	Cr	0	0.127			+5	0.047
		+1	0.097			+1	0.081			+7	0.039
12	Mg	0	0.160			+2	0.089	36	Kr	0	0.198
		+1	0.082			+3	0.063	37	Rb	0	0.248
		+2	0.066			+6	0.052			+1	0.147
13	Al	0	0.143	25	Mn	0	0.130	38	Sr	0	0.215
		+3	0.051			+2	0.080			+2	0.112

suite du tableau sur la page suivante

Z	Élément	Charge	Rayon (nm)	Z	Élément	Charge	Rayon (nm)	Z	Élément	Charge	Rayon (nm)
14	Si	−4	0.271			+3	0.066	39	Y	0	0.181
		−1	0.384			+4	0.060			+3	0.089
		0	0.134			+7	0.046	40	Zr	0	0.160
		+1	0.065	26	Fe	0	0.126			+1	0.109
		+4	0.042			+2	0.074			+2	0.074
15	P	−3	0.212			+3	0.064	41	Nb	0	0.145
		0	0.130	27	Co	0	0.125			+1	0.100
		+3	0.044			+2	0.072			+4	0.074
		+5	0.035			+3	0.063			+5	0.069
42	Mo	0	0.139			+1	0.139	77	Ir	0	0.135
		+1	0.093			+3	0.106			+4	0.068
		+4	0.070			+4	0.090	78	Pt	0	0.138
		+6	0.062	58	Ce	0	0.183			+2	0.080
43	Tc	0	0.136			+1	0.127			+4	0.065
		+7	0.098			+3	0.103	79	Au	0	0.144
44	Ru	0	0.134			+4	0.092			+1	0.137
		+4	0.067	59	Pr	0	0.182			+3	0.085
45	Rh	0	0.134			+3	0.101	80	Hg	0	0.160
		+3	0.068			+4	0.090			+1	0.127
		+4	0.065	60	Nd	0	0.182			+2	0.110
46	Pd	0	0.137			+3	0.099	81	Tl	0	0.171
		+2	0.080	61	Pm	0	–			+1	0.147
		+4	0.065			+3	0.098			+3	0.095
47	Ag	0	0.144	62	Sm	0	0.181	82	Pb	0	0.175
		+1	0.126			+3	0.096			+2	0.080
		+2	0.089	63	Eu	0	0.202			+4	0.065
48	Cd	0	0.156			+2	0.109	83	Bi	−4	0.213
		+1	0.114			+3	0.095			0	0.182
		+2	0.097	64	Gd	0	0.179			+1	0.098
49	In	0	0.166			+3	0.094			+3	0.096
		+1	0.130	65	Tb	0	0.177			+5	0.071
		+3	0.081			+3	0.092	84	Po	+6	0.067
50	Sn	−4	0.294			+4	0.084	85	At	+7	0.062
		−1	0.370	66	Dy	0	0.177	87	Fr	0	0.280
		0	0.158			+3	0.091			+1	0.180
		+2	0.093	67	Ho	0	0.176	88	Ra	0	0.235
		+4	0.071			+3	0.089			+2	0.143
51	Sb	−3	0.245	68	Er	0	0.175	89	Ac	0	0.203
		0	0.161			+3	0.088			+3	0.118
		+3	0.076	69	Tm	0	0.174	90	Th	0	0.180
		+5	0.062			+3	0.087			+4	0.102

suite du tableau sur la page suivante

Z	Élément	Charge	Rayon (nm)	Z	Élément	Charge	Rayon (nm)	Z	Élément	Charge	Rayon (nm)
52	Te	−2	0.211	70	Yb	0	0.193	91	Pa	0	0.162
		−1	0.250			+3	0.081			+3	0.113
		0	0.170	71	Lu	0	0.174			+4	0.098
		+1	0.082			+3	0.085			+5	0.089
		+4	0.070	72	Hf	0	0.159	92	U	0	0.153
		+6	0.056			+4	0.078			+4	0.097
53	I	−1	0.220	73	Ta	0	0.146			+6	0.080
		0	0.124			+5	0.068	93	Np	0	0.150
		+5	0.062	74	W	0	0.140			+3	0.110
		+7	0.050			+4	0.070			+4	0.095
54	Xe	0	0.218			+6	0.062			+7	0.071
55	Cs	0	0.268	75	Re	0	0.137	94	Pu	0	0.162
		+1	0.167			+4	0.072			+3	0.108
56	Ba	0	0.221			+7	0.056			+4	0.093
		+1	0.153	76	Os	0	0.135	95	Am	+3	0.107
		+2	0.134			+4	0.088			+4	0.092
57	La	0	0.187			+6	0.069				

30.3 Émission électronique

30.3/1 : Travail d'extraction W_A des électrons d'un élément

Les méthodes de mesure sont indiquées dans le tableau. T : ionisation thermique ; P : photoémission ; CPD : différences de potentiel de contact ; F : émission de champ.

Pour les monocristaux, les directions dans lesquelles le travail d'extraction a été mesuré sont reportées. Les valeurs en italiques sont indicatives.

Élément	W_A (eV)	Direction	Méthode	Élément	W_A (eV)	Direction	Méthode
Ag	*4.26*		P		4.55	(332)	P
	4.64	(100)	P	Na	2.75		P
	4.52	(110)	P	Nb	4.3		P
	4.74	(111)	P		4.02	(001)	P
Al	4.28		P		4.87	(110)	P
	4.41	(100)	P		4.36	(111)	T
	4.06	(110)	P		4.63	(112)	T
	4.24	(111)	P		4.29	(113)	T
As	*3.75*		P		3.95	(116)	T
Au	5.1		P		4.18	(310)	T
	5.47	(100)	P	Nd	3.2		P
	5.37	(110)		Ni	5.15		P
	5.31	(111)			5.22	(100)	P
B	*4.45*		T		5.04	(110)	P
Ba	*2.7*		T		5.35	(111)	P
Be	4.98		P	Os	*4.83*		T
Bi	*4.22*		P	Pb	4.25		P

suite du tableau sur la page suivante

Élément	W_A (eV)	Direction	Méthode	Élément	W_A (eV)	Direction	Méthode
C	*5.0*		CPD	Pd	5.12		P
Ca	2.87		P		5.6	(111)	P
Cd	*4.22*		CPD	Pt	5.65		P
Ce	2.9		P		5.7	(111)	P
Co	5.0		P	Rb	*2.16*		P
Cr	4.5		P	Re	*4.96*		T
Cs	2.14		P		5.75	(1011)	F
Cu	4.65		P	Rh	4.98		P
	4.59	(100)	P	Ru	4.71		P
	4.48	(110)	P	Sb	4.55	(amorph)	–
	4.94	(111)	P		4.7	(100)	–
	4.53	(112)	P	Sc	3.5		P
Eu	2.5		P	Se	5.9		P
Fe	4.5		P	Si (n)	4.85		CPD
	4.67	(100)	P	Si (p)	*4.91*	(100)	CPD
	4.81α	(111)	P		4.60	(111)	P
	4.70α		P	Sm	2.7		P
	4.62β		P	Sn	*4.42*		CPD
	4.68γ		P	Sr	*2.59*		T
Ga	4.2		CPD	Ta	4.25		T
Ge	5.0		CPD		4.15	(100)	T
	4.80	(111)	P		4.80	(110)	T
Gd	3.1		P		4.00	(111)	T
Hf	3.9		P	Tb	3.0		P
Hg	4.49		P	Te	4.95		P
In	4.12		P	Th	3.4		T
Ir	*5.27*		T	Ti	4.33		P
	5.42	(110)	F	Tl	*3.84*		CPD
	5.76	(111)	F	U	3.63		P& CPD
	5.67	(100)	F		3.73	(100)	P& CPD
	5.00	(210)	F		3.90	(110)	P& CPD
K	2.30		P		3.67	(113)	P& CPD
La	3.5		P	V	4.3		P
Li	*2.9*		F	W	4.55		CPD
Lu	*3.3*		CPD		4.63	(100)	F
Mg	*3.66*		P		5.25	(110)	F
Mn	4.1		P		4.47	(111)	F
Mo	4.6		P		4.18	(113)	CPD
	4.53	(100)	P		4.30	(116)	T
	4.95	(110)	P	Y	3.1		P
	4.55	(111)	P	Zn	*4.33*		P
	4.36	(112)	P		4.9	(0001)	CPD
	4.50	(114)	P	Zr	4.05		P

30.3/2 : Travail de sortie pour des surfaces adsorbées

Adsorbant	Adsorbat	W_A (eV)	Adsorbant	Adsorbat	W_A (eV)
Be	Cs	1.94	Pt	O	6.55
C	Cs	1.37	Pt	Na	2.10
Ti	Cs	1.32	Pt	K	1.62
Cr	Cs	1.71	Pt	Rb	1.57
Fe	Cs	1.82	Pt	Cs	1.38
Ni	Cs	1.37	Pt	Ba	1.9
Cu	Ba	3.35	Pt	Ba	3.28
Ge	Ba	2.2	Au	O	6.46
Zr	Cs	3.93	Au	O	5.66
Mo	Cs	1.54	Au	Ba	2.3
Mo	Th	2.58	Au	Ba	3.35
Ag	Ba	1.56	WO	Na	1.72
Hf	Cs	3.62	WO	K	1.76
Ta	Cs	1.1	Stahl	Cs	1.41
Ta	Cs	1.6	Stahl (304)	Cs	1.52
W	Li	2.18	Ag_2O	Cs	0.75
W	O	6.20	NbC	Cs	1.2
W	Ba	1.75	ZrC	Cs	1.60
W	La	2.2	Mo_2C	Cs	1.45
W	Th	2.63	Ta_2C	Cs	1.4
Re	Cs	1.45	$MoSi_2$	Cs	1.75
Re	Th	2.58	WSi_2	Cs	1.47

30.3/3 : Propriétés thermo-émissives d'une cathode de tungstène

Propriétés fondamentales d'une cathode thermo-émissive : densité de courant j_T de l'émission thermo-ionique ; vitesse de vaporisation v_v du matériau de surface. Le rendement de la cathode thermo-émissive se calcule à l'aide de : $\eta = j_T/v_v$.

T/K	j_T (A/cm^2)	v_v (g/(cm^2 s))	T/K	j_T (A/cm^2)	v_v (g/(cm^2 s))
2100	$3.9 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-13}$	2600	$7.0 \cdot 10^{-1}$	$3.9 \cdot 10^{-9}$
2200	$1.3 \cdot 10^{-2}$	$2.1 \cdot 10^{-12}$	2700	1.6	$1.8 \cdot 10^{-8}$
2300	$4.1 \cdot 10^{-2}$	$1.8 \cdot 10^{-11}$	2800	3.5	$7.4 \cdot 10^{-8}$
2400	$1.2 \cdot 10^{-1}$	$1.2 \cdot 10^{-10}$	2900	7.3	$2.8 \cdot 10^{-7}$
2500	$3.0 \cdot 10^{-1}$	$7.6 \cdot 10^{-10}$	3000	14.0	$9.5 \cdot 10^{-7}$

30.3/4 : Photocathodes alcalines

Photocathode	Rend. quantique $\frac{\text{électrons}}{\text{photon}}$	Long. d'onde limite λ_0(nm)	Sensibilité (μA/lm)	Gap (eV)	Type	Bruit therm. (A/cm^2)
K_3Sb	0.07	550	12	1.4	p	–
K_2CsSb	0.3	660	100	1.0	p	10^{-17}
$K_2CsSb(O)$	0.35	780	130	1.0	p	10^{-16}
Na_3Sb	0.02	330	?	1.1	n	–
Na_2KSb	0.30	600	60	1.0	p	10^{-16}
Rb_3Sb	0.10	580	25	1.0	p	–
Cs_3Sb	0.15	580	25	1.6	p	10^{-16}
Cs_3Sb auf MgO	0.20	650	80	1.6	p	10^{-15}
$(Cs)Na_2KSb$	0.30	870	300	1.0	p	10^{-15}

30.3/5 : Propriétés fondamentales de l'émission d'électrons secondaires

Le rendement de l'émission d'électrons secondaires δ est le nombre des électrons secondaires émis par électron incident. La valeur maximale du rendement δ_{max} et l'énergie nécessaire E_{max} à l'électron primaire sont reportées dans la table pour quelques éléments.

Élément	δ_{max}	E_{max} (eV)	E_I (eV)	E_{II} (eV)	Élément	δ_{max}	E_{max} (eV)	E_I (eV)	E_{II} (eV)
Ag	1.5	800	200	> 2000	Mg	0.95	300	–	–
Al	1.0	300	300	300	Mo	1.25	375	150	1200
Au	1.4	800	150	> 2000	Na	0.82	300	–	–
B	1.2	150	50	600	Nb	1.2	375	150	1050
Ba	0.8	400	–	–	Ni	1.3	550	150	> 1500
Bi	1.2	550			Pb	1.1	500	250	1000
Be	0.5	200	–	–	Pd	> 1.3	> 250	120	
C (diamant)	2.8	750		> 5000	Pt	1.8	700	350	3000
C (graphite)	1.0	300	300	300	Rb	0.9	350	–	–
C (suie)	0.45	500	–	–	Sb	1.3	600	250	2000
Cd	1.1	450	300	700	Si	1.1	250	125	500
Co	1.2	600	200		Sn	1.35	500		
Cs	0.7	400	–	–	Ta	1.3	600	250	> 2000
Cu	1.3	600	200	1500	Th	1.1	800		
Fe	1.3	400	120	1400	Ti	0.9	280	–	–
Ga	1.55	500	75		Tl	1.7	650	70	> 1500
Ge	1.15	500	150	900	W	1.4	650	250	> 1500
K	0.7	200	–	–	Zr	1.1	350		
Li	0.5	85	–	–					

30.4 Rayons X

30.4/1 : Principales lignes cacractéristiques de quelques éléments (série K)

Élément	long. d'onde λ (m^{-12})			Élément	long. d'onde λ (m^{-12})		
	α_2	α_1	β		α_2	α_1	β
Chrome	229.4	229.0	208.5	Or	18.5	18.0	15.9
Cobalt	179.3	178.9	162.1	Plomb	17.0	16.5	14.6
Cuivre	154.4	154.1	139.2	Sélénium	110.9	110.5	99.2
Fer	194.0	193.6	175.7	Silicium	712.8	712.5	676.8
Germanium	125.8	125.4	112.9	Tungstène	21.4	20.9	18.4
Manganèse	210.6	210.2	191.0	Uranium	13.1	12.6	11.1
Nickel	166.2	165.8	150.0	Zinc	143.9	143.5	129.5

30.5 Réactions nucléaires

30.5/1 : Section efficace de diffusion de neutrons

Élément	Neutrons rapides σ_{tot} (b)	Neutrons thermiques		
		σ_S (b)	σ_{Ab} (b)	σ_A (b)
H	0.9	38 (H_2)	0.33	
He	1.4	0.8		
Al	1.7	1.4	0.23	0.23
Fe	3.0	11.4	2.53	0.003
Ni	3.2	17.5	4.6	0.03
Cu	3.2	7.8	3.7	0.64; 2.9
Ge	3.4	9	2.4	0.002; 0.02; 0.2; 0.6
Cd	4.3	7	2600	0.1; 0.3; 0.04
Hg	4.8	21	380	0.025; 1.0
Pb	4.7	11.4	0.17	0.0003
^{232}Th	7.2	12.6	7.4	7.4
^{238}U	5.2	8.3	7.68	2.73; 0.76
^{238}U	1.3		687	107; 580 (fission)
^{239}Pu	2.0		1065	315; 750 (fission)

30.5/2 : Réactions de fusion nucléaire

Réaction	Bilan Q(MeV)	Réaction	Bilan Q(MeV)
${}^2_1H+{}^3_1H \to {}^4_2He+{}^1_0n$	17.61	${}^{14}_7N+{}^1_1H \to {}^{15}_8O+\gamma$	7.3
${}^2_1H+{}^2_1H \to {}^3_2He+{}^1_0n$	3.27	${}^{15}_8O \to {}^{15}_7N+e^+$	1.7
${}^2_1H+{}^2_1H \to {}^3_1H+{}^1_1p$	4.03	${}^{15}_7N+{}^1_1H \to {}^{12}_6C+{}^4_2He$	4.9
${}^2_1H+{}^3_2He \to {}^4_2He+{}^1_1p$	18.35	${}^2_1H+{}^1_1H \to {}^3_2He+\gamma$	5.4
${}^1_1p+{}^{11}_5B \to 3\cdot{}^4_2He$	8.7	${}^2_1H+{}^2_1H \to {}^4_2He+\gamma$	23.8
${}^{12}_6C+{}^1_1H \to {}^{13}_7N+\gamma$	1.9	${}^3_2He+{}^1_1H \to {}^4_2He+e^+$	18.7
${}^{13}_7N \to {}^{13}_6C+e^+$	1.2	${}^3_2He+{}^3_1H \to {}^4_2He{}^2_1H$	14.3
${}^{13}_6C+{}^1_1H \to {}^{14}_7N$	1.9		

30.6 Interaction rayonnement-matière

30.6/1 : Coefficient d'atténuation massique μ/ρ en $10^{-1}m^2/kg$ de rayons X

Élément	Longueur d'onde λ(nm)									
	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.2
Ag	5.4	37	17	39	71	120	174	250	354	436
Al	0.27	1.05	3.3	7.3	14.0	24	36	55	79	106
C	0.167	0.243	0.40	0.80	1.40	2.5	3.9	5.8	7.9	10.0
Cu	1.45	10	32	71	134	218	42	60	85	119
Fe	1.06	7.1	23.5	50.7	95	170	270	390	61	78
N	0.177	0.34	0.73	1.51	2.6					
O	0.183	0.336	0.730	1.53						
Pb	4.6	33	77	147	77	128	180	258	360	

30.6/2 : Coefficient d'absorption massique d'électrons dans l'aluminium

Énergie E (keV)	μ/ρ (m^2kg^{-1})	Énergie E (keV)	μ/ρ (m^2kg^{-1})
0.9	$2.5 \cdot 10^5$	100.0	13
5.8	$1.5 \cdot 10^4$	200.0	2.9
10.5	$3.5 \cdot 10^3$	460.0	0.9
46.6	$7.4 \cdot 10^1$	660.0	0.6

30.6/3 : Parcours de particules α dans l'air, les tissus biologiques et l'aluminium

Énergie E (MeV)	Air, R (cm)	Tissus, R (μm)	Aluminium, R (μm)
4.0	2.5	31	16
5.0	3.5	43	23
6.0	4.6	56	30
7.0	5.9	72	38
8.0	7.4	91	48
9.0	8.9	110	58
10.0	10.6	130	69

30.7 Effet Hall

30.7/1 : Coefficient de Hall de métaux

Les coefficients de Hall sont donnés pour des températures comprises entre 0 °C et 30 °C.

Métal	R_H 10^{-10} /(m^3/C)	Métal	R_H 10^{-10} /(m^3/C)
Li	−1.7	Ag (technique)	−0.897
Be (99.5%)	+7.7	Ag (99.9%)	−0.909
Na	−2.1	Cd (99.9%)	+0.531
Mg	−0.83	In	−0.073
Al (99.5%)	0.33	Sn	−0.022
K	−4.2	Cs	−7.8
Ca (99%)	−1.78	La (99.8%)	−0.8
Ti (99.91%)	−0.26	Ce (99.88%)	+1.81
Ti (99.87%)	+0.10	Pr (99.9%)	+0.709
V	+0.82	Nd (99.98%)	+0.971
V (99.63%)	+0.79	Sm	−0.21
Cr (99.9%)	+3.63	Sm ($\frac{\rho_{273K}}{\rho_{4.2K}}$ = 17.3)	−0.5
Mn (99.99%)	+0.84	Tm	−1.5
Cu	−0.536	Yb	+3.7
Zn (technique)	+1.04	Lu	−0.53
Ga	−0.63	Lu (mono crist. $\frac{\rho_{273K}}{\rho_{4.2K}}$ = 25)	
Rb	−4.2	H ∥ c	−2.6
Y (99.2%)	−0.770	H ⊥ c	+0.4
Y (mono crist. $\frac{\rho_{273K}}{\rho_{4.2K}}$ = 10.4)		Hf (99.4%)	+0.42
H ∥ c	−1.72	Ta (99.8%)	+0.971
H ⊥ c	−0.47	W	+1.18
Y ($\frac{\rho_{273K}}{\rho_{4.2K}}$ = 16)		Re	+3.15
H ∥ c	+1.5	Re ($\frac{\rho_{273K}}{\rho_{4.2K}}$ = 27)	+1.6
H ⊥ c	+0.4	Ir	+0.402
Zr (97.3%Zr ; 2.4%Hf)	+1.385	Pt	−1.27
Zr ($\frac{\rho_{273K}}{\rho_{4.2K}}$ = 38)	+2.15	Pt (99.9%)	−0.214
Nb	+0.88	Au	−0.705
Mo	+1.80	Hg	< 0.02
Ru	+2.2	Tl	+0.24
Rh (99.5%)	+0.505	Th	−1.2
Pd	−0.845	U	+0.34

30.8 Supraconducteurs

30.8/1 : Propriétés principales d'éléments supraconducteurs

Température de transition T_c et champ magnétique critique H_c.

Élément	T_c/K	H_c/(A/m)
W	0.0154 ± 0.0005	91.51 ± 2.39
Be	0.026	
Lu	0.1 ± 0.03	27852.115 ± 3978.87
Ir	0.1125 ± 0.001	1273.24 ± 3.97
Hf	0.128	1010.63
U	0.2	
Ti	0.40 ± 0.04	4456.34
Ru	0.49 ± 0.015	5490.85 ± 159.15
Cd	0.517 ± 0.002	2228.17 ± 79.58
Zr	0.61 ± 0.15	3740.14
Zr(ω)	0.65; 0.95	
Os	0.66 ± 0.03	5570.42
Zn	0.85 ± 0.01	4297.18 ± 23.87
Mo	0.915 ± 0.005	7639.44 ± 238.73
Gd	1.083 ± 0.0001	4639.37 ± 15.92
Al	1.175 ± 0.002	8347.68 ± 23.87
Th	1.38 ± 0.02	127.32 ± 238.73
Pa	1.4	
Re	1.697 ± 0.006	15915.49 ± 397.89
Tl	2.38 ± 0.02	14164.79 ± 159.15
In	3.408 ± 0.001	22401.06 ± 159.15
Sn	3.722 ± 0.001	24271.13 ± 159.15
Hg(β)	3.949	26 976.76
Hg(α)	4.154 ± 0.001	32706.34 ± 159.15
Ta	4.47 ± 0.04	65969.72 ± 477.46
La(α)	4.88 ± 0.02	63661.98 ± 795.77
V	5.40 ± 0.05	112 045.08
Gd(β)	5.9; 6.2	44 563.38
La(β)	6.00 ± 0.1	87 216.91; 127 323.95
Gd(γ)	7	75 598.60
Pb	7.196 ± 0.006	63900.71 ± 79.57
Tc	7.8 ± 0.1	112 204.23
Gd(Δ)	7.85	64 855.63
Nb	9.25 ± 0.02	163 929.59

30.8/2 : Alliages et composés supraconducteurs de $T_c > 10$ K

Substance	T_c/K	Substance	T_c/K	Substance	T_c/K
Al_2CMo_3	10.0	CNb	11.5	$Mo_6Pb_{0.9}S_{7.5}$	15.2
CW	10	C_3Y_2	11.5	$B_{0.1}Si_{0.9}V_3$	15.8
$Nb_{0.18}Re_{0.82}$	10	B_4LuRh_4	11.7	$MoTc_3$	15.8
B_2LuRu	10	$Mo_{0.3}SiV_{2.7}$	11.7	$C_{0.1}Si_{0.9}V_3$	16.4
$Ir_{0.4}Nb_{0.6}$	10	AlV_3	11.8	Nb_2SnTa	16.4
$RhTa_3$	10	$Mo_{0.3}Tc_{0.7}$	12.0	Nb_3Sn_2	16.6
CMO_xNb_{1-x}	10.2(max)	CMo_2	12.2	GaV_3	16.8
CTa	10.3	Mo_6Se_8Tl	12.2	$C_{0.66}Th_{0.13}Y_{0.21}$	17
$NbTc_3$	10.5	$Nb_2SnTa_{0.5}V_{0.5}$	12.2	$PbTa_3$	17
$Mo_{\approx 0.60}Re_{0.395}$	10.6	$B_{0.03}C_{0.51}Mo_{0.47}$	12.5	SiV_3	17.1
Mo_3Ru	10.6	Mn_3Si	12.5	$Nb_{2.5}SnTa_{0.5}$	17.6
NZr	10.7	$Al_{0.5}Ge_{0.5}Nb$	12.6	$Nb_{2.75}SnTa_{0.25}$	17.8
$Cu_{1.8}Mo_6S_8$	10.8	Mo_3Os	12.7	$AlNb_3$	18.0
$NbSnTa_2$	10.8	$Nb_{0.3}SiV_{2.7}$	12.8	$(Ca, La)_2CuO_4$	18
$Nb_{0.75}Zr_{0.25}$	10.8	$BaBi_{0.2}O_3Pb_{0.8}$	13.2	Nb_3Sn	18.05
$Nb_{0.66}Zr_{0.33}$	10.8	$SiV_{2.7}Zr_{0.3}$	13.2	Nb_3Si	19
Nb_3Pt	10.9	LiO_4Ti_2	13.7	$Al_{\approx 0.8}Ge_{\approx 0.2}Nb_3$	20.7
$SiTi_{0.3}V_{2.7}$	10.9	$Br_2Mo_6S_6$	13.8	$GeNb_3$	23.2
C_3La	11.0	$N_{0.93}Nb_{0.85}Zr_{0.15}$	13.8	$(Ba, La)_2CuO_4$	36
GeV_3	11	InV_3	13.9	$Cu(La, Sr)_2O_4$	39
$Mo_{0.52}Re_{0.48}$	11.1	$Mo_{0.57}Re_{0.43}$	14.0	$Ba_2Cu_3LaO_6$	80
B_4Rh_4Y	11.3	$Ge_{0.1}Si_{0.9}V_3$	14.0	$Ba_2Cu_3O_7Y$	90
$Cr_{0.3}SiV_{2.7}$	11.3	CMo	14.3	$Ba_2Cu_3O_7Tm$	101
$Ge_{0.5}Nb_3Sn_{0.5}$	11.3	$GaNB_3$	14.5	$Bi_2CaCu_2O_8Sr_2$	110
$LaMo_6Se_8$	11.4	$Al_{0.1}Si_{0.9}V_3$	14.5	$Ba_2CaCu_2O_8Tl_2$	120
$AuNb_3$	11.5	Mo_3Tc	15		

30.9 Semiconducteurs

30.9.1 Propriétés thermiques, magnétiques et électriques des semiconducteurs

30.9/1 : Éléments semiconducteurs

Les valeurs sont données pour des conditions TPN.

Élément	Enthalpie de formation (kJ · mol^{-1})	Constante diélectrique ε_r	Indice de réfraction n	Énergie d'activation E_g(eV)	Mobilité $\mu/(cm^2V^{-1}s^{-1})$ Électrons	Trous
C	714.4	5.7	2.419	5.4	1800	1400
Si	324	11.8	3.99	1.107	1900	500
Ge	791	16	3.99	0.67	3800	1820
α-Sn	267.5			0.08	2500	2400

30.9/2 : Semiconducteurs binaires

Composé	Enthalpie de formation (kJ · mol^{-1})	Constante diél. ε	Indice de réfraction n	Énergie d'activation E_g(eV)	Mobilité $\mu/(cm^2V^{-1}s^{-1})$ Électrons	Trous	Application
ZnS	477	8.9	2.356	3.54	180		lumiphores
ZnSe	422	9.2	2.89	2.58	540	28	
ZnTe	376	10.4	3.56	2.26	340	100	
CdTe	339	7.2	2.5	1.44	1200	50	
HgSe	247			2.12	20000		
AlAs	627	10.9		2.16	1200	420	
AlSb	585	11	3.2	1.60	200...400	550	
GaP	635	11.1	3.2	2.24	300	150	LED (vert) ; diodes IR
GaAs	535	13.2	3.30	1.35	8800	400	LED; FET; diodes IR
GaSb	493	15.7	3.8	0.67	4000	1400	
InP	560	12.4	3.1	1.27	4600	150	diodes Gunn
InAs	477	14.6	3.5	0.36	33000	460	sondes Hall, $R_H = 100cm^3/As$
InSb	447	17.7	3.96	0.163	78000	750	sondes Hall, $R_H = 400cm^3/As$
Bi_2Te_3	–	–	–	0.15	800	400	refroidisseurs
PbTe	393	280	–	0.21	1600	750	détecteurs IR
PbS	435	–	–	0.37	800	1000	photorésistances, détecteurs IR

30.9/3 : Propriétés du dopage dans le Si

L'énergie E_i des niveaux donneurs D est donnée par rapport au bas de la bande de conduction ; celle E_i des niveaux accepteurs A est donnée par rapport au sommet de la bande de valence.

	Al	As	Au	B	Bi	Cu	Fe	Ga
Type	A	D	A	A	D	A	A	A
E_i(eV)	0.057	0.049	0.35; 0.67	0.046	0.069	0.24; 0.72	0.4; 0.66	0.065

	In	Li	O	P	S	Sb	Tl	Zn
Type	A	D	D	D	D	D	A	A
E_i (eV)	0.16	0.033	0.03 – 0.06	0.044	0.18; 0.37	0.039	0.26	0.31; 0.66

30.9/4 : Propriétés du dopage dans le Ge

	Al	Ag	As	Au	B	Be	Bi
Type	A	D	D	A	A	A	D
E_i (eV)	0.0102	0.13; 0.5; 0.7	0.0127	0.16; 0.59; 0.75	0.0104	0.07	0.012
	Cd	Co	Cr	Cu	Fe	Ga	In
Type	A	A	A	A	A	A	A
E_i (eV)	0.05; 0.15	0.09; 0.25; 0.48	0.07; 0.12	0.4; 0.33; 0.53	0.35; 0.52	0.0108	0.0112
	Li	Mn	Ni	O	P	Pt	S
Type	D	A	D	D	D	A	D
E_i (eV)	0.0093	0.16; 0.42	0.22; 0.49	0.01	0.012	0.04; 0.20; 0.67	0.18
	Sb	Se	Te	Tl	Zn		
Type	D	D	D	A	A		
E_i (eV)	0.0096	0.014; 0.28	0.11; 0.30	0.01	0.03; 0.09		

30.9/5 : Rayonnements ionisants dans les semiconducteurs

Dans la table sont reportées les énergies pour la formation de paires électron-trou et les densités de paires g_0 créées par 10^{-2} J/kg.

Matériau	E_{Ion}(eV)	g_0/cm^{-3}
Silicium	3.6	$10 \cdot 10^{13}$
Dioxyde de Silicium	≈ 18	$\approx 8 \cdot 10^{12}$
Arséniure de Gallium	≈ 4.8	$\approx 7 \cdot 10^{13}$
Germanium	2.8	$1.2 \cdot 10^{14}$

Partie VI Annexe

31 Mesures et erreurs de mesure

La statistique donne diverses méthodes qui, sous certaines conditions, permettent, à partir d'une mesure ou d'un ensemble de mesures d'une même grandeur physique, de déterminer la **valeur moyenne** (valeur attendue) ou la valeur la plus probable et la **dispersion** (déviation par rapport à la valeur moyenne). Elle permet également d'étudier les **corrélations** entre des résultats de mesures. Il est alors possible de déterminer l'**erreur de mesure** relative à la valeur exacte de la grandeur mesurée.

31.1 Description de mesures

Mesure : détermination quantitative d'une grandeur physique à l'aide d'une expérience et par comparaison à l'étalon de cette grandeur (grandeur de même espèce prise pour unité).

Grandeur mesurable : phénomène défini et justifiable d'une quantification, de manière reproductible et suffisamment précise. On peut caractériser son état ou son intensité par une valeur numérique.

Grandeur mesurable discrète

■ Les faces d'un dé numérotées de 1 à 6, les faces d'une pièces de monnaie (pile ou face), constituent des grandeurs discrètes.

Grandeur mesurable continue

■ La capacité d'un condensateur, la valeur d'une résistance constituent des grandeurs continues.

31.1.1 Grandeurs physiques et unités du système international (SI)

Les processus physiques peuvent être décrits par des entités mathématiques : nombres, vecteurs, fonctions, etc.) et des relations entre elles (équations). Le but de la physique est la conception expérimentale et la description la plus précise possible des phénomènes de la nature sur la base des lois fondamentales.

Grandeur physique : sert à la description d'états et de processus physiques. Une grandeur physique doit être mesurable par une **méthode de mesure** mise en œuvre à l'aide d'un **appareil de mesure**. Elle doit pouvoir être transformée par un processus physique en une manifestation visible par un observateur humain (lecture d'un cadran, par exemple).

Unité : convention sur la base de laquelle l'observation d'une grandeur physique peut être quantifiée. L'unité de masse est définie comme la masse de l'étalon international de 1 kilogramme, c'est-à-dire que toute masse mesurée est exprimée en multiples ou sous-multiples de cette unité.

● Toute grandeur physique est reportée avec sa **valeur numérique** $\{G\}$ et son **unité** $[G]$:
$G = \{G\} \cdot [G]$

Système d'unités : ensemble de quelques grandeurs physiques à partir desquelles on peut quantifier toutes les autres grandeurs physiques mesurables. Les **grandeurs fondamentales** d'un système d'unités sont choisies de manière à ce que des **unités dérivées** d'autres quantités physiques puissent en être déduites.

À la onzième Conférence Internationale des Poids et Mesures, tenue à Paris en 1960, les physiciens ont décidé d'utiliser les quatre unités fondamentales : *mètre, masse, seconde* et *ampère* pour constituer le **Sytème International d'Unités (SI)**. Le kelvin, la mole et la candela sont les unités complémentaires du S.I. (grandeurs fondamentales du SI (voir p. 1129), grandeurs SI dérivées (voir p. 1130)).

▷ La *Conférence Internationale des Poids et Mesures*, fut créée le 20 Mai 1875, comprend actuellement 47 pays membres et est gérée par le *Bureau International des Poids et Mesures* à Sèvres. La *International Standardization Organization* (**ISO**) , la *International Union of Pure and Applied Physics* (**IUPAP**) ainsi que la *Deutsche Industrienormen* (**DIN**) émettent également des avis sur la standardisation des méthodes de mesures.

En dehors des unités du systèmes international SI, il existe d'autres unités dont l'usage est autorisé dans la plupart des pays (par exemple : le carat pour la masse des pierres précieuses, la dioptrie pour la puissance d'une lentille (voir p. 1133) .

▷ Les unités SI sont les seules unités légales. D'autres unités ne devraient plus être utilisées. En particulier les anciens systèmes techniques basés sur le kilogramme poids (MKpS), la dyne ou le système centimètre-gramme-seconde (cgs) ne doivent plus être utilisés.

Les différents systèmes d'unités ne se distinguent pas uniquement par le choix de leurs grandeurs fondamentales, mais aussi par la détermination des unités dérivées. Dans le système SI, la masse est une unité fondamentale et la force une unité dérivée, alors que dans le système MKpS la masse est une unité dérivée de la force qui est l'unité fondamentale.

▷ Les noms d'unités doivent toujours être écrites de la manière dont ils sont définis dans le système SI. Par exemple : Mètre, m ; centimètrecarré cm^2 ; K pour kelvin, non pas °K, mais °C pour les degrés Celsius ; kilomètre par heure (km/h). L'unité est toujours séparée de la valeur numérique par un blanc : film 35 mm, non pas film 35mm ou film 35-mm (exception : les symboles °, ′ et ″ pour degré, minute et seconde).

Unités dérivées, unités composées : définies par des équations entre grandeurs physiques. Elles peuvent être exprimées par des produits ou des quotients de grandeurs fondamentales. L'unité dérivée pour la vitesse est le mètre par seconde (m/s). On peut également utiliser des puissances de grandeurs fondamentales :

$$1\ \text{m} \cdot \text{m} = 1\ \text{m}^2$$

On peut aussi utiliser des puissances négatives, et utiliser des parenthèses dans les cas qui pourraient prêter à confusion :

$$1\ \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2) = 1\ \text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$$

● Chaque unité dérivée est caractérisée par les unités fondamentales et la puissance à laquelle elles interviennent dans sa définition.

Dimension : indique pour chaque grandeur physique, indépendemment de ses unités, de quelle puissance des grandeurs fondamentales elle se compose. (voir p. 1129).

■ L'unité de la viscosité dynamique est :
$1\ \text{Pa} \cdot \text{s} = 1\ \text{N}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}) = (1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2)/(\text{m}^2 \cdot \text{s}) = 1\ \text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}) = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
Sa dimension, indépendemment du système d'unité, s'écrit : $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1}$

▷ Les unités composées s'expriment en énonçant successivement les unités à multiplier et en séparant les unités du dénominateur par "par" :
kg m / s^2 = kilogrammètre par seconde au carré
Pour km/h, dire kilomètre par heure est correct ; kilomètre heure est incorrect et peut être mal interprété.

▷ À certaines unités composées, on a attribué des noms particuliers : le Hertz (1/s), le Newton ($\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$), etc.

Grandeurs sans dimension : grandeurs dont l'unité est le nombre 1, c'est-à-dire que sa valeur numérique ne dépend pas du système d'unité choisi. Les angles sont sans dimension.

Conversion d'unités : utilisée pour exprimer des grandeurs dans un autre système d'unités. En général, on détermine un **facteur de conversion** pour passer d'un système à un autre. Par exemple, pour convertir une force exprimée kilogramme poids de l'ancien système MKpS en Newton, on utilise le facteur de conversion :

$1 \text{ kp} = 9.80665 \text{ N}$

Une once par pouce cube (oz/in^3) se convertit par :

$$1 \text{ oz/in}^3 = \frac{1 \text{ oz}}{(1 \text{ in})^3} = \frac{0.02835 \text{ kg}}{(0.0254 \text{ m})^3} = \frac{0.02835}{0.0254^3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1730 \text{ kg/m}^3$$

Préfixes décimaux : multiple ou sous-multiple décimal d'une unité. Les préfixes égaux ou supérieurs à 10^6 sont généralement abrégés par des lettres majuscules, les autres par des lettres minuscules (voir p. 1129).
Exemple :

$$1 \text{ km} = 1 \text{ kilomètre} = 10^3 \text{ m} = 1000 \text{ m}$$

▷ Exception : pour des raisons historiques, les unités dérivées de l'unité fondamentale kilogramme, sont le gramme ($= 10^{-3}$ kg), le milligramme ($= 10^{-6}$ kg), etc.

▷ Les puissances se rapportent également au préfixe décimal :
$1\text{cm}^2 = 1 \text{ centimètre carré} = 1 \text{ (cm)}^2 = 1 \cdot (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$

Constantes universelles : certaines grandeurs physiques telles que la constante de gravitation, la vitesse de la lumière dans le vide, ont des valeurs constantes dans tous les phénomènes physiques. Certaines sont utilisées pour la définition de grandeurs fondamentales ; puisqu'elles peuvent être mesurées indépendemment d'un référentiel, leurs valeurs dans le système d'unités sont des valeurs exactes.

▷ Les valeurs des constantes universelles sont déterminées par des mesures entâchées d'erreurs expérimentales. Les valeurs adoptées sont obtenues par des méthodes de moindres carrés et ont été validées par CODATA 1986.

▷ Les valeurs numériques des constantes universelles dépendent du système d'unités choisi. Réciproquement, un système d'unité est déterminé par la donnée de ces valeurs numériques. Quelques constantes universelles sont sans dimension (par exemple : la constante de structure fine $\alpha \approx 1/137$) et, de ce fait, ont la même valeur dans tout système d'unité.

31.2 Calcul d'erreur et statistique

31.2.1 Type d'erreurs

Les valeurs mesurées de grandeurs physiques sont toujours entâchées d'une erreur, c'est-à-dire qu'elles dévient de la valeur vraie de la grandeur.

31.2.1.1 Résultat de mesure

Résultat de mesure, valeur mesurée : valeur obtenue à la suite de la mesure d'une ou plusieurs grandeurs. En général, le résultat d'une mesure n'est pas reproductible. Les résultats de plusieurs mesures indépendantes d'une même variable oscillent autour d'une **valeur moyenne** ou de la **valeur vraie**.

Série de mesure : ensemble des résultats de mesures d'une même grandeur, qui sont généralement rassemblées dans une liste.

31.2.1.2 Erreur de mesure

Erreur de mesure : écart d'une valeur mesurée par rapport à la valeur vraie. Selon l'origine de l'erreur de mesure, on distingue : les **erreurs systématiques** et les **erreurs accidentelles** ou **erreurs statistiques**.

Erreurs systématiques : généralement, erreurs dues à l'appareil ou à la méthode de mesure, par exemple mauvais étalonnage de l'appareil. Les erreurs systématiques restent sensiblement les mêmes lorsqu'on opère dans des conditions identiques. Elles peuvent être partiellement évitées en modifiant la méthode de mesure.

Erreurs statistiques, erreurs fortuites : dues à l'expérimentateur (erreur de lecture), ou à des causes extérieures (influence de la température, de la pression atmosphérique, des vibrations,...) ou encore à la nature aléatoire de la variable mesurée (décroissance radioactive,...).

Précision de mesure : déterminée par les erreurs systématiques et les erreurs accidentelles.

Erreur absolue : différence δx_{iw} entre la valeur expérimentale x_i de la i-ème mesure et la valeur vraie x_w. La "vraie valeur" x_w n'est généralement pas connue. Suivant que x_i est supérieure ou inférieure à x_w, l'erreur est par excès ou par défaut.

$$\delta x_{iw} = x_i - x_w$$

Erreur apparente : écart de la valeur mesurée x_i par rapport à la moyenne arithmétique $\bar{x}$ prise comme approximation de la valeur vraie :

$$v_i = x_i - \bar{x}$$

Erreur moyenne, dispersion linéaire : valeur moyenne de l'erreur apparente lors d'une série de n mesures indépendantes :

$$d_x = \bar{v}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|$$

Erreur relative, v_{rel} : rapport de l'erreur absolue à la valeur moyenne de la grandeur mesurée. C'est un nombre sans dimensions, que l'on exprime souvent en pourcentage :

$$v_{\mathrm{rel}} = \frac{v_i}{\bar{x}} = \frac{x_i - \bar{x}}{\bar{x}}$$

Pourcentage d'erreur, $v_{\%}$: erreur relative exprimée en pourcent :

$$v_{\%} = v_{\mathrm{rel}} \cdot 100\%$$

Erreur maximale absolue, $\delta z_{\max}$: limite supérieure de l'erreur sur une grandeur $z = f(x,y)$ qui dépend de deux paramètres entâchés d'erreur x et y :

$$\delta z_{\max} = \left|\frac{\partial}{\partial x} f(\bar{x},\bar{y})\delta x\right| + \left|\frac{\partial}{\partial y} f(\bar{x},\bar{y})\delta y\right|$$

Erreur maximale relative, $\delta z_{\max}/\bar{z}$: quotient de l'erreur maximale absolue et de la valeur moyenne.

■ Un fil de longueur L, de rayon R soumis à une force F (tension σ), s'allonge de ΔL. De la mesure de L, R, F et ΔL, on veut déterminer le module d'élasticité E. D'après la loi de Hooke, on a :

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \cdot \sigma \qquad \sigma = \frac{F}{A} \qquad A = \pi R^2$$

À l'aide de

$$E = \frac{F}{\pi R^2} \cdot \frac{L}{\Delta L}$$

nous pouvons déterminer l'erreur relative maximale de E, en connaissant les erreurs δL, δR, δF, $\delta(\mathrm{d}L)$ de la mesure :

$$\left|\frac{\delta E}{E}\right|_{\max} = \left|\frac{\delta F}{F}\right| + 2\left|\frac{\delta R}{R}\right| + \left|\frac{\delta L}{L}\right| + \left|\frac{\delta(\Delta L)}{\Delta L}\right|$$

L'erreur de mesure du rayon R entre avec le facteur 2 dans la détermination de l'erreur relative sur E.

Erreur moyenne d'une mesure indépendante, $\overline{\delta x}$:

$$\sigma_n = \overline{\delta x} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \qquad \bar{x} \text{ est la valeur moyenne arithmétique}$$

Erreur moyenne sur la valeur moyenne, $\overline{\delta \bar{x}}$:

$$\bar{\sigma}_n = \overline{\delta \bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \qquad \bar{x} \text{ est la valeur moyenne arithmétique}$$

● L'erreur moyenne $\overline{\delta \bar{x}}$ de la valeur moyenne $\bar{x}$ est égale à l'erreur moyenne $\overline{\delta x}$ de la mesure indépendante x_i divisée par la racine carrée du nombre de mesures :

$$\overline{\delta \bar{x}} = \frac{\overline{\delta x}}{\sqrt{n}}$$

31.2.1.3 Propagation des erreurs

Propagation des erreurs : l'erreur d'une grandeur physique $f(x_0, y_0, \ldots)$ composée de plusieurs grandeurs $x_0, y_0, \ldots$, peut être calculée à partir des erreurs de mesures des grandeurs la composant :

$$\overline{\delta f(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} \overline{\delta x} + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} \overline{\delta y}$$

Règle de Gauss pour la propagation des erreurs : propagation des erreurs sur la valeur moyenne :

$$\overline{\overline{\delta f(x_0,y_0)}} = \sqrt{\left(\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x_0,y_0} \overline{\delta x}\right)^2 + \left(\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{x_0,y_0} \overline{\delta y}\right)^2}$$

■ La masse volumique ρ d'un corps de forme sphérique est déterminée indirectement par la mesure de sa masse m et de son rayon R : $\rho = \rho(m, R)$. L'erreur sur ρ se déduit des erreurs de mesure de la masse et du rayon.

31.2.2 Valeurs moyennes de séries de mesures

Valeur moyenne arithmétique (moyenne arithmétique), valeur expérimentale attendue : valeur approchée de la valeur vraie obtenue à partir d'une série de n mesures indépendantes. Souvent on utilise la moyenne pondérée de n valeurs expérimentales :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} H_j \cdot x_j = \sum_{j=1}^{k} h_j \cdot x_j$$

c'est-à-dire, les n valeurs mesurées se répartissent en $k \leq n$ valeurs x_j différentes d'occurence H_j.

- Propriété du barycentre : la somme des écarts des valeurs mesurées par rapport à la moyenne arithmétique est nulle par définition :
  $$\sum_i^n (x_i - \bar{x}) \equiv 0$$
- Linéarité de la moyenne arithmétique :
  $$\overline{(ax + b)} = a\overline{x} + b$$
  a, b : constantes, x : variable mesurée.
- Propriétés de l'écart quadratique moyen : la somme des **carrés** des écarts de toutes les valeurs mesurées x_i par rapport à la valeur moyenne $\bar{x}$ est minimale :
  $$\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2 = \text{ minimum}$$

▷ Cette propriété est fondamentale pour la **méthode des moindres carrés**.

- Association de mesures :
  la valeur moyenne d'une série de n mesures est la somme des valeurs moyennes des mesures partielles, pondérée par le nombre relatif de points de mesure $n_i / \sum n_i = n_i/n$:
  $$\bar{x} = \sum \bar{x}_i \cdot \frac{n_i}{n} = \sum \bar{x}_i n_i / \sum n_i$$
- Si la série de mesures est constituée par une distribution de fréquence de valeurs, la pondération sera faite en fonction du nombre d'occurence de chaque résultat de mesure :
  $$\bar{x} = \frac{1}{\sum_i^k H_i} \sum_{i=1}^{k} x_i H_i$$
  Dans ce cas les x_i sont les moyennes des classes K_i $(i = 1, ..., k)$.

Quantile d'ordre p : dans une distribution de valeurs mesurées, valeur supérieure à la partie p des valeurs de la liste et inférieure à la partie $1 - p$. Le quantile caractérise la position d'une valeur mesurée par rapport à l'ensemble des résultats de mesures.

Médiane, valeur centrale $\tilde{x}$: cas particulier d'un quantile, $\tilde{x} = x_{0,5}$. C'est le quantile d'ordre 1/2 ; il y a autant de valeurs mesurées supérieures à cette valeur qu'il y a de valeurs inférieures.

Médiane pour un nombre pair de mesures :

$$\tilde{x} = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

Médiane pour un nombre impair de mesures :

$$\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$$

▷ L'utilisation de la valeur médiane est intéressante dans les cas suivants :

a) classes manquantes aux extrémités de la distribution ;

b) résultats de mesures éloignés de la valeur moyenne, qui faussent le résultat ;

c) les modifications des valeurs au-dessus et en-dessous de la valeur moyenne ne doivent pas affecter sa valeur.

● La somme des valeurs absolues des écarts de toutes les valeurs x_i par rapport à la valeur médiane $\tilde{x}$ est inférieure à la somme des écarts par rapport à toute autre valeur a.

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - \tilde{x}| < \sum_{i=1}^{n} |x_i - a|\,, \qquad \begin{array}{lll} \text{pour tout} & a \neq \tilde{x}\,, & \text{si } n \text{ impair} \\ \text{pour tout} & x_{\frac{n}{2}} \leq a \leq x_{\frac{n}{2}+1}\,, & \text{si } n \text{ pair} \end{array}$$

Moyenne quadratique :

$$x_{\text{quad}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Moyenne géométrique

$$\hat{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{(1/n)}$$

▷ La moyenne géométrique est surtout utilisée pour des grandeurs pour lesquelles interviennent des suites géométriques.

■ Par exemple, le taux d'accroissement moyen de phénomènes dépendants du temps (durée de vie de composants, décroissance radioactive,...) :
$\hat{x} = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{(1/n)} \quad , \quad x_i > 0$

● Le logarithme de la moyenne géométrique est égal à la moyenne arithmétique des logarithmes de toutes les valeurs mesurées :
$\ln \hat{x} = \frac{1}{n}(\ln x_1 + \ldots + \ln x_n)$

Taux de croissance : évolution moyenne exprimée en pourcent de x_n vers x_{n+1} : (exprimé en pourcentage d'une quantité totale A) :

$$\overline{W} = \sqrt[n-1]{\frac{x_n}{x_1}} \cdot 100\%$$

Moyenne harmonique :

$$x_h = \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

● **Règle de Cauchy** : la hiérarchie des valeurs moyennes $x_{quad}, x_h, \hat{x}$ et $\bar{x}$ est donnée par les inégalités :
$x_{\min} \leq x_h \leq \hat{x} \leq \bar{x} \leq x_{\text{quad}} \leq x_{\max}$

31.2.3 Dispersion

Dispersion, **écart quadratique moyen**, **écart type** : mesure de la dispersion des valeurs exprimentales due aux erreurs de mesure. Oscillations des valeurs mesurées autour de la vraie valeur.

Largeur de la dispersion : différence entre la valeur mesurée la plus grande et la valeur mesurée la plus petite :

$$\delta x_{\max} = x_{\max} - x_{\min}$$

▷ Généralement utilisée pour de petites quantités de valeurs mesurées ; sert pour le contrôle statistique de qualité au moyen de cartes de contrôle.

Déviation absolue moyenne autour de la valeur C :

$$\overline{|\delta x|_C} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - C|$$

▷ Habituellement on utilise $C = \tilde{x}$ (médiane) ou $C = \bar{x}$ (moyenne arithmétique).

▷ Si on dispose d'un tableau des fréquences ordonné suivant les classes de variables, on utilise la valeur centrale de la classe comme valeur mesurée x_i.

Écart quadratique moyen, écart type :

$$\sigma_n = \sqrt{\overline{(\delta x)^2}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

● Si la série de mesures est disponible sous forme d'une distribution de fréquences $H(x_i)$, on a :

$$\sigma_n = \sqrt{\overline{(\delta x)^2}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 H(x_i)}, \quad n = \sum_i H(x_i)$$

▷ Dans le cas d'une répartition en classes, les valeurs centrales des classes sont utilisées en remplacement des valeurs expérimentales manquantes.

Variance σ_n^2 : carré moyen des écarts. Habituellement, c'est le carré de l'écart type.

Dispersion relative, coefficient de variabilité : rapport, exprimé en pourcents, de la dispersion à la valeur moyenne :

$$\overline{(\delta x)^2}_{\text{rel}} = \frac{\overline{(\delta x)^2}}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

31.2.4 Corrélation

Covariance de deux grandeurs aléatoires x, y, $\text{cov}(x, y)$: moyenne du produit des écarts de chaque grandeur par rapport à sa valeur moyenne :

$$\text{cov}(x, y) = \overline{(x - \bar{x})(y - \bar{y})}$$

Coefficient de corrélation de x, y, ρ_{xy} : covariance de x, y divisée par le produit des écarts quadratiques moyens σ_x, σ_y :

$$\rho_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \qquad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

- Si x et y sont des variables aléatoires **indépendantes**, $\rho_{xy} = 0$, x et y ne sont **pas corrélées**.
- Si $\rho_{xy} = \pm 1$, x et y sont linéairement dépendants, $y = ax + b$ (a, b : nombres réels).
- Le signe du coefficient de corrélation indique si la corrélation est positive ou négative :
  corrélation positive : l'augmentation (respectivement une diminution) de x entraîne une augmentation (respectivement une diminution) de y,
  corrélation négative : l'augmentation (respectivement une diminution) de x entraîne une diminution (respectivement une augmentation) de y.

31.2.5 Ajustement, régression

Régression : meilleur ajustement d'une courbe paramétrique $y = f(x, a, b, \ldots)$, à n points de mesure $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ de deux variables aléatoires corrélées.

Somme des écarts quadratiques : somme des carrés des distances entre les valeurs mesurées y_i et les valeurs calculées de la courbe de régression f aux points x_i :

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i, a, b, \ldots)]^2$$

Méthode des moindres carrés : permet la détermination des paramètres $a, b, \ldots$, de la courbe de meilleur ajustement f aux points de mesure. Elle requiert que la somme des écarts quadratiques soit la plus faible possible (**principe du minimum de Gauss**) :

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i)]^2 = \min.$$

Régression linéaire : ajustement d'une droite aux points expérimentaux. Méthode appropriée si les variables sont corrélées linéairement.

$$y = ax + b$$

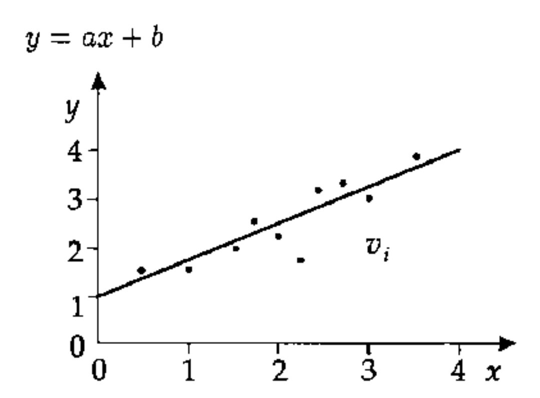


Fig. 31.1 : *Méthode des moindres carrés : ajustement d'une courbe aux valeurs mesurées*

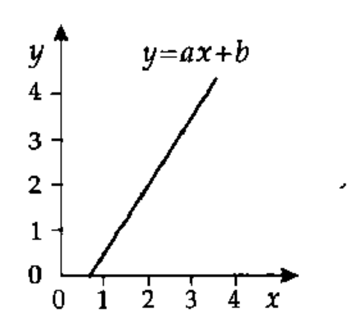


Fig. 31.2 : *Régression linéaire*

31.2.6 Distribution de fréquence

Liste primordiale : liste brute des valeurs mesurées dans l'ordre de mesure. Des valeurs mesurées égales peuvent figurer plusieurs fois sur cette liste.

■ Lors de la production de n condensateurs de capacité $C = 100$ μF, la capacité de chaque condensateur diffère de cette valeur. Les valeurs mesurées ont une distribution caractéristique autour de la valeur souhaitée $C = 100$ μF. Pour comprendre le genre de cette distribution et la nature des processus aléatoires, on détermine la **distribution de fréquence relative** et on la compare a des fonctions de probabilité particulières qui peuvent être établies à partir de modèles statistiques connus (par exemple, la distribution hypergéométrique peut être rapportée au simple modèle des boules noires et blanches dans une urne).
Dans notre exemple, la capacité de chaque condensateur est la seule grandeur mesurable. Les valeurs mesurées constituent la **liste brute** :

Condensateur N°	1	2	3	4	5	6	...	N
capacité en μF	101.1	99.6	101.4	103.3	98.0	99.5	...	C_N

Classe K_i : ensemble de plusieurs valeurs mesurées de la liste brute ayant des caractéristiques particulières et réunies sous le même indice i :

■ La production journalière de n condensateurs d'une valeur donnée C, peut être répartie dans $N = 8$ intervalles de valeurs ($N = 8$ classes).

Classe	Intervalle	Classe	Intervalle
K_1	$C < 92.5$	K_5	$100.0 \leq C < 102.5$
K_2	$92.5 \leq C < 95.0$	K_6	$102.5 \leq C < 105.0$
K_3	$95.0 \leq C < 97.5$	K_7	$105.0 \leq C < 107.5$
K_4	$97.5 \leq C < 100.0$	K_8	$107.5 \leq C$

▷ Il n'est pas toujours nécessaire de définir des classes. Des valeurs mesurées discrètes $x = X_i$, qui se répètent dans la liste brute, peuvent être considérée naturellement comme une classe $K_i = X_i$.

Centre d'une classe : moyenne arithmétique des bornes des intervalles d'une classe.

▷ Cette façon de faire n'est qu'une approximation. Il est plus approprié de former la moyenne arithmétique de toutes les valeurs mesurées d'une classe donnée.

Fréquence, $H_i = H(K_i)$: nombre des valeurs mesurées contenues dans une classe K_i donnée.

▷ Lorsque des valeurs mesurées identiques se répètent dans la liste brute, une valeur discrète peut être considérée comme une classe.

Tableau des fréquences : représentation de la fréquence d'occurence d'une valeur donnée ou du nombre d'évènements dans une classe.

■ Le tableau des fréquences d'une production journalière de condensateurs pourrait se présenter de la manière suivante :

K_i	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	Total
$H(K_i)$	133	43789	189345	281321	255128	206989	26923	155	1003783

Distribution des fréquences, histogramme : représentation graphique du tableau des fréquences.

■ L'histogramme 31.3 correspond au tableau des fréquences ci-dessus. D'autres formes d'histogrammes peuvent être utilisés (nuage de points, camembert, courbes, ...)

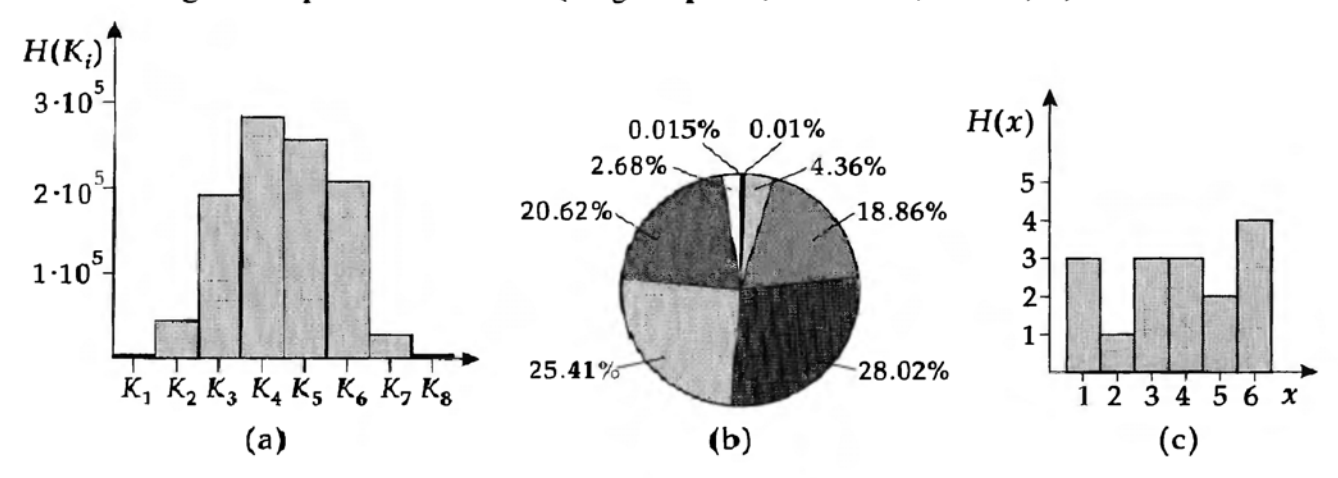


Fig. 31.3 : *Représentation de la distribution des fréquences.*
(a) : histogramme en barres, (b) : camembert,
(c) : distribution à trois classes

Fréquence relative : le nombre d'occurences d'une classe K_i par rapport au nombre total n de valeurs mesurées :

$$h_i = \frac{H_i}{n}$$

Distribution des fréquences relatives, distribution normalisée h_i :

$$\sum_{i=1}^{n} h_i = 1$$

- En divisant la fréquence (relative) par un facteur constant c, la moyenne arithmétique est conservée :

$$\frac{\sum_i^n x_i \cdot H(x_i)/c}{\sum_i^n H(x_i)/c} \equiv \bar{x}$$

Jeu de boules : d'une urne contenant N boules, dont M sont blanches et $N - M$ sont noires, on tire n boules. Si p est la probabilité de tirer une boule noire, la probabilité de tirer une boule blanche sera $1 - p$. On cherche la probabilité de trouver k boules d'une couleur donnée parmi les n boules tirées de l'urne (en répétant n fois l'expérience, un évènement donné se produit exactement k fois).
Avec retour à l'urne : chaque boule tirée est immédiatement remise dans l'urne.
Sans retour à l'urne : chaque boule tirée n'est pas remise dans l'urne.

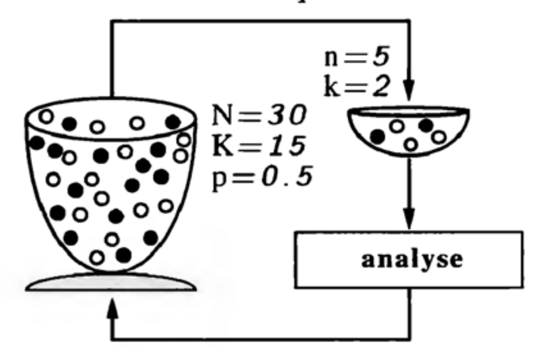


Fig. 31.4 : *Jeu de boules noires et blanches*

Probabilité indépendante, $P(k)$: probabilité qu'une variable aléatoire prenne la valeur k lors d'une unique mesure.

31.2.6.1 Distributions discrètes particulières

- **Distribution hypergéometrique**

$$P(k) = \frac{\binom{pN}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad p, N \text{ : entiers.}$$

Moyenne : $n \cdot p$
Variance : $\sigma^2 = n \cdot p(1-p)[(N-n)/(N-1)]$

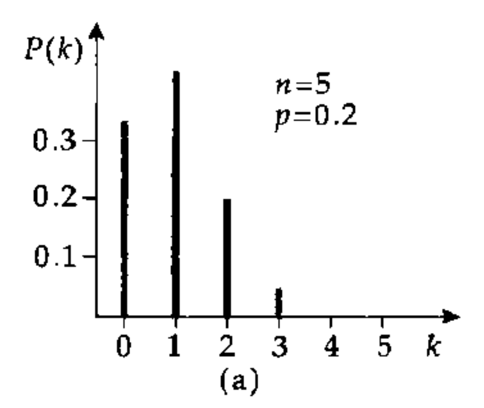
- **Distribution binomiale**

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Moyenne : $n \cdot p$
Variance : $\sigma^2 = n \cdot p(1-p)$

- **Distribution de Poisson**

$P(k) = \frac{c^k}{k!} \cdot e^{-c}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad c > 0$
Moyenne : c
Variance : $\sigma^2 = c$



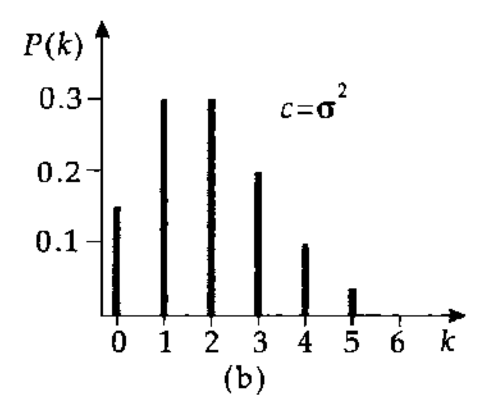


Fig. 31.5 : *Distributions. (a) : binomiale, (b) : de Poisson*

- La distribution hypergéométrique correspond au jeu de boules sans retour des boules tirées. La distribution binomiale correspond au jeu avec retour des boules tirées.
- La distribution binomiale se déduit de la distribution hypergéométrique quand le nombre de boules dans l'urne est très grand ($N \to \infty$) et que le nombre de boules tirées n reste petit.
- La distribution de Poisson se déduit de la distribution binomiale si le nombre n de boules tirées de l'urne est très grand et que la partie p des boules marquées reste petit mais fini $n \to \infty$, $p \to 0$.

Densité de probabilité, $f(x)$: densité de la distribution d'une variable aléatoire continue ou fonction analytique représentant la distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète.

31.2.6.2 Distributions continues particulières

- **Distribution de Gauss, distribution normale**

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}$
Moyenne : m
Variance : σ^2

- **Distribution standard normale, distribution de Gauss normale** : cas particulier de la distribution normale avec $m = 0$ et $\sigma = 1$
- **Distribution exponentielle**
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \lambda > 0 \quad x \geq 0$
Moyenne : $1/\lambda$
Variance : $\sigma^2 = 1/\lambda^2$
- **Distribution de Weibull**
$f(x) = \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^{\gamma-1} e^{-((x-\alpha)/\beta)^\gamma} \quad x \geq \alpha$
Moyenne : $\beta\,\Gamma(1 + 1/\gamma) + \alpha$
Variance : $\sigma^2 = \beta^2 \{\Gamma(1 + 2/\gamma) - [\Gamma(1 + 1/\gamma)]^2\} \quad \Gamma(k)$: fonction Gamma

- **Distribution du** χ^2 de degré de liberté n : distribution qui s'obtient pour la grandeur mesurable $\chi^2 = Y_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2$, lorsque les valeurs mesurées $x_i (i = 1, \ldots, n)$ ont une distribution standard normale :

$$f_\chi(Y_n; n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} Y_n^{(n/2)-1} \mathrm{e}^{-Y_n/2}$$

Moyenne : n
Variance : $\sigma^2 = 2n$

- **Distribution de Student, distribution** t : distribution de la grandeur mesurée $T_n = x/\sqrt{Y_n/n}$, si la distribution de x est standard, celle des Y_n représentée par $f_\chi(Y_n; n)$:

$$f_t(T_n; n) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{T_n^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$$

Moyenne : 0
Variance : $\sigma^2 = n/(n-2)$

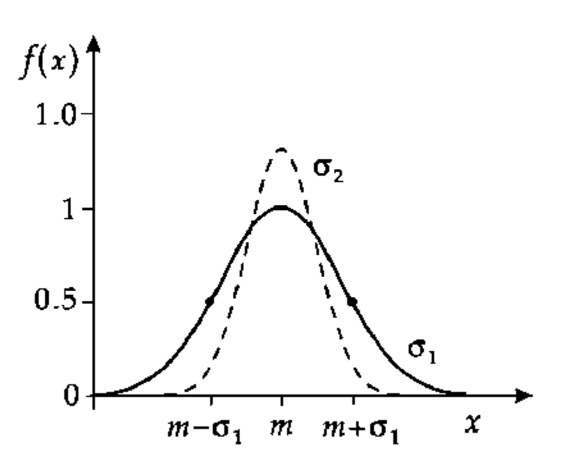


Fig. 31.6 : *Distribution normale. Maximum :* $M = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$, *points d'inflexion :* $(m \pm \sigma)$, *largeur à mi-hauteur :* b

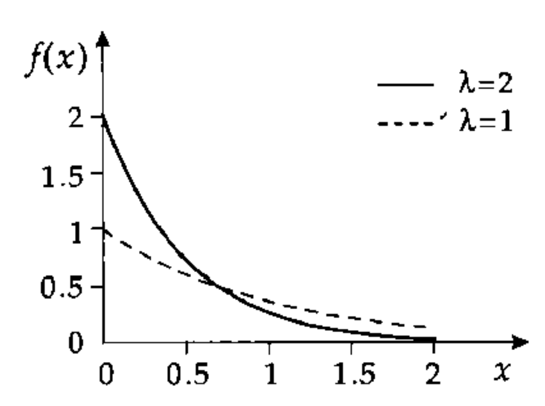


Fig. 31.7 : *Distribution exponentielle*

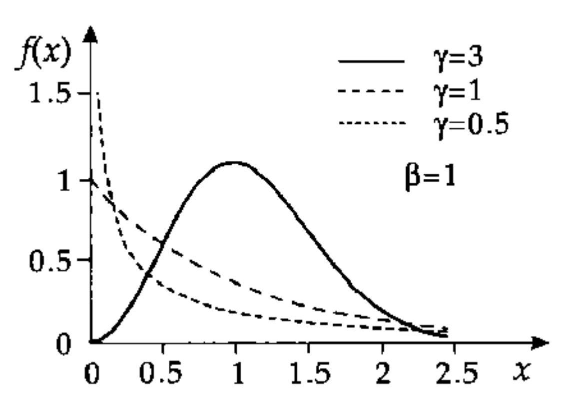


Fig. 31.8 : *Distribution de Wiebull*

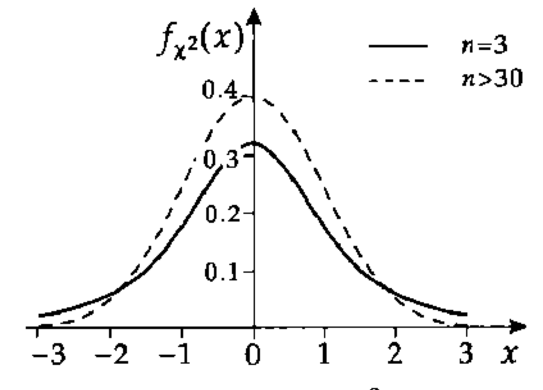


Fig. 31.9 : *Distribution du* χ^2

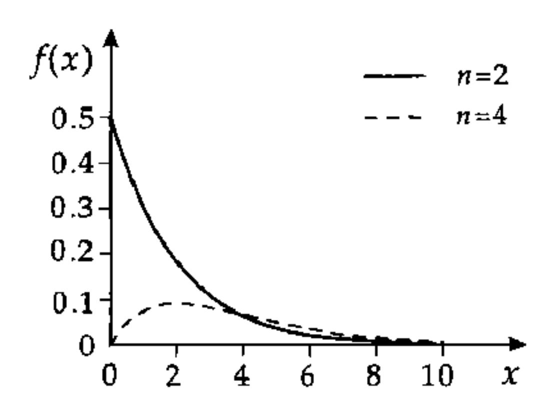


Fig. 31.10 : *Distribution t de Student*

La **distribution normale** est symétrique par rapport à son maximum en $x = m$. La valeur du maximum de la fonction $f(x)$ est $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$. Elle présente des points d'inflexion en $x = m \pm \sigma$.
99.7 % des valeurs sont comprises dans l'intervalle $x = m \pm 3\sigma$,
95.5 % dans l'intervalle $x = m \pm 2\sigma$,
68 % dans l'intervalle $x = m \pm \sigma$.
La variance σ^2 peut être déduite de la **largeur à mi-hauteur** b de la courbe représentative :
$\sigma^2 = 0.18 \cdot b^2$. Pour un nombre fini n de mesures, la moyenne arithmétique $\bar{x}$ des valeurs mesurées est la meilleure approximation pour m.

La distribution normale est normalisée à 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Valeur limite centrale : la somme de n variables aléatoires indépendantes qui obéissent à la même distribution, converge toujours vers la distribution normale, lorsque n augmente.

- À cause de la superposition de nombreuses sources d'erreurs, les erreurs de mesure obéissent généralement à une distribution normale.

31.2.7 Fiabilité

Des phénomènes dépendants du temps (par exemple, la décroissance radioactive, la défaillance d'un composant électronique,...) peuvent être décrits par quelques grandeurs particulières.

Durée de vie : intervalle de temps entre défaillances d'un objet. La distribution des défaillances peut être purement aléatoire (objets non vieillissants) ou dépendre d'influences extérieures (objets vieillissants).

Objets non vieillissants : objets de durée de vie finie dont les défaillances sont purement aléatoires et dont la distribution repose sur un principe combinatoire (**jeu de boules**, **distribution de Poisson**, **distribution exponentielle**). Ils ne sont soumis à aucun processus de vieillissement tel que l'usure par exemple.

- Les composants électroniques tels que les résistances, les condensateurs (non électrolytiques), les circuits intégrés (dans les limites des conditions normales d'utilisation) sont des objets non vieillissants.

- On peut aussi trouver des objets de durée de vie finie dans des domaines non techniques. Par exemple, l'infection par une maladie rare, en bonne approximation, obéit à une distribution de Poisson. Les intervalles de temps entre plusieurs infections obéissent à la distribution exponentielle.

- Les défaillances dans le temps d'objets non vieillissants obéissent à une distribution de Poisson. Les intervalles de temps entre défaillances obéissent à la distribution exponentielle.

Objets vieillissants : objets de **durée de vie finie** qui sont soumis à un processus de vieillissement. Le vieillissement peut influencer le processus purement aléatoire et modifie alors la distribution des défaillances (voir distribution de Weibull).

■ Les moteurs, les pneumatiques, l'outillage sont des objets vieillissants.

● La défaillance d'objets vieillissants n'obéit plus à une distribution de Poisson. La description des intervalles de temps entre défaillances nécessite une forme particulière de leur distribution. Souvent, l'intervalle de temps entre défaillances peut être décrit par une "superposition" de plusieurs distributions exponentielles. La durée de vie d'objets vieillissants peut, dans certaines conditions, être décrite par la **distribution de Weibull**.

Les distributions exponentielles et de Weibull sont des cas particuliers de la **fiabilité**.

Fiabilité $Z(t)$: nombre moyen $N(t)$ des composants, encore en état de fonctionnement après le temps t, par rapport au nombre de composants produits :

$$Z(t) = \frac{N(t)}{N_0} = \mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(t')\mathrm{d}t'}$$

$Z(t)$ est la probabilité pour qu'un composant ne soit **pas** encore défaillant après le temps t.

Probabilité de défaillance, $F(t)$: nombre moyen $N_0 - N(t)$ des composants défaillants après le temps t par rapport au nombre N_0 de composants produits :

$$F(t) = 1 - Z(t)$$

$F(t)$ est la probabilité pour qu'un composant soit défaillant après le temps t.

Densité des défaillances, ρ : nombre moyen des défaillances par unités produites N_0 et par unité de temps à l'instant t :

$$\rho(t) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} = \lambda(t)Z(t)$$

▷ La densité des défaillances intégrée sur le temps représente le nombre relatif de défaillances :

$$\int_0^t \rho(t')\mathrm{d}t' = -\int_0^t \frac{\mathrm{d}Z(t')}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = -(Z(t) - Z(0)) = 1 - Z(t) = F(t)$$

Taux de défaillance : nombre moyen des défaillances par unité de temps par rapport au nombre $N(t)$ de dispositifs de même âge encore en bon état de fonctionnement :

$$\lambda(t) = -\frac{1}{N(t)}\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{Z(t)}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho(t)}{Z(t)}$$

Moyenne des Temps de Bon Fonctionnement, **(MTBF) (Mean Time To Failure, MTTF)** :

$$\mathrm{MTBF} = \int_0^\infty Z(t)\mathrm{d}t$$

● La probabilité pour qu'après le temps t le système soit encore en état de bon fonctionnement est égale au produit des fiabilités des composants du système :
$Z_{\text{total}} = Z_1 Z_2 ... Z_n$
Objet non vieillissant :
$\lambda_{\text{total}} = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$

● À condition que le taux de défaillance λ et le temps t soient petits, le nombre de défaillances par unités produites et par durée de production donne une valeur approchée du taux de défaillance :

$$\lambda \approx \frac{(1 - N(t))}{N_0 \cdot t} = \frac{\text{défaillances}}{\text{nbre. produit} \times \text{temps de production}}$$

- Pour des objets non vieillissants $Z(t)$ a une distribution exponentielle (λ =const.) et la moyenne des temps de bon fonctionnement correspond à $1/\lambda$.

- Quelques taux de défaillance (λ en défaillances/10^9 h) :

Connexion wrappée	0.0025
Condensateur au mica	1
Bobine HF	1
Résistance à couche métal	1
Condensateur au papier	2
Transistor	200
Diode électroluminescente(50% de perte de luminosité)	500

32 Calcul vectoriel

32.1 Vecteurs

Vecteur : segment orienté comportant une origine et une extrémité. C'est une grandeur définie par une **norme** et une **direction**. Un vecteur est représenté par une flèche.

■ La vitesse, la quantité de mouvement et le champ électrique sont des exemples de grandeurs vectorielles, de même que le rayon vecteur qui indique la position d'un point de l'espace par rapport à l'origine du système de coordonnées.

Les vecteurs se distinguent par leur comportement lors de la rotation du système de coordonnées par rapport auquel ils sont définis. Puisque leur direction est définie par rapport à un système de coordonnées, leur direction (pas leur norme) change lorsque les axes du système de coordonnées tournent.

Les grandeurs **scalaires**, en revanche ne sont pas modifiées.

■ Le temps, la masse, la charge électrique et la température sont des exemples de grandeurs scalaires.

Les grandeurs physiques scalaires et vectorielles s'expriment dans un système d'unités. Pour les vecteurs, l'**unité** est relative à leur norme.

▷ Bien que la norme d'un vecteur est représentée par sa longueur, son unité est celle de la grandeur physique qu'il représente. L'unité d'un vecteur force est le Newton.

Composantes d'un vecteur : pour représenter un vecteur dans un système de coordonnées cartésiennes, son origine est portée à l'origine du système de coordonnées et on indique les coordonnées cartésiennes de son extrémité sous forme d'un vecteur colonne :

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{\mathbf{a}} = a_x\vec{\mathbf{e}}_x + a_y\vec{\mathbf{e}}_y + a_z\vec{\mathbf{e}}_z$$

où $\vec{\mathbf{e}}_x, \vec{\mathbf{e}}_y, \vec{\mathbf{e}}_z$ sont les vecteurs unitaires des axes du système de coordonnées cartésiennes. Les composantes cartésiennes d'un vecteur ont toutes la même dimension :

$$[a_x] = [a_y] = [a_z] = [\vec{\mathbf{a}}]$$

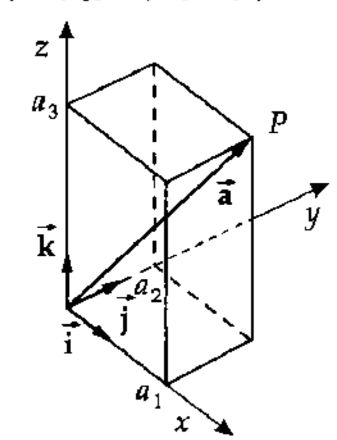


Fig. 32.1 : *Composantes cartésiennes d'un vecteur $\vec{\mathbf{a}}$*

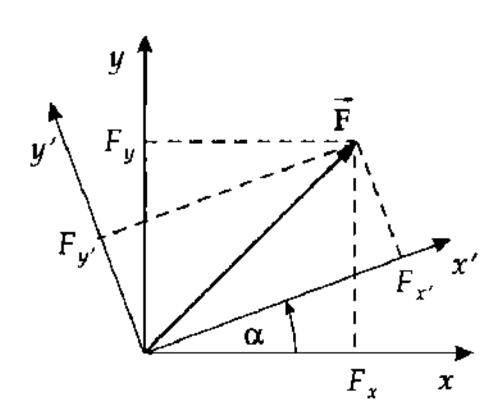


Fig. 32.2 : *Comportement d'un vecteur lors d'une rotation du système de coordonnées. On donne les composantes (F_x, F_y) et $(F_{x'}, F_{y'})$ du vecteur $\vec{\mathbf{F}}$, dans deux systèmes de coordonnées tournés de l'angle α l'un par rapport à l'autre.*

Norme d'un vecteur : longueur de la flèche qui représente ce vecteur. La norme d'un vecteur peut être déduite de ses composantes cartésiennes :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Pour l'unité, on a encore :

$$[|\vec{a}|] = [\vec{a}]$$

32.2 Multiplication par un scalaire

Un vecteur peut être multiplié par un **scalaire** (nombre réel ou un nombre complexe).

Multiplication par un scalaire : chaque composante du vecteur est multipliée par le nombre réel ou complexe α :

$$\alpha\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_x \\ \alpha a_y \\ \alpha a_z \end{pmatrix}$$

La longueur du vecteur est modifiée par le facteur $|\alpha|$: $|\alpha\vec{a}| = |\alpha|\,|\vec{a}|$. Si $\alpha < 0$, le vecteur résultant pointe dans la direction opposée au vecteur initial.

Opposé d'un vecteur, vecteur opposé : vecteur obtenu par multiplication d'un vecteur par le facteur -1. Il a la même norme (longueur) que le vecteur original, mais pointe dans la direction opposée.

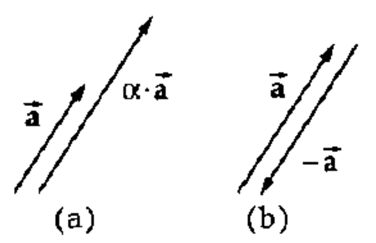


Fig. 32.3 : *Calcul vectoriel.*
(a) : multiplication d'un vecteur $\vec{a}$ par un scalaire α,
(b) : vecteur opposé $-\vec{a}$

32.3 Addition et soustraction de vecteurs

Des vecteurs qui représentent des **grandeurs de même nature** (même unité), peuvent être additionnés et soustraits les uns des autres.

Addition vectorielle : les composantes respectives de chaque vecteur sont additionnées :

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

où $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont des vecteurs quelconques, mais représentant des grandeurs physiques de même nature. Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment un parallélogramme ; le vecteur somme est représenté par sa diagonale.

Pour construire **graphiquement** la somme de deux vecteurs, on fait correspondre l'origine du deuxième vecteur avec l'extrémité du premier. La somme des deux vecteurs est représentée par le vecteur allant de l'origine du premier à l'extrémité du deuxième.

Soustraction vectorielle : pour soustraire un vecteur il suffit d'additionner son vecteur opposé :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$$

Le vecteur $\vec{a} - \vec{b}$ est encore appelé **vecteur différence**. Si on fait correspondre les origines des deux vecteurs, le vecteur différence va de l'extrémité du vecteur $\vec{b}$ à l'extrémité du vecteur $\vec{a}$.

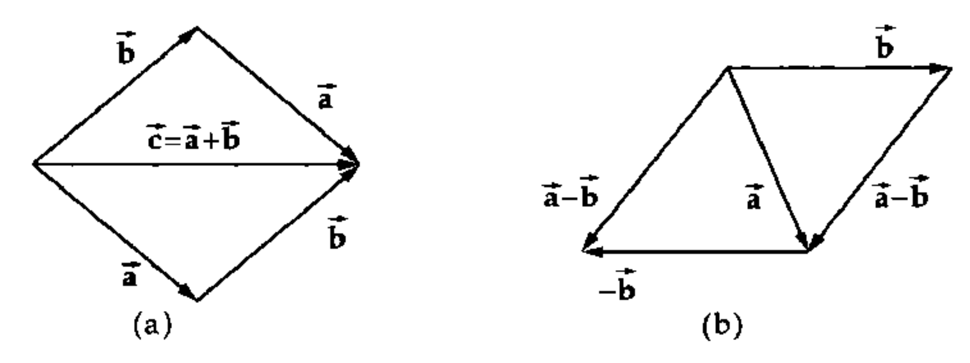


Fig. 32.4 : *Calcul vectoriel. (a) : addition, (b) : soustraction des vecteurs* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$

Vecteur unité, vecteur unitaire : vecteur de norme 1 porté par la direction d'un vecteur $\vec{a}$. Il peut être obtenu en divisant le vecteur $\vec{a}$ par sa longueur :

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Les vecteurs unité sont souvent utlisés pour définir une direction.

32.4 Multiplication de vecteurs

Il y a deux façons de multiplier deux vecteurs.

1. Produit scalaire

$\vec{a} \cdot \vec{b}$, dont la valeur est un scalaire (nombre). Le produit scalaire de deux vecteurs peut être considéré comme la projection orthogonale du premier des vecteurs sur l'autre, multipliée par la longueur du deuxième. Si l'angle α formé par deux vecteurs est obtu (supérieur à 90°), leur produit scalaire est négatif, on a :

Produit scalaire	Symbole	Unité	Dénomination
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \lvert\vec{b}\rvert \cos\alpha$	$\vec{a}, \vec{b}$		vecteurs
$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	$a_x, b_x, \ldots$		composantes
	α	rad	angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$

Le produit scalaire est commutatif :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs correspond à la **projection** d'un des vecteurs sur la direction de l'autre vecteur. De cette manière, on peut décomposer un vecteur donné en ses composantes cartésiennes :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

$$a_x = \vec{a} \cdot \vec{e}_x \qquad a_y = \vec{a} \cdot \vec{e}_y \qquad a_z = \vec{a} \cdot \vec{e}_z$$

où $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont les vecteurs unitaires des axes du système de coordonnées cartésiennes.

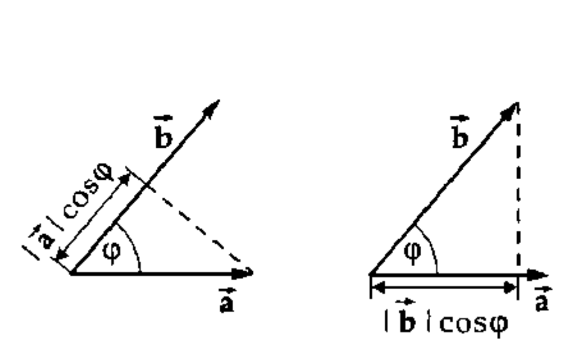


Fig. 32.5 : *Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$*

Fig. 32.6 : *Composantes (a_x, a_y) d'un vecteur $\vec{a}$ sur les axes de vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y$*

Le produit scalaire de deux vecteurs constitue un critère d'orthogonalité.

● Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est toujours nul.

La longueur d'un vecteur est égale à la racine carré de son produit scalaire par lui-même :

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Elle est toujours positive.

Angle formé par deux vecteurs : le cosinus de l'angle α formé par deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ s'obtient à partir de leur produit scalaire :

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

2. Produit vectoriel

Produit vectoriel ou produit externe : $\vec{a} \wedge \vec{b}$, fait correspondre aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ un vecteur perpendiculaire au plan formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$, et dont la norme est égale au produit des normes par le sinus de l'angle orienté formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

Produit vectoriel	Symbole	Unité	Dénomination
$$\lvert\vec{a} \wedge \vec{b}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert \sin\alpha$$	$\vec{a}, \vec{b}$		vecteurs
$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ a_z b_x - b_z a_x \\ a_x b_y - b_x a_y \end{pmatrix}$$	$a_x, b_x, \ldots$		composantes
	α	rad	angle formé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$

Le produit vectoriel permet de construire un vecteur perpendiculaire au plan formé par deux vecteurs quelconques. Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{a} \wedge \vec{b}$ dans cette succession, forment un **trièdre droit** (règle de la main droite).

▷ Propriétés des produits scalaires et vectoriels :

Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre (scalaire), le produit vectoriel est un vecteur (pseudo-vecteur ou vecteur axial).

Le produit scalaire est maximal lorsque les deux vecteurs sont parallèles et nul s'ils sont perpendiculaires.

Le produit vectoriel est maximal lorsque les deux vecteurs sont perpendiculaires et nul lorsqu'ils sont parallèles.

La norme du produit vectoriel de deux vecteurs mesure l'aire du parallélogramme engendré par ces vecteurs.

▷ Le produit vectoriel de deux vecteurs est un critère de parallélisme, le produit vectoriel de deux vecteurs parallèles est toujours nul.

- $\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$
  le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul.
- $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$
  le produit vectoriel est anti-commutatif.
- Pour les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées cartésiennes, on a :
  $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \quad \vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x \quad \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$
  Le produit vectoriel d'un vecteur unitaire par lui-même est nul :
  $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_z = 0$

a) **Produit mixte** : produit scalaire d'un vecteur $\vec{c}$ et du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$: $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Le produit mixte n'est défini que dans l'espace à trois dimensions. Le produit mixte est un scalaire, dont la valeur absolue mesure le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

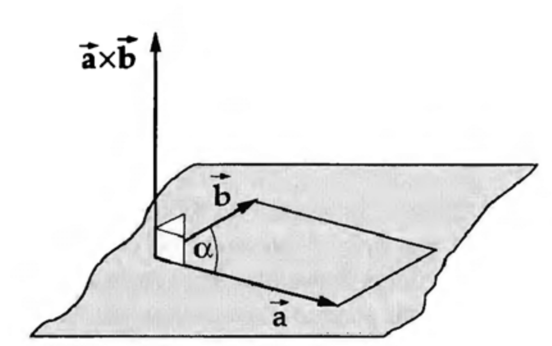


Fig. 32.7 : *Produit vectoriel de deux vecteurs* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$. $\vec{a} \wedge \vec{b}$ *est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs* $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$

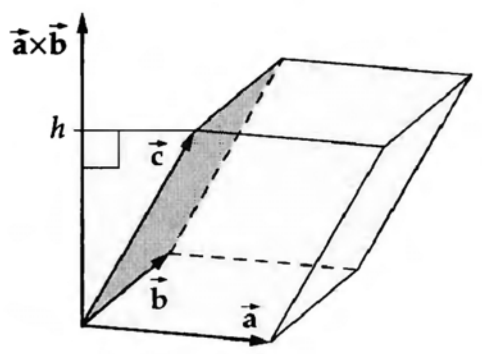


Fig. 32.8 : *Produit mixte*

b) **Double produit vectoriel** : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ est situé dans le plan formé par les vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$:

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

33 Calcul différentiel et intégral

33.1 Calcul différentiel

Dérivée d'une fonction $y = f(x)$ au point x : définie comme la tangente à la courbe représentative de la fonction au point x.

Rapport des accroissements finis : pente de la sécante à la courbe représentative de $f(x)$, passant par les points $P(x, y)$ et $P_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Dérivée, $f'(x)$: limite du rapport des accroissements finis lorsque les deux points $P(x, y)$ et $P_0(x_0, y_0)$ deviennent infiniment proches ($P \to P_0$), c'est-à-dire que $\Delta x \to 0$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La dérivée d'une fonction au point P_0 correspond à la pente de sa courbe représentative en ce point P_0, $f'(x_0) = \tan \alpha$.

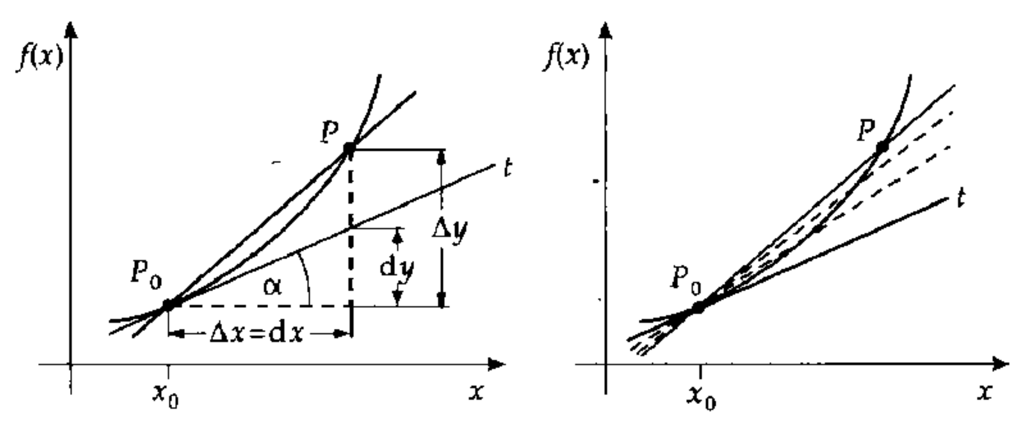


Fig. 33.1 : *Dérivée d'une fonction $f(x)$. t : tangente à la courbe*

33.1.1 Règles de dérivation

Constante : la dérivée d'une constante c est nulle.

$$c' = 0$$

Somme : la dérivée d'une somme (ou une différence) est égale à la somme (ou la différence) des dérivées :

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Produit : la dérivée du produit d'une constante c par une fonction $f(x)$ est :

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Produit de fonctions

$$\begin{aligned}(f(x) \cdot g(x))' &= f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \\ (f(x) \cdot g(x) \cdot h(x))' &= f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x)\end{aligned}$$

Puissance : la dérivation d'une variable à la puissance n abaisse l'exposant d'une unité et la fonction est multipliée par l'exposant n :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = n \cdot x^{n-1}$$

Rapport de deux fonctions :

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

Fonction de fonction :

$$(f(g(x))' = g'(x) \cdot f'(g(x)), \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}$$

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}$: dérivée externe, $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$: dérivée interne.

Dérivée logarithmique : dérivée du logarithme $\ln y$ de la fonction y pour $y > 0$:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}$$

33.2 Calcul intégral

Intégration : opération inverse de la dérivation.

Primitive, intégrale $F(x)$ d'une fonction $f(x)$: fonction dont la dérivée $F'(x)$ est égale à $f(x)$, définie dans le même intervalle que $f(x)$.

Intégration d'une fonction $f(x)$: détermination de la primitive $F(x)$ de $f(x)$, dont la dérivation redonnerait la fonction originale $f(x)$.

- À toute fonction intégrable correspond une infinité de primitives $F(x) + C$, qui ne se distinguent les unes des autres que par une constante additive C (**constante d'intégration**). La dérivée d'une constante étant nulle, les dérivées de toutes ces primitives sont égales. À une intégrale indéfinie correspond une fonction.

Intégrale indéfinie I : la constante d'intégration C n'est pas définie. En physique, la constante d'intégration est généralement déterminée à partir des conditions initiales.

$$I = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C = F(x) + C$$

Intégrale définie : valeur d'une intégrale sur un domaine défini de la variable. Les limites d'intégration limitent le domaine. À une intégrale définie correspond une valeur numérique :

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

- L'intégrale définie A correspond à l'aire comprise entre la courbe représentative de la fonction $f(x)$ et l'axe des x entre $x = a$ et $x = b$. Si $f(x)$ prend des valeurs positives et négatives dans le domaine [a,x], l'intégrale est égale à la différence des aires au-dessus et en-dessous de l'axe x .

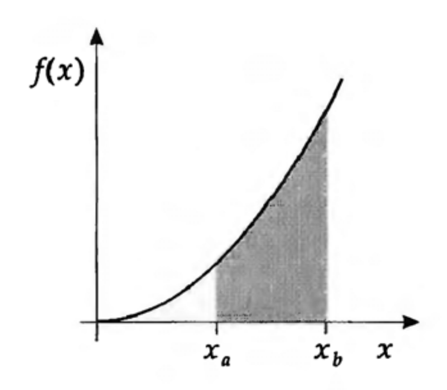


Fig. 33.2 : *Intégrale définie A de la fonction $f(x)$*

33.2.1 Règles d'intégration

Facteur constant : tout facteur constant peut être "sorti" de l'intégrale :

$$\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Somme : l'intégrale d'une somme est égale à la somme des intégrales :

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Puissance :

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$$

Inversion des limites d'intégration : en inversant les limites d'intégration, on change le signe de l'intégrale :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Égalité des limites d'intégration : l'intégrale est nulle. La valeur d'une intégrale sur un circuit fermé est nulle :

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Décomposition du domaine d'intégration : le domaine d'intégration d'une fonction peut être décomposé en parties adjacentes :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Intégration par parties : application réciproque de la dérivation d'un produit de fonctions :

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

Substitution :

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(z)\,\mathrm{d}z\,, \quad z = g(x)$$

Intégrale logarithmique :

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

33.3 Dérivées et intégrales de fonctions élémentaires

Le tableau présente : la fonction $f(x)$, sa dérivée $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ et sa primitive $\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$.

$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
c	0	cx	e^x	e^x	e^x
x	1	$\frac{1}{2}x^2$	a^x	$a^x \ln(a)$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
x^a	ax^{a-1}	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \ln x - x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln\|x\|$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$\frac{x\ln x - x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$-\ln\|\cos(x)\|$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$	$\ln\|\sin(x)\|$	$\mathrm{arccot}\,(x)$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$x\,\mathrm{arccot}\,(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\mathrm{Arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x\mathrm{Arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\sinh(x)$	$\mathrm{Arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x\mathrm{Arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\ln(\cosh(x))$	$\mathrm{Artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x\mathrm{Artanh}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$
$\coth(x)$	$\frac{-1}{\sinh^2(x)}$	$\ln\|\sinh(x)\|$	$\mathrm{Arcoth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$	$x\mathrm{Arcoth}(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$

34 Système SI

34/1: Système International d'unités : grandeurs fondamentales

Nom	Abr.	Définition	Dim.
mètre	m	Chemin parcouru dans le vide par la lumière pendant la fraction 1/299 792 458 d'une seconde.	L
kilogramme	kg	Masse de l'étalon international de masse constitué d'un cylindre en platine-iridium. Il est conservé au Bureau International des Poids et Mesure (BIPM) à Sèvres, près de Paris.	M
seconde	s	Durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.	T
ampère	A	Intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parralèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produit entre ces conducteurs une force de $2 \cdot 10^{-7}$ N.	I
kelvin	K	273,16 ème partie de la température thermodynamique du point triple de l'eau pure.	Θ
mole	mol	Quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kg de l'isotope C^{12}.	N
candela	cd	Intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \cdot 10^{12}$ Hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est (1/683) Watt par stéradian.	J

34/2: Multiples et sous-multiples décimaux

Préfixe	Valeur	Abrév.	Préfixe	Valeur	Abrév.
Yocto	10^{-24}	y	Deca	10^{1}	da
Zepto	10^{-21}	z	Hecto	10^{2}	h
Atto	10^{-18}	a	Kilo	10^{3}	k
Femto	10^{-15}	f	Mega	10^{6}	M
Pico	10^{-12}	p	Giga	10^{9}	G
Nano	10^{-9}	n	Tera	10^{12}	T
Micro	10^{-6}	μ	Peta	10^{15}	P
Milli	10^{-3}	m	Exa	10^{18}	E
Centi	10^{-2}	c	Zetta	10^{21}	Z
Deci	10^{-1}	d	Yotta	10^{24}	Y

34/3: Unités dérivées du système SI

Grandeur	Symbole	Définition	Unité	Nom de l'unité
1. Longueur				
Longueur	s		m	Mètre
Aire	A	$A = s^2$	m^2	
Volume	V	$V = s^3$	m^3	
Angle	α		rad	Radian
Angle solide	Ω		sr	Stéradian
2. Temps et vitesse				
Temps	t		s	Seconde
Période	T	$T = \frac{\text{temps}}{\text{nbr.d'oscillat.}}$	s	
Fréquence	f	$f = 1/T$	Hz = 1/s	Hertz
Vitesse	$\vec{v}$	$v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$	$\mathrm{m\ s^{-1}}$	
Vitesse angulaire	$\vec{\omega}$	$\omega = \mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$	$\mathrm{rad\,s^{-1}}$	
Accélération	$\vec{a}$	$a = \mathrm{d}^2 s/\mathrm{d}t^2$	$\mathrm{m\,s^{-2}}$	
Accélération annulaire	$\vec{\alpha}$	$\alpha = \mathrm{d}^2\alpha/\mathrm{d}t^2$	$\mathrm{rad\,s^{-2}}$	
3. Mécanique				
Masse	m		kg	Kilogramme
Masse volumique	ρ	$\rho = m/V$	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$	
Force	$\vec{F}$	$F = m \cdot a$	$\mathrm{N = kg\,m\,s^{-2}}$	Newton
Moment d'inertie	J	$J = \sum_i m_i r_i^2$	$\mathrm{kg\,m^2}$	
Moment d'une force	M	$M = r \times F$	N m	
Quantité de mouvement	$\vec{p}$	$p = m \cdot v$	$\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$	
Pression	p	$p = F/A$	$\mathrm{Pa = N\,m^{-2}}$	Pascal
Travail, énergie	W	$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$	J = N m	Joule
Puissance	P	$P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t$	$\mathrm{W = N\,m\,s^{-1}}$	Watt
Tension superficielle	σ	$\sigma = \mathrm{d}W/\mathrm{d}A$	$\mathrm{N\,m^{-1}}$	
Module d'élasticité	E	$E = \sigma/\varepsilon$	$\mathrm{N\,m^{-2}}$	
Module de compressibilité	K	$K = -V\mathrm{d}p/\mathrm{d}V$	$\mathrm{N\,m^{-2}}$	
Viscosité dynamique	η	$\eta = (F_R/A) \cdot \mathrm{d}d/\mathrm{d}v$	Pa · s	
Viscosité cinématique	ν	$\nu = \eta/\rho$	$\mathrm{m^2\,s^{-1}}$	
			St	Stokes = $0,0001\ \mathrm{m^2\,s^{-1}}$
Rendement	η	$\eta = P_{sortie}/P_{entrée}$	1	

Grandeur	Symbole	Définition	Unité	Nom de l'unité
4.Électricité et magnétisme				
Charge	Q	$Q = I \cdot t$	C = A s	Coulomb
Tension	U	$U = W/Q$	V = J C^{-1}	Volt
Champ électrique	$\vec{E}$	$\vec{E} = \vec{F}/Q$	N C^{-1} = V m^{-1}	
Résistance	R	$R = U/I$	Ω = V A^{-1}	Ohm
Conductance	G	$G = 1/R$	S = Ω^{-1}	Siemens
Résistivité	ρ	$\rho = RA/l$	Ω m	
Conductibilité	κ	$\kappa = 1/\rho$	Ω^{-1} m^{-1}	
Capacité	C	$C = Q/U$	F = C V^{-1}	Farad
Permittivité	ε	$\varepsilon = \varepsilon_0 D/E$	F m^{-1}	
Flux magnétique	Φ	$\Phi = \int U \mathrm{d}t$	Wb = V s	Weber
Inductance	L	$L = \Phi/I$	H = V s A^{-1}	Henry
Induction magnétique	$\vec{B}$	$B = \mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}A$	T = Wb m^{-2}	Tesla
Champ magnétique	$\vec{H}$	$H = \mathrm{d}I/\mathrm{d}s$	A m^{-1}	
Perméabilité magnétique	μ	$\mu = \mu_0 H/B$	H m^{-1}	
5. Thermodynamique				
Température	T		K	Kelvin
Quantité de chaleur	Q	(= énergie)	J	Joule
Capacité calorifique	C	$C = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}T$	J K^{-1}	
Capacité calorifique mass.	c	$c = C/m$	J K^{-1} kg^{-1}	
Conductivité thermique	λ	$\lambda = l\,\mathrm{d}Q/(At\,\mathrm{d}T)$	W K^{-1} m^{-1}	
Entropie	S	$S = Q/T$	J K^{-1}	
Chaleur massique	q	$q = Q/m$	J kg^{-1}	
Energie interne	U	$U = \frac{f}{2} n_{\mathrm{mol}} RT$	J	
Energie libre	F	$F = U - TS$	J	
Enthalpie	H	$H = U + pV$	J	
Enthalpie libre	G	$G = U + pV - TS$	J	

Grandeur	Symbole	Définition	Unité	Nom de l'unité
7. Photométrie				
Intensité lumineuse	I		cd	Candela
Flux lumineux	Φ	$\Phi = \int I \mathrm{d}\Omega$	$\mathrm{lm} = \mathrm{cd\,sr}$	Lumen
Quantité de lumière	Q	$Q = \int \Phi \mathrm{d}t$	lm s	
Luminance	L	$L = \mathrm{d}I/(\mathrm{d}A\cos\theta)$	$\mathrm{cd\,m^{-2}}$	
Eclairement	E	$E = (\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}A)\cos\theta$	$\mathrm{lx} = \mathrm{lm\,m^{-2}}$	Lux
Exposition	H	$H = \int E \mathrm{d}t$	lx s	
Flux énergétique	ϕ_e	$\phi_e = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t$	W	
Intensité énergétique	I_e	$I_e = \mathrm{d}\phi_e/\mathrm{d}\Omega$	$\mathrm{W\,sr^{-1}}$	
Densité de rayonnement	B_e	$B_e = \mathrm{d}I_e/(\mathrm{d}A\cos\theta)$	$\mathrm{W\,m^{-2}\,sr^{-1}}$	
Irradiance	E_e	$E_e = (\mathrm{d}\phi_e/\mathrm{d}A)\cos\theta$	$\mathrm{W\,m^{-2}}$	
Irradiation	H_e	$H_e = \int E_e \mathrm{d}t$	$\mathrm{J\,m^{-2}}$	
Distance focale	f	$1/f = 1/a + 1/b$	m	
Vergence	$1/f$		$\mathrm{m^{-1}}$	Dioptrie
8. Radioactivité				
Constante de désintégration	λ	$\lambda = -\mathrm{d}N/(N\,\mathrm{d}t)$	$\mathrm{s^{-1}}$	
Période	$T_{1/2}$	$T_{1/2} = \ln 2/\lambda$	s	
Activité	A	$A = \frac{\text{Nbr.désintégrations}}{\text{temps}}$	$\mathrm{Bq} = \mathrm{s^{-1}}$	Becquerel
Activité massique	a	$a = A/m$	$\mathrm{Bq\,kg^{-1}}$	
Dose absorbée, kerma	D	$D = W/m$	$\mathrm{Gy} = \mathrm{J\,kg^{-1}}$	Gray
Débit de dose	$\dot{D}$	$\dot{D} = \mathrm{d}D/\mathrm{d}t$	$\mathrm{Gy\,s^{-1}}$	
Équivalent de dose	D_q	$D_q = q \cdot N \cdot D$ (1	$\mathrm{Sv} = \mathrm{J\,kg^{-1}}$	Sievert
Section efficace	σ	$\sigma = \frac{-\mathrm{d}N}{nN\mathrm{d}s}$	$\mathrm{m^2}$	
9. Acoustique				
Pression acoustique	p		Pa	
Puissance acoustique	L_p	$L_p = 20\log_{10}(p/p_0)$	db	Décibel
Intensité (physiologique)	L_N	$L_N = 20\log_{10}(p/p_0)$	phon	Phone

(1) q est un facteur de qualité pour différents rayonnements. N est le produit de plusieurs facteurs de qualité définis par l'ICRP (International Commission on Radiological Protection). Ces facteurs dépendent de l'efficacité biologiques.

34/4: Unités non légales, encore utilisées

Grandeur	Unité	Abrév.	Relation à l'unité SI
Usage général			
Angle	seconde	"	1"=(1/60)'
	minute	'	1'=(1/60)°
	degré	°	$1° = (\pi/180)$ rad
Volume	litre	l	$1\,\mathrm{l} = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$
Temps	minute	min	$1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$
	heure	h	$1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min} = 3600\,\mathrm{s}$
	jour	d	$1\,\mathrm{d} = 24\,\mathrm{h} = 86400\,\mathrm{s}$
	année	a	$1\,\mathrm{a} = 365\,\mathrm{d} = 8760\,\mathrm{h}$
Masse	tonne	t	$1\,\mathrm{t} = 10^3\,\mathrm{kg}$
Pression	bar	bar	$1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$
usage spécialisé			
Longueur en astronomie	année lumière	ly	$1\,\mathrm{ly} = 9,4605 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$
	parsec	pc	$1\,\mathrm{pc} = 3,0857 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m} = 3,26\,\mathrm{ly}$
	unité astro.	UA	$1\,\mathrm{UA} = 1,4959787 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$
Longueur en navigation	mile	sm nautique	$1\,\mathrm{sm} = 1852\,\mathrm{m}$
Longueur en physique atom.	Ångström	Å	$1\,\mathrm{Å} = 10^{-10}\,\mathrm{m}$
Vitesse ens navigation	nœud	kn	$\mathrm{kn} = 1\,\mathrm{sm\,h^{-1}} = 0,514444\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Puissance des lentilles	dioptrie	dpt	$1\,\mathrm{dpt} = \mathrm{m}^{-1}$
Surfaces-agraires	hectare	ha	$1\,\mathrm{ha} = 10^4\,\mathrm{m}^2$
	are	a	$1\,\mathrm{a} = 10^2\,\mathrm{m}^2$
Angle (géodésie)	Gon	gon	$1\,\mathrm{gon} = (\pi/200)\,\mathrm{rad} = 1\,grade$
Epaisseur des fibres textiles	tex	tex	$1\,\mathrm{tex} = 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$
Poids pierres préc.	carat	Kt	$1\,\mathrm{Kt} = 0,2\,\mathrm{g}$
Masse en microphysique	unité de masse atomique	u	$1\,\mathrm{uma} = 1,6605402 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Énergie	électronvolt	eV	$1\,\mathrm{eV} = 1,60217733 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

34/5: Conversion des unités d'énergie

	erg	J	kWh
1 erg	1	10^{-7}	$2,7778 \cdot 10^{-14}$
1 J	10^{7}	1	$2,7778 \cdot 10^{-7}$
1 kWh	$3,6 \cdot 10^{13}$	$3,6 \cdot 10^{6}$	1
1 kpm	$9,8066 \cdot 10^{7}$	$9,8066$	$2,72 \cdot 10^{-6}$
1 kcal	$4,1868 \cdot 10^{10}$	$4,1868 \cdot 10^{3}$	$1,16 \cdot 10^{-3}$
1 eV	$1,6021 \cdot 10^{-12}$	$1,6 \cdot 10^{-19}$	$4,45 \cdot 10^{-26}$
	kp· m	kcal	eV
1 erg	$1,0197 \cdot 10^{-8}$	$2,3884 \cdot 10^{-11}$	$6,2419 \cdot 10^{11}$
1 J	$1,10197 \cdot 10-1$	$2,3884 \cdot 10^{-4}$	$6,2419 \cdot 10^{18}$
1 kWh	$3,6709 \cdot 10^{5}$	$8,6001 \cdot 10^{2}$	$2,25 \cdot 10^{25}$
1 kpm	1	$2,3427 \cdot 10^{-3}$	$2,6126 \cdot 10^{19}$
1 kcal	$4,2685 \cdot 10^{2}$	1	$2,6126 \cdot 10^{22}$
1 eV	$1,634 \cdot 10^{-20}$	$3,8276 \cdot 10^{-23}$	1

34/6: Forces des vents (à mesurer à 10 m au-dessus du sol)

Degré-Beaufort	Vitesse	Pression	Dénomination effet observé
3	3,4 à 5,3 m/s	$\approx$ 0,017 kN/m^2	petite brise agite les feuilles
6	9,9 à 12,4 m/s	env .0,08 kN/m^2	vent frais agite les branches des arbres
9	18,3 à 21,5 m/s	$\approx$ 0,25 kN/m^2	fort coup de vent arrache cheminées et ardoises
12	$\geq$ 30 m/s	$\geq$ 0,5 kN/m^2	ouragan catastrophes

34/7: Unités anglo-américaines

grandeur	unité	abrév.	conversion en SI
Longueur	inch	in	1 in $= 0,0254$ m
	foot	ft	1 ft $= 12$ in $= 0,3048$ m
	yard	yd	1 yd $= 3$ ft $= 0,9144$ m
	statute mile	mile	1 mile $= 1760$ yd $= 1609,34$ m
	nautical mile	n mile	1 n mile $= 1852$ m
Aire	square inch	in^2	$1\,in^2 = 6,452 \cdot 10^{-4}\,m^2$
	square foot	ft^2	$1\,ft^2 = 144\,in^2 = 0,0929\,m^2$
	square yard	yd^2	$1\,yd^2 = 9\,ft^2 = 0,8361\,m^2$
	square mile	$mile^2$	$1\,mile^2 = 2,59 \cdot 10^6\,m^2$
	acre	a	$1\,a = 4046,86\,m^2$
Volume	cubic inch	in^3	$1\,in^3 = 1,63871 \cdot 10^{-5}\,m^3$
	cubic foot	ft^3	$1\,ft^3 = 0,02832\,m^3$
	cubic yard	yd^3	$1\,yd^3 = 0,76456\,m^3$
	gallon	gal	$1\,gal = 3,78541 \cdot 10^{-3}\,m^3$
	Registerton	RT	$1\,RT = 100\,ft^3 = 2,832\,m^3$
Vitesse	mile per hour	mph	$1\,mph = 1,609\,km/h = 0,447\,m/s$
Masse	grain	gr	$1\,gr = 6,4799 \cdot 10^{-5}\,kg$
	dram	dram	$1\,dram = 1,77184 \cdot 10^{-3}\,kg$
	ounce	oz	$1\,oz = 2,83495 \cdot 10^{-2}\,kg$
	pound	lb	$1\,lb = 0,45359\,kg$
	long hundredweight	long cwt	1 long cwt $= 50,8023$ kg
	short hundredweight	sh cwt	1 sh cwt $= 45,3592$ kg
	long ton	long tn	1 long tn $= 1016,05$ kg
	short ton	sh tn	1 sh tn $= 907,185$ kg
Pression	pound-force per squ. inch	lbf/in^2	$1\,lbf\,in^{-2} = 6,8947 \cdot 10^3\,Pa$
	pound-force per squ. foot	lbf/ft^2	$1\,lbf\,ft^{-2} = 47,88\,Pa$
	ton-force per square foot	$tonf/ft^2$	$1\,tonf\,ft^{-2} = 107,252 \cdot 10^3\,Pa$
Énergie	foot pound-force	ft lbf	1 ft lbf $= 1,3558$ J
	British thermal unit	Btu	1 Btu $= 1055,06$ J
Puissance	horsepower	hp	1 hp $= 745,7$ W

Index

Aberration
chromatique, 350
géométrique, 376
sphérique, 376
Absolu
humidité, 746
Absorption, 332
rayonnement, 772
Absorptivité, 772
Accélérateur linéaire, 901
Accélération, 16
angulaire, 32
de la pesanteur, 136
instantanée, 17
moyenne, 16
Accepteur, 1022
Accommodation, 379
Accroissement fini
rapport, 1125
Accumulateur au plomb, 563
Acidité
constante, 754
Acoustique, 317
Action, 87
principe de moindre, 87
Actionneur, 131
Activateurs, 1079
Activité, 755, 941, 962
en concentration, 755
massique, 942
optique, 403
Adaptateur d'impédance, 1055
Additif de niveau, 339
Addition
de moments, 49
vectorielle, 1121
Adhésion, 194
Adiabatique
indice, 706
processus, 696
Admittance
complexe, 528
Adressage, 314
Aéronef, ballon, 190
Agrégats ioniques, 127
AGS, 937
Aile d'avion, 207
Aimant
doux, 1068
dur, 1068
permanent, 469
Aimantation, 1063, 1065
à saturation, 732
rémanente, 1068
spontanée, 733
Air humide, 745
diagramme de Mollier, 748
enthalpie, 748
masse volumique, 748
vapeur humide, 747
vapeur saturée, 747
Al, 139
Albédo, 683
Alliage, 994
amorphe, 988
magnétique, 615
à mémoire de forme, 995
de fer
propriétés ferromagnétiques, 616
de nickel
propriétés ferromagnétiques, 616
résistif, 611
Amas globulaires, 157
Ambiance
d'intérieur, 746
Amortissement de Landau, 591
Ampère, 432, 1129
unité, 432
Ampèremètre, 514
Amplificateur
de sommation, 1053
de soustraction, 1053
différentiateur, 1054
différentiel, 1050
idéal, 1051
intégrateur, 1053
inverseur, 1052
opérationnel, 1050
suiveur, 1055
Amplification en courant, 1037
Amplitude, 263, 264, 520
de résonance, 282
Analyse en déphasages, 914
Analyse spectrale, 401

Analyseur spectral, 401
Anamorphotique, 362
Anastigmate, 376
Ancrage, 1060
Anergie, 684
Angle, 9
  de Bragg, 387
  de Brewster, 403
  de cisaillement, 171
  de contact, 195
  de déviation, 364
    du prisme, 364
  de diffusion, 75
  de frottement, 55
  de Mach, 221
  de phase, 529
  de polarisation, 403
  de réflexion, 350
  de réfraction, 354
  de torsion, 273
  de vision, 380
  d'incidence, 350, 354
  de réflexion totale, 357
  solide, 10
Anion, 427, 555
Anisotrope, 404
Anisotropie optique, 736
Année, 6
Année-lumière, 139
Anneaux de Newton, 393
Anneaux de Saturne, 139
Annihilation, 153
  de paires, 904
Anode, 556, 1025, 1045
Anomalie de l'eau, 673
Antiferromagnétiques
  propriétés, 619
Antiferromagnétisme, 489, 1068
  dépendance en température, 489
Antimatière, 937
Antiparticule, 153, 905
Antiproton, 905
Antisymétrie
  d'une fonction d'onde, 845
Aphélie, 136
Apogée, 29
Appareil photo, 378
Approximation
  des petits mouvements, 269
  de Gauss, 348
Appui, 100
  simple, 101
Arc en ciel, 356
Articulation, 101
  cylindrique, 101
Ascension dans un capillaire, loi de Jurin, 195
Association de lentilles, 374
Association d'impédances
  en série, 532
  en parallèle, 532
Association en parallèle
  d'éléments galvaniques, 564
  de résistances, 442
Association en série
  d'éléments galvaniques, 564
  de résistances, 441
Astéroïde, 140
Atmosphère
  normale, 634
  technique, 634
Atome, 852
  absorption de photons, 882
  alcalin, 856
  couche électronique, 880
  couplage spin-orbite, 867
  d'hydrogène
    dégénérescence du spectre en énergie, 860
  de gaz rare, 881
  densité électronique, 865
  densité de probabilité radiale, 865
  de Rydberg, 856
  d'impureté, 1022
  émission induite de photons, 883
  émission spontanée de photons, 883
  état excité, 853
  état fondamental, 853
  interstitiel, 984
  modèle vectoriel, 866
  moment cinétique total, 866
  moment magnétique, 882
  niveaux d'énergie, 853
  orbitale, 881
  schéma de niveaux, 853
  sous-couche, 881

spectre, 853
spectroscopie, 853
Atténuation γ, 960
coefficient massique, 960
coefficient linéaire, 961
effet Compton, 960
effet de paires, 960
effet photoélectrique, 960
effet total, 961
Atténuation du son
dans l'air, 422
Attracteur, 231
Autoclave, 180
Autosimilitude, 239
Avalanche, 1026
Avantage mécanique, 103
Avogadro
nombre d', 637
Axe optique, 347
dans un cristal, 404
Axes du cristal, 972
Axes principaux d'inertie, 121

Bain à basse température, 804
Balais, 550
Balance, 34, 103
de Mohr, 190
de pression, 635
électrométrique, 433
Bande
d'émission, 157
d'énergie, 1015
de conduction, 1016
de valence, 1016
de vibration-rotation, 876
interdite, 1016
latérale inférieure, 332
latérale supérieure, 332
bar, 634
barn, 659, 927
Baromètre
à mercure, 181, 183
anéroïde, 180
loi, 664
Barre de contrôle, 951
Barre de torsion, 53
Barrel Etching, 129
Barrière
coulombienne, 935
de fission, 938
Barycentre, 80, 92
Baryon, 896
Bascule
bistable, 1055
Base, 1033
Basicité
constante, 754
Bassin d'attraction, 231
Beau de Rochas
cycle de, 714
Beaufort, 216, 1134
Beauté, 894
Bec Bunsen, brûleur à gaz, 206
Becquerel, 941, 943, 962
Bethe-Bloch
relation, 958
Bethe-Weizsäcker
formule de, 918
Bicyclette, 125
Bielle, 101
Big Bang, 156
Bilame, 630, 673
Bilan d'énergie, 926
Bilan de puissance, 513
Bimétal, 993
Bipôle
actif, 506
élémentaire, 506, 533
passif, 506
Biréfringence, 404
circulaire, 405
linéaire, 405
optique, 997
provoquée, 407
Bloch
ferromagnétisme, 733
thèorème de, 1014
Bobine de Rogowski, 477
Bohrium, 882, 937
Bolomètre, 408
Boltzmann, constante de, 661
Boson, 886, 892
de jauge, 889
intermédiaire, 887, 889
Boule de glu, 890

Boyle
 loi de, 651
Branche, 508
Bras de levier, 47, 96, 103, 113
Breeding, 953
Bremsstrahlung, 872
British Thermal Unit, 676, 1135
Brouette, 103
Brouillard, 747
Bruit, 339
 blanc, 339
 de marche
  atténuation de, 335
 nuisible à la santé, 422
 thermique, 628
Btu (British thermal unit), 676, 1135
Bucky, 735
Bulk, 1042

Calculateurs analogiques, 1055
Calendrier
 grégorien, 6
 julien, 6
Calorie, 676
Calorimètre, 647, 678, 902
 à échange, 678
 à combustion, 678
 à liquide, 678
 à mélange, 679
 bombe, 678
 métallique, 678
 sec, 678
candela, Cd 416, 1129
Capacité, 462
 condensateur cylindrique, 465
 condensateur plan parallèle, 463
 condensateur sphérique, 465
 deux sphères de mêmes rayons, 466
 ligne bifilaire, 465
Capacité calorifique, 685, 1003
 de gaz, 689, 795
 de liquides, 796
 de métaux, 793
 de matériaux, 794, 797
 de synthétiques, 796
 du gaz d'électrons, 1014
 équivalent en eau, 686
 mélange de substances, 686
 molaire, 686, 687, 1003
 massique, 686, 688, 1003
  à pression constante, 689
  à volume constant, 689
  constante adiabatique, 691
  constante des gaz parfaits, 690
  gaz parfait, 690
  indice d'adiabatique, 691
  liquides, 691
  mélange, 689
  propriétés, 689
  règle de Dulong et Petit, 691
  solides, 691
Capillaire, 194
Capteur, 130
 à fibre optique, 361
 à quartz, 131
 d'accélération, 131
 de débit, 131
 de gaz, 131
 de pression, 130
 de rayonnement, 131
 tactile, 130
Capture électronique, 946
Capture d'électrons, 871
Capture K, 946
Caractéristique, 1027
 d'entrée, 1035
 de commande, 1036
 de réaction, 1035
 de sortie, 1035
  domaine actif, 1035
  région de saturation, 1035
 de transfert en courant, 1035
Caractéristique gaussienne, 410
Caractéristiques de la lunette, 382
Caractéristiques d'un transistor
 présentation en quatre quadrant, 1035
Cardan, 101
Carnot
 cycle de, 704
Casse noix, 104
Catalyseur, 647
Catapulte, 104
Cathode, 556, 1025, 1045
Cathode thermo-ionique, 571
Cation, 427, 555

Cauchy
  règle de, 1110
Cavité noire, 820
Cd, candela 416
Ceinture
  magnétique, 477
Cellule de Kerr, 407
Cellule photoélectrique, 571
Celsius, 628
Centre d'une classe, 1113
Centre de diffusion, 385
Centre de gravité, 11
  détermination expérimentale, 92
Centre de gravité, barycentre, 91
Centre F, 985
Centres colorés, 985
Centres d'ancrage, 1060
CERN, 937
Chaleur, 678
  BTU, 676
  calorie, 676
  calorimètre, 678
  constante solaire, 683, 771
  courant thermique, 758
  de dissolution, 718
  de fusion, 723
    de métaux purs, 808
    de substances, 809
  de solidification, 723
  de sublimation, 723
  de vaporation
    de métaux purs, 808
  de vaporisation, 722
    de substances, 809
    en fonction de la température, 809
  densité volumique de, 774
  énergie électrique, 680
  énergie de combustion, 681
  énergie mécanique, 681
  énergie solaire, 682
  latente, 722, 725
  de liquéfaction, 723
  massique, 679
    de fusion, 723
    de vaporisation, 722
    point critique, 728
  rayonnement, 771
  réduite, 707
  transfert de, 766, 757
  transmission de, 758
Chambre
  à projection temporelle, 902
  à bulles, 901
  à streamer, 902
  d'ionisation, 568, 902, 966
    temps mort, 568
  noire, 378
Champ
  barreau uniformément chargé, 456
  charge ponctuelle, 454
  coercitif, 488, 1068
  cylindre creux chargé, 455
  dépolarisant, 1071
  de courant électrique, 436
  de Lorentz, 1072
  de vision, 383
  dipolaire, 1072
  distribution sphérique de charges, 455
  d'un dipôle, 454
  électrique, 444
  électrique uniforme, 445, 450
  local, 1071
  magnétique, 475, 469
    fil rectiligne, 483
    d'un solénoïde long, 483
  moléculaire, 1067
  plan uniformément chargé, 456
  scalaire, 444
  sonore
    dans l'air, 419
  sphère creuse chargée, 454
  tournant, 552
  vectoriel, 444
Changement d'état
  isobare, 645
Chaos déterministe, 233
Charge
  baryonique, 895
  conservation, 427
  élémentaire, 427
  électrique, 426
  ionique, 556
  leptonique, 894
  négative, 427

positive, 426
récepteur, 507
Charme, 894
Charpak
chambres multifils, 902
Charpente, 101
Chemin optique, 345
Cheval vapeur, 69
Chevelure, 140
Chimie
réaction, 749
Chladni
figures de, 327
Choc, 70
central, 72
direct, 72
élastique, 71
inélastique, 71
mou, 72
oblique, 72
périphérique, 72
Chromatographe en phase gazeuse
micromécanique, 132
Chronomètre, 6
Chute
des corps, 27
libre, 28
Cinématique, 1
Circuit
bouchon, 544
électrique, 506
oscillant, 275
oscillant amorti, 280
en courant alternatif, 507
en courant continu, 507
intégré, 1047
magnétique, 477
primaire, 953
secondaire, 953
Cisaillement, 163, 164, 171
Clapeyron
diagramme de, 651
relation de, 741
Classe, 1113
Classe spectrale, 157
Clausius
égalité, 707
Clausius-Rankine
cycle de, 712
Cloison de Bloch, 486
Cluster, 949
Coefficient
aérodynamique
table, 260
d'absorption, 413
linéaire, 413
massique, 1098
d'affaiblissement du son
dans les gaz , 419
dans les liquides, 420
d'affaiblissement, 422
d'anisotropie, 617
d'atténuation massique, 1098
de conductibilité thermométrique, 776
de conductivité
thermique, 761
de corrélation, 1111
de couplage, 498
de dilatation
anomalie de l'eau, 673
de gaz, 795
de liquides, 796
de métaux, 793
de matériaux, 794
de synthétiques, 796
isobare, 652
linéïque, 672
volumique, 184, 672
de frottement, 53
dans des tubes rugueux, 219
de frottement cinématique
table, 252
de frottement de roulement
table, 252
de frottement statique
table, 252
de Hall, 1011
de Joule-Thomson, 718
de Peltier, 605
de Poisson, 166
de performance
machine réfrigérante, 710
de puissance, 530
de réflexion, 334, 413

de recombinaison, 567
de tranmission
de chaleur, 759
de transfert d'énergie, 965
de transfert thermique, 768
matériaux de construction, 798
matériaux plans, 798
de transmission, 414
du viriel, 666
positif, 440
spectral de luminance, 416
stœchiométrique, 750
Coexistence biphasée, 727
Cohérence, 300
Cohérent, 389
Coin, 104
Collecteur, 550, 1033
Collision centrale, 929
Collision relativiste, 937
Collisionneur, 901
linéaire, 901
Coloration du timbre, 341
Comète de Halley, 140
Combiné téléphonique, 330
Combustible usé, 953
Commutateur, 550
d'opérateurs, 834
Complexion, 640
Composés
azotés, 1088
de l'oxygène, 1089
semiconducteurs, 1019
Composantes d'un vecteur, 1120
Composites à fibres, 994
Composition de forces, 42
Compressibilité, 184, 672
point critique, 728
table, 254
Compression isotrope, 167
Compteur
à implusions, 568
Čerenkov, 902
Geiger-Müller, 568
proportionnel, 568, 902, 966
Compton
effet, 960
Concentration, 737, 750
effective, 755
Condensateur, 462, 1049
charge d'un, 517
décharge d'un, 517
Condensateurs
en parallèle, 464
en série, 464
Condensation, 723
Condensation d'eau, 746
Condenseur, 382
Condition de Bragg, 387, 978, 1014
Condition de cohérence, 390
Condition de Helmholtz, 200
Conditions normales, 630, 635
Conductance
magnétique, 497
thermique, 765
Conducteur, 1008
électrique, 427
Conductibilité
électrique
mesure de pression, 635
thermique
dans les isolants, 1006
dans les métaux, 1007
Conduction, 757
Conduction thermique, 760
pour plusieurs parois, 763
Conductivité électrique, 438, 1008
d'un gaz, 566
d'un électrolyte, 557
équivalente, 558
intrinsèque, 1019
Conductivité thermique, 659, 761, 774
à température fixée, 796
d'isolants, 797
de gaz, 795
de liquides, 796
de métaux, 793
de matériaux, 794, 797
de synthétiques, 796
gaz monoatomique, 660, 762
mélanges gazeux, 762
microscopique, 659, 761
Conduit auditif, 336
Cône de Mach, 220, 308
Cône de Seger, 630

Configuration des nucléons, 921
Confinement, 955
des quarks, 890
inertiel, 596, 956
toroïdal d'un plasma, 597
Conjugaison de charge, 905
Conjugué complexe, 525
Conservation
de l'énergie, 63, 85, 119
dans une déformation élastique, 174
de la quantité de mouvement totale, 83
du moment cinétique, 115
de la parité, 903
Constante, 1125
adiabatique, 691
d'acidité, 754
de basicité, 754
cryoscopique, 744, 805
élastique, 999
d'écran, 872
d'élasticité, 164
d'intégration, 1126
de Boltzmann, 661
entropie, 641
de couplage, 890
de désintégration, 940
de diffusion, 660, 776, 777
de Faraday, 558
de Hubble, 155
de Madelung, 981
de produit de solubilité, 755
de réseau, 313, 972
de Richardson, 571
de Rydberg, 858
de Stefan-Boltzmann, 771, 822
de structure fine, 861
de temps, 517, 518, 1078
de Verdet, 403
des gaz parfaits, 639, 662, 691
diélectrique, 461
du gaz, 662
ébullioscopique, 743, 805
individuelle d'un gaz, 690
massique d'un gaz, 662, 690, 791
solaire, 683, 771
universelle, 1106
des gaz parfaits, 662
Constituant
modèle standard, 885
Construction de l'image, 351
Construction de Maxwell, 669, 729
Contenance en eau, 747
Continuum, 838
Contrainte, 160
mécanique, 989
normale, 160
tangentielle, 160
Contre réaction, 1038, 1052
en courant, 1039
en tension, 1038
Convection, 757
Conversion
d'unités, 1106
Convertisseur, 328
Cooper
paire de, 736
Coordonnée, 1, 142
atomique, 976
canonique, 89
cyclique, 89
réduite, 732
Corde, 304
Corps composé, 80
Corps noir, 414, 772, 819
constante du rayonnement, 771
Cosmologie, 142
Couche double
électrique, 559
Couche limite
laminaire, 218
Couches électroniques, 866
Couches
antireflet, 392
minces
échelle des teintes, 392
Couleurs, 895
de la lumière, 344
du spectre visble, 399
spectrales, 343
Coupe
méridionale, 368
sagittale, 368
Couplage
jj, 868

LS, 867
faible, 290
magnétique, 497
spin-orbite, 860, 915
Couple, 48, 113
de forces, 97, 98
Couples thermoélectriques
usuels, 604
Courant
action sur le corps humain, 612
alternatif, 433
continu, 507
d'amorçage, 1045
d'anode, 573
d'arrêt, 1045
de saturation, 1027
de seuil, 1080
électrique, 431
en charge, 548
photoélectrique, 822, 1017
résiduel, 1045
Courant thermique, 758
à travers un mur, 761
analogie avec l'électricité, 765
coefficient de transfert, 768
densité, 773
liaison série, 766
loi d'Ohm, 765
pour un tube, 763
résistance, 764
transfert, 766
tubes coaxiaux, 764
Courbe
d'aimantation, 485
d'inversion, 719
de première aimantation, 487, 1067
de pression de vapeur, 724, 728, 740, 742
Courbure de l'espace, 155
Covariance, 1111
Covolume, 666, 791
Création de paires, 154, 904, 960
Cristal, 970
changement de structure, 734
liquide, 735
nématique, 736
optique, 404
Cristaux
directions d'aimantation, 618
ferroélectriques, 1074
filamenteux, 994
ioniques, 1002
liquides, 403, 997
LCD, 736
mixtes, 994
piézoélectriques, 329
Critère de Lawson, 596, 956
Critère de Rayleigh, 388
Criticité
exposants, 727
isotherme, 728
pression, 731
température, 728, 730
Critique
pression, 669
température, 669
volume molaire, 670
Cryométrie, 742
CTP, 440
Curie, 941
température de, 488
Curie P. et M., 943
CV, 69
Cycle, 704
agent moteur, 704
carbone-azote, 955
chaleur réduite, 707
CN, 955
CNO, 954
de Beau de Rochas, 714
de Bethe, 158
de Carnot, 704
de Clausius-Rankine, 712
de Diesel, 715
d'Ericsson, 716
de Joule, 716
de l'hydrogène, 954
de Otto, 714
de Stirling, 710
direct ou moteur, 708
du carbone, 158
inverse, 708
fluide caloporteur, 704
limite, 231
moteur, 708

rendement, 711
Cycloïde, 4

Darlington
transistor, 1041
dB, dcibel, 324
Débit, 188, 198
de dose, 963
de fluence, 964
Débordement, 205
Décélération, 16
Décalage vers le rouge, 155
Décapage
chimique, 129
induit par faisceau laser, 130
par ions lourds, 129
Décharge
autonome, 569
semi-autonome, 565
à lueur, 569, 570
Corona, 569
dans les gaz, 565
obscure, 566, 570
par étincelles, 569
par arc, 569
tension d'amorçage, 569, 570
décibel, dB, 324
Déclinaison, 471
Décomposition en série de Fourier, 289
Décomposition spectrale, 400
Déconfinement, 938
Décroissance radioactive, 939
Décroissance α, 944
Décuplet de spin 3/2, 900
Défaut
cristallin, 971
d'empilement, 987
de masse, 913
de réseau, 983
Déformation, 160
élastique, 160
plastique, 160, 174
Dégénérescence, 832
Degré de liberté, 657, 740
loi de l'équipartition, 658
Dématérialisation, 153
Démodulation, 314
Dépendance en pression
de la résistivité, 601
Déphasage, 263, 264, 529
à la résonance, 283
Déplacement
dans un diélectrique, 461
électrique , 1070
isotopique, 870
virtuel, 87
Dérivée, 1125
logarithmique, 1126
Dérive de gradient, 587
Désexcitation γ, 948
Déshydratation, 745
Déshydrateur, 804
Désignation des tons, 340
Désintégation partielle, 941
Désintégration, 887
Désintégration β, 945
Désintégration du proton, 907
Détecteur à pistes, 902
Détecteur semi-conducteur, 902
Développement du viriel, 665
Déviation
absolue moyenne, 1111
Déviation de la lumière
dans un champ de gravitation, 155
Densité
de courant thermique, 773
flux d'énergie, 964
spectrale d'énergie, 964
spectrale de particules, 964
champ magnétique, 499
d'une onde acoustique, 322
du rayonnement électromagnétique, 408
d'états, 1003, 1012
d'empilement, 975
de charge électrique, 429
moyenne, 431
de courant électrique, 434
critique, 1059
de dislocations, 987
de flux thermique, 1007
de porteurs
variation temporelle, 1078
de porteurs intrinsèque, 1020
du flux magnétique, 471
linéique de charge électrique, 431

moyenne, 431
normale de l'atmosphère, 186
nucléaire, 912
surfacique de charge électrique, 430
moyenne, 431
volumique de charge électrique, 429
moyenne, 431
Deutérium, 856
Deutéron, 855
Deuxième vitesse cosmique, 140
Diélectrique, 461, 1016, 1070
Diac, 1029
Diagramme
σ-ε, 174
(p,V), 651
de Clapeyron, 651
de Minkowski, 146
de Mollier, 646, 748
effort/déformation, 160
entropique, 725
h,s, 646
h,x, 646
Diamètre de collision, 930
Diamètre utile de l'objectif, 383
Diamagnétisme, 485, 882, 1064
Diamant, 734, 1050
Diaphragme, 375
Diaphragme d'ouverture, 375
Dichroïsme, 406
Diesel
cycle de, 715
Différence de densité au point critique, 728
Différence de potentiel, 452
magnétique, 477
Différence en concentration, 776
Différentiateur, 1054
Différentiel, 107
Diffraction, 311, 386
amplitude complexe, 398
d'électrons, 827, 978
de Fraunhofer, 386, 398
de Fresnel, 386
de neutrons, 978
de rayons X, 978
par une fente, 311
par un réseau, 313
par un réseau cristalin, 387
Diffuseur, 202
Diffuseur parfait, 410
Diffusion, 776
de Mott, 931
de neutrons
cinématique, 1000
inélastique, 1000
de Rayleigh, 385
inélastique, 934
magnétique, 978
métal, 814
métal en fusion, 813
paramètre de, 810
Rutherford, 930
Dilatation volumique
à différentes températures, 798
de liquides, 797
Dilatomètre, 673
Dimension, 1, 1105, 1129
DIN, 1105
DIN 50 103, 179
DIN 50 133, 178
DIN 50 145, 176
DIN 50 150, 178, 179
DIN 50 351, 178
Diode, 1025, 1049
à capacité variable, 1032
à vide, 574
backward, 1032
de commutation, 1028
électroluminescente, 1079
laser, 1080
PIN, 1030
Schottky, 1028
tunnel, 1031
Zener, 1026
Dioptrie, 371
Direction, 1120
Direction cristallographique, 976
Direction du courant
technique, 432
Dislocation, 985
en coins, 985, 987
en vis, 986, 987
Dispersion, 311, 316, 399, 1110
anomale, 399
anormale, 311

de mode, 361
du matériau, 361
du signal, 361
linéaire, 1107
normale, 311, 399
relative, 1111
Disque d'Airy, 388
Dissociation, 555
Distance
d'accomodation, 379
d'arrêt, 20
focale, 351, 368
image, 348
objet, 348
image, 368
d'une lentille, 368
limite photométrique, 409
objet, 368
d'une lentille, 368
objet et image, 366
Distribution
de Bose-Einstein, 892, 1003
de Fermi, 891
de Maxwell-Boltzmann, 656
de masse, 912, 939
des fréquences, 1113
des vitesses, 653, 655
normale, 1117
plane uniforme de charges, 456
spatiale, 865
Divergence, 199
Diviseur
de courant, 510
de tension, 509
Domaine, 1076
de fréquence, 320
de la musique, 339
de la parole, 337
de tensions en électrotechnique, 611
de Weiss, 486
élastique, 989
linéaire, 1051
spectral ultraviolet, 424
Donneur, 1022
Dopage, 128, 1023
Dopage n, 1023
Dopage p, 1023
Dose absorbée, 962
Dose d'exposition, 966
Dosifilm, 966
Dosimétrie, 962
débit, 963
équivalent de dose, 963
Dosimètre thermoluminescent, 967
Double bang, 308
Double réfraction, 404
Drain, 1042
Dram, 1135
Droite
de charge, 1036
de Hooke, 176
de Kurie, 947
Dual-Gate-MOSFET, 1044
Dualité onde-corpuscule, 344, 827
Dulong et Petit
règle de, 687, 691
Durée, 6
Durée de vie, 1117
des ions, 567
Durcissement par dispersion, 994
Dureté, 178
Brinell, 178
Rockwell, 179
Vickers, 178
Duromères (Duroplastes), 993
Dynamique
des plasmas, 589
du solide rigide, 107
non-linéaire, 222
relativiste, 151
dyne, 39
Dynode, 572

EBR, efficacité biologique, 966
Ébulliométrie, 742
Ébullition, 722, 742
Composés minéraux, 784
Écart
quadratique moyen, 1110, 1111
type, 1110, 1111
Échange d'électrons, 982
Échange de chaleur, 699, 755
Échange de mésons, 916
Échangeur thermique, 719
Échelle Kelvin, 632

Échelle de sonie, 339
Écho, 335
Éclairement, 424
Éclairement énergétique, 411
  visuel, 417
Écliptique, 136
Écoulement
  laminaire, 208
  non tourbillonaire, 200
  turbulent, 208, 214
Effet
  à deux sens, 995
  à sens unique, 995
  Auger, 873
  Barkhausen, 1068
  Čerenkov, 221, 308
  Compton, 824, 960
    conservation,
    de l'énergie, 825
    de la quantité de mouvement, 825
  Cotton et Mouton, 407
  de champ
    transistor, 1041
  de peau, 492
  de pincement, 593
  Doppler, 14, 306
  Faraday, 403
  Hall, 472, 1011
    quantique, 1011
  Hubble, 155
  Joule-Thomson, 718
    courbe d'inversion, 719
    procédé Linde, 719
  Kerr, 407
  Mösbauer, 949
  Magnus, 207
  Meissner-Ochsenfeld, 736, 1057
  miroir, 587
  photoélectrique, 822, 960
    externe, 571
    interne, 572
    seuil, 823
    travail d'extraction, 822
  photoélectrique interne, 823
  Pockels, 407
  Stark, 880
    linéaire, 880
    quadratique, 880
  total, 995
  tunnel, 840, 1031
  Zeeman, 878
    anormal, 879
    longitudinal, 878
    normal, 878
    transversal, 878
Effets relativistes, 142, 149
Égalisation des températures, 755
Égalité de Clausius, 707
Élancement, 177
Élargissement d'une raie spectrale, 854
Élasticité, 991
  d'orientation, 997
Élastomère, 992
  conducteur, 994
Électret, 461, 1074
  quelques propriétés, 610
Électricité, 426
Électro-aimants, 469
Électro-osmose, 565
Électrode, 556
  électrochimique, 556
  normale à Hydrogène, 556, 560
Electrodynamique quantique, 889
Électrolyse, 558
  dépôt de masse par, 558
Électrolyte, 556
Électron, 855
  de valence, 856, 881
  énergie potentielle, 861
  potentiel centrifuge, 862
  potentiel effectif, 862
  quasi-libre, 1014
  s, 865
Électron-volt, 629, 676, 826
Électronégativité, 556
Électronique analogique, 1036
Électrons, 427
Électrophorèse, 564
  sur papier, 565
Électrostriction, 462
Élément galvanique, 561
  thermoélectrique, 408
Éléments
  artificiels, 882

de transition, 881
ferromagnétiques, 615
finis
méthode des , 163
optiques, 347
optiques diffractants, 394
super lourds, 882, 937
transuraniens, 881
Élongation, 265, 321
maximum, 264
Émetteur, 1033
acoustique, 328
de Lambert, 410
électroacoustique, 328
Émission
d'électrons secondaire, 572
d'électrons secondaires, 1096
de clusters, 949
électronique, 1093
froide, 572
par champ électrique, 572
retardée de nucléons, 949
spontanée, 1080
spontanée de nucléons, 949
thermo-ionique, 570
Émissivité du rayonnement, 771
Empilement compact, 975
Émulsion photographique, 901
Encastrement, 101
Enclume (ouïe), 336
Énergie, 62
anergie, 684
au repos, 153
chaleur, 678, 680
champ magnétique, 500
cinétique, 63
d'un solide, 118
relativiste, 153
moyenne, 654
conservation, 773
coulombienne, 918
d'appariement, 918
de déformation, 173
de Fermi, 917, 1010
de combustion, 681
de dissociation, 1090
de formation d'une lacune, 984
de liaison, 913
de surface, 918
de symétrie, 918
de volume, 918
d'ionisation, 853, 1086
d'hallogénures, 1089
d'hydrocarbures, 1088
disponible, 154
de composés azotés, 1088
de composés de l'oxygène, 1089
de l'oscillateur libre, 267
du champ électrique, 467
du champ d'une bobine, 500
du photon, 819, 856
du point zéro, 703
d'un réseau, 980
électrique, 276
exergie, 684
individuelle, 920
interne, 181, 641, 700
comme potentiel, 641
fonction d'état, 701
minimum, 650
minimum à l'état d'équilibre, 699
premier principe de la thermodynamique, 701
minimum d', 641
libre
minimum, 649
minimum à l'équilibre, 625
minimum à l'état d'équilibre, 699
limite, 858
mécanique
chaleur, 681
mécanique totale d'un système, 82
moyenne, 914
potentielle, 65
d'un ressort spiral, 119
résiduelle, 843, 844
seuil, 928, 960
solaire, 682
spécifique, 935
totale relativiste, 153
travail, 676
travail fourni, 676
travail reçu, 676
unités, 675

utilisable, 643
Enroulement
excitateur, 550
primaire, 498
secondaire, 499
Ensemble
canonique, 622
grand canonique, 622
microcanonique, 621
Enthalpie, 644
à l'état d'équilibre, 699
air humide, 748
comme potentiel, 644
de condensation, 646
de fusion, 646
de métaux purs, 808
de substances, 809
de liquéfaction, 646
de solidification, 646
de sublimation, 646
de vaporation
de métaux purs, 808
de vaporisation, 646
de substances, 809
libre, 647
comme potentiel, 647
minimum, 649
minimum à l'équilibre, 625, 699
minimum, 649
minimum à l'équilibre, 625
de réaction, 646
Entrée
inverseuse, 1050
non inverseuse, 1050
Entropie, 639, 642
comme potentiel, 642
gaz parfait, 643
maximum à l'équilibre, 625, 649
maximum d', 641
maximum pour un système isolé, 699
microscopique, 641
saut, 725
Enveloppe d'une onde, 306
Épaisseur
au centre, 369
de peau, 912
moitié, 965
Épitaxie, 127
en phase vapeur, 1047
Équateur, 139
Équation
aux valeurs propres, 831
de Bernoulli, 201
caractéristique, 625
d'Euler, 201
d'état, 625
constante massique des gaz, 662
constante universelle, 662
covolume, 666
développement du viriel, 665
de Van der Waals, 666
des liquides, 671
des solides, 671
gaz parfait, 653, 661, 665
pression interne, 667
d'onde, 293
de Gibbs-Duhem, 739
de Heisenberg, 836
de Langevin, 588
de Navier-Stokes, 210
de Poisson, 453
de Schrödinger, 836
électron dans le champ magnétique, 878
états diffus, 864
dépendante du temps, 837
stationnaire, 838
de Van der Waals, 666
construction de Maxwell, 669
covolume, 666
développement du viriel, 671
gaz simple, 670, 732
loi des états correspondants, 670
point critique, 669
pression, 668
pression interne, 667
théorème des états, 732
transition de phase, 669
variable réduite, 670, 732
de conduction de la chaleur, 775
de continuité, 774, 776
forme différentielle, 199
de diffusion, 776
de réaction, 750
des fusées, 79

des oscillations, 277
différentielle, 224
du mouvement
fluide réel, 210
frottement solide, 277
oscillateurs couplés, 291
d'un électron, 1018
horaire, 4
d'un quadripôle, 1037
de Lagrange, 86
de Maxwell, 143, 502, 648
quadrilatère thermo., 649
de Hamilton, 89
Équilibre, 623
chimique, 624, 740
dans les rotations, 116
dynamique, 41
état stationnaire, 623
global, 623
mécanique, 624, 740
métastable, 729
radioactif, 943
principe zéro, 624
stabilité thermodynamique, 649
système adiabatique-isochore, 650
système adiabatique-isobare, 625, 649
système isolé, 625, 649
système isotherme-isobare, 625, 649
système isotherme-isochore, 625, 649
thermique, 624, 740
thermique local, 623
thermodynamique, 223, 624
Équipage mobile, oscillateur, 265
Équivalent
électrochimique, 559
de dose, 963
en eau, 686
erg, 675
Ericsson
cycle d', 716
Erreur
absolue, 1107
apparente, 1107
de mesure, 1107
fortuite, 1107
maximale
absolue, 1108
relative, 1108
moyenne, 1107
d'une mesure indépendante, 1108
sur la valeur moyenne, 1108
pourcentage, 1107
relative, 1107
statistique, 1107
systématique, 1107
Espace, 1
configurationnel, 1009
de configuration, 89
de phase, 89, 226
des moments, 1009
des positions, 1009
image, 346
objet, 346
Espace-temps, 142
courbe, 155
Estimation de l'efficacité du couplage, 363
Étalon Weston, 611
État d'équilibre, 623, 640, 692, 698, 699
système adiabatique-isobare, 699
système adiabatique-isochore, 699
système isolé, 699
système isotherme-isobare, 699
système isotherme-isochore, 699
État d'agrégation, 721
État de haut spin, 930
État fondamental, 918, 1009
État initial
vie moyenne, 854
État isomérique, 949
État non équilibré, 692
État stationnaire, 623, 838
État vitreux, 988
Éther, 144
Étoile, 137, 156
à neutrons, 159
double, 158
variable, 158
Étrangeté, 896
Étranglement, 718
Étrier
dans l'ouïe, 336
Euler
identité d', 739
Évaporation, 127

Événement, 1, 142
périodique, 262
Excitation
à une particule, 922
particule-trou, 922
rotationnelle, 924
vibrationnelle, 923
Exciton, 1076
de Frenkel, 1078
Exclusion
principe, 910
Exergie, 684
Exitance énergétique
spécifique, 411
Expérience
de Franck et Hertz, 857
de Millikan, 428
de Rabi, 846
de Stern et Gerlach, 846
Expansion
correction à la pression, 802
Expansion surfacique
coefficient d', 673
Expansion thermique
correction de volume, 803
Exposant polytropique, 697
Exposants critiques, 727
Exposition, 412
naturelle, 968

Facteur
d'amortissement, 542, 544
de Boltzmann, 656
de conversion
électroacoustique de référence
des récepteurs, 331
de crête, 521
de directivité, 410
de fission rapide, 950
de forme, 521
de Landé, 850, 879
de multiplication k, 950
de puissance, 531
de qualité, 542, 544, 963
de réactance, 530
de résonance, 950
de surgénération, 953
gyromagnétique, 849
relativiste, 145
Fahrenheit, 629
Faisceau
convergent, 346
diffus, 346
divergent, 346
farad, 462
Fenêtre
ovale, 337
Fermat
principe de, 345
Fermi
fonction de, 947
gaz de, 917
moment de, 917
représentation de, 947
Fermion, 845, 891
Ferrimagnétisme, 490, 1069
Ferrites, 490
propriétés magnétiques, 618
Ferroélectricité, 610
Ferromagnétique, 732
Ferromagnétisme, 1066
dépendence en température, 488
domaines de Weiss, 733
paroi de Bloch, 733
FET
autobloqué, 1043
autoconducteur, 1043
transistor, 1041
Fiabilité, 1118
Fibre
neutre, 168
Fick
loi de, 776
Figure
de Chladni, 327
de Lissajous, 288
Fil chaud, 433
Filiation radioactive, 942
Film dosimètre, 966
Films de SHTc
épitaxiaux, 1062
Filtres optiques, 412
Fission nucléaire, 938
spontanée, 938
Flambage, 177

Flexion, 163
  d'une poutre, 168
Fluage, 990
Fluence, 964
Fluide, 179, 757
  parfait, 197
  réel, 208
Fluide caloporteur
  cycle, 704
Fluidité, 209
Fluorescence, 1079
  résonante nucléaire, 949
Flux
  d'énergie, 965
  de chaleur, 758
  électrique, 457, 459
  énergétique, 409
  lumineux, 416, 424
  parasite, 498
  utile, 498
Fonction d'état
  énergie interne, 701
Fonction d'onde, 828
  coefficient de réflexion, 839
  coefficient de transmission, 839
  d'un électron libre, 1008
  normalisation, 829, 837
  parité, 832
  particule libre, 829
Fonction
  de distribution d'un plasma, 580
  de distribution de Fermi-Dirac, 1013
  de Fermi, 947
  de fonction, 1126
  de Helmholtz, 643
  exponentielle complexe, 523
  propre, 831
    de l'énergie, 838
    propre de spin, 847
    simultanée, 832
Fonctionnement
  critique, 950
  sous-critique, 950
  sur-critique, 950
Fondamentale, 305
foot, 1135
Force, 38
  centrifuge, 58
  centripète, 58
  contre-électromotrice, 548
  d'échange, 914
  d'inertie, 41
  de Bartlett, 915
  de Coriolis, 59, 115
  de couleur, 890
  de frottement, 215
  de frottement, loi de Newton, 209
  de gravitation, 134
  de Heisenberg, 915
  de Majorana, 915
  de poids, 51
  de pression, 215
  de rappel, 268
  électromotrice, 508, 560
  interne, 81
  normale, 44
  résultante, 42
  relativiste, 152
  tangentielle, 44
  tensorielle, 915
Forces
  de Van der Waals, 192
  internes, 95
Forces des vents, 1134
Forme des noyaux, 912
Formule
  d'Einstein, 571, 822
  d'Euler, 523
  de Bethe-Weizsäcker, 918
  de Blasius, 219
  de Kirschmer-Prandtl-Kármán, 219
  de Laplace, 697
  de masse, 918
  de Nernst, 560
  de Nikuradse, 219
  de Rayleigh-Jeans, 821
  de Richardson, 571
  de Sabine, 335
  de Saha, 581
  de Spitzer, 583
  de Wien, 821
Four à plasma, 592
Fourier
  loi de, 774

optique de, 399
série de, 289
Foyer
d'un miroir concave, 351
image, 348
objet, 348
virtuel, 372
Foyer ou point focal, 368
Fraction massique, 639, 663, 738, 751
Fraction molaire, 639, 663, 737
Franges de Fizeau, 392
Fréquence, 262, 294, 520, 1113
d'une onde, 294
de battement, 287
de collision, 659
de cyclotron, 878
de Debye, 320, 1005
de Langmuir, 585
de Larmor, 851
de précession, 123
de résonance, 542, 544, 546
de rotation, 31
fondamentale, 304, 305
relative, 1114
Freinage, 16
Freins à courants de Foucault, 492
Front d'ondes, plan d'onde, 293
Front de compression, 317
Front de dilatation, 317
Frottement
cinétique, 53
de Newton, 280
de Stokes, 278
de roulement, 55
interne, 208
solide, 53, 277
statique, 54
visqueux, 278
Fullerène, 734
de Buckminster, 735
oignon de Bucky, 735
tube de Bucky, 735
Fusées, 77
Fusion, 723, 735
composés minéraux, 784
variation de volume, 810
de zone, 970
Fusion nucléaire, 954
confinement inertiel, 597
confinement magnétique, 596
miroirs magnétiques, 597
pellet, 598
puissance spécifique, 595
réacteurs à, 595
variantes de compression, 598
Fusion thermonucléaire, 156
FZL, 395

Générateur, 548
de courant
idéal, 506
de quanta, 883
de tension
idéal, 506
réel, 511
idéal, 508
magnétohydrodynamique, 594
Génération
modèle standard, 885
Gâchette, 1045
Galaxie, 156
Galvanisation, 127
Galvanomètre
ballistique, 279, 428
Gamme, 340
bien tempérée, 341
chromatique, 341
diatonique, 340
Gap, 1002
Gate, 1042
Gauss
approximation de, 348
Gay-Lussac
loi de, 652
Gaz, 179
de Fermi, 1008
de phonons libres, 1006
de Van der Waals
température d'inversion, 719
simple, 670, 732
Gaz parfait, 197, 650
capacité calorifique massique, 690
constante adiabatique, 691
constante massique, 662
constante universelle, 662

enthalpie, 646
entropie, 643
énergie interne, 642
équation d'état, 653, 661, 665
indice d'adiabatique, 691
loi de l'équipartition, 658
masse volumique, 664
pression, 664
température, 664
théorie cinétique, 653
vitesse quadratique moyenne, 655
volume, 664
Gaz réel, 650, 665
covolume, 666
développement du viriel, 665
effet Joule-Thomson, 718
équation de Van der Waals, 666
pression interne, 667
Geiger-Müller
compteur, 966
Geiger-Nutall
loi, 945
Gennes (Pierre-Gilles de), 194
Germes de condensation, 747
Getter, 187
Gibbs
règle des phases, 740
règle des phases étendue, 752
Gibbs-Duhem
équation de, 739
Glissement, 98
Gluon, 888, 889
Goutte liquide, 918
Grêle, 747
Gradient, 199
Gradient de vitesse, 208
Grain, 1135
Grandeur
alternative, 519
fondamentale, 1129
mesurable
continue, 1104
discrète, 1104
photométrique, 407
physique, 1104
sans dimension, 324, 1105
spectrale, 412
thermodynamique, 625
Grandissement, 352
Graphe du déplacement, 13
Graphite, 734
Gravitation, 154
Graviton, 886, 889
gray, 962
Grazing, 936
Grille écran, 577
Grossissement, 380
commerial d'une loupe, 381
d'un instrument, 380
d'une lunette astronomique, 382
Groupe d'ondes, 306
GSI, 937
GTO, 1046
Guide de lumière
coefficient de couplage, 362
condition aux limites, 359
couplage de la lumière au, 362
single-mode, 360
Gyration, 587
Gyroscope, 119

Hadron, 894, 896
Hallogénure, 1089
Hamiltonien, 88, 877
Harmonique, 304, 341
Hassium, 882, 937
Haut-parleur, 328
Hauteur de perte de charge, 213
Hauteur de refoulement, 188
Hauteur de ton, 341
Helmholtz
fonction de, 643
Hélicité, 904
Hélium II, 737
Hémisphères de Magdeburg, 186
Henry, 494
pression d'un gaz, 744
Hess
théorème de, 646
heure, 6
Hologramme, 396
généré par ordinateur, 397
Homogénéité
de l'espace, 902
du temps, 902

Horloge, 6
horsepower, 1135
Huiles pour transformateur
    propriétés électriques, 610
Humide
    vapeur, 747
Humidification, 746
Humidité absolue, 746
Humidité atmosphérique
    relative, 746
hundredweight, 1135
Hydratation, 556
Hydrocarbures, 1088
Hydrodynamique, 179, 196
Hydrogène
    spectre de raies, 853
Hydrostatique, 179
Hygromètre, 746
    à absorption, 746
    à aspiration, 746
    à condensation, 746
    électronique, 746
    psychromètre, 746
Hypéron, 896
Hypéron Λ^0, 897
Hypernoyaux, 937
Hyperson, 320, 336
Hypothèse ergodique, 232
Hypothèse quantique de Planck, 826
Hystérésis, 1067
    de commutation, 1056
    de la déformation plastique, 174
Hz, 262

IC, 1047
Identité d'Euler, 739
IGBT, 1047
Îlot de stabilité, 937
Image
    miroir, 903
    optique, 346
    réelle, 346
    virtuelle, 346
Implantation ionique, 128
Imprimante à jet d'encre, 132
Impulsion, 39
    d'amorçage, 1046
    de Fermi, 917
    généralisée, 88
Impuretés, 984
    interstitielles, 984
    substitutielles, 984
inch, 1135
Inclinaison, 471
Indice
    d'adiabatique, 697
    d'absorption acoustique, 423
    de dissipation du son, 333
    de réfraction, 424
    de Miller, 975
    relatif, 355
Inductance, 494, 535
    association en parallèle, 495
    association en série, 494
    ligne bifilaire, 495
    ligne conductrice, 495
    mutuelle, 498
    solénoïde, 496
Induction, 491
    critique magnétique, 1059
    de saturation, 488
    magnétique, 471
    rémanente, 488
    transformateur, 493
Induit, 550
    bobinage, 548
Influence, 427
Infrason, 320
Insolation
    par contact, 128, 129
    par projection, 129
Insonorisation, 334
    dans l'air, 335
Instrument à bobine mobile, 433
Insulated-Gate-Bipolar-Thyristor, 1047
Intégrale
    d'échange, 1066
    définie, 1126
    indéfinie, 1126
Intégrateur, 1053
    de somme, 1054
Intégration par parties, 1127
Intensité, 301
    acoustique
        de référence, 324, 338

d'un ton, 341
de rayonnement, 409
énergétique, 409
lumineuse, 383, 416
sonore, 421
Interaction
d'échange, 982
électrofaible, 889
électromagnétique, 886
forte, 888
mécanisme de, 889
gravitationnelle, 886
rayon d', 925
Interférence, 300
constructive, 302, 391
destructive, 302, 392
différence de marche, 391
sur les lames minces, 390
Interférométrie, 393
Interféromètre de Michelson, 144, 393
Interféromètre, 7
Interface de phase, 623
Interne
pression, 667
Interprétation microscopique
pression, 653
température, 654
Interstitiel, 985
Intervalle, 340
de fréquence, 1002
de temps, 6
Invariance par inversion du temps, 905
Inverse
cycle, 708
Inversion, 883
température d', 719
de population, 883, 1080
Ion, 852
Ion Beam Etching, 129
Ionisation, 555, 957
spécifique, 959
Ions, 555
Irréversibilité
d'un processus, 692
Irradiance, 411
Irrotationel
champ électrique, 446
Isentrope, 697
Isentropique
processus, 696
ISO, 1105
Isobare, 694, 909
processus, 694
Isochore, 695
processus, 695
Isoclines, 471
Isogones, 471
Isolant, 427, 1008, 1016
propriétés électriques, 608
thermique, 797
Isomère de fission, 938
Isospin, 909
Isotherme, 668, 705
critique, 669, 728, 730
processus, 693
Isotone, 909
Isotope, 909
effets, 909
Isotropie de l'espace, 903
ITS-90, 629
IUPAP, 1105

Jauge de Penning, 635
Jauge de pression de Mc Leod, 652
Jean-Sébastien Bach, 341
JET, 597, 956
Jet hadronique, 890
Jeu de boules, 1114
JFET
transistor, 1042
Joints de grains
angles, 987
Joule, 61
cycle de, 716
Joule-Thomson
coefficient de, 718
effet, 718
jour, 6
intercalaire, 7

Kaon, 896
kelvin, 1129
échelle de température, 631
température, 628
Kerma, 965

kilogrammètre par seconde, 36
kilogramme, 34, 1129
kilogramme × mètre^2, 108
kilogramme étalon, 34
kilogramme par mètre-cube, 35
kilogramme poids, 39
kilomètre par heure, 13
Kirchhoff
  loi, 773
Kurie
  droite de, 947

La du diapason (la_3, a^1), 341
Lacune double, 984
Lacunes, 983
  électroniques, 1019
Lagrangien, 85
Lamb-Shift, 861
Lame
  d'onde, 404
  demi-onde, 404
  quart d'onde, 404
  mince
    interférences sur, 390
Lampe à arc au charbon, 569
  à vapeur de mercure, 569
Lancer vertical, 28
Laplace
  formule de, 697
Laplacien, 199, 200
Laser, 389, 883
  hélium-néon, 884
  modes d'oscillation longitudinale, 1080
  types de, 425
Lawson
  critère de, 956
LDR, 441
Le Chatelier
  loi de, 648
LED, 1032
Lentille, 367
  convergente, 367
  de Fresnel, 395
  divergente, 367
  épaisse, 368
  infiniment mince, 374
  mince, 374
  sphérique, 367, 369
Lepton, 885, 893
Levier, 102
  deuxième genre, 103
  premier genre, 103
  oblique, 103
LHC, 901
Liaison
  covalente, 982
  de Van der Waals, 983
  entre solides rigides, 101
  homopolaire, 982
  intermétallique, 994
  ionique, 980
  métallique, 981
  parallèle
    de ressorts, 53
  série
    de ressorts, 53
  rigide, 101
Liberté asymptotique, 890
Libre parcours moyen, 658, 761, 777
  des phonons, 1006
Ligne
  d'absorption, 157
  d'action, 95
  d'univers, 146
  de champ magnétique, 470
  de choc, 72
  de courant, 196, 436
  de dislocation, 986
  de saturation
    de Mollier, 749
  de stabilité, 918
Limaçon, 337
Limite d'élasticité, 249
Limite de phase, 721, 739
Linde
  procédé de liquéfaction, 719
Liquéfaction, 722, 723
  procédé Claude, 720
  procédé Linde, 719
Liquide, 179
  surchauffe, 731
Liste primordiale, 1112
Lithographie, 128
  à Rayons X, 129
  par faisceau d'électrons, 129

Logarithme coulombien, 583
Loi
- barométrique, 664
- d'absorption, 413
- d'action de masse, 580, 648, 752
- d'Ampère, 433, 479
- de Bernoulli
  - fluide visqueux, 213
- de Biot-Savart, 480
- de Boyle - Mariotte, 651
- de Coulomb, 428
- de Curie, 486, 1065
- de Curie-Weiss, 488, 1067
- de Dalton, 738
- de Debye en T^3, 1006
- de l'équipartition, 658
- des états correspondants, 670
- de Faraday
  - première, 558
  - deuxième, 559
- de Fick, 776
- de force linéaire, 266
- de Fourier, 774
- de Gay-Lussac, 652
- de Geiger-Nutall, 945
- de Henry, 744
- de Hooke, 52, 164, 266, 989
- de Kepler
  - première, 136
  - deuxième, 136
  - troisième, 137
- de Kirchhoff, 414, 773
  - en alternatif, 531
  - première, 508
  - deuxième, 508
- de Lambert, 410
- de Le Chatelier, 648
- de Lenz, 493
- des leviers, 103
- des mailles, 508
  - dans un circuit magnétique, 477
  - en complexe, 532
- de Neéls's, 489
- de Newton, 209, 990
  - première, 37
  - deuxième, 38
  - troisième, 40
- des nœuds, 508
  - dans un circuit magnétique, 478
  - en complexe, 531
- d'Ohm
  - transfert de chaleur, 765
- de Planck, 580, 820
- de Poiseuille, 211
- de Raoult, 742
- de réflexion, 76, 309, 350
- de similitude, 217
- de Stefan-Boltzmann, 771, 822
- de Stokes, 213
- des vases communiquants, 183
- de Wiedemann et Franz, 1008
- du déplacement de Wien, 821
- en $1/v$, 932

Longueur
- d'atténuation, 413
- d'onde, 294
- d'onde de Compton, 825
- d'onde de de Broglie, 827
- d'onde des ultrasons, 336
- de cohérence, 300, 390, 1061
  - table, 425
- du tube, tirage, 382
- synchrone, 272

Loschmidt
- nombre de, 637

Loupe, 380
lumen, 416
Lumière
- diffuse, 385
- énergie du rayonnement, 408
- polarisation de la, 402

Luminance
- énergétique, 410
- visuelle, 417

Luminescence, 1079
Luminosité, 901
Lune terrestre, 139
Lunette
- astronomique, 382, 383
- de Galilée, 384
- de Kepler, 383
- terrestre, 383

lux, 417
Ly, 139

Mösbauer
effet, 949
Mécanique
équilibre, 624
Mécanique quantique, 826
oscillateur harmonique, 843
Mélange
air-vapeur, 745
de configurations, 922
de gaz, 663
conductivité thermique, 762
constante massique, 663
fraction massique, 663
fraction molaire, 639, 663
masse molaire, 638
eutectique, 994
réfrigérant, 717
règle de Richmann, 755
température, 755
Méson, 896
K^0, 897
K, 896
pseudoscalaire, 897
vectoriel, 898
Métal, 1016
noble, 56
de transition, 9821
Métallique
phase, 734
Météorite, 140
Méthode
de Debye et Scherrer, 979
de Laue, 979
du cristal tournant, 979
mètre, 7, 1129
mètre étalon, 7
mètre cube, 8
mètre par (seconde)^2, 16
mètre par seconde, 13
Machine
à vapeur, 712
ditherme, 704
électrique, 547
réfrigérante, 710
thermique
motrice, 708
opératrice, 709
température de mélange, 757
Macro-état, 640
Magnétisme, 1063
transition de phase, 732
Magnétisme du spin nucléaire, 851
Magnétodynamique des fluides, 589
Magnéton
de Bohr, 849
nucléaire, 910
Magnétorotation,, 403
Magnétostatique, 468
Magnitude apparente *m*, 157
Maille, 508
Maille élémentaire
primitive, 972
Manomètre
à liquide, 635
à mercure à air libre, 183
de Bourdon, 180
de McLeod, 633
Mariotte
loi de, 651
Marteau
dans l'ouïe, 336
Maser, 883
Masse
d'inertie, 34
de Planck, 908
effective, 878 1018
gravitationnelle, 34, 51
relativiste, 151, 153
moléculaire moyenne, 991
Masse molaire, 638
composé, 638
distribution de la, 990
gaz, 791
mélange, 638
Masse volumique, 35, 91
air humide, 748
gaz, 792
gaz parfait, 664
table, 242
Matérialisation, 154, 960
Matériau
composite, 993
chargé en poudre, 993
stratifié, 993

insonorisant, 332
magnétiquement doux, 487
magnétiquement dur, 487
nanocristallin, 989
pour contacts, 611
Matière
fissile, 952
nucléaire, 917
résonante, 937
Matrices de Pauli, 847
Maxima d'intensité, 313
Maxwell
construction de, 669, 729
équations de, 475, 502, 648
Maxwell-Boltzmann
distribution de, 656
Mayer
relation de, 690, 697
Meissner
effet, 736
Meitnérium, 882, 937
Membrane, 327
basilaire, 337
vibrante, 326
Mesure, 1104
de courant, 514
de distances, 139
Micro obturateur, 132
Micro-état, 640
Micro-positionneur, 132
Microinterrupteur, microswitches, 132
Micromécanique, 127
Micromoteur, 132
Microphone, 130
électrodynamique, 328
Microscope, 381
à émission de champ, 572
à balayage à effet tunnel, 572
à effet tunnel, 840
électronique, 827
mile, 1135
Minima d'intensité, 312
minute, 6
Miroir, 349
concave, 350
convexe, 353
de Schmidt, 384
parabolique, 353
sphérique, 353
Mobilité des ions, 556
Modérateur, 951
Modèle
à particules indépendantes, 880
collectif, 923
des couches, 919
du gaz de Fermi, 917
de la goutte liquide, 917
de Debye, 1005
d'Einstein, 1004
de Kronig et Penney, 1014
de Maxwell, 992
de supersymétrie, 907
optique, 933
standard, 885
Mode
de vibration, 327
propre, 290
Modulateur de lumière, 132
Modulation, 314
Modulation d'impulsion, 315
Module
de compressibilité, 167
de compression, 672
d'élasticité, 164, 1002
de rigidité, 172
table, 249
d'Young, 164
mol, 555
Molécule
excitation de vibrations, 874
polaire, 556
spectre de vibrations, 874
spectre de rotation, 875
Molarité, 751
Mole, 555, 1129
Mollier
diagramme de, 748
Moment
angulaire, 113
centrifuge, 121
cinétique, 113, 926
d'un point matériel, 46
conjugué, 88
d'un solide rigide, 115

total, 82, 83, 115, 848
d'un système de points matériels, 83
d'une force, 47, 48, 96
d'inertie, 108, 657
d'un point matériel, 109
d'un solide rigide, 109
détermination, 272
de section droite, 169
polaire, 173
de section droite, 109
de déplacement, 98
de renversement, 100
dipolaire, 448
magnétique permanent, 732
dipolaire magnétique, 648
magnétique
champ macroscopique, 733
des porteurs, 733
du neutron, 911
du proton, 911
de spin, 849
orbital, 849
résistant
à la flexion, 171
à la torsions, 172
Moments d'inertie principaux, 121
Monochromateur, 401
Monocristal, 970
Monomère, 990
Monopole magnétique, 908
Montage
base commune, 1040
collecteur commun, 1040
émetteur commun, 1037
parallèle, 510
résistance et condensateur, 538
résistance et inductance, 539
potentiométrique, 442
série, 509
résistance et condensateur, 537
résistance et inductance, 540
Montages élémentaires, 1036
MOSFET, 1043
Moteur, 548
à air chaud, 711
à champ tournant, 551
à courant alternatif, 551
à courant continu
excitation compound, 551
vitesse de rotation, 550
à excitation shunt, 550
asynchrone, 551
de Otto, 715
de Stirling, 711
Diesel, 715
emballement, 550
synchrone, 551
universel, 551
Motrice
machine thermique, 708
Mott
diffusionde, 931
Moufle, 105
Mouvement, 1
accéléré, 1
circulaire, 24, 29
curviligne, 29
d'un projectile, 27
perpétuel
deuxième espèce, 703
première espèce, 701
rectiligne uniforme, 18
rectiligne uniformément accéléré, 19
uniforme, 1
Moyenne
géométrique, 1110
harmonique, 1110
quadratique, 1110
vitesse, 659, 761
des Temps de Bon Fonctionnement, 1118
MTBF, 1118
Multifragmentation, 937
Multiplicateur à électrons secondaires, 572
Multiplicité de neutrons, 950

Nématique
cristal, 736
Neutrino, 946
de Majorana, 908
massif, 908
Neutron, 909, 1097
de fission, 938
libre, 887
prompt, 938
retardé, 938, 951

thermique, 951
newton, 39
newton mètre, 47, 96, 113
newton par mètre^2, 161
Niveau
d'énergie
d'un exciton, 1077
multiplet, 868
multiplicité, 868
d'intensité acoustique, 324
d'intensité des sons, 338
de Fermi, 1009
de pression acoustique, 324
de puissance acoustique, 324
Nivellement
barométrique, 185
international, 186
nœud, 508
Nœuds de vibration, 303
Nombre
baryonique, 895
d'Abbe, 365
d'Avogadro, 555, 637
d'occupation, 1017
d'onde, 294
d'ouverture ou diaphragme, 378
de charge, 852
du noyau, 556
de coordination, 975
de Froude, 218
de Loschmidt, 637
de Mach, 308
de masse, 909
de neutrons, 909
de particules, 636
de Reynolds, 214, 217
critique, 217
leptonique, 894
magique, 921
quantique, 920
magnétique, 832, 863
orbital, 863
principal, 857
radial, 863
Nomenclature
images optiques, 349
Normale, 22, 349, 366
Normalité, 751
Norme, 1120
Norme d'un vecteur, 1121
Nova, 158
Noyau
atomique, 909
composé, 931
d'hydrogène, 855
doublement magique, 922
magique, 921
superdéformé, 935
NTC, 441
Nuages, 747
Nucléon, 909
Numéro atomique, 852, 909
Nutation, 124

Objectif, 381
Objets
non vieillissants, 1117
vieillissants, 1118
Observable, 830
Occupation, 883
Octuplet de spin 1/2, 899
Oculaire, 381, 382
Oeil, 379
au repos, 379
Ohm, 437
Ombre, 311
Onde, 293
balistique, 22
d'électrons
stationnaire, 302, 1015
de choc, 220, 221, 293, 308
de type p, 929
de type s, 929
élastique, 999
dispersion, 999
électromagnétique, 503
longitudinale, 298, 317
non linéaire, 293
partielle, 929
vecteur propagation, 294
vectorielle, 298
Ondes, 262
cohérentes, 300
d'Alfvèn, 590
de Mach, 308

de gravitation, 315
de Langmuir, 589
de Mach, 308
de matière, 827
de surface, 315
du plasma, 589
du plasma-électrons, 589
du plasma-ions, 590
électromagnétiques
domaine de fréquence, 343
harmoniques, 293
libres, 293
longitudinales, 317
magnétohydrodynamiques, 590
stationnaires, 302, 1015
transversales, 317
radio, 545
sonores, 220, 317
Opérateur
de charge, 910
de l'évolution temporelle, 835
de la quantité de mouvement, 831
des coordonnées, 831
de Hamilton, 835
électron dans le champ magnétique, 877
d'isospin, 910
de Laplace
partie angulaire, 831
du moment cinétique, 831
d'une observable, 830
de spin, 847
Nabla, 200
parité, 903
représentation matricielle, 834
valeurs propres, 833
EC, 905
ET, 906
Opérateurs
relations de commutation, 835
Opératrice
machine thermique, 709
Opalescence critique, 727
Optique, 343
anisotropie, 736
classique, 344
électronique, optique ionique, 344
géométrique, 344
intégrée, 363
ondulatoire, 344
quantique, 344
Optiquement dense, 410
Optoélectronique, 1079
Ordre d'orientation, 733
Ordre-désordre
transition de phase, 733
Oreille
interne, 337
moyenne, 336
Organe de Corti, 337
Orthohélium, 869
Oscillateur, 262
à deux dimensions, 288
de Hertz, 545
harmonique
à deux dimensions, 288
énergie, 843
fonctions propres, 843
phonon, 845
linéaire, 545
Oscillation, 262
amortie, 67, 264, 276
des neutrinos, 908
de plasma, 585
d'un ressort, 67
électromagnétique, 546
forcée, 264
amortie, 264
harmonique, 263, 341
libre, 264
libre non amortie, 265
pendule liquide, 275
Osmose, 744
Otto
cycle de, 714
Ouïe, 336
ounce, 1135
Ouverture
numérique, 389
relative, 378
Oxydation, 1048

Paire
de Cooper, 736, 1058
de Frenkel, 984
Pairing, 918

Paraélectricité, 1074
Parabole, 29
Paradoxe
hydrodynamique, 206
hydrostatique, 182
Parahélium, 869
Parallaxe, 8, 139
Parallaxe-seconde (parsec), 139
Paramètre
de diffusion, 810
de corps dissous, 812
de solvant, 812
de Ginsburg-Landau, 1061
d'impact, 929
d'ordre, 733
extérieur, 234
Paramagnétique, 732, 1064
Paramagnétisme, 486, 882, 1065
électrons de conduction, 1065
Parcours
de particules α, 1098
extrapolé, 957
moyen, 957
Parité, 832, 863, 903
Paroi
de Bloch, 733
magnétique, 955
semi-perméable, 744
parsec, 139
Particule
ionisante, 956
libre
fonction d'onde, 829
virtuelle, 888
Partie
imaginaire, 522
réelle, 522
Pascal, 180, 634
Pascal×seconde, 209
Pavillon de l'oreille, 336
Pénétrabilité, 945
Périhélie, 136
Période, 31, 262, 294, 520, 941
biologique, 967
des battements, 287
d'une onde, 294
Périodicité
spatiale, 294
temporelle, 294
Périodique, 262
Pendule
élastique, 265
pesant composé, 271
physique, 271
simple, 6, 267, 268
Pentode, 577
Percussion, 39
Perméabilité, 484
aux gaz de quelques verres au Quartz, 612
relative, 484
Permittivité, 459
du vide, 429
relative, 605
de céramiques, 607
de verres, 607
Perovskite, 1061
Perte
de charge, 212
d'énergie, 77
dans les plasmas de fusion, 596
diélectrique, 1074
par Hysteresis, 500
par rayonnement électromagnétique, 546
Perturbation, 265
Petite planète, 140
Phénomène
de transport, 658
de Venturi, 205
periodique, 5
Phase, 263, 623, 721, 739
à l'origine, 520
de l'onde, 293
équilibre, 728
métallique, 734
région de coexistence, 727
Phases
cholestériques, 997
nématiques, 997
smectiques, 997
phone, 338
Phonon, 1000
acoustique, 1001, 1002
optique, 1002
Phonons

longitudinaux, 1000
optiques, 1001
transversaux, 1001
Phosphore, 1079
Phosphorescence, 1079
Photoélectron, 822
Photoémission, 571
Photoémulsion, 408
Photoablation, 130
Photocathode, 1096
Photoconductivité, 1078
Photodiode, 408, 1030
Photolithographie, 128, 1048
Photométrie, 407
énergétique, 408
et distance, 411
visuelle, 408
Photomultiplicateur, 573
Photon, 819, 856, 886, 889
absorption par un atome, 882
émission spontanée, 883
Photorésistance, 441, 572
Physical Vapor Deposition, 127
Pièges, 1079
Pic de Bragg, 957
Piezoélectricité, 1075
Pile à combustible, 562
Pile sèche, 562
Pincement radial, 594
Pincement z, 593
Plan
de choc, 72
de glissement, 985
de section principale, 404
focal, 368
incliné, 45
osculateur, 22
principal
objet, 368
principal, 348
image, 368
réticulaire, 975
Plancher
flottant, 335
Plaquette, 1047
Plasma, 579, 955
coefficient d'absorption, effectif, 586
conductivité électrique, 582
conductivité thermique, 584
déviation de l'équilibre, 582
degré d'ionisation, 579
distribution de vitesses de Maxwell, 581
échange de chaleur de réaction, 584
émittance, 586
énergie, 582
équilibre thermodynamique local, 582
équilibre thermodynamique total, 580
faiblement ionisé, 580, 583
fonctions de distribution, 580
fortement ionisé, 580
idéal, 585
non idéal, 585
production, 591
production d'énergie, 594
quasineutralité, 579
réel, 582
radiance spectrale, 586
totalement ionisé, 583
Plasma quark-gluon, 937
Plasticité, 987, 991
Poids, 91, 135
Point
critique, 669, 730, 791
d'ébullition, 722
céramiques, 789
composés org., 786
des éléments, 783
d'appui, 101
d'univers, 146
de Curie, 732
de fonctionnement, 1036
de fusion, 723
alliages, 789
céramiques, 789
composés org., 786, 788
des éléments, 783
de référence, 629, 782
de rosée, 746
de rupture, 175
fixe, 231, 235
image, 346
virtuel, 346
matériel, 11, 34
objet, 346

triple, 724, 741, 791
Points principaux, 348
Polarisabilité, 880, 1071
d'orientation, 1074
Polarisation, 299, 427, 1070
analyseur, 402
circulaire, 300, 402
de déformation, 1070
de déplacement, 460
de Debye, 1070
d'orientation, 460, 1070
électrolytique, 561
électronique, 1073
elliptique, 299, 402
ionique, 1073
linéaire, 299, 402
longitudinale, 299
lumière, 402
magnétique, 485
totale, 1074
transversale, 299
Polariseur, 402
par réflexion, 403
Pôle nord
magnétique, 469
Pôle sud
magnétique, 469
Polygone
de sustentation, 100
Polymère, 970, 990
propriétés électriques, 607
Polytropique
processus, 697
Pompe, 186
aspirante, 189
à diffusion, 206
à chaleur, 704
à diffusion, 187
à engrenage, 187
à membrane, 187
à palettes, 187
à piston, 186
à vide, 180
centrifuge, 187
micromécanique, 132
moléculaire, 187
Pont de Wheatstone, 516
Ponts redresseurs, 1029
Population, 883
Portée, 29
Portance, 206, 207
Porteurs majoritaires, 1023
Porteuse auxiliaire, 332
Porteuse stéréo, 332
Position, 1
de repos, 263, 265
Positron, 427, 894
Postulats de Bohr, 856
Potentiel
barreau uniformément chargé, 456
central
dégénérescence de niveaux, 863
charge ponctuelle, 454
chimique, 622, 677, 891
cœur dur, 915
cylindre creux chargé, 455
de courant, 199
de Lennard-Jones, 874, 983
de Wigner, 914
de Yukawa, 889, 916
des vitesses, 199
dipôle, 454
disruptif, 569
distribution sphérique de charges, 455
électrique, 452
explosif, 569
métal-solution, 560
moyen, 919
normal, 560
optique, 933
plan uniformément chargé, 456
sphère creuse chargée, 454
thermodynamique, 641
énergie, 641
énergie libre, 643
équations de Maxwell, 648
enthalpie, 644
enthalpie libre, 647
entropie, 642
Poulie, 104
fixe, 105
libre, 105
pound, 1135
Pourcent

en masse, 751
en volume, 751
Poussée, 179
aérodynamique, 207
d'Archimède, 190
de la fusée, 78
Pouvoir
calorifique, 681
inférieur, 681
massique, 681, 807
supérieur, 682
volumétrique, 682
d'arrêt, 958
massique, 959
pour électrons, 959
de résolution, 388
rotatoire magnétique, 403
séparateur, 383
d'un microscope, 389
d'un réseau, 388
prisme, 388
Précession, 122
de Larmor, 851
Préfixe
décimal, 1106
Préfixes
table, 1129
Première vitesse cosmique, 140
Premier principe de la thermodynamique, 700
Presse hydraulique, 181
Pression, 179, 633
à l'intérieur d'une goutte, 194
acoustique
efficace, 319
acoustique de référence, 322, 324
anomalie de l'eau, 674
atmosphérique, 180
normale, 634
compressibilité, 672
correction de, 800, 801
critique, 669, 731
de radiation, 825
de vapeur, 729, 741
abaissement du point de fusion, 743
eau, 806
enthalpie massique, 807
loi de Henry, 744
loi de Raoult, 742
point critique, 731
de vapeur saturée, 805
de vapeur saturante, 723
dynamique, 201
gaz de Van der Waals, 668
gaz parfait, 664
hydrostatique, 163, 182, 201
interne, 667, 791
interprétation microscopique, 653
isotrope, 163
magnétique, 589
manomètre de McLeod, 634
normale, 635
de l'atmosphère, 186
osmotique, 745
partielle, 738, 744
statique, 201
totale, 738
Primitive, 1126
Principe
d'action et de réaction, 40
d'Archimède, 190
d'exclusion de Pauli, 846, 866
d'Huygens, 297
d'inertie, 37
de correspondance, 845
de d'Alembert, 41
de Hamilton, 87
de la relativité
de la mécanique classique, 143
générale, 155
restreinte, 144
de Pauli, 910
de réaction, 77
de superposition, 224, 297
des ondes, 297
de Venturi, 203
fondamental de la dynamique, 38
deuxième, 641
troisième, 633
zéro, 624, 699
Prisme, 364
achromatique, 400
de Nicol, 406
Probabilité
de défaillances, 1118

de fission, 951
de non-résonance, 951
de présence, 829
Problème
à plusieurs corps, 80
Procédé Claude, 720
Procédé Linde, 719
Procédé spin-on, 128
Processus, 692
adiabatique, 696
coulombien, 936
de diffusion, 777
endoergique, 648
endothermique, 647
exoergique, 648
exothermique, 647
irréversible, 692
entropie, 703
isentropique, 696
isobare, 694
isochore, 695
isotherme, 693
polytropique, 697
quasi réversible, 692
réversible, 692, 756
entropie, 703
Production
des basses températures, 717
de paires, 901
d'ultrasons, 336
Produit, 750, 1125
de fission, 938
de fonctions, 1125
externe, 1123
mixte, 1124
scalaire, 44, 1122
vectoriel, 32, 1123
Profondeur
de pénétration de London, 1061
optique, 586
Projectile, 28
Propagation des erreurs, 1108
règle de Gauss, 1108
Proton, 427, 855, 909
Pseudocycle, 713
Psychrométrie, 805
Psychromètre, 746
PTC, 440
Puissance, 68, 371, 1126
acoustique de référence, 324
active, 530, 531
complexe, 531
d'une pompe, 188
dissipée, 513
effective, 69, 530
en courant alternatif, 530
énergétique, 409
frigorifique
pompe à chaleur, 709
réactive, 530, 531
utile, 513
Puits, 200
du champ électrique, 427
Pulsar, 158
Pulsation, 263, 264, 294, 520
des modes propres, 292
d'une onde, 294
Pulvérisateur, 206
Pulvérisation ionique, sputtering, 127
Punctum proximum, 379
Pupille
d'entrée, 375
de sortie, 375
Pyromètre, 630
spectral, 631

Q de réaction, 926
Quadrilatère thermodynamique, 649
Quadripôle, 506, 1037
Quantification spatiale, 866
Quantile, 1109
Quantité
conservée, 699
de matière, 637, 638
de mouvement, 36
relativiste, 152
de mouvement d'un photon, 819, 826
de mouvement de Fermi, **1010**
de mouvement totale, 82
de vapeur, 747
Quantum, 826
d'action, 828
d'action de Planck, 819
de champ, 886, 889
Quark, 885, 888, 894

Quarkonium, 898
Quasar, 155
Quasi-impulsion, 1000
Quasi-réversibilité
    d'un processus, 692

radian par (seconde)^2, 32
radian par seconde, 30
Radiance, 410
    spectrale
        particules, 964
Radio-isotope, 939
Radioélément, 939
Radioactivité, 939
    artificielle, 939
    naturelle, 939
    types de, 940
Radiodiffusion
    stéréophonique, 332
Radionucléide, 939
Radiotoxicité, 967
Raie spectrale
    largeur naturelle, 854
Raies de Fraunhofer, 425
Rankine, 629
Raoult
    loi de, 742
Rapport
    d'ouverture, 383
    de deux fonctions, 1126
    de population, 883
    des capacités calorifiques, 691
Ray-Tracing, 386
Rayon
    de l'atome, 852
    de Bohr, 857
        orbite, 857
    de courbure, 26
    de l'atome, 852
    de voie, 925
    focal, 351
    extraordinaire, 404
    nucléaire, 912
    ordinaire, 404
    parallèle, 351
Rayonnement
    atomique, 1091
    cosmique, 967
    de freinage, 872
    de plasma, 586
    du corps noir, 820
    fossile, 156
    terrestre, 967
    thermique, 757, 771, 819
        absorption, 772
        conservation de l'énergie, 773
        constante solaire, 771
        émissivité, 771
        loi de Stefan-Boltzmann, 771
        réflection, 773
        transmission, 773
Rayons
    canaux, 578
    cathodiques, 577
    ioniques, 1091
    méridionaux, 368
    paraxiaux, 348
Rayons X
    caractéristiques, 871, 1097
    coefficient d'absorption linéaire, 873
    coin d'absorption, 873
    contrôle de qualité, 872
    ionisation par, 873
    loi de Moseley, 872
    par dissociation, 873
    rayonnement de fluorescence, 871
    rayonnement primaire, 871
    série K, 871
REB
    réacteur, 953
Recombinaison, 566, 1076
Redresseur, 1028
Refroidissement évaporatif, 893
Registre, 341
Relation énergie-quantité de mouvement
    particules relativistes, 154
Relation
    de Barkhausen, 576
    de Bennett, 593
    de Bethe-Bloch, 958
    de Clapeyron, 741
    de commutation des opérateurs, 835
        de spin, 847
        position et quantité de mouvement, 835
    de conjugaison, 352

de dispersion, 836
d'Eccles, 591
d'incertitude de Heisenberg, 828
de Mayer, 690, 697
de Newton, 371
Relativité
générale, 142, 154
restreinte, 141
de la simultanéité, 147
Relaxation, 993
Rendement, 69, 675, 683
acoustique de référence, 329
cycle de Stirling, 711
d'une pompe, 189
électroacoustique, 329
global, 69
machine réfrigérante, 710
pompe à chaleur, 709
thermique, 707
REP
réacteur, 952
Représentation
de Bernoulli, 232
de Fermi, 947
de Heisenberg, 836
de Schrödinger, 835
matricielle
d'opérateurs, 834
Ressort
à lames, 52
hélicoïdal, 52
spiral, 52
Restitution stéréophonique, 332
Retard
à la condensation, 731
à la vaporisation, 731
Retombée atomique, 968
Réacteur
à eau bouillante, 953
à eau sous pression, 952
à neutrons rapides, 952
à neutrons thermiques, 952
surgénérateur, 953
surgénération, 953
Réactif, 750
Réaction, 101, 1055
chimique, 749
de capture, 934
de fusion, 937
nucléaire, 1098
de stripping, 934
directe, 934
en chaîne, 950
endoergique, 648, 927
endothermique, 647
exoergique, 648, 926
exothermique, 647
intermédiaire, 934
nucléaire, 925
oxygène-hydrogène, 647
par ions lourds, 935
profondément inélastique, 936
quasiélastique, 936
Réactivité, 951
Réaumur, 628
Réduite
chaleur, 707
Référentiel, 1
accéléré, 40
d'inertie, 37
Réflectivité, 773
Réflexion
à une extrémité fixe, 310
à une extrémité libre, 310
diffuse, 385
rayonnement, 773
totale, 357
angle limite de, 357, 359
sélective, 997
Réfraction, 308, 354
des ondes, 389
Réfrigérateur, 704
Régénérateurs, 712
Régime
d'appauvrissement, 1043
d'enrichissement, 1043
permanent, 196
Région
de coexistence, 727
de coexistence de phases, 669
de proportionnalité
caractéristique courant-tension, 567
de recombinaison
caractéristique courant-tension, 567

de saturation, 1051
caractéristique courant-tension, 567
Régulateur centrifuge, 59
Rémanence, 488
Réseau
de Bravais, 973
simple, 973
de points, 971
optique, 132, 401
par réflexion, 401
par transmission, 401
spatial, 971
zoné, 394
Réseau cristallin, 971
à faces centrées, 973
axes d'un, 972
base, 971
centré, 973
constantes d'un, 972
maille élémentaire, 972
système cristallin, 973
translation, 972
vecteurs de base, 972
Résistance, 1049
ajustable, 441
d'Émetteur, 1036
d'entrée
différentielle, 1037
de Base, 1036
de Collecteur, 1036
de sortie différentielle, 1037
dépendante de la tension, 441
d'un fil, 438
électrique, 43
interne d'un tube, 5736
linéaire, 437
magnétique, 477, 478, 497
non-linéaire, 437
ohmique, 437, 533
spécifique, 438
variable, 441
Résistance thermique, 764
coefficient de transfert, 768
liaison série, 766
loi d'Ohm, 765
tube, 769
Résistivité, 601, 602
d'isolants, 608
Résonance
de spin, 879
géante, 934
parallèle, 543
paramagnétique, 879
série, 542
Résonateur optique, 884
Résultat de mesure, 1107
Réversibilité
d'un processus, 692, 756
Règle
de Cauchy, 1110
de Dulong et Petit, 691, 1003
de la main droite, 31
de sélection, 865
pour les rotations, 876
pour les vibrations, 876
de Steiner, 110
des phases de Gibbs, 740
étendue, 752
des trois doigts, 472
de dérivation, 1125
d'intégration, 1127
de Hund, 869
RHIC, 901
Richmann
règle des mélanges, 755
RMN, 911
Rotateur
quantique, 875
Rotation, 29
autour d'un axe fixe, 108, 113
Rotationnel, 200
Rotor, 548, 550
Roue à eau, 188
Roulement, 56
Rugosité
relative, 219
Rutherford
diffusion, 930

Séparation des charges, 1070
Série
de Balmer, 858
de Brackett, 858
de Fourier, 289
représentation complexe, 290

de Lyman, 858
de mesure, 1107
de Paschen, 858
de Pfund, 858
Série des tensions
électrochimiques, 560, 603
thermoélectriques, 603
Satellite artificiel, 140
Saturation, 918, 1067
des forces nucléaires, 914
vapeur, 747
Saut d'entropie, 725
Saveur, 895
Scalaire, 1120
Scintillateur, 902
seconde, 6, 1129
seconde-lumière, 146
Section (coupe) de Poincaré, 227
Section efficace, 659, 927
d'absorption, 927
de capture, 927
de diffusion élastique, 927
de diffusion inélastique, 927
de réaction, 927
de voie, 927
différentielle, 927
doublement différentielle, 927
totale, 927
Sel de Seignette, 1075
semaine, 7
Semi-métaux, 1016
Semiconducteur, 408, 1008, 1016, 1019
dégénéré, 1080
n, 1023
p, 1023
Sens
bloquant, 1027
de propagation, 349
passant, 1027
Sensibilité, 1079
absolue, 415
spectrale, 425
Seuil d'audibilité, 322
SHTc, 736, 1061
siemens, 438
sievert, 963
Sifflet de Galton, 320
Signal
composite, 332
différence, 332
droite (R), 332
gauche (L), 332
somme, 332
Signaux rectangulaires, 1055
Similitude
géométrique, 216
hydrodynamique, 216
Singularité, 156, 227
Siphon, 192
Smelt
spinning, 989
Solide, 970
amorphe, 970, 988
anisotrope, 970
cristallin, 970
grain, 971
isotrope, 970
limite de grain, 971
macromoléculaire, 990
paraélectrique, 1074
polycristallin, 971
propriétés optiques, 1017
rigide, 11, 34, 91, 95
Solidification, 723, 742
Soluté, 744
Solutions solides, 994
Somme, 1125
vectorielle
moment angulaire total, 86
Sommet, 366
d'un miroir, 351
Son, 220, 320
audible, 320
dans les solides
atténuation du, 335
Sonde de pression, 203
sone, 339
Sons
consonants, 340
dissonants, 340
Soudure à froid, 996
Source, 200, 506, 1042
à impact électronique, 592
du champ électrique, 426

de lumière thermique, 410
de sons, 326
Soustraction vectorielle, 1121
Spectre, 157, 399
continu, 854
d'absorption, 855
de bandes, 854
d'émission, 853
d'énergie, 838
d'évaporation, 932
de Fourier, 289
de l'Hydrogène, 857
limite de série, 858
de phonons, 1000
de Raman, 876
lignes antistokes, 877
lignes de Rayleigh, 877
lignes de Stokes, 877
forme des raies, 854
moléculaire, 874
continuum de dissociation, 876
spectre électronique, 876
neutronique, 951
Spectrographe, 401
Spectromètre, 401
Spectrophotomètre, 401
Spectroscope, 401
à prisme, 401
à réseau, 401
Spectroscopie de résonnance, 855
Sphère de Fermi, 1009
Spin, 846
voie d'entrée, 925
voie de sortie, 926
Spitzer
formule de, 583
Stœchiométrie, 750
Stabilité β, 946
Stabilité thermodynamique, 649
Statique, 95
Statistique
de Bose-Einstein, 892
de Fermi-Dirac, 891
Stator, 548
Stefan-Boltzmann
loi du rayonnement, 771
Stellarator, 597
Step-Recovery-Diode, 1031
steradian, 10
Stirling
cycle de, 710
Stokes, 209
Stopping power, 958
Straggling, 957
Striction, 165
Structure
cristalline, 972
filamenteuse, 158
subatomique, 901
Sublimation, 723
Substitutiel, 985
Substrat, 1041
Suite de Fibonacci, 225
Superélasticité, 995, 996
Superfluidité, 736
Supernova, 158
Support, 45
Supraconducteur, 736
à haute température, 736, 1061
deuxième espéce, 1060
première espéce, 1060
température critique, 736
Supraconduction, 1057
Supraconductivité, 736
Surchauffe
vapeur, 747
Surface, 8
Surfaces équipotentielles, 453
Surgénérateur, 953
à neutrons rapides, 953
Susceptibilité
diamagnétique
molaire, 1064
électrique, 1070
magnétique, 484, 613, 1063
Suspension
à la Cardan, 119
SUSY, 907
Symbole de Kronecker, 835
Synchrotron, 901
Synthèse de Fourier, 289
Synthèse du carbone, 955
Système
achromatique, 400

apochromatique, 400
centré, 347
chaotique, 233
conservatif, 229
continu, 224
cristallin, 973
de calendrier, 7
de coordonnées, 1
cartésien, 2
cylindrique, 2
du laboratoire, 154
polaire, 2
sphérique, 3
déterministe, 223
discret, 224
dissipatif, 231
du centre de masse, 926
du laboratoire, 154, 926
dynamique, 223
fermé, 622, 712
hétérogène, 622, 721, 739
homogène, 622, 721
hydrogénoïdes, 856
intégrable, 230
isolé, 81, 621, 641
état équilibré, 649, 699
critères d'équilibre, 625
vase de Dewar, 621
linéaire, 224
non intégrable, 231
non-isolé, 641
non-linéaire, 224
ouvert, 622, 713
planétaire, 137
solaire, 137
thermodynamique, 621
d'unités, 1104
variance, 740
Système-SI
grandeurs fondamentales, 1129
tableau des unités, 1130

Table traçante x-t, 225
Tableau des fréquences, 1113
Tachymètre, 14
électrique, 14
magnétique, 14
Taux
de croissance, 1110
de distorsion, 521
de fuite, 951
Technique des couches minces, 127
Technologie
MOS, 1043, 1050
planar, 127
Télémétrie
acoustique, 7
Télescope à miroir, 384
Tétrode, 577
Température, 622, 628
absolue, 652
bains froids, 804
coefficient de dilatation, 672
correction de pression, 800
correction de volume, 803
critique, 669, 730
de Curie, 732, 790
ferroélectrique, 1075
de Debye, 1005
de Fermi, 1013
de Néel, 489, 790, 1069
de transformation, 735
degré Celsius, 628
degré Fahrenheit, 629
degré Réaumur, 628
degré Rankine, 629
échelle Celsius, 632
échelle Kelvin, 632
équilibre thermique, 624
évolution en temps, 760
finale, 755
gaz parfait, 664
interprétation microscopique, 653, 654
inversion de, 719
kelvin, 628, 631
locale, 628
mélange, 755
moyenne arithmétique, 757
moyenne géométrique, 757
normale, 629
points de référence, 629
production des basses, 717
référence, 782
références ITS-90, 629
symbole, 628

système fermé, 622
système ouvert, 622
thermodynamique, 632
unité, 628
zéro absolu, 632
Temps, 5
d'amorçage, 1046
de cohérence, 390
de confinement, 595
de récupération, 1027
de réverbération, 335
moyen de collision, 659
Tenseur
de dilatation, 166
des efforts, 161
d'inertie, 120
Tension
alternative
redressée, 507
aux bornes, 508, 549
d'un condensateur, 517
d'une inductance, 518
continue, 507
d'anode, 573
de cisaillement
table, 249
de claquage, 1026
de diffusion, 1025
de Hall, 1011
de rupture
table, 249
de seuil, 1027
électrique, 450, 452
inverse, 1025
superficielle
table, 261
thermoélectrique
de quelques éléments , 604
valeurs typiques, 612
Zener, 1026
Terme spectral, 858
tesla, 471
Θ, 479
Texturation, 1062
Texture, 971
Théodolite, 9
Théorème
d'addition des vitesses, 148
de Hess, 646
de Koenig, 118
de Liouville, 229
de Noether, 903
de Torricelli, 204
des états correspondants, 732
des forces vives, 63
Théorie
cinétique, 196
cinétique des gaz, 223
corpusculaire, 344
de Grande Unification, 907
de jauge, 890
de transport, 196
équations, 654
ondulatoire, 344
quantique des champs
relativiste, 153
Thermistance, 441
Thermocouple, 630
platine, 631
Thermodynamique
principe zéro, 624, 699
premier principe, 700
deuxième principe
cycle de Carnot, 704
mouvement perpétuel, 703
troisième principe, 633, 703
Thermoemission, 1095
Thermomètre, 630
à gaz, 630
à liquide, 630
à mercure, 673
à résistance de platine, 631
CTN, 630
CTP, 630
Thermoplaste, 992
Thermostat, 704
Thermovalve, 635
Thyristor, 1044
Thyristor bidirectionnel, 1046
Timbre, 339
Titre, 751
TLE, 958
TN, 441
Tokamac, 597, 956

Tomographes à émission de positrons, 873
Tomographie par rayons X, 873
Ton, 339, 1135
  entier, 340
  fondamental, 341
Tonométrie, 742
Top, 894
torr, 635
Torsion, 163, 172
Toupie, 119
tours par seconde, 31
Traînée, 207
Traction, 162
Train d'onde, 300
Traitement
  optique, 392
  d'images, 385
Transducteur
  bio-acoustique, 331
  électrodynamique, 331
  électrostatique, 331
  magnétostrictif, 330
  piézo-résistif, 330
Transfert de la chaleur, 757
Transfert linéaire d'énergie, 958
Transfert thermique, 766
  tube, 769
Transformation, 692
  de Legendre, 88
  de Lorentz, 144
  équivalente, 544
  quasi statique, 692
Transformateur
  ideal, 499
Transistor, 1033, 1049
  bipolaire, 1033
  Darlington, 1041
  effet de champ, 1041
  FET, 1041
  FET à grille isolée, 1043
  Insulated-Gate-FET, 1043
  JFET, 1042
  MOSFET, 1043
  npn, 1033
  pnp, 1033
  unipolaire, 1041
Transition
  règles de sélection, 869
  β, interdite, 948
  β, permise, 948
Transition de phase, 646, 721
  changement de structure, 734
  cristaux liquides, 735
  exposants critiques, 727
  lambda, 726
  magnétisme, 732
  martensitique, 995
  non radiative, 873
  ordre-désordre, 733
  point critique, 727
  premier ordre, 725
  saut d'entropie, 725
  second ordre, 725
Transmission, 105
  à rapport variable, 106
  à variation continue, 106
  automatique, 106
  de la chaleur, 758
  de l'information
    optique, 360
  mécaniques à variation continue, 107
  rayonnement, 773
Transmitivité, 773
Transparence à la lumière, 736
Transport, 658
Transuranien, 937
Traps, 1079
Travail
  dans le champ de gravitation, 135
  de compression, 676
  de déformation, 66, 173, 174
  de détente, 644
  d'extraction, 1093
    effet photoélectrique, 822
  de sortie, 570
  en thermodynamique, 676
  fonctionnel, 714
  forces extérieures, 676
  mécanique, 676
  potentiel chimique, 677
  relativiste, 153
  technique, 645
Triac, 1046
Triangulation, 8

Trigger de Schmitt, 1055
Triode, 574
  réaction, 576
  résistance interne, 575
  tension de commande, 576
Troisième loi de Newton, 40
Troisième principe de la thermodynamique, 703
Troisième vitesse cosmique, 141
Trompe à eau, 187, 205
Trou, 427, 1019
  noir, 155, 159
Tube
  à onde de choc, 592
  courant thermique, 763
  de Braun, 577
  de courant, 197
  de Kundt, 304
  de Pitot, 203
  de Prandtl, 203
  fluorescent, 569
Tubes électroniques, 573
  anode, 573
  caractéristiques, 574
  cathode, 573
  gain d'un, 576
  pente des caractéristiques, 575
  tension de grille, 575
Tunnel aérodynamique, 217
Turbine, 188
  à gaz, 188
  à vapeur, 188
  Francis, 188
  hydraulique, 188
  Kaplan, 188
Tuyère, buse, 202
Tympan, 336

Ultra vide, 180
Ultrason, 320, 336
Unité, 1104
  astronomique, 139
  becquerel, 941
  curie, 941
  de masse, 913
  d'énergie
    table de conversion, 1134
  gray, 962
  légale, 1133
  sievert, 963
Unités
  électron-volt, 629
  énergie, 675
  bar, 634
  barn, 659
  BTU, 676
  calorie, 676
  composées, 1105
  dérivées, 1105
    table, 1130
  degré Celsius, 628
  degré Réaumur, 628
  erg, 675
  kelvin, 628
  masse atomique, 637
  mol, 637
  pascal, 634
  torr, 635
Unités anglo-américaines, 1135
Univers
  fermé, 156
  ouvert, 156
Uranium-radium
  famille, 943
UV
  domaine, 424, 425

Vacance, 983
Valeur
  de crête, 520
  de chauffe, 682
  de ft, 948
  de pH, 754
  de pOH, 754
  espérée, 833
  instantanée, 519
  de **k**
    de matériaux de construction, 798
    matériaux plans, 798
  moyenne, 521, 1107
    absolue, 521
    arithmétique, 521, 1109
    efficace, 521
  numérique, 1104
  propre, 831, 838
    dégénérescence, 832
    de l'énergie, 838

vraie, 1107
Valeurs limites, 1036
Van der Waals
équation de, 666
Van't Hoff
pression osmotique, 745
Vanne
micromécanique, 132
Vapeur
contenance en eau, 747
courbe de pression, 724
diagramme de Mollier, 748
enthalpie, 748
humide, 723, 747
insaturée, 724
masse volumique, 748
pression de, 741
quantité de, 747
saturée, 746
saturante, 723
sous-réfrigération, 731
surchauffée, 747
sursaturée, 747
Vaporisation, 722
Variable, 223
d'état, 621, 626
extensive, 641
intensive, 641
massique, 627
molaire, 627
réduite, 670, 732
thermodynamique
extensive, 626
intensive, 626
Variance, 1111
Vase de Dewar, 621
VDR, 441
Vecteur, 1120
axial, 31
accélération, 16, 24
d'onde, 294, 826
de Burgers, 986
de Poynting, 505
densité de flux de particules, 776
opposé, 1121
polaire, 31
unité, 1122
vitesse, 22
vitesse moyenne, 655
Vecteurs de translation
fondametaaux, 972
Ventres de vibration, 303
Verre, 970, 988
Vibrateur
quantique, 875
Vibration
d'un réseau, 998
fondamentale, 303, 304, 326, 327
harmonique, 326, 327
propre, 326
d'une tige, 303
Vidéocaméra, 378
Vide
primaire, 180
secondaire, 180
technique, 180
Vie moyenne, 940
Violation de la parité, 903
Viriel, 665
équation de Van der Waals, 671
Vis, 104
frottements, 104
Viscoélasticité, 991
Viscosimètre
à écoulement, 212
à chute, 213
Viscosité, 204
cinématique, 209
de gaz, 792
de liquides, 792
dynamique, 209, 661
table, 257
Vitesse, 13
cosmique
première, 140
deuxième, 140
troisième, 141
angulaire, 30
d'entraînement, 587
de charge, 992
de déformation, 992
de dérive
dans les gaz, 566
des ions dans les électrolytes, 557

de Fermi, 1010
de groupe, 306, 1002
de la lumière
dans la matière, 504
de la lumière dans le vide, 343
de libération, 140
de phase, 294
des ondes de surface, 316
de propagation
de la lumière, 343
du son, 317
dans l'air , 419
dans l'huile, 420
dans les gaz, 318, 419
dans les liquides, 318, 420
dans les produits pétroliers, 420
dans les solides, 318
du son ionique, 590
instantanée, 23
la plus probable, 656
moyenne, 13, 22, 655, 657, 659, 761, 777
orbitale, 32, 140
parabolique, 140
quadratique moyenne, 654
Voie
d'entrée, 925
de réaction, 925
de sortie, 925
interdite, 925
lactée, 156
ouverte, 925
volt, 451
Volume
correction de température, 803
gaz parfait, 664
molaire, 637
molaire critique, 670
sonore, 339
Vulcanisation, 993

Wafer, 127, 1047
watt, 68, 323
weber, 474
Weiss
ferromagnétisme, 733
Wendelstein, 597
Whisker, 994

yard, 1135

Zone
active, 953
déplétée, 1025
de Brillouin
première, 999
de charge d'espace
négative, 1023
positive, 1023

043942-(III)-(3)-CSB 70°-TRAD

STEDI, 1, boulevard Ney, 75018 Paris - Tél. 01.40.38.65.40
Dépôt légal, Imprimeur, n° 6821
Dépôt légal : avril 2001 *Imprimé en France*
Dépôt légal 1re édition : 1er trimestre 1999

63 Eu	Nombre atomique ; Symbole chimique
Europium	Nom
151,965	Masse atomique (Unité de Masse Atomique)
Demarçay	Découvreur(s)
1901	Année de découverte

	IIA	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	VIIIA	VIIIA
1 H Hydrogène 1,007976 Cavendish 1766								
3 Li Lithium 6,941 Arfvedson 1817	4 Be Béryllium 9,012182 Wöhler... 1828							
11 Na Sodium 22,989770 Davy 1807	12 Mg Magnésium 24,3051 Black 1808							
19 K Potassium 39,0983 Davy 1807	20 Ca Calcium 40,078 Davy 1808	21 Sc Scandium 44,955910 Nilson 1879	22 Ti Titane 47,867 Gregor 1791	23 V Vanadium 50,9415 del Rio 1801	24 Cr Chrome 51,9961 Vauquelin 1797	25 Mn Manganèse 54,938050 Gahn 1774	26 Fe Fer 55,845 Préhistoire	27 Co Cobalt 58,933200 Brandt 1735
37 Rb Rubidium 85,4678 Bunsen... 1861	38 Sr Strontium 87,617 Davy 1808	39 Y Yttrium 88,905848 Gadolin 1794	40 Zr Zirconium 91,224 Klaproth 1789	41 Nb Niobium 92,906378 Hatchett 1801	42 Mo Molybdène 95,93 Hjelm 1781	43 Tc Technétium (97,9072) Perrier... 1937	44 Ru Ruthénium 101,07 Klaus 1844	45 Rh Rhodium 102,905504 Wollaston 1803
55 Cs Césium 132,905447 Bunsen... 1860	56 Ba Baryum 137,327 Davy 1808	57 La Lanthane 138,9054 Mosander 1839	72 Hf Hafnium 178,486 Coster... 1923	73 Ta Tantale 180,9479 Ekeberg 1802	74 W Tungstène 183,842 de Elhuyar... 1783	75 Re Rhénium 186,207 Noddack ... 1925	76 Os Osmium 190,24 Tennant 1804	77 Ir Iridium 192,216 Tennant 1804
87 Fr Francium (223,0197) Perey 1939	88 Ra Radium (226,0254) Marie Curie... 1898	89 Ac Actinium (227,0277) Debierne 1899	104 Rf Rutherfordium (263,1125) Dubna , LBL 1964	105 Db Dubnium (262,1141) Dubna, LBL 1967	106 Sg Seaborgium (266,1219) Ghiorso... 1974	107 Bh Bohrium (264,1247) Armbruster... 1980	108 Hs Hassium (269,1341) Münzenberg... 1984	109 Mt Meitnerium (268,1388) Armbruster... 1982

Lanthanides	58 Ce Cérium 140,115 Klaproth... 1803	59 Pr Praséodyme 140,90765 Welsbach 1885	60 Nd Néodyme 144,24 Welsbach 1885	61 Pm Prométhium (144,9127) Marinsky... 1945	62 Sm Samarium 150,36 Boisbaudran 1879	63 Eu Europium 151,965 Demarçay 1901	64 Gd Gadolinium 157,25 Marignac 1886
Actinides	90 Th Thorium 232,038050 Berzelius 1828	91 Pa Protactinium 231,03588 Fajans... 1913	92 U Uranium 238,0289 Peligot 1841	93 Np Neptunium (237,0482) McMillan... 1940	94 Pu Plutonium (244,0642) Seaborg... 1940	95 Am Américium (243,0614) Seaborg... 1944	96 Cm Curium (247,0703) Seaborg... 1944

VIIIA	IB	IIB	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIII
								2 **He** Hélium 4,002602 Ramsay 1895
			5 **B** Bore 10,811 Gay-Lussac... 1808	6 **C** Carbone 12,0111 Préhistoire	7 **N** Azote 14,00672 Rutherford... 1772	8 **O** Oxygène 15,999305 Priestley 1774	9 **F** Fluor 18,9984032 Moissan 1886	10 **Ne** Néon 20,1800 Ramsay... 1898
			13 **Al** Aluminium 26,981538 Wöhler 1827	14 **Si** Silicium 28,0855 Berzelius 1824	15 **P** Phosphore 30,973762 Brand 1669	16 **S** Soufre 32,064 Préhistoire	17 **Cl** Chlore 35,4527 Scheele 1774	18 **Ar** Argon 39,9477 Rayleigh... 1894
28 **Ni** Nickel 58,6934 Cronstedt 1751	29 **Cu** Cuivre 63,546 Préhistoire	30 **Zn** Zinc 65,40 aux Indes 1500	31 **Ga** Gallium 69,723 Boisbaudran 1875	32 **Ge** Germanium 72,59 Winkler 1886	33 **As** Arsenic 74,92160 Magnus 1250	34 **Se** Sélénium 78,96 Berzelius 1817	35 **Br** Brome 79,904 Balard 1826	36 **Kr** Krypton 83,80 Ramsay... 1898
46 **Pd** Palladium 106,42 Wollaston 1803	47 **Ag** Argent 107,8682 Préhistoire	48 **Cd** Cadmium 112,41 Stromeyer 1817	49 **In** Indium 114,818 Reich... 1863	50 **Sn** Etain 118,711 Préhistoire	51 **Sb** Antimoine 121,760 Préhistoire	52 **Te** Tellure 127,586 Reichenstein 1782	53 **I** Iode 126,90447 Courtois 1811	54 **Xe** Xénon 131,29 Ramsay... 1898
78 **Pt** Platine 195,080 Ulloa 1735	79 **Au** Or 196,966552 Préhistoire	80 **Hg** Mercure 200,60 Préhistoire	81 **Tl** Thallium 204,3833 Crookes 1861	82 **Pb** Plomb 207,2 Préhistoire	83 **Bi** Bismuth 208,980383 Geoffroy 1753	84 **Po** Polonium (208,9824) Marie Curie... 1898	85 **At** Astate (209,9871) Corson... 1940	86 **Rn** Radon (222,0176) Dorn 1900
110 ‡ ‡ (271) Armbruster... 1994	111 ‡ ‡ (272) Armbruster... 1994	112 ‡ ‡ (277) Armbruster... 1996						

‡ Nom et symbole ne sont pas encore désignés

Sg Elément produit artificiellement

Dubna Laboratoire de recherches scientifiques à Dubna (Russie)

LBL Laboratoire Lawrence à Berkeley (USA)

65 **Tb** Terbium 158,92534 Mosander 1843	66 **Dy** Dysprosium 162,50 Boisbaudran 1886	67 **Ho** Holmium 164,930319 Cleve 1879	68 **Er** Erbium 167,26 Mosander 1843	69 **Tm** Thulium 168,934211 Cleve 1879	70 **Yb** Ytterbium 173,03 Urbain 1907	71 **Lu** Lutécium 174,967 Urbain 1907
97 **Bk** Berkélium (247,0703) Seaborg... 1949	98 **Cf** Californium (251,0796) Seaborg... 1950	99 **Es** Einsteinium (252,0830) Seaborg... 1952	100 **Fm** Fermium (257,0951) Seaborg... 1952	101 **Md** Mendélévium (258,0984) Seaborg... 1955	102 **No** Nobélium (259,1010) Seaborg... 1958	103 **Lr** Lawrencium (262,1097) Ghiorso... 1961

Constantes physiques en unités - SI

Grandeur	Symbole	Valeur	Erreur (ppm)
Vitesse de la lumière (vide)	c	$2,99792458 \cdot 10^{8}$ m/s	sans
Constante gravitationnelle	G	$6,67259 \cdot 10^{-11}$ m^3/(kgs^2)	128
Charge élémentaire	e	$1,60217733 \cdot 10^{-19}$ C	0,30
Constante de Planck	h	$6,6260755 \cdot 10^{-34}$ J · s	0,60
	$\hbar = (2\pi)^{-1} h$	$1,05457266 \cdot 10^{-34}$ J · s	0,60
Nombre d'Avogadro	N_A	$6,0221367 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}	0,59
Faraday	$F = N_A\, e_0$	$9,6485309 \cdot 10^{4}$ C/mol	0,30
Masse de l'électron	m_e	$9,1093897 \cdot 10^{-31}$ kg	0,59
		0,51099906 MeV	0,30
Constante de Rydberg	$R_\infty = (2h)^{-1} m_e c \alpha^2$	$1,0973731534 \cdot 10^{7}$ m^{-1}	0,0012
Constante de structure fine	$\alpha = e_0^2 (2\varepsilon_0 h c)^{-1}$	$7,29735308 \cdot 10^{-3}$	0,045
	α^{-1}	137,0359895	0,045
Rayon classique de l'e^-	$r_e = \hbar (m_e c)^{-1} \alpha$	$2,81794092 \cdot 10^{-15}$ m	0,13
Longueur d'onde de Compton	$\lambda_C = h (m_e c)^{-1}$	$2,42631058 \cdot 10^{-12}$ m	0,089
Rayon de Bohr	$a_0 = r_e \alpha^{-2}$	$5,29177249 \cdot 10^{-11}$ m	0,045
Unité de masse atomique	$u = \frac{1}{12} m(^{12}C)$	$1,6605402 \cdot 10^{-27}$ kg	0,59
Masse du proton	m_p	$1,6726231 \cdot 10^{-27}$ kg	0,59
		938,27231 MeV	0,30
Masse du neutron	m_n	$1,6749286 \cdot 10^{-27}$ kg	0,59
		939,56563 MeV	0,30
Quantum de flux magntique	$\Phi_0 = h (2 e_0)^{-1}$	$2,06783461 \cdot 10^{-15}$ Wb	0,30
Charge spécifique de l'e^-	$-e_0 {m_e}^{-1}$	$-1,75881962 \cdot 10^{11}$ C/kg	0,30
Magnéton de Bohr	$\mu_B = e_0\, \hbar (2 m_e)^{-1}$	$9,2740154 \cdot 10^{-24}$ J/T	0,34
Moment magnétique de l'e^-	μ_e	$9,2847701 \cdot 10^{-24}$ J/T	0,34
Magnéton nucléaire	$\mu_N = e_0\, \hbar (2 m_p)^{-1}$	$5,0507866 \cdot 10^{-27}$ J/T	0,34
Moment magnétique du proton	μ_p	$1,41060761 \cdot 10^{-26}$ J/T	0,34
Constante gyromagnétique	γ_p	$2,67522128 \cdot 10^{8}$ rad/sT	0,30
Résistance de Hall	R_H	25812,8056 Ω	0,045
Constante des gaz parfaits	R	8,314510 J/(molK)	8,4
Constante de Boltzmann	$k_B = R {N_A}^{-1}$	$1,380658 \cdot 10^{-23}$ J/K	8,5
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = \pi^2 k_B^4 (60\, \hbar^3 c^2)^{-1}$	$5,67051 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$	34
Constante de Wien	$b = \lambda_{max} T$	$2,897756 \cdot 10^{-3}$ m K	8,4
Perméabilité magnétique	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/(Am)	sans
Permittivité électrique	$\varepsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1}$	$8,85418781762 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$	sans

Changements d'état	Transf. isotherme $\Delta T = 0$ T_{tr}	Transf. isobare $\Delta p = 0$ P_{tr}	Transf. isochore $\Delta V = 0$ V_{tr}	Transf. adiabatique (Isentrope) S_{tr}	Transf. polytropique
Constantes	pV et $T = \text{cste}$	V/T et $p = \text{cste}$	p/T et $V = \text{cste}$	$\Delta Q = 0$ $S = \text{cste}$	$p \cdot V^n = \text{cste}$
Loi	$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$	$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$	$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$	$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\gamma$	$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n$
Exposant polytropique	$n = 1$	$n = 0$	$n = \infty$	$n = \gamma$	$n = n$
Énergie interne $\Delta U = \Delta Q + \Delta W$	$\Delta U = 0$	$C_V(T_2 - T_1)$	$C_V(T_2 - T_1) = \Delta Q$	$C_V(T_2 - T_1) = \Delta W$	$C_V(T_2 - T_1)$
Quantité de chaleur transf. $\Delta Q = C\Delta T$	$\Delta Q = -\Delta W$	$C_p(T_2 - T_1)$	$C_V(T_2 - T_1) = \Delta U$	$\Delta Q = 0$	$\frac{n-\gamma}{\gamma-1}W = C_V\frac{n-\gamma}{n-1}(T_2 - T_1)$
Travail reçu par le système (gaz) $\Delta W = -\int p\mathrm{d}V$	$p_1V_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = p_1V_1 \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$	$p(V_1 - V_2)$	$\Delta W = 0$	$\Delta W = \Delta U = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\gamma - 1}$	$\frac{p_2V_2 - p_1V_1}{n-1} = C_V\frac{\gamma-1}{n-1}(T_2 - T_1)$
Travail techn. $\Delta W_t = \int V\mathrm{d}p$	$\Delta W_t = \Delta W$	$\Delta W_t = 0$	$V(p_2 - p_1)$	$\Delta W_t = \gamma\Delta W$	$\Delta W_t = n\Delta W$
Variation d'entropie $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$	$mR_s \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \frac{W}{T}$ $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$, $mR_s = \frac{pV}{T}$	$C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = C_p\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	$C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = C_V\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$	$\Delta S = 0$	$C_V\frac{n-\gamma}{n-1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$

Cycle de	Étapes (voir plus haut)
Carnot	$T_{tr} \to S_{tr} \to T_{tr} \to S_{tr}$
Stirling	$T_{tr} \to V_{tr} \to T_{tr} \to V_{tr}$
Otto	$S_{tr} \to V_{tr} \to S_{tr} \to V_{tr}$
Diesel	$S_{tr} \to P_{tr} \to S_{tr} \to V_{tr}$
Joule	$S_{tr} \to P_{tr} \to S_{tr} \to P_{tr}$
Ericsson	$T_{tr} \to P_{tr} \to T_{tr} \to P_{tr}$

Potentiel thermodynamique		Différentielle	Appl. à un système …	Équilibre
Entropie	$S = -\left.\frac{\partial F}{\partial T}\right\|_{V,N} = -\left.\frac{\partial G}{\partial T}\right\|_{p,N}$	$\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}$	fermé isochore	maximal
Énergie interne	$U = \frac{f}{2}n_{mol}RT = \frac{f}{2}mR_sT$	$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V$	adiabatique isochore	minimal
Énergie libre	$F = U - TS$	$\mathrm{d}F = -p\mathrm{d}V - S\mathrm{d}T$	isotherme isochore	minimal
Enthalpie	$H = U + pV$	$\mathrm{d}H = V\mathrm{d}p + T\mathrm{d}S$	adiabatique isobare	minimal
Enthalpie libre	$G = U + pV - TS$	$\mathrm{d}G = V\mathrm{d}p - S\mathrm{d}T$	isotherme isobare	minimal

Table des Matières

I MÉCANIQUE

1 Cinématique 1
1.1 Description du mouvement 1
Repères d'espace 1
Temps 5
Longueur, surface, volume 7
Angle 9
Systèmes mécaniques 11
1.2 Mouvement à une dimension 12
Vitesse 13
Accélération 16
Mouvement rectiligne à une dimension 18
1.3 Mouvement à plusieurs dimensions 21
Vecteur vitesse 22
Vecteur accélération 24
Chute des corps et mouvement d'un projectile 27
1.4 Mouvement curviligne, rotation 29
Vitesse angulaire, vecteur rotation 30
Accélération angulaire 32
Vitesse orbitale 32

2 Dynamique 34
2.1 Lois fondamentales de la dynamique 34
Masse et quantité de mouvement 34
Lois de Newton 36
Moment cinétique 46
Moment d'une force, couple 47
2.2 Forces 51
Force de poids 51
Force élastique et de torsion 52
Forces de frottement 53
2.3 Forces d'inertie dans un repère tournant 57
Force centripète et force centrifuge 57
Force de Coriolis 59
2.4 Travail et énergie 60
Travail 61
Énergie 62
Énergie cinétique 63
Énergie potentielle 65
Travail des forces de frottement 68
2.5 Puissance 68

Rendement 69
2.6 **Chocs** **70**
Choc élastique, direct, central 73
Choc élastique, oblique, central 74
Choc élastique, oblique avec un corps immobile 74
Chocs inélastiques 76
2.7 **Fusées** **77**
Poussée 77
Équation des fusées 79
2.8 **Systèmes de points matériels** **80**
Équations du mouvement 81
Conservation de la quantité de mouvement totale 82
Conservation du moment cinétique 83
Conservation de l'énergie 84
2.9 **Équations de Lagrange et de Hamilton** **85**
Équations de Lagrange et principe de Hamilton 85
Équations de Hamilton 88

3 **Solide rigide** **91**
3.1 **Cinématique** **91**
Masse volumique 91
Centre de gravité 91
Grandeurs cinématiques fondamentales 93
3.2 **Statique** **95**
Vecteurs force 95
Moment d'une force, couple 96
Couple de forces 97
Équilibre statique 99
Technologie mécanique 100
Machines simples 102
3.3 **Dynamique** **107**
3.4 **Moment d'inertie, moment cinétique** **107**
Moment d'inertie 108
Couple 113
Moment cinétique 113
3.5 **Travail, énergie et puissance** **116**
Énergie cinétique de rotation 117
Énergie potentielle de Torsion 119
3.6 **Théorie du gyroscope** **119**
Tenseur d'inertie 120
Précession et nutation 122
Applications des effets gyroscopiques 125

4 Micromécanique 127
4.1 Technique des couches minces 127
4.2 Insolation et décapage chimique 128
4.3 Applications 130
Capteurs 130
Actionneurs 131
Applications pratiques 132

5 Gravitation et théorie de la relativité 134
5.1 Champ de gravitation 134
Loi de la gravitation 134
Mouvement des planètes 136
Système planétaire 137
5.2 Relativité restreinte 141
Principe de la relativité 142
Transformation de Lorentz 144
Effets relativistes 149
Dynamique relativiste 151
5.3 Relativité générale et cosmologie 154
Étoiles et galaxies 156

6 Mécanique des corps déformables 160
6.1 Élasticité 160
Contrainte (effort, sollicitation) 160
Déformation élastique 163
Déformation plastique 174
6.2 Hydrostatique 179
Liquides et gaz, fluides 179
Pression 179
Poussée d'Archimède 189
Cohésion, adhésion, tension superficielle 192
6.3 Hydrodynamique 195
Champ d'écoulement 196
Équations fondamentales des fluides parfaits 197
Fluide réel incompressible 208
Écoulement turbulent 214
Lois de similitude 216
Écoulement de fluides compressibles 220

7 Dynamique non-linéaire, chaos et fractales 222
7.1 Systèmes dynamiques et chaos 223
Systèmes dynamiques 223
Systèmes conservatifs 229
Systèmes dissipatifs 231

7.2 **Bifurcations** 234
Application de premier retour 234
Universalité 237
7.3 **Fractales** 237

Symboles de la mécanique 241

8 Tables de la mécanique 242
8.1 **Masse volumique** 242
Solides 242
Liquides 247
Gaz 248
8.2 **Propriétés élastiques** 249
8.3 **Propriétés dynamiques** 252
Coefficients de frottements 252
Compressibilité 254
Viscosité 257
Résistance d'écoulement 260
Tension superficielle 261

II VIBRATIONS ET ONDES

9 Oscillations 262
9.1 **Oscillations libres non amorties** 265
Pendule élastique, ressort à boudin 265
Pendule simple 267
Pendule pesant composé 271
Pendule de torsion 273
Pendule liquide 274
Circuit électrique oscillant 275
9.2 **Oscillations amorties** 276
Frottements 277
Circuit électrique oscillant amorti 280
9.3 **Oscillations forcées** 282
9.4 **Superposition de vibrations** 284
Superposition de vibrations de même fréquence 285
Superposition de vibrations de fréquences différentes 286
Addition d'oscillations de fréquences et directions différentes 287
Analyse de Fourier, décomposition en oscillations simples 289
9.5 **Oscillateurs couplés** 290

10 Ondes 293
10.1 **Propriétés fondamentales des ondes** 293
10.2 **Polarisation** 299
10.3 **Interférences** 300
Cohérence 300

Interférences 301
Ondes stationnaires 302
Ondes de fréquences différentes 305
10.4 Effet Doppler **306**
Ondes de Mach et ondes de choc 308
10.5 Réfraction **308**
10.6 Réflexion **309**
Relations de phase 310
10.7 Dispersion **311**
10.8 Diffraction **311**
Diffraction par une fente rectangulaire 311
Diffraction par un réseau plan 313
10.9 Modulation **314**
10.10 Ondes de surface et ondes de gravitation **315**

11 Acoustique **317**
11.1 Ondes sonores **317**
Vitesse du son 317
Caractéristiques du son 319
Grandeurs relatives 324
11.2 Sources et récepteurs de sons **326**
Émetteur d'ondes mécaniques 326
Transducteurs électroacoustiques 328
Absorption des sons 332
Insonorisation 334
Bruits d'écoulement 335
11.3 Ultrason **336**
11.4 Acoustique physiologique et appareil auditif **336**
Audiométrie 337
Évaluation de niveaux acoustiques 339
11.5 Acoustique musicale **339**

12 Optique **343**
12.1 Optique géométrique **344**
Images optiques 346
Réflexion 349
Réfraction 354
12.2 Lentilles **367**
Lentilles épaisses 368
12.3 Associations de lentilles **374**
Lentilles avec des diaphragmes 375
Aberrations 376
12.4 Instruments optiques **378**
Chambre noire 378
Appareil photographique 378

L'œil 379
Défauts de la vision et leurs corrections 380
Loupe 380
Microscope 381
Lunette astronomique 382
12.5 Optique physique 385
Diffusion 385
Diffraction et limite du pouvoir séparateur 386
Réfraction des ondes 389
Interférences 389
Éléments optiques diffractants 394
Dispersion 399
Appareils spectroscopiques 401
Polarisation de la lumière 402
12.6 Photométrie 407
Grandeurs photométriques 408
Éclairagisme 415

Symboles pour vibrations et ondes 418

13 Tables de l'acoustique et de l'optique 419
13.1 Tables de l'acoustique 419
13.2 Tables de l'optique 424

III ÉLECTRICITÉ

14 Charges et courants 426
14.1 Charge électrique 426
Loi de Coulomb 428
14.2 Densité de charge électrique 429
14.3 Courant électrique 431
Loi d'Ampère 433
14.4 Densité de courant électrique 434
Champ de courant 436
14.5 Résistance et conductance 436
Résistance électrique 436
Conductance électrique 438
Résistivité et conductivité 438
Mobilité des porteurs de charge 439
Dépendance en température de la résistance 440
Résistance variable 441
Association de résistances 441

15 Champ électrique et magnétique 444
15.1 Champ électrique 444

15.2 Influence **445**
Lignes de champ électrique 446
Champ électrique produit par une charge ponctuelle 449
15.3 Force **450**
15.4 Tension électrique **450**
15.5 Potentiel électrique **452**
Surfaces équipotentielles 453
Champ et potentiel pour quelques distributions de charges 454
Flux du champ électrique 457
Déplacement électrique dans le vide 458
15.6 Polarisation électrique **460**
Diélectrique 461
15.7 Capacité **462**
Condensateur à plaques planes parallèles 463
Montage de condensateurs en parallèle 464
Montage de condensateurs en série 464
Capacités de quelques montages simples 465
15.8 Énergie et densité d'énergie du champ $\vec{E}$ **466**
15.9 Champ électrique aux interfaces **467**
15.10 Champ magnétique **468**
15.11 Magnétisme **469**
Lignes de champ magnétique 470
15.12 Induction ou densité de flux magnétique **471**
15.13 Flux Magnétique **474**
15.14 Champ magnétique **475**
15.15 Potentiel magnétique et circuit magnétique **477**
Théorème d'Ampère 478
Loi de Biot-Savart 480
Champ magnétique d'un conducteur rectiligne 481
Champs magnétiques de diverses distributions de courant 483
15.16 La matière dans le champ magnétique **484**
Diamagnétisme 485
Paramagnétisme 486
Ferromagnétisme 486
Antiferromagnétisme 489
Ferrimagnétisme 490
15.17 Champs magnétiques aux interfaces **490**
15.18 Induction **491**
Induction de déplacement 491
Induction par variation de champ 493
15.19 Auto-induction **493**
Inductances de quelques montages 495
Inductance magnétique 497

15.20 Induction mutuelle **497**
Transformateur 498
15.21 Énergie du champ magnétique **499**
15.22 Équations de Maxwell **502**
Courant de déplacement 503
Ondes électromagnétiques 503
Vecteur de Poynting 505

16 Applications à l'électrotechnique **506**
16.1 Circuit en courant continu **507**
Lois de Kirchhoff en courant continu 508
Résistance dans un circuit en courant continu 509
Générateur de tension réel, générateur de Thévenin 511
Générateur de courant réel, générateur de Norton 512
Puissance et énergie en courant continu 512
Adaptation de puissance 514
Mesure de courant et de tension 514
Mesures de résistances par la méthode de comparaison 515
Charge et décharge d'un condensateur 517
Courant dans un circuit RL 518
16.2 Circuits en courant alternatif **519**
Grandeurs alternatives 519
Représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale 522
Règles de calcul pour les nombres complexes 524
Technologie du courant alternatif 526
Bipôles élémentaires en alternatif 533
Montage série d'une résistance et d'un condensateur 537
Montage parallèle d'une résistance et d'un condensateur 538
Montage parallèle d'une résistance et d'une inductance 539
Montage en série d'une résistance et d'une inductance 540
Circuit oscillant série 541
Circuit oscillant parallèle 542
Équivalence entre circuits série et parallèle 544
Ondes radioélectriques 545
16.3 Machines électriques **547**
Principe de fonctionnement 548
Machines à courant continu 549
Moteurs à courant alternatif 551

17 Conduction dans les liquides, les gaz et le vide **555**
17.1 Électrolyse **555**
Quantité de matière 555
Ions 555
Électrodes 556

Électrolyte 556
Éléments galvaniques, piles 561
Effets électrocinétiques 564
17.2 Conduction dans les gaz 565
Décharge semi-autonome 565
Décharges autonomes 569
17.3 Émission électronique 570
Émission thermo-ionique 570
Photoémission 571
Émission froide, émission de champ 572
Émission d'électrons secondaire 572
17.4 Tubes électroniques 573
Diode à vide 574
Triode 574
Tétrode 577
Rayons cathodiques 577
Rayons canaux 578

18 Physique du Plasma 579
18.1 Propriétés d'un plasma 579
Caractéristiques d'un plasma 579
Rayonnement de plasma 586
Plasmas dans les champs électriques et magnétiques 586
Ondes du plasma 589
18.2 Production de plasmas 591
Production thermique de plasmas 592
Production de plasmas par compression 592
18.3 Production d'énergie à l'aide de plasmas 594
Générateur magnétohydrodynamique (générateur MHD) 594
Réacteurs à fusion nucléaire 595
Fusion sous confinement magnétique 596
Fusion sous confinement inertiel 597

Symboles de l'électricité 599

19 Tables de l'électricité 601
19.1 Métaux et alliages 601
Résistivité 601
Série des tensions 603
19.2 Diélectriques 605
19.3 Tables pratiques pour l'électrotechnique 611
19.4 Propriétés magnétiques 613
19.5 Propriétés ferromagnétiques 615
Anisotropie magnétique 617

19.6 Ferrites 618
19.7 Antiferromagnétisme 619
19.8 Mobilité d'ions 620

IV THERMODYNAMIQUE

20 Équilibre et variables d'état 621
20.1 Systèmes, phases et équilibres 621
Systèmes 621
Phases 622
Équilibres 623
20.2 Grandeurs thermodynamiques 625
Notions 625
Température 628
Pression 633
Nombre de particules, quantité de matière et nombre d'Avogadro 636
Entropie 639
20.3 Potentiels thermodynamiques 641
Principle d'entropie maximum - d'énergie minimum 641
Énergie interne comme potentiel thermodynamique 641
Entropie comme potentiel thermodynamique 642
Énergie libre 643
Enthalpie 644
Enthalpie libre 647
Équations de Maxwell de la thermodynamique 648
Stabilité thermodynamique 649
20.4 Gaz parfaits 650
Loi de Boyle - Mariotte 651
Loi de Gay-Lussac 652
Équation d'état 653
20.5 Théorie cinétique des gaz parfaits 653
Pression et température 653
Distribution de Maxwell-Boltzmann 655
Degrés de liberté 657
Loi de l'équipartition 658
Phénomènes de transport 658
20.6 Équations d'état 661
Équation d'état d'un gaz parfait 661
Équation d'état des gaz réels 665
Équation d'état des liquides et des solides 671

21 Chaleur, conversion de l'énergie et changements d'état 675
21.1 Les formes de l'énergie 675

Unités d'énergie 675
Travail 676
Potentiel chimique 677
Chaleur 678
21.2 Conversion de l'énergie 679
Conversion de formes d'énergie en chaleur 680
Conversion de la chaleur en d'autres formes d'énergie 683
Exergie et anergie 684
21.3 Capacités calorifiques 685
Capacité calorifique totale 685
Capacité calorifique molaire 686
Capacité calorifique massique 688
21.4 Changements d'état 692
Processus réversible et irréversible 692
Processus isotherme 693
Processus isobare 694
Processus isochore 695
Processus adiabatique (ou isentropique) 696
États d'équilibre 698
21.5 Principes de la thermodynamique 699
Principe zéro de la thermodynamique 699
Premier principe de la thermodynamique 699
Deuxième principe de la thermodynamique 702
Troisième principe de la thermodynamique 703
21.6 Cycle de Carnot 704
Processus cyclique 704
Machine thermique 704
Étapes d'un cycle de Carnot 705
Bilan d'énergie et rendement d'un cycle de Carnot 707
Chaleur réduite 707
21.7 Machines thermiques 708
Cycles direct et inverse 708
Pompe à chaleur et machine réfrigérante 709
Cycle de Stirling 710
Machine à vapeur 712
Systèmes ouverts 712
Moteurs de Otto et de Diesel 714
Turbines à gaz 716
21.8 Liquéfaction des gaz 717
Production des basses températures 717
Effet Joule–Thomson 718

22 Transitions de phase, réactions et transferts de chaleur 721
22.1 Phases et états d'agrégation 721

Phases 721
États d'agrégation 721
Transitions entre états d'agrégation 722
Vapeur 723
22.2 Classification des transitions de phase 724
Transitions de phase du premier ordre 725
Transitions de phase du second ordre 725
Transitions lambda 726
Régions de coexistence de phase 727
Exposants critiques 727
22.3 Transitions de phase et gaz de Van der Waals 728
Équilibre de phase 728
Construction de Maxwell 729
Retards à la vaporisation et à la condensation 731
Théorème des états correspondants 732
22.4 Exemples de transitions de phase 732
Changement de phase en magnétisme 732
Transitions de phase ordre–désordre 733
Changements de la structure cristalline 734
Cristaux liquides 735
Supraconductivité 736
Superfluidité 736
22.5 Gaz composés 737
Pression partielle et loi de Dalton 738
Identité d'Euler et équation de Gibbs–Duhem 739
22.6 Systèmes à plusieurs phases 739
Équilibre de phase 740
Règle des phases de Gibbs 740
Relation de Clapeyron 741
22.7 Pression de vapeur des solutions 742
Loi de Raoult 742
Augmentation du point d'ébullition et abaissement du point de fusion 742
Loi de Henry 744
Pression osmotique des solutions 744
Mélange air-vapeur (air humide) 745
22.8 Réactions chimiques 749
Stœchiométrie 750
Règle des phases pour les réactions chimiques 752
Loi d'action de masse 752
Valeur du pH et produit de solubilité 753
22.9 Égalisation des températures 755
Température de mélange de deux systèmes 755
Processus réversible et irréversible 756

22.10 Transfert de la chaleur **757**
Courant thermique 758
Transmission de la chaleur 758
Conduction thermique 760
Résistance thermique 764
Transfert thermique 766
Rayonnement thermique 771
Comportement d'un matériau sous rayonnement thermique 772
22.11 Transport de chaleur et de masse **773**
Loi de Fourier 774
Équation de continuité 774
Équation de conduction de la chaleur 775
Loi de Fick et équation de diffusion 776
Solutions des équations de conduction et de diffusion 777

Symboles de la thermodynamique **779**

23 Tables de la thermodynamique **782**
23.1 Températures caractéristiques **782**
Échelles et points de référence 782
Points de fusion et d'ébullition 783
Températures de Curie et de Néel 790
23.2 Données concernant des gaz réels **791**
23.3 Propriétés thermiques de substances **792**
Viscosité 792
Dilatation, capacité calorifique et conductibilité thermique 793
23.4 Transfert thermique **798**
23.5 Données de corrections pratiques **799**
Mesure de pression 799
Mesure de volume - Conversion à la température standard 803
23.6 Génération de bains à basse température **804**
23.7 Déshydrateurs **804**
23.8 Pression de vapeur **805**
Solutions 805
Humidité relative 805
Pression de vapeur d'eau 806
23.9 Enthalpies massiques **807**
23.10 Diffusion dans les gaz **810**
23.11 Diffusion dans les liquides **812**
23.12 Diffusion dans les solides **813**

V PHYSIQUE QUANTIQUE

24 Photons - rayonnement électromagnétique et quanta de lumière **819**
24.1 Loi du rayonnement de Planck **819**
24.2 Effet photoélectrique **822**
24.3 Effet Compton **824**

25 Ondes de matière - Mécanique ondulatoire des particules **826**
25.1 Nature ondulatoire des corpuscules **826**
25.2 Relations d'incertitude de Heisenberg **828**
25.3 Fonction d'onde et observable **828**
25.4 Équation de Schrödinger **836**
Potentiels constants par parties 838
Oscillateur harmonique 843
Principe de Pauli 845
25.5 Spin et moment magnétique **846**
Spin 846
Moments magnétiques 849

26 Physique atomique et moléculaire **852**
26.1 Principes de base de la spectroscopie **853**
26.2 Atome d'Hydrogène **855**
Postulats de Bohr 856
26.3 États stationnaires et nombres quantiques **861**
26.4 Atomes à plusieurs électrons **866**
26.5 Rayons X **871**
Applications des rayons X 872
26.6 Spectres moléculaires **874**
26.7 Atomes dans des champs externes **877**
26.8 Système périodique des éléments **880**
26.9 Interaction des photons avec des atomes et des molécules **882**
Émission spontanée et émission induite 882

27 Physique des particules – le modèle standard **885**
27.1 Unification des interactions **885**
Le modèle standard 885
Quanta de champ et bosons de jauge 889
Fermions et bosons 891
27.2 Leptons, quarks et bosons vecteurs **893**
Leptons 893
Quarks 894
Hadrons 896
Accélérateurs et détecteurs 900
27.3 Symétries et lois de conservation **902**

Conservation de la parité et interaction faible 903
Conservation de la charge et création de paires 904
Conjugaison de charge et antiparticule 905
Invariance par inversion du temps et réaction inverse 905
Lois de conservation 906
Au-delà du modèle standard 907

28 Physique nucléaire 909

28.1 Composition du noyau atomique 909
28.2 Grandeurs fondamentales du noyau 912
28.3 Interaction nucléon-nucléon 914
Potentiel nucléon-nucléon phénoménologique 914
Potentiel d'échange mésonique 916
28.4 Modèles du noyau 917
Modèle du gaz de Fermi 917
Matière nucléaire 917
Modèle de la goutte liquide 917
Modèle des couches 919
Modèle collectif 923
28.5 Réactions nucléaires 925
Voies de réaction et sections efficaces 925
Diffusion élastique 930
Formation d'un noyau composé 931
Modèle optique 933
Réaction directe 934
Réactions par ions lourds 935
Fission nucléaire 938
28.6 Décroissance radioactive 939
Loi de décroissance 940
Décroissance alpha 944
Désintégration bêta 945
Décroissance gamma 948
Émission de nucléons et de clusters 949
28.7 Réacteurs nucléaires 950
Types de réacteurs nucléaires 952
28.8 Fusion nucléaire 954
28.9 Interaction rayonnement - matière 956
Particules ionisantes 956
Rayonnement gamma 960
28.10 Dosimétrie 962
Méthodes de mesures dosimétriques 966
Radioactivité ambiante 967

29 Physique du solide 970

29.1 Structure des solides 970

Quelques bases de la physique du solide 970
Structure des cristaux 971
Réseau de Bravais 973
Méthodes d'analyse de structure 978
Liaisons dans les cristaux 980
29.2 Défauts de réseau 983
Défauts ponctuels 983
Défauts linéaires 985
Défauts bi-dimensionnels dans les réseaux 987
Solide amorphe 988
29.3 Propriétés mécaniques de matériaux 989
Solides macromoléculaires 990
Matériaux composites 993
Alliages 994
Cristaux liquides 997
29.4 Phonons et vibrations d'un réseau 998
Ondes élastiques 998
Phonons et capacité calorifique spécifique 1002
Modèle d'Einstein 1004
Modèle de Debye 1005
Conductibilité thermique 1006
29.5 Électrons dans les solides 1008
Gaz d'électrons 1008
Modèle des bandes 1014
29.6 Semiconducteurs 1019
Conduction d'impuretés 1022
Diode semiconductrice 1025
Transistor 1033
Transistors unipolaires (à effet de champ) 1041
Thyristor 1044
Circuits intégrés (IC) 1047
Amplificateur opérationnel 1050
29.7 Supraconduction 1057
Propriétés fondamentales des supraconducteurs 1057
Supraconducteurs à haute température critique 1061
29.8 Propriétés magnétiques 1063
Ferromagnétisme 1066
Antiferromagnétisme et ferrimagnétisme 1068
29.9 Propriétés diélectriques 1070
Paraélectricité 1074
Ferroélectricité 1074
29.10 Propriétés optiques des cristaux 1076
Excitons et leurs propriétés 1076
Photoconductivité 1078
Luminescence 1079

Propriétés optoélectroniques 1079

Symboles de la physique quantique 1081

30 Tables de la physique quantique 1086
30.1 Potentiels d'ionisation 1086
30.2 Rayons atomiques et ioniques des éléments 1091
30.3 Émission électronique 1093
30.4 Rayons X 1097
30.5 Réactions nucléaires 1097
30.6 Interaction rayonnement-matière 1098
30.7 Effet Hall 1099
30.8 Supraconducteurs 1100
30.9 Semiconducteurs 1102
Propriétés thermiques, magnétiques et électriques des semiconducteurs 1102

VI ANNEXE

31 Mesures et erreurs de mesure 1104
31.1 Description de mesures 1104
Grandeurs physiques et unités du système international (SI) 1104
31.2 Calcul d'erreur et statistique 1107
Type d'erreurs 1107
Valeurs moyennes de séries de mesures 1109
Dispersion 1110
Corrélation 1111
Ajustement, régression 1112
Distribution de fréquence 1112
Fiabilité 1117

32 Calcul vectoriel 1120
32.1 Vecteurs 1120
32.2 Multiplication par un scalaire 1121
32.3 Addition et soustraction de vecteurs 1121
32.4 Multiplication de vecteurs 1122

33 Calcul différentiel et intégral 1125
33.1 Calcul différentiel 1125
Règles de dérivation 1125
33.2 Calcul intégral 1126
Règles d'intégration 1127
33.3 Dérivées et intégrales de fonctions élémentaires 1128

34 Système SI 1129

Liste des Tables

8 Tables de la mécanique **242**
8.1/1 Corps purs 242
8.1/2 Matériaux de construction 243
8.1/3 Alliages utilisés en électricité 243
8.1/4 Alliages à propriétés magnétiques 244
8.1/5 Ferrites 244
8.1/6 Verre 244
8.1/7 Matériaux de synthèse 245
8.1/8 Céramiques 246
8.1/9 Semiconducteurs 246
8.1/10 Matériaux de construction 246
8.1/11 Matériaux en vrac 247
8.1/12 Liquides dans les conditions TPN 247
8.1/13 Masse volumique de quelques métaux à l'état liquide 248
8.2/1 Propriétés élastiques 249
8.2/2 Tensions critiques 250
8.2/3 Fils 250
8.2/4 Cristaux filamenteux 250
8.2/5 Acier 251
8.2/6 Matériaux céramiques 251
8.2/7 Matériaux synthétiques 252
8.2/8 Fibres 252
8.3/1 Frottement de roulement 252
8.3/2 Coefficient de frottement cinématique 253
8.3/3 Frottement statique 253
8.3/4 Hélium 254
8.3/5 Azote 254
8.3/6 Hydrogène 255
8.3/7 Méthane 255
8.3/8 Monoxyde d'azote 256
8.3/9 Dioxyde de carbone 256
8.3/10 Compressibilité en fonction de la température 256
8.3/11 Compressibilité de liquides 257
8.3/12 Compressibilité de solides 257
8.3/13 Viscosité de liquides 257
8.3/14 Viscosité de liquides cryogéniques 257
8.3/15 Viscosité de solutions acqueuses 257
8.3/16 Viscosité de l'eau 258
8.3/17 Viscosité en fonction de la température 258
8.3/18 Viscosité de gaz 258
8.3/19 Viscosité des gaz 259
8.3/20 Correction de température 259

8.3/21 Coefficients aérodynamiques 260

13 Tables de l'acoustique et de l'optique 419
13.1/1 Facteurs correctifs pour les oscillations harmoniques 419
13.1/2 Vitesse du son dans les gaz 419
13.1/3 Vitesse du son dans l'air 419
13.1/4 Coefficient d'affaiblissement du son dans les gaz 419
13.1/5 Champ sonore dans l'air 419
13.1/6 Vitesse du son dans les produits pétroliers 420
13.1/7 Vitesse du son dans les liquides 420
13.1/8 Coefficient d'affaiblissement du son dans les liquides 420
13.1/12 Intensité sonore 421
13.1/13 Atténuation du son dans l'air 422
13.1/14 Coefficients d'affaiblissement 422
13.1/15 Bruits nuisibles à la santé 422
13.1/16 Indices d'absorption acoustique 423
13.2/1 Indices de réfraction 424
13.2/2 Éclairement 424
13.2/3 Flux lumineux 424
13.2/4 Rayons ultra-violets 424
13.2/5 Principaux types de Laser 425
13.2/6 Longueurs de cohérence 425
13.2/7 Sensibilité spectrale 425
13.2/8 Raies de Fraunhofer 425

19 Tables de l'électricité 601
19.1/1 Métaux à température ambiante 601
19.1/2 Dépendance en pression 601
19.1/3 Variation relative près du point de fusion 602
19.1/4 Alliages 602
19.1/5 Série des tensions électrochimiques 603
19.1/6 Série des tensions thermoélectriques 603
19.1/7 Tension de quelques éléments thermoélectriques 604
19.1/8 Couples thermoélectriques usuels 604
19.1/9 Coefficient de Peltier pour divers métaux 605
19.2/1 permittivité relative 605
19.2/2 Céramiques 607
19.2/3 Verres 607
19.2/4 Propriétés électriques de polymères 607
19.2/5 Résistivité d'isolants 608
19.2/6 Propriétés électriques d'isolants 608
19.2/7 Propriétés électriques d'huiles pour transformateurs 610
19.2/8 Quelques propriétés d'électrets 610

BeatriceGloria_personal library

19.2/9 Ferroélectricité de composés oxygénés à structure octaédrique 610
19.3/1 Alliages résistifs 611
19.3/2 Force électromotrice des étalons Weston 611
19.3/3 Matériaux pour contacts 611
19.3/4 Domaines de tensions en électrotechnique 611
19.3/6 Perméabilité aux gaz de quelques verres au Quartz 612
19.3/7 Action d'un courant électrique 612
19.4/1 Susceptibilité magnétique 613
19.4/2 Susceptibilité magnétique de composés inorganiques 613
19.4/3 Alliages magnétiques 615
19.5/1 Éléments ferromagnétiques 615
19.5/2 Alliages de Fer binaires 616
19.5/3 Alliages de Nickel binaires 616
19.5/4 Coefficients d'anisotropie 617
19.5/5 Directions d'aimantation dans les cristaux cubiques 618
19.6/1 Propriétés magnétiques 618
19.7/1 Propriétés antiferromagnétiques 619
19.8/1 Mobilité μ d'ions dans l'air à 18 °C et pression normale 620

22 Tables de la thermodynamique 781

23.1/2 Points de référence 782
23.1/3 Points de fusion et d'ébullition – Éléments 783
23.1/4 Points de fusion et d'ébullition - Composés minéraux 784
23.1/5 Points de fusion et d'ébullition - Composés organiques 786
23.1/6 Points de fusion et d'ébullition - Huile 788
23.1/7 Points de fusion et d'ébullition - Alliages 789
23.1/8 Points de fusion et d'ébullition - Céramiques réfractaires 789
23.1/9 Température de Curie de ferromagnétiques 790
23.1/10 Température de Néel 790
23.1/11 Température de Curie de corps ferroélectriques 790
23.2/1 Température, pression et masse volumique au point critique 791
23.2/2 Pression et température au point triple 791
23.2/3 Constantes de Van der Waals 791
23.2/4 Masse molaire, constante massique et masse volumique de gaz 791
23.3/1 Viscosité dynamique de gaz 792
23.3/2 Viscosité dynamique de liquides 792
23.3/3 Propriétés therm. de métaux purs 793
23.3/4 Propriétés therm. de matériaux de construction 794
23.3/5 Propriétés therm. de gaz 795
23.3/6 Propriétés thermiques de liquides 796
23.3/7 Propriétés therm. de synthétiques 796
23.3/8 Conductivités thermiques à différentes températures 796

23.3/9 Propriétés therm. de matériaux solides 797
23.3/10 Conductivités thermiques d'isolants thermiques 797
23.3/11 Coefficients de dilatation volumique de liquides 797
23.3/12 Expansion de l'eau à différentes températures 798
23.4/1 Coefficient de transfert thermique de matériaux 798
23.5/1 Atmosphère normale à différentes altitudes 799
23.5/2 Pression de l'air en fonction de l'altitude 800
23.5/3 Mesure de pression : facteur température - altitude 800
23.5/4 Mesure de pression : correction additionnelle 801
23.5/5 Mesure de pression : expansion due au cuivre 802
23.5/6 Mesure de pression : expansion due au verre 802
23.5/7 Mesure de volume : expansion de l'enceinte en verre 803
23.5/8 Mesure de volume : correction de température 803
23.6/1 Bain à basse température 804
23.7/1 Déshydrateur : agents chimiques 804
23.7/2 Déshydrateur : agents physiques 804
23.8/1 Pression de vapeur saturée à 20°C 805
23.8/2 Constantes cryoscopiques et ébulliocopiques 805
23.8/3 Psychrométrie 805
23.8/4 Pression de vapeur d'eau à des températures ordinaires 806
23.8/5 Pression de vapeur et enthalpie mass. de l'eau 806
23.8/6 Volume et enthalpie massiques de la vapeur d'eau 807
23.9/1 Pouvoir calorifique massique 807
23.9/2 Enthalpies massiques de fusion et de vaporation de métaux purs 808
23.9/3 Enthalpies mass. de fusion et de vaporisation d'autres substances 809
23.9/4 Chaleur de vaporisation en fonction de la température 809
23.9/5 Variation relative de volume lors de la fusion 810
23.10/1 Paramètre de diffusion 810
23.11/1 Paramètre de diffusion de corps dissous 812
23.11/2 Paramètre de diffusion de solvants 812
23.12/1 Diffusion dans un métal en fusion 813
23.12/3 Diffusion dans des métaux 814

30 Tables de la physique quantique 1086

30.1/1 Énergie d'ionisation des éléments 1086
30.1/2 Énergie d'ionisation de composés azotés 1088
30.1/3 Énergie d'ionisation d'hydrocarbures 1088
30.1/4 Énergie d'ionisation d'hallogénures 1089
30.1/5 Énergie d'ionisation de composés de l'oxygène 1089
30.1/6 Énergie de dissociation de molécules diatomiques 1090
30.2/1 Rayons atomiques et ioniques des éléments 1091
30.3/1 Travail d'extraction W_A des électrons d'un élément 1093

30.3/2 Travail de sortie pour des surfaces adsorbées 1095
30.3/3 Propriétés thermo-émissives d'une cathode de tungstène 1095
30.3/4 Photocathodes alcaline 1096
30.3/5 Propriétés fondamentales de l'émission d'électrons secondaires 1096
30.4/1 Principales lignes cacractéristiques de quelques éléments (série K) 1097
30.5/1 Section efficace de diffusion de neutrons 1097
30.5/2 Réactions de fusion nucléaire 1098
30.6/1 Coefficient d'atténuation massique de rayons X 1098
30.6/2 Coefficient d'absorption massique d'électrons dans l'aluminium 1098
30.6/3 Parcours de particules α dans l'air, les tissus biologiques et l'aluminium 1098
30.7/1 Coefficient de Hall de métaux 1099
30.8/1 Éléments supraconducteurs 1100
30.8/2 Alliages et composés supraconducteurs 1101
30.9/1 Éléments semiconducteurs 1102
30.9/2 Semiconducteurs binaires 1102
30.9/3 Dopage du Si 1102
30.9/4 Dopage du Ge 1103
30.9/5 Rayonnements ionisants dans les semiconducteurs 1103

34 Tables du système SI 1129

34/1 Grandeurs fondamentales du système SI 1129
34/2 Préfixes décimaux 1129
34/3 Unités SI dérivées 1130
34/5 Table de conversion des unités d'énergie 1134
34/6 Forces des vents 1134
34/7 Unités anglo-américaines 1135

